فصل سوم: بردارها

◀ بردارها:

۱- دو بردار مساوی (همسنگ): دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را مساوی (همسنگ) گوییم هرگاه هم‌اندازه و هم‌جهت باشند.

۲- طول هر برداری مانند $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ در $\mathbb{R}^3$ برابر است با:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

۳- جمع و تفاضل دو بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ برابر است با:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$$

۴- اگر $A=(x_1,y_1,z_1)$ و $B=(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه در فضا باشند:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\\ |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\end{cases}$$

۵- اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ برداری در فضا باشد، بردار قرینه آن برابر است با:

$$-\vec{a}=(-a_1,-a_2,-a_3)$$

۶- برای هر عدد حقیقی r، حاصل‌ضرب r در بردار $\vec{a}$ برابر است با:

$$r\vec{a}=r(a_1,a_2,a_3)=(ra_1,ra_2,ra_3)$$

۷- خواص جمع بردارها:

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
- $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{o}$
- $\vec{a}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{a}=\vec{a}$
- $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$
- $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$
- $(rs)\vec{a}=r(s\vec{a})$
- $\vec{b}=r\vec{a}\Rightarrow|\vec{b}|=|r||\vec{a}|$ ($|r|$، قدرمطلق r است)

۸- بردارهای یکه محورهای مختصات:

$$\begin{cases}\vec{i}=(1,0,0)\Rightarrow\text{بردار یکه در جهت محور طول‌ها}\\ \vec{j}=(0,1,0)\Rightarrow\text{بردار یکه در جهت محور عرض‌ها}\\ \vec{k}=(0,0,1)\Rightarrow\text{بردار یکه در جهت محور ارتفاع‌ها}\end{cases}$$

۹- هر بردار مانند $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ را می‌توان به‌صورت ترکیبی از بردارهای یکه $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بیان کرد.

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

@DaneshSad

مثال

طول بردار $\vec{a}=(0,-3,4)$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{0^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

مثال

اگر $\vec{a}=(1,2,-1)$ و $\vec{b}=(0,2,-1)$ باشد طول بردار $2\vec{a}-\vec{b}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$2\vec{a}-\vec{b}=(2,2,-1)$$
$$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$$

مثال

نقاط $A(3,1,2)$ و $B(3,-2,2)$ در $\mathbb{R}^3$ مفروض‌اند:

الف) طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید.

ب) معادلات مربوط به پاره‌خط AB را بنویسید.

پاسخ:

الف) $AB=\sqrt{(3-3)^2+(-2-1)^2+(2-2)^2}=3$

ب) $\begin{cases}x=3\\-2\le y\le 1\\z=2\end{cases}$

مثال

اگر $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(3,1,-1)$ و $r=2$ باشد، بردار $r\vec{b}-\vec{a}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\vec{a}=(3,2,-1)$$
$$r\vec{b}-\vec{a}=2\vec{b}-\vec{a}=(6,2,-2)-(3,2,-1)=(3,0,-1)$$

و طول بردار $2\vec{a}-\vec{b}$ را اگر بخواهیم:

$$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{9+0+1}=\sqrt{10}$$

◀ ضرب داخلی بردارها:

اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند در این صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

@DaneshSad

چند رابطه مهم:

۱- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و θ زاویه بین آن‌ها باشد در این صورت، داریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

- اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی و هم‌جهت باشند، داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$$

- اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی و غیرهم‌جهت باشند، داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$$

- اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=۰$$

۲- نامساوی کشی‌شوارتز:

$$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

توجه:

در اینجا منظور از $|\vec{a}.\vec{b}|$، قدرمطلق مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ است.

اثباتشو هم ببین:

$$|\vec{a}.\vec{b}|=||\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|$$

می‌دانیم که $|\cos\theta|\le ۱$ است پس:

$$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

مثال

بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید. زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases}\vec{a}.\vec{b}=۲+۱+۰=۳\\ |\vec{a}|=۳\\ |\vec{b}|=\sqrt{۲}\end{cases}\Rightarrow\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\theta=۴۵^\circ$$

مثال

مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a}=(۲,m,-۱)$ و $\vec{b}=(m+۱,۳,۲)$ بر هم عمود باشند.

پاسخ:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\to\vec{a}.\vec{b}=۰\Rightarrow ۲(m+۱)+۳m-۲=۰\Rightarrow m=۰$$

@DaneshSad

خواص ضرب داخلی:

۱- ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ خاصیت جابه‌جایی دارد. $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

۲- ضرب داخلی بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. $\vec{a}.(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}\pm\vec{a}.\vec{c}$

۳- ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر است با: $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^{۲}$

۴- $\vec{a}.\vec{o}=\vec{o}.\vec{a}=۰$

۵- امکان حذف در ضرب داخلی بردارها برقرار نیست به‌عبارت دیگر:

$$\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}\not\Rightarrow\vec{b}=\vec{c}$$

۶- برای بردارهای $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ داریم:

$$\begin{cases}\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=۰\\ \vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=۱\end{cases}$$

۷- اتحادها:

$$|\vec{a}\pm\vec{b}|^{۲}=|\vec{a}|^{۲}+|\vec{b}|^{۲}\pm۲\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^{۲}-|\vec{b}|^{۲}$$

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^{۲}=|\vec{a}|^{۲}+|\vec{b}|^{۲}+|\vec{c}|^{۲}+۲\vec{a}.\vec{b}+۲\vec{b}.\vec{c}+۲\vec{c}.\vec{a}$$

مثال

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به‌ترتیب با طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این ویژگی که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$، مقدار عددی عبارت $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^{۲}=|\vec{o}|^{۲}\Rightarrow|\vec{a}|^{۲}+|\vec{b}|^{۲}+|\vec{c}|^{۲}+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰$$

$$\Rightarrow۱+۴+۹+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰\Rightarrow(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=-۷$$

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$:

بردار تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\vec{a}'=r\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}$$

مثال

تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ بیابید.

پاسخ:

$$\vec{a}.\vec{b}=۲\times۱+(-۱)(-۱)+۲\times۰=۳$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{۱^{۲}+(-۱)^{۲}+۰^{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}=\frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰)=(\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲},۰)$$

@DaneshSad

مثال

اگر $\vec{a}=(1,-3,4)$ و $\vec{b}=(3,-4,2)$ و $\vec{c}=(-1,1,4)$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\vec{b}+\vec{c}=(2,-3,6)$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{|(\vec{b}+\vec{c})|^2}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{35}{49}(2,-3,6)$$

مثال

سه بردار $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(0,2,1)$ را در نظر بگیرید:

الف) اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد، $\cos\theta$ را بیابید.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}-\vec{c}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

الف)

$$\begin{cases}\vec{a}=(2,3,-1)\\ \vec{b}=(1,0,1)\end{cases}\Rightarrow\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{14}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

ب)

$$\vec{d}=\vec{b}-\vec{c}=(1,-2,0)$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{d}}{|\vec{d}|^2}\vec{d}=-\frac{4}{5}(1,-2,0)$$

@DaneshSad

◀ ضرب خارجی بردارها:

اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند، ضرب خارجی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\ b_2&b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\ b_1&b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\ b_1&b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

چند رابطه مهم:

۱- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر و θ زاویه بین آن‌ها باشد اندازه بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

- اگر دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی باشند، داریم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=0$$

دوپینگ فوری شب امتحان

• اگر دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، داریم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$$

۲- مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود برابر است با: $|\vec{a}\times\vec{b}|$

۳- مساحت مثلثی که توسط دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود برابر است با:

$$\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

۴- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر باشند آنگاه رابطه مقابل (اتحاد لاگرانژ) برقرار است:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2$$

مثال

دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری‌که $|\vec{a}|=6$ و $|\vec{b}|=4$ و زاویه بین آن‌ها ۳۰ درجه است مقدار عبارت $|2\vec{a}\times\vec{b}|$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$|2\vec{a}\times\vec{b}|=|2\vec{a}||\vec{b}|\sin 30^\circ=2(6)(4)(\frac{1}{2})=24$$

مثال

بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری‌که $|\vec{a}|=3$ و $|\vec{b}|=26$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$. مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

روش اول:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\Rightarrow 72=3\times 26\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{12}{13}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{5}{13}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=3\times 26\times(\pm\frac{5}{13})=\pm 30$$

روش دوم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2\Rightarrow(72)^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=(3\times 26)^2$$

$$\Rightarrow(\vec{a}.\vec{b})^2=(3\times 26)^2-(72)^2=900\Rightarrow(\vec{a}.\vec{b})=\pm 30$$

ثابت کنید: دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=0$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{0}|\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0$$

می‌دانیم که $|\vec{a}|\neq 0$ و $|\vec{b}|\neq 0$ است پس:

$$\sin\theta=0\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=0\\ \theta=\pi\end{cases}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

@DaneshSad

مثال

اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۲$ باشد، مساحت مثلث بناشده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{۱۲}{۴\times۶}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۳}$$

روش اول:

$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱}{۲}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times۴\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

روش دوم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^{۲}\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}+(۱۲)^{۲}=(۴\times۶)^{۲}$$
$$\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=۱۲\sqrt{۳}$$
$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱۲\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

مثال

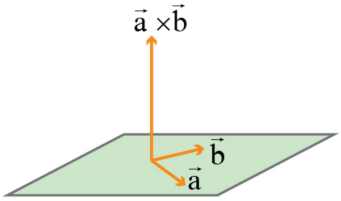
مساحت متوازی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که توسط دو بردار $\vec{a}=(۳,۲,۱)$ و $\vec{b}=(۲,۰,۱)$ به‌وجود می‌آید.

پاسخ:

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|$$
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۳&۲&۱\\ ۲&۰&۱\end{vmatrix}=۲\vec{i}-\vec{j}-۴\vec{k}=(۲,-۱,-۴)$$
$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۲^{۲}+(-۱)^{۲}+(-۴)^{۲}}=\sqrt{۲۱}$$

◀ خواص ضرب خارجی:

۱- ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برداری است که بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار، بر صفحه شامل آن دو بردار نیز عمود است. به‌عبارت دیگر:

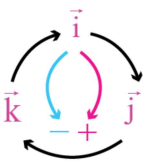


$$\begin{cases}\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}\rightarrow\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=۰\\ \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}\rightarrow\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=۰\end{cases}$$

@DaneshSad

۲- برای بردارهای $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ داریم:

$$\begin{cases}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{cases}$$

۳- اگر r عددی حقیقی باشد، آنگاه: $r\vec{a}\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times r\vec{b}$

۴- برای سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داریم:

$$\begin{cases}\vec{a}\times(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c}\\ (\vec{a}\pm\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})\pm(\vec{b}\times\vec{c})\end{cases}$$

۵- $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

۶- $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

۷- امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار نیست به‌عبارت دیگر:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\not\Rightarrow\vec{b}=\vec{c}$$

مثال

اگر $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $\mathbb{R}^3$ باشند، حاصل $\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})=\vec{i}.(\vec{i})=|\vec{i}|^2=1$$

مثال

بردارهای $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,0)$ را در نظر بگیرید. برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

پاسخ:

می‌دانیم که بردار $\vec{a}\times\vec{b}$، بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (و همچنین بر صفحه شامل آن‌ها) عمود است، پس:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 2&-1&2\\ 1&-1&0\end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=(2,2,-1)$$

مثال

سه بردار $\vec{a}=(2,3,1)$ و $\vec{b}=(-1,1,0)$ و $\vec{c}=(2,1,-2)$ مفروض‌اند. برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با: $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}$

$$\vec{a}+\vec{b}=(1,4,1)$$

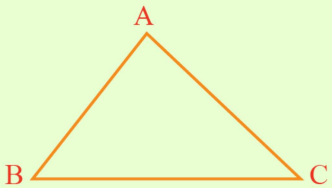
@DaneshSad

$\vec{c}=(۲,۱,-۲)$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۱ & ۴ & ۱\\ ۲ & ۱ & -۲\end{vmatrix}=-۹\vec{i}+۴\vec{j}-۷\vec{k}=(-۹,۴,-۷)$$

نکته طلایی

اگر مختصات سه رأس از مثلثی را در اختیار داشته باشیم برای به‌دست آوردن مساحت آن مثلث به کمک ضرب خارجی، داریم:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\begin{cases}\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\\ \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|\\ \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right|\end{cases}$$

مثال

اگر $A=(-۱,۲,۰)$ و $B=(۱,۰,-۱)$ و $C=(۰,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(۲,-۲,-۱)$$
$$\overrightarrow{AC}=C-A=(۱,-۳,۱)$$
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۲ & -۲ & -۱\\ ۱ & -۳ & ۱\end{vmatrix}=-۵\vec{i}-۳\vec{j}-۴\vec{k}=(-۵,-۳,-۴)$$

می‌دانیم که مساحت مثلث موردنظر از رابطه $S=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ به‌دست می‌آید، پس:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$
$$S=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{۱}{۲}\times۵\sqrt{۲}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

ضرب مختلط:

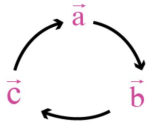
اگر $\vec{a}=(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $\vec{b}=(x_۲,y_۲,z_۲)$ و $\vec{c}=(x_۳,y_۳,z_۳)$ سه بردار در فضا باشند آنگاه ضرب مختلط آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}x_۱ & y_۱ & z_۱\\ x_۲ & y_۲ & z_۲\\ x_۳ & y_۳ & z_۳\end{vmatrix}$$

@DaneshSad

دوپینگ فوری شب امتحان

ویژگی ضرب مختلط:



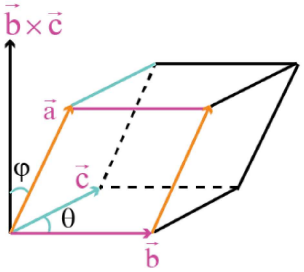
$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$$

حجم متوازی‌السطوح:

حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار غیرصفر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ساخته می‌شود برابر است با:

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

(| | علامت قدرمطلق است)



مثال

سه بردار $\vec{a}=(2,3,1)$، $\vec{b}=(-1,1,0)$ و $\vec{c}=(2,1,-2)$ مفروض‌اند. حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=|2(-2)-3(2)+1(-3)|$$

$$=|-4-6-3|=|-13|=13$$

جمع‌بندی سریع

اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار داشته باشند، آنگاه حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده توسط این سه بردار برابر صفر است به‌عبارت دیگر اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار داشته باشند آنگاه داریم:

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0$$

عکس این نکته نیز درست است، یعنی اگر $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0$ باشد آنگاه سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار دارند.

@DaneshSad