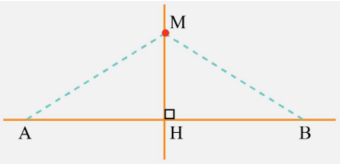
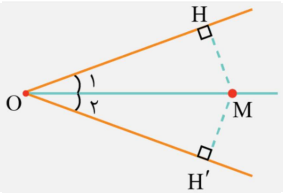
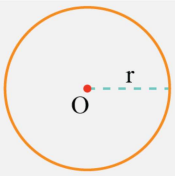
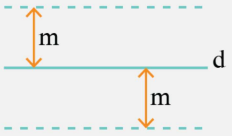
فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

مکان هندسی:

به مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا که همه آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد، مکان هندسی می‌گوییم.

مکان هندسی‌های مهم:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند، نیمساز آن زاویه است.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت مانند O به فاصلهٔ ثابت r قرار داشته باشند، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r است.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت m قرار داشته باشند، دو خط راست موازی با خط d هستند که به فاصله m در دو طرف آن قرار گرفته‌اند.	

@DaneshSad

مثال

مکان هندسی هریک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید:

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.

ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند.

پ) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(o,r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی‌اند.

پاسخ:

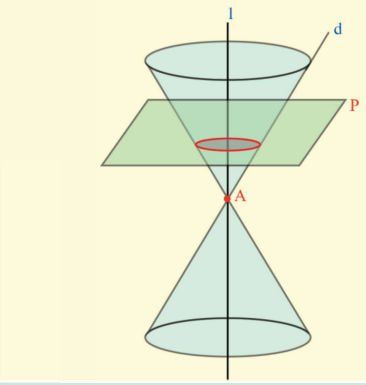
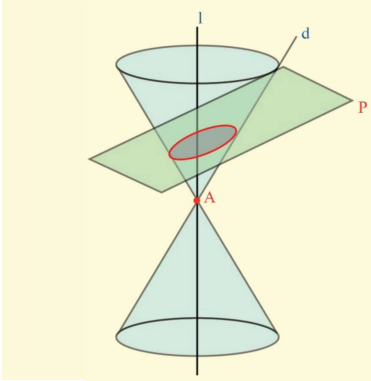
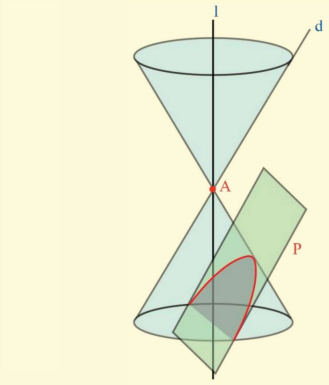
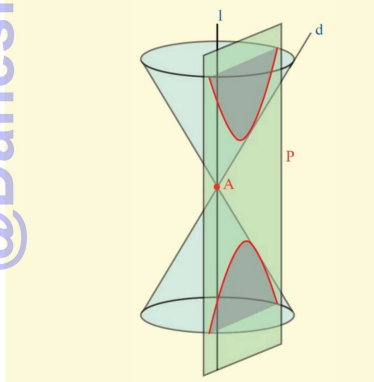
الف) نیمساز زوایای بین دو خط d و d'

ب) خطی عمود بر d در نقطه A

پ) دو خط موازی با d و به فاصله r از آن

ت) دایره‌ای به مرکز o و شعاع $2r$

مقاطع مخروطی:

دایره	بیضی
صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند.	صفحه P بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشند و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند.
	
سهمی	**هذلولی**
صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند.	صفحه P هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد.
	

حالت‌های دیگر

اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی تنها شامل یک نقطه است.

اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور کند فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک خط است.	اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند و هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی دو خط متقاطع است.

@DaneshSad

نکته طلایی

اگر $O(\alpha,\beta)$ مختصات مرکز یک دایره و r شعاع آن دایره باشد معادله استاندارد دایره برابر است با:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$$

مثال

اگر معادله دایره به‌صورت $(x+۱)^۲+y^۲=۴$ باشد مطلوبست:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره.

ب) مختصات تقاطع دایره با محور xها و محور yها.

پاسخ:

الف)

$$(x+۱)^۲+(y-۰)^۲=(۲)^۲\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-۱\\ \beta=۰\\ r=۲\end{cases}\Rightarrow O(-۱,۰)$$

ب) برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور xها، باید در معادله دایره، $y=۰$ قرار دهیم که در این صورت:

$$(x+۱)^۲+y^۲=۴\xrightarrow{y=۰}(x+۱)^۲=۴\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۲\Rightarrow x=۱\\ x+۱=-۲\Rightarrow x=-۳\end{cases}$$

در نتیجه نقاط $(-۳,۰)$ و $(۱,۰)$ محل تقاطع دایره با محور xها هستند.

و برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور yها، باید در معادله دایره، $x=۰$ را قرار دهیم:

$$(x+۱)^۲+y^۲=۴\xrightarrow{x=۰}۱+y^۲=۴\Rightarrow y^۲=۳\Rightarrow\begin{cases}y=\sqrt{۳}\\ y=-\sqrt{۳}\end{cases}$$

پس نقاط $(۰,\sqrt{۳})$ و $(۰,-\sqrt{۳})$، محل تقاطع دایره با محور yها هستند.

جمع‌بندی سریع

اگر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادله گسترده (ضمنی) یک دایره باشد، داریم:

مختصات مرکز دایره: $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$

شعاع دایره: $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

@DaneshSad

مثال

معادلهٔ گسترده دایره‌ای به‌صورت $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۶=۰$ می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

پاسخ:

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})\Rightarrow O(-\frac{-۶}{۲},-\frac{۲}{۲})\Rightarrow O(۳,-۱)$$

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$$

$$\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲+(۲)^۲-۴(۶)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴-۲۴}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶}=۲$$

در مثال فوق، معادله دایره را به‌صورت استاندارد بنویسید.

پاسخ:

$$\begin{cases}O(۳,-۱)\\ r=۲\end{cases}\Rightarrow (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲+(y-(-۱))^۲=۴\Rightarrow (x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۴$$

نکته طلایی

شرط دایره بودن یک رابطه ضمنی به فرم $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$

- اگر $a^۲+b^۲>۴c$ باشد، این رابطه مربوط به دایره‌ای به شعاع $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ و به مرکز $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ است.
- اگر $a^۲+b^۲=۴c$ باشد، این رابطه مربوط به یک نقطه به مختصات $(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ است.
- اگر $a^۲+b^۲<۴c$ باشد، این رابطه هیچ نقطه‌ای را در صفحه مشخص نمی‌کند.

مثال

حدود a را طوری به‌دست آورید که $x^۲+y^۲-۴x+۶y+a=۰$ معادله یک دایره باشد.

پاسخ:

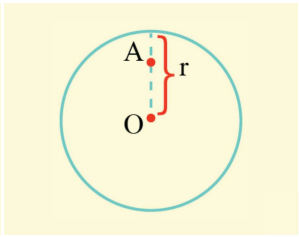
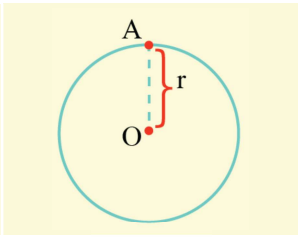
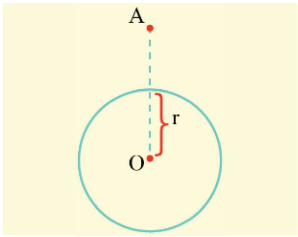
$$a^۲+b^۲>۴c\Rightarrow ۱۶+۳۶>۴a\Rightarrow a<۱۳$$

@DaneshSad

دوپینگ فوری شب امتحان

وضعیت نقطه با دایره:

برای مشخص کردن وضعیت نقطه‌ای مانند A با دایره، ابتدا فاصله مرکز دایره را از نقطه A پیدا می‌کنیم و سپس به کمک جدول زیر وضعیت آن را با دایره تعیین می‌کنیم:

		
نقطه A درون دایره است.	نقطه A روی دایره است.	نقطه A بیرون دایره است.
$OA < r$	$OA = r$	$OA > r$

یادآوری:

فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از هم برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

مثال

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,3)$ بوده و $M(1,1)$ یک نقطه از آن باشد.

پاسخ:

فاصله OM، همان شعاع دایره است، پس:

$$R = OM = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$$

مثال

وضعیت نقطه $A(1,-2)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ را تعیین کنید.

پاسخ:

مرکز و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} O(1,-1) \\ r = \sqrt{2} \end{cases}$$

حال فاصله نقطه A را از مرکز دایره به‌دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{(1-1)^2 + (-1+2)^2} = 1$$

چون $OA < r$ است پس نقطه درون دایره قرار دارد.

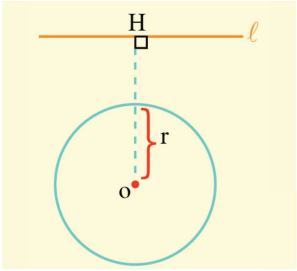
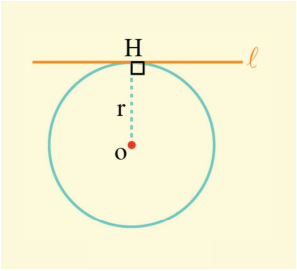
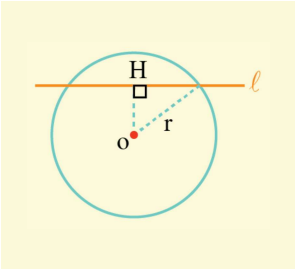
@DaneshSad

دوپینگ فوری شب امتحان

اوضاع نسبی خط و دایره:

برای مشخص کردن وضعیت یک خط نسبت به یک دایره قبل از هر چیز، ابتدا فاصله مرکز دایره از خط موردنظر را پیدا می‌کنیم (OH).

حال با توجه به اندازه OH و اندازه شعاع دایره، داریم:

خط ℓ دایره را قطع نمی‌کند.	خط ℓ بر دایره مماس است.	خط ℓ با دایره متقاطع است.
		
$OH > r$	$OH = r$	$OH < r$

یادآوری:

- خط مماس بر دایره، در نقطه تماس، بر شعاع دایره عمود است.
- فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال

وضعیت خط $x + y = 1$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ مشخص نمایید.

پاسخ:

ابتدا مختصات مرکز دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \Rightarrow O(-\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}) \Rightarrow O(-1, -1)$$

حال فاصله مرکز دایره را از خط به معادله $x + y - 1 = 0$ به‌دست می‌آوریم:

$$OH = \frac{|(1\times -1) + (1\times -1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow OH = \frac{3\sqrt{2}}{2} \simeq 2/1$$

شعاع دایره را به‌دست آورده و آن را با اندازه OH مقایسه می‌کنیم:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4 - (-4)} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \simeq 1/7$$

چون $\frac{3\sqrt{2}}{2} > \sqrt{3}$ است پس $OH > r$ است در نتیجه خط $x + y = 1$ دایره را قطع نمی‌کند.

@DaneshSad

مثال

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(1,-1)$ و بر خط $3x-4y+3=0$ مماس باشد.

پاسخ: فاصله مرکز دایره تا خط داده شده برابر شعاع دایره است:

$$d=\frac{|3(1)-4(-1)+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

$$\begin{cases}O(1,-1)\\ r=2\end{cases}\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$$

مثال

معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد.

پاسخ: محل تقاطع خطوط داده شده، همان مرکز دایره است:

$$\begin{cases}x+y=1\\ x-y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}\Rightarrow O(2,-1)$$

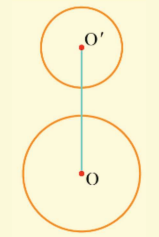
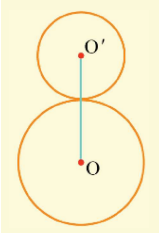
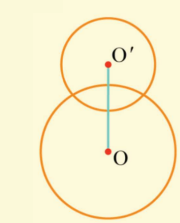
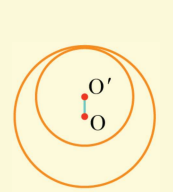
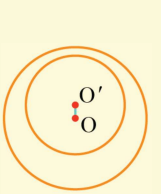
از طرفی فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره با شعاع دایره برابر است:

$$r=\frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$$

در نتیجه معادله دایره برابر است با: $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

◀ اوضاع نسبی دو دایره:

دو دایره $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ را در نظر بگیرید؛ اگر اندازه پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند (خط‌المرکزین) برابر d باشد، داریم:

				
$d>r+r'$	$d=r+r'$	$\lvert r-r'\rvert<d<r+r'$	$d=\lvert r-r'\rvert$	$d<\lvert r-r'\rvert$
دو دایره بیرون هم (متخارج)	دو دایره مماس بیرون	دو دایره متقاطع	دو دایره مماس درون	دو دایره متداخل

- توجه شود که اگر $d=0$ باشد دو دایره هم‌مرکز خواهند بود.
- برای تشخیص وضعیت دو دایره $C(O,r)$ و $C'(O',r')$؛ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱- ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع هر دو دایره را به‌دست می‌آوریم.

۲- سپس طول خط‌المرکزین دو دایره $d=|OO'|$ را نیز به‌دست می‌آوریم.

۳- در نهایت $(r+r')$ و $|r-r'|$ را نیز محاسبه کرده و آن‌ها را با اندازه $d=|OO'|$ مقایسه می‌کنیم.

@DaneshSad

مثال

وضعیت دو دایره $(x-1)^2+y^2=1$ و $x^2+(y-1)^2=1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

پاسخ:

ابتدا مرکز و شعاع هر دو دایره را مشخص می‌کنیم:

$$(x-1)^2+y^2=1\Rightarrow\begin{cases}O(1,0)\\r=1\end{cases}\quad,\quad x^2+(y-1)^2=1\Rightarrow\begin{cases}O'(0,1)\\r'=1\end{cases}$$

حال فاصله دو مرکز را به‌دست آورده و آن را با $r+r'$ و $|r-r'|$ مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases}|OO'|=\sqrt{2}\\r+r'=2\\|r-r'|=0\end{cases}\Rightarrow|r-r'|<OO'<r+r'\Rightarrow$$

دو دایره متقاطع‌اند

مثال

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایره به معادله $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ مماس داخل باشد.

پاسخ:

ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}O'(4,-2)\\r'=2\end{cases}$$

حال فاصله مرکز دو دایره را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$OO'=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

می‌دانیم که دو دایره مماس داخل هستند، پس: $|r-r'|=OO'$

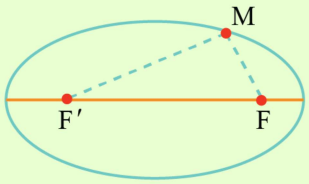
$$|r-2|=5\Rightarrow\begin{cases}r-2=5\Rightarrow r=7\\r-2=-5\Rightarrow r=-3\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین معادله دایره موردنظر برابر است با:

$$\begin{cases}O(0,1)\\r=7\end{cases}\Rightarrow(x-0)^2+(y-1)^2=49\Rightarrow x^2+(y-1)^2=49$$

نکته طلایی

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله آن‌ها از دو نقطه ثابت F و F' (F' و F کانون‌های بیضی هستند)، مقدار ثابتی است که این مقدار ثابت برابر $2a$ است.

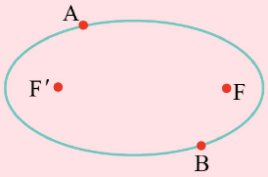


$$MF+MF'=2a$$

@DaneshSad

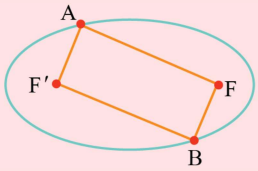
مثال

دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. اگر $AF' = BF$ باشد ثابت کنید که دو پاره‌خط AF و BF' موازی‌اند.



پاسخ:

نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم:



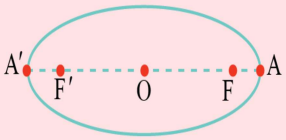
نقطه A و B روی بیضی قرار دارند پس بنابه تعریف بیضی:

$$\begin{cases} AF + AF' = ۲a \\ BF + BF' = ۲a \end{cases} \xrightarrow[\text{فرض مسئله}]{AF'=BF} AF = BF'$$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ متوازی‌الاضلاع است و می‌دانیم که در هر متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند، پس: $AF \parallel BF'$

مثال

در بیضی روبه‌رو نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند، ثابت کنید $A'F' = AF$



پاسخ:

نقطه A و A' روی بیضی قرار دارند و بنابه تعریف بیضی داریم:

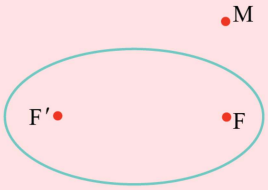
$$\begin{cases} A'F' + A'F = ۲a \\ AF' + AF = ۲a \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'F' + A'F = AF' + AF$$
$$\Rightarrow A'F' + (A'F' + FF') = AF + (AF + FF') \Rightarrow AF = A'F'$$

@DaneshSad

مثال

اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد ثابت کنید که مجموع فواصل نقطه M از کانون‌های F و F' بزرگ‌تر از طول قطر بزرگ بیضی است.

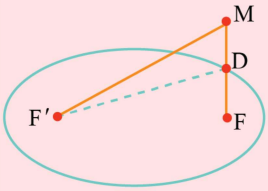


پاسخ:

از نقطه M به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم تا بیضی را در نقطه D قطع کند، نقطه D روی بیضی قرار دارد و بنابه تعریف بیضی، داریم:

$$DF + DF' = ۲a$$

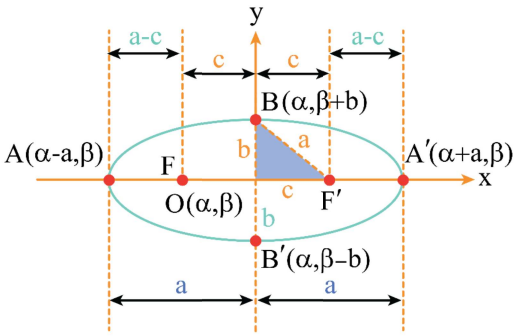
حال بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MDF' داریم:



$$MD + MF' > DF' \xrightarrow{+DF} \underbrace{DF + MD}_{MF} + MF' > \underbrace{DF + DF'}_{۲a}$$

$$\Rightarrow MF + MF' > ۲a$$

بیضی:



- $\begin{cases} OA = OA' = a \\ OB = OB' = b \\ OF = OF' = c \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{قطر بزرگ (قطر کانونی)} = AA' = ۲a \\ \text{قطر کوچک} = BB' = ۲b \\ \text{فاصله کانونی} = FF' = ۲c \end{cases}$
- $BF' = BF = B'F = B'F' = a$
- $a^۲ = b^۲ + c^۲$ (با توجه به مثلث قائم‌الزاویه OBF')
- فاصله یک کانون تا دورترین رأس $= a + c$
- فاصله یک کانون تا نزدیک‌ترین رأس $= a - c$

@DaneshSad

◀ خروج از مرکز بیضی:

۱- مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهیم.

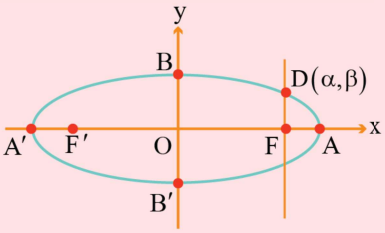
۲- همواره خروج از مرکز بیضی بین ۰ و ۱ است. $(0<e<1)$

۳- هرچه نسبت $e=\frac{c}{a}$ بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و به‌عبارتی شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود.

۴- هرچه نسبت $e=\frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد بود.

مثال

مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطه D قطع کرده باشد مختصات نقطه D را به‌دست آورید.



پاسخ:

می‌دانیم $FO=FA=۴$ است. پس مختصات نقطه F به‌صورت $F(۴,۰)$ است و چون نقاط F و D طول برابری دارند پس مختصات نقطه D به‌صورت $D(۴,\beta)$ است.

از طرفی نقطه D روی بیضی است پس:

$$DF+DF'=۲a \quad (۱)$$

$$OA=a\Rightarrow OF+FA=a\Rightarrow ۴+۴=a\Rightarrow a=۸\xrightarrow{(۱)}DF+DF'=۱۶$$

به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث DFF' داریم:

$$\begin{cases}DF'^{۲}=FF'^{۲}+DF^{۲}\\ DF+DF'=۱۶\Rightarrow DF'=۱۶-DF\end{cases}\Rightarrow (۱۶-DF)^{۲}=FF'^{۲}+DF^{۲}$$

می‌دانیم $OF'=OF=۴$ است، پس: $FF'=۸$ در نتیجه:

$$(۱۶-DF)^{۲}=۶۴+DF^{۲}\Rightarrow ۲۵۶-۳۲DF+DF^{۲}=۶۴+DF^{۲}\Rightarrow ۳۲DF=۱۹۲$$
$$\Rightarrow DF=۶\Rightarrow \beta=۶$$

پس مختصات نقطه D برابر است با:

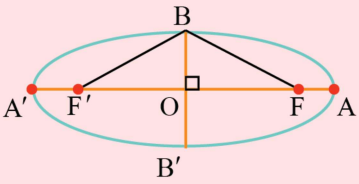
$$D(۴,۶)$$

@DaneshSad

دوپینگ فوری شب امتحان

مثال

در شکل مقابل، اگر $OA=a$، $OB=b$ و $OF=c$ باشد ثابت کنید: $a^2=b^2+c^2$



پاسخ:

نقطه B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد در نتیجه:

$$BF=BF' \quad (1)$$

از طرفی فاصله هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

$$BF+BF'=2a \xrightarrow{(1)} BF=BF'=a$$

حال بنابه رابطه فیثاغورس در مثلث BOF داریم:

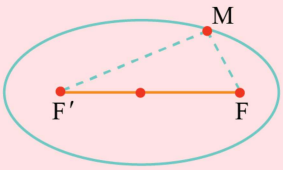
$$OF^2+OB^2=BF^2 \Rightarrow c^2+b^2=a^2$$

مثال

نقطه M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ب) طول MF را بیابید. (F و F' کانون‌های بیضی و $MF<MF'$)



پاسخ:

الف)

$$\begin{cases} 2a=10 \Rightarrow a=5 \\ 2b=6 \Rightarrow b=3 \end{cases} \Rightarrow a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=4$$

در مثلث MFF'، میانه وارد بر یک ضلع نصف ضلع روبه‌رو است $(MO=\frac{1}{2}FF'=4)$ در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ب)

$$MF+MF'=2a=10 \Rightarrow MF'=10-MF$$
$$MF^2+MF'^2=FF'^2 \Rightarrow MF^2+(10-MF)^2=8^2 \Rightarrow MF=5-\sqrt{7}$$

مثال

اگر در یک بیضی طول AA' (قطر بزرگ) برابر با ۱۶ و خروج از مرکز آن $\frac{3}{4}$ باشد، فاصله رأس A تا نزدیک‌ترین کانون را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\frac{c}{a}=\frac{3}{4} \xrightarrow{a=8} c=6$$

فاصله رأس A تا نزدیک‌ترین کانون: $AF=a-c=2$

@DaneshSad

مثال

در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات، طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است.
الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید.
ب) مختصات کانون‌ها (F', F)، مختصات دو سر قطر بزرگ (A', A) و دو سر قطر کوچک (B', B) را به‌دست آورید.

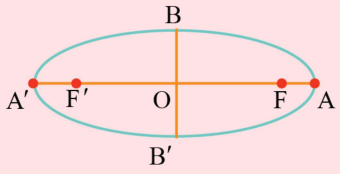
پاسخ:

الف) $\begin{cases} ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵ \\ ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow c = ۴ \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$

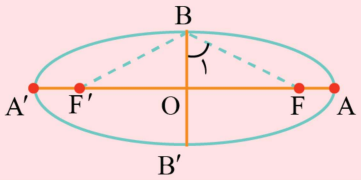
ب) $\begin{cases} F(۴,۰) \\ F'(-۴,۰) \end{cases} \quad \begin{cases} A(۵,۰) \\ A'(-۵,۰) \end{cases} \quad \begin{cases} B(۰,۳) \\ B'(۰,-۳) \end{cases}$

مثال

اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



پاسخ:



$a = ۲b \Rightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۴b^۲ - b^۲ = ۳b^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۳}b$

$\tan B_۱ = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \Rightarrow B_۱ = ۶۰^\circ$

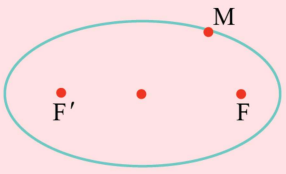
$F\hat{B}F' = ۲ \times ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$

نکته طلایی

اگر بدنه داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کانون دیگر بیضی عبور می‌کند.

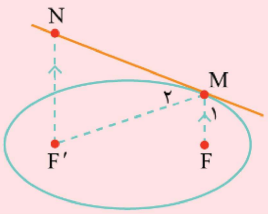
مثال

در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی را موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF' = MF'$



@DaneshSad

پاسخ:



مجموع $MF+MF'$ کمترین مقدار است و بنابه خاصیت کوتاه‌ترین مسیر:

$\hat{M}_1=\hat{M}_2 \quad (1)$

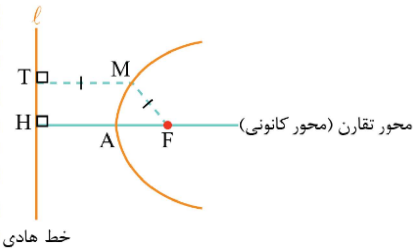
از طرفی $MF \parallel NF'$ و d مورب است در نتیجه:

$\hat{N}=\hat{M}_1 \quad (2)$

$\xrightarrow{(1),(2)} \hat{N}=\hat{M}_2 \Rightarrow$ متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{MNF'} \Rightarrow MF'=NF'$

◀ سهمی:

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.



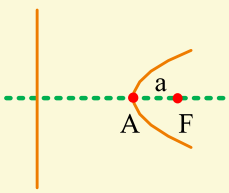
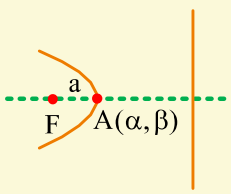
$$\begin{cases} F=\text{کانون سهمی} \\ A=\text{رأس سهمی} \\ AF=\text{فاصله کانونی}=a\ ,\ (a>0) \end{cases}$$

- طبق تعریف سهمی، داریم: $MT=MF$
- فاصله کانون سهمی از خط هادی برابر است با: $FH=2a$
- فاصله رأس سهمی از کانون، با فاصله رأس سهمی تا خط هادی، برابر است.

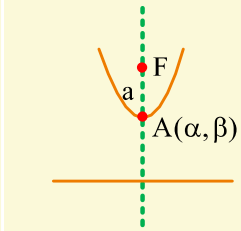
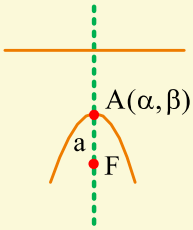
$AH=AF=a$

◀ معادله استاندارد (متعارف) سهمی:

در یک سهمی، اگر نقطه $A(\alpha,\beta)$ رأس سهمی و فاصله رأس سهمی تا کانون سهمی برابر a باشد، داریم: $(a>0)$

	سهمی افقی	
	رو به راست	رو به چپ
		
معادله سهمی	$(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$	$(y-\beta)^2=-4a(x-\alpha)$
معادله خط هادی	$x=\alpha-a$	$x=\alpha+a$
مختصات کانون	$F(\alpha+a,\beta)$	$F(\alpha-a,\beta)$

@DaneshSad

	سهمی قائم	
	رو به بالا	رو به پایین
		
معادله سهمی	$(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$	$(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta)$
معادله خط هادی	$y=\beta-a$	$y=\beta+a$
مختصات کانون	$F(\alpha,\beta+a)$	$F(\alpha,\beta-a)$

توجه:

در معادله سهمی افقی، y^2 وجود دارد ولی در معادله سهمی قائم، x^2 وجود دارد.

◀ استاندارد کردن معادله گسترده سهمی:

اگر معادله سهمی به‌صورت $Ax^2+Bx+Cy+D=0$ یا $Ay^2+By+Cx+D=0$ باشد برای استاندارد کردن این معادلات، داریم:

- ابتدا با تقسیم کردن دو طرف معادله بر A، ضریب x^2 یا y^2 را از بین می‌بریم.
- عدد ثابت را به همراه متغیر غیرهم‌جنس به طرف دیگر معادله منتقل کرده و معادله را به‌صورت $x^2+ax=-by-c$ یا $y^2+ay=-bx-c$ تبدیل می‌کنیم.
- طرف اول معادله را به‌صورت مربع کامل نوشته و عدد $\frac{a^2}{4}$ را به طرف دیگر تساوی اضافه می‌کنیم.
- از ضریب متغیر درجه یک در طرف دوم تساوی فاکتور می‌گیریم.

مثال

معادله یک سهمی به‌صورت $y^2-6y+16x+25=0$ داده شده است آن را به فرم استاندارد تبدیل کنید.

پاسخ:

$$y^2-6y=-16x-25$$
$$y^2-6y+9=-16x-25+9\Rightarrow(y-3)^2=-16x-16$$
$$\Rightarrow(y-3)^2=-16(x+1)$$

@DaneshSad

مثال

معادله سهمی را بنویسید که $A(۱,۲)$ رأس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد و سپس معادله خط هادی آن را بیابید.

پاسخ:

با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، سهمی رو به پایین بوده و $a=۴$ است. در نتیجه:

معادله سهمی: $(x-۱)^۲=-۱۶(y-۲)$

معادله خط هادی: $y=۶$

مثال

معادله سهمی را بنویسید که $A(۲,۳)$ رأس آن بوده و معادله خط هادی آن $x=۳$ باشد.

پاسخ:

با توجه به جایگاه رأس سهمی و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ است.

در این سهمی $a=۱$ بوده و معادله آن برابر است با:

$$(y-۳)^۲=-۴(x-۲)$$

- در این سؤال، مختصات کانون سهمی را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$F=(\alpha-a,\beta)=(۲-۱,۳)=(۱,۳)$$

- در این سؤال، مختصات محل برخورد سهمی با محور طول‌ها را حساب کنید.

پاسخ:

$$(y-۳)^۲=-۴(x-۲)\xrightarrow{y=۰}x=-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \text{محل برخورد با محور طول‌ها}=(-\frac{۱}{۴},۰)$$

مثال

سهمی $y^۲=۴x-۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، معادله دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

پاسخ:

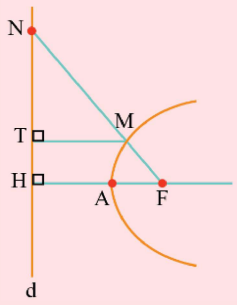
$$y^۲=۴(x-۱)\Rightarrow\begin{cases}A(۱,۰)\\a=۱\\F(۲,۰)\end{cases}$$

$$(x-۲)^۲+y^۲=۹\Rightarrow\begin{cases}y^۲=۴x-۴\\y^۲=-x^۲+۴x+۵\end{cases}\Rightarrow x=\pm۳\xrightarrow{x\geq۱}x=۳$$

مختصات نقاط برخورد: $\begin{cases}M(۳,۲\sqrt{۲})\\M'(۳,-۲\sqrt{۲})\end{cases}$

@DaneshSad

مثال



در شکل روبه‌رو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از کانون F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$

پاسخ:

روش اول:

بنابه تعریف سهمی $MF=MT$ است پس مثلث MFT متساوی‌الساقین است:

$$M\hat{T}F=T\hat{F}M \quad (۱)$$

از طرفی بنابه خطوط موازی $FH\parallel MT$ و مورب FT نتیجه می‌شود:

$$M\hat{T}F=T\hat{F}H \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که TF نیمساز است، حال بنابه قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{FH=۲FA}\frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{\times ۲}\frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$

روش دوم:

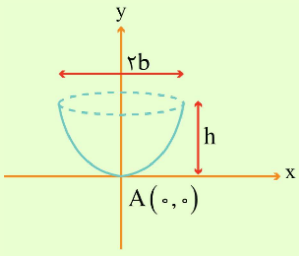
می‌دانیم $FH\parallel MT$ است لذا با توجه به قضیه تالس در مثلث NHF، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{NM}{MF}=\frac{NT}{TH}\\ \frac{MT}{FH}=\frac{NM}{NF}\xrightarrow{MT=MF}\frac{NF}{FH}=\frac{NM}{MF}\end{array}\right\}\xrightarrow{FH=۲FA}\frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{\times ۲}\frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$

@DaneshSad

نکته طلایی

اگر قطر دهانه یک دیش مخابراتی برابر $۲b$ و عمق (گودی) آن برابر h باشد فاصله کانونی آن برابر است با:



$$\text{فاصله کانونی}=\frac{b^{۲}}{۴h}$$

مثال

یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$a=\frac{b^{۲}}{۴h}\ ,\ \begin{cases}۲b=۶۰\Rightarrow b=۳۰\\ h=۹\end{cases}$$

$$a=\frac{(۳۰)^{۲}}{۴\times ۹}=۲۵$$

@DaneshSad