دوپینگ فوری شب امتحان

فصل اول: ماتریس و کاربردها

ماتریس:

- هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی را که شامل تعدادی سطر و ستون باشد یک ماتریس می‌گوییم.
- هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌گوییم.
- در حالت کلی اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد آن را به‌صورت $A_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم و می‌گوییم A ماتریسی از مرتبه $m\times n$ است.
- برای هر درایه ماتریس دو اندیس تعریف می‌کنیم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن را مشخص می‌کند به‌عبارت دیگر a_{ij} یعنی درایه روی سطر i اُم و ستون j اُم.
- اگر ماتریس A را به‌صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش دهیم در این صورت به a_{ij}، درایه عمومی ماتریس A می‌گوییم که در آن $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ تغییر می‌کند.

مثال

اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ ماتریس 3×4 باشد به طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2$، در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

پاسخ:

عبارت سؤال را به‌صورت مقابل خلاصه می‌کنیم:

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j & i>j \\ 7 & i=j \\ i^2 & i<j \end{cases}$$

- درایه‌های a_{11}، a_{22} و a_{33} که در آن‌ها $i=j$ است برابر ۷ می‌باشند.
- درایه‌های a_{12}، a_{13}، a_{14}، a_{23}، a_{24} و a_{34} که در آن‌ها $i<j$ است برابر i^2 می‌باشند.
- درایه‌های a_{21}، a_{31} و a_{32} که در آن‌ها $i>j$ است برابر $i+j$ می‌باشند.

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

@DaneshSad

مثال

اگر ماتریس A به‌صورت $A=[3i-2j]_{3\times3}$ باشد آن را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}3-2 & 3-4 & 3-6\\ 6-2 & 6-4 & 6-6\\ 9-2 & 9-4 & 9-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -3\\ 4 & 2 & 0\\ 7 & 5 & 3\end{bmatrix}$$

مثال

ماتریس A به‌صورت $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ که $a_{ij}=\begin{cases}i+j & i=j\\ j & i>j\\ 0 & i<j\end{cases}$ است. این ماتریس را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

- در درایه‌های a_{11}، a_{22} و a_{33}، $i=j$ است.
- در درایه‌های a_{12}، a_{13} و a_{23}، $i<j$ است.
- در درایه‌های a_{21}، a_{31} و a_{32}، $i>j$ است.

مثال

اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس 3×3 با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}i-j & i<j\\ 2 & i=j\\ i+j & i>j\end{cases}$ باشد درایه‌های a_{33}، a_{31} و a_{12} را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases}a_{33}\xrightarrow{i=j}2\\ a_{31}\xrightarrow{i>j}3+1=4\\ a_{12}\xrightarrow{i<j}1-2=-1\end{cases}$$

@DaneshSad

مثال

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۴\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\frac{۲i}{j+۱}$ باشد، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A را بیابید.

پاسخ:

ما به دنبال درایه $a_{۳۲}$ هستیم، پس:

$$a_{۳۲}=\frac{۲(۳)}{۲+۱}=\frac{۶}{۳}=۲$$

تمرین:

اگر ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$، $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت‌های زیر معرفی شده باشند، آن‌ها را با درایه‌هایشان مشخص کنید:

$$a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \qquad b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$$

معرفی چند ماتریس:

ماتریس مربعی: اگر در یک ماتریس تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد آن را یک ماتریس مربعی مرتبه n می‌گوییم.

ماتریس سطری: اگر یک ماتریس فقط از یک سطر تشکیل شده باشد آن را یک ماتریس سطری می‌گوییم.

ماتریس ستونی: اگر یک ماتریس فقط از یک ستون تشکیل شده باشد آن را یک ماتریس ستونی می‌گوییم.

ماتریس قطری: اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند آن را ماتریس قطری می‌گوییم (درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند).

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر: اگر یک ماتریس، قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را ماتریس اسکالر می‌گوییم.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \qquad C=[۳]$$

ماتریس صفر: به ماتریسی که همه درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر می‌گوییم و آن را با نماد $\overline{O}$ نمایش می‌دهیم.

@DaneshSad

ماتریس بالامثلثی: اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های زیر قطر اصلی برابر صفر باشند آن را ماتریس بالامثلثی می‌گوییم.

ماتریس پایین‌مثلثی: اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های بالای قطر اصلی برابر صفر باشند آن را ماتریس پایین‌مثلثی می‌گوییم.

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}$$ «ماتریس پایین‌مثلثی»

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$ «ماتریس بالامثلثی»

ماتریس همانی: اگر در یک ماتریس اسکالر تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ باشند آن را ماتریس همانی یا ماتریس واحد می‌نامیم و آن را با I نمایش می‌دهیم.

$$I_{1\times 1}=[1] \qquad I_{3\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad I_{2\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

مثال

اگر ماتریس $\begin{bmatrix}r & m-1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد حاصل $m+r$ را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases}r=1\\ m-1=0\Rightarrow m=1\end{cases}\Rightarrow m+r=1+1=2$$

مثال

در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ m-1 & 4\end{bmatrix}$ مقدار m چقدر است؟

پاسخ:

$$m-1=0\Rightarrow m=1$$

تساوی بین دو ماتریس :

دو ماتریس هم‌مرتبه $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ با هم برابرند اگر و تنها اگر درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند.

@DaneshSad

دوپینگ فوری شب امتحان

مثال

اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-۱ & ۸ \\ ۳ & z+۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۱ & x-۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند مقدار $(x+y+z)$ را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} x-۲=۸ \Rightarrow x=۱۰ \\ y+۱=x-۱ \Rightarrow y=x-۲ \xrightarrow{x=۱۰} y=۱۰-۲=۸ \\ z+۱=۴ \Rightarrow z=۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y+z=۱۰+۸+۳=۲۱$$

جمع و تفریق ماتریس‌ها:

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است که درایه‌های دو ماتریس را نظیربه‌نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم.

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس:

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس A، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب می‌کنیم.

قرینه یک ماتریس:

اگر A یک ماتریس دلخواه باشد، قرینه ماتریس A از ضرب عدد (-۱) در ماتریس A به‌دست می‌آید که آن را با $(-A)$ نشان می‌دهیم.

جمع‌بندی سریع

اگر A، B و C ماتریس‌های هم‌مرتبه و r و s اعدادی حقیقی باشند، داریم:

- $A+B=B+A$
- $A+(B+C)=(A+B)+C$
- $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$
- $A+(-A)=(-A)+A=\overline{O}$
- $r(A\pm B)=rA\pm rB$
- $(r\pm s)A=rA\pm sA$
- $rA=rB\ ,\ r\neq ۰ \Rightarrow A=B$
- $A=B\Rightarrow rA=rB$

@DaneshSad

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & m+۱\\ ۲n+۴ & ۵\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد با محاسبه m و n، ماتریس $A+I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است)

پاسخ:

$$\begin{cases}m+۱=۰\Rightarrow m=-۱\\ ۲n+۴=۰\Rightarrow n=-۲\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}$$

$$A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۶\end{bmatrix}$$

مثال

دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۰ & ۲\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۳ & -۲\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟

پاسخ:

خیر ـ زیرا دو ماتریس A و B هم‌مرتبه نیستند.

مثال

اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases}i.j & i>j\\ i^{۲} & i=j\\ ۲i-j & i<j\end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $۲A-۳I$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۲ & ۴ & ۱\\ ۳ & ۶ & ۹\end{bmatrix}$$

$$۲A-۳I=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۲\\ ۴ & ۸ & ۲\\ ۶ & ۱۲ & ۱۸\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & -۲\\ ۴ & ۵ & ۲\\ ۶ & ۱۲ & ۱۵\end{bmatrix}$$

@DaneshSad

ضرب ماتریس‌ها:

در حالت کلی دو ماتریس A و B زمانی ضرب‌پذیر هستند که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد به‌عبارت دیگر:

$$A_{m\times p}\times B_{p\times n}=C_{m\times n}$$

(زیر p و p: برابر)

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی:

اگر A ماتریس سطری و B ماتریس ستونی باشد برای پیدا کردن حاصل $A\times B$، کافی است هر درایه ماتریس A را در درایه نظیرش در ماتریس B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم، ببینید:

$$A\times B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ \vdots\\ b_{n1}\end{bmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots a_{1n}b_{n1}$$

ضرب ماتریس در ماتریس:

ماتریس $A_{m\times p}$ و $B_{p\times n}$، مفروضند. حاصل $A\times B$، ماتریسی مانند $C_{m\times n}$ است که هر درایه آن از ضرب یک سطر ماتریس A در یک ستون ماتریس B به‌دست می‌آید به‌عبارت دیگر:

$$\text{درایه سطر } i \text{ اُم و ستون } j \text{ اُم ماتریس } C=\begin{bmatrix}\text{سطر } i \text{ ام ماتریس } A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j \text{ ام}\\ \text{ماتریس } B\end{bmatrix}$$

مثال

مقادیر x و y را از معادله زیر به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{bmatrix}x & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & y-۲\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲x & ۴x-۲\end{bmatrix}$$

ماتریس $\begin{bmatrix}۲x & ۴x-۲\end{bmatrix}$ باید با ماتریس $\begin{bmatrix}۴ & y-۲\end{bmatrix}$ برابر باشد:

$$\begin{cases}۲x=۴\Rightarrow x=۲\\ ۴x-۲=y-۲\xrightarrow{x=۲}۶=y-۲\rightarrow y=۸\end{cases}$$

@DaneshSad

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ باشد مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

پاسخ:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

حال برای اینکه ماتریس حاصل، ماتریسی قطری باشد، باید:

$$\begin{cases}-۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}$$

مثال

دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & m-۲ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ n+۱ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ m & ۰ & n\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد حاصل AB را محاسبه کنید.

پاسخ:

می‌دانیم که A یک ماتریس قطری است، پس:

$$\begin{cases}m-۲=۰\Rightarrow m=۲\\ n+۱=۰\Rightarrow n=-۱\end{cases}$$

حال حاصل AB برابر است با:

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۲ & ۲\\ ۶ & ۰ & -۳\\ ۹ & -۳ & ۶\end{bmatrix}$$

◀ خواص عمل ضرب ماتریس‌ها:

۱- در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$AB\neq BA$$

۲- اگر A ماتریس مربعی مرتبه n و I ماتریس واحد (همانی) مرتبه n باشد آنگاه ماتریس I عضو خنثی برای عمل ضرب است به‌عبارت دیگر:

$$AI=IA=A$$

۳- ضرب ماتریس A در $(B\pm C)$، خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی را دارد:

$$A(B\pm C)=AB\pm AC$$

۴- ضرب ماتریس A در (BC)، خاصیت شرکت‌پذیری را دارد:

$$A(BC)=(AB)C$$

۵- در حالت کلی قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست به‌عبارت دیگر اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم $AB=AC$، آنگاه لزوماً $B=C$ نیست.

@DaneshSad

مثال

معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$ را حل کنید.

پاسخ:

ابتدا حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ را محاسبه کرده و سپس آن را در ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-۳ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-۳ & ۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳x-۲۱ \end{bmatrix}$$

می‌دانیم که حاصل به‌دست آمده باید برابر صفر باشد، پس:

$$۳x-۲۱=۰ \Rightarrow ۳x=۲۱ \Rightarrow x=۷$$

◄ توان در ماتریس:

اگر A یک ماتریس مربعی باشد توان‌های صحیح و نامنفی آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

- $A^{۰} = I$
- $A^{۱} = A$
- $A^{۲} = A \times A$
- $A^{۳} = A \times A^{۲} = A^{۲} \times A$
- $A^{۴} = A \times A^{۳} = A^{۳} \times A = A^{۲} \times A^{۲}$
- $\vdots$
- $A^{n} = A \times A^{n-۱} = A^{n-۱} \times A = \ldots$

ویژگی‌های توان در ماتریس:

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، داریم:

- $A^{m} \times A^{n} = A^{n} \times A^{m} = A^{(m+n)}$
- $(A^{m})^{n} = (A^{n})^{m} = A^{mn}$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$A^{۲} = A \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۶ \\ -۳ & ۷ & ۶ \\ -۲ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

@DaneshSad

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ باشد ماتریس A^{7} را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$A^{2}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=-2I$$

$$A^{7}=(A^{2})^{3}\times A=(-2I)^{3}\times A=-8\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -16\\ 8 & 0\end{bmatrix}$$

مثال

اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}a+b & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 4a+b\end{bmatrix}$ باشند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم: $A^{2}-B=\overline{O}$ ($\overline{O}$ ماتریس صفر است.)

پاسخ:

$$A^{2}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^{2}-B=\overline{O}\Rightarrow A^{2}=B\Rightarrow\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 4a+b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=5\\ 4a+b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=5\end{cases}$$

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ باشد، مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطه $A^{2}=mA+nI_{2}$ برقرار باشد. (I_{2} ماتریس همانی است.)

پاسخ:

$$A^{2}=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 2 & 9\end{bmatrix}$$

$$mA+nI_{2}=m\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4m\\ 2m & m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & 4m\\ 2m & m+n\end{bmatrix}$$

می‌دانیم که رابطه $A^{2}=mA+nI_{2}$ باید برقرار باشد، یعنی:

$$\begin{bmatrix}8 & 4\\ 2 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & 4m\\ 2m & m+n\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}n=8\\ m=1\end{cases}$$

@DaneshSad

دو ماتریس تعویض‌پذیر:

می‌دانیم که در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد حال اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند و $AB=BA$ باشد در این صورت دو ماتریس A و B تعویض‌پذیرند.

حال اگر A و B دو ماتریس **تعویض‌پذیر** باشند، در این صورت:

- $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$
- $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
- $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

مثال

اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$$

پاسخ:

$$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$$

$$\xrightarrow[AB=BA]{A,B\text{ تعویض‌پذیرند}} A^2-2AB+B^2$$

مثال

اگر $A^2=A$ باشد در این صورت ثابت کنید: $(A+I)^2=I+3A$

پاسخ:

می‌دانیم که A و I تعویض‌پذیرند، بنابراین:

$$(A+I)^2=(A+I)(A+I)=A^2+AI+IA+I^2=A^2+2A+I$$

$$\xrightarrow[\text{می‌دانیم}]{A^2=A} A+2A+I=3A+I$$

مثال

اگر ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد حاصل $\begin{bmatrix}x & 2 & -y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\\ -x\end{bmatrix}$ را بیابید.

پاسخ:

می‌دانیم که ضرب ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر است، یعنی: $AB=BA$

$$\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}4x+3y & 3x+4y\\ 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x+6 & 4y-3\\ 3x+8 & 3y-4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3x+8=5\Rightarrow x=-1\\ 3y-4=2\Rightarrow y=2\end{cases}$$

@DaneshSad

حال حاصل خواسته شده برابر است با:

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}=-2+4-2=0$$

◀ دترمینان:

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی را نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. حال اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد $(1\le n\le 3)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A)=|A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

- $A=[k]_{1\times 1}\Rightarrow |A|=k$
- $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc$
- $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر اول}}|A|=a\begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix}$

توجه:

برای محاسبه دترمینان ماتریس 3×3 در روش فوق، بسط را برحسب هر سطر یا هر ستون دلخواه می‌توان انجام داد.

مثال

دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $A=[-3]$ ب) $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ پ) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}$

پاسخ:

الف) $A=[-3]\Rightarrow |A|=-3$

ب) $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(-10)-12=-22$

پ) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{برحسب}}|A|=2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}+(0)\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}$

$=2(15)-(-9)=39$

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}|A| & 8\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ باشد در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید.

پاسخ:

$|A|=5|A|-24\Rightarrow 4|A|=24\Rightarrow |A|=6$

@DaneshSad

دوپینگ فوری شب امتحان

مثال

اگر $A=[2i-3j]_{3\times 2}$ و $B_{2\times 3}=\begin{cases}-1 & i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases}$ باشد دترمینان ماتریس AB را به‌دست آورید.

پاسخ:

ابتدا ماتریس‌های A و B را تشکیل می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & -3 & -3\end{bmatrix}$$

حال با بسط برحسب سطر اول داریم:

$$|AB|=4\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -3 & -3\end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=4(6)-1(-6)+5(-6)=0$$

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ باشد دترمینان ماتریس BA را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$BA=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & 17 & 8\end{bmatrix}$$

با بسط برحسب سطر اول، داریم:

$$|BA|=3\begin{vmatrix}3 & 2\\ 17 & 8\end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 8\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 17\end{vmatrix}$$
$$=3(-10)-1(-10)-1(-20)=0$$

مثال

دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & m-2\\ n+1 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ m & 0 & n\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد حاصل $|A|+|B|$ را به‌دست آورید.

@DaneshSad

پاسخ:

می‌دانیم که ماتریس A، یک ماتریس قطری است، پس:

$$\begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ n+1=0 \Rightarrow n=-1 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=2$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر اول}} |B|=2(-1)-1(7)+1(-2)=-11$$

در نتیجه: $|A|+|B|=2-11=-9$

نکته طلایی

۱ـ دترمینان هر ماتریس قطری، بالامثلثی و پایین‌مثلثی با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی، برابر است.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{vmatrix} = abc$$

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $|A|$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$|A|=2\times(-3)\times 5=-30$$

۲ـ اگر دو ماتریس مربعی با هم برابر باشند، دترمینان آن‌ها هم با هم برابر است.

$$A=B \Rightarrow |A|=|B|$$

۳ـ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، داریم:

$$|AB|=|BA|=|A||B|$$

۴ـ اگر A ماتریسی مربعی باشد، داریم:

$$|A^m|=|A|^m$$

۵ـ اگر A یک ماتریس $n\times n$ و k عددی حقیقی باشد، داریم:

$$|kA|=k^n|A|$$

۶ـ اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه: $|A|=-abc$

@DaneshSad

۷ـ اگر A ماتریسی مربعی و وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

مثال

اگر A یک ماتریس 3×3 و $|A| = 5$ باشد آنگاه حاصل $|2A|$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

می‌دانیم A ماتریسی 3×3 است پس:

$$|2A| = (2)^3|A| = 8\times 5 = 40$$

مثال

اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A| = 5$، در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

پاسخ:

$$|A| = 5 \Rightarrow ||A|A| = |5A| = (5)^3|A| = 125\times 5 = 625$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^2|$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

می‌دانیم که برای محاسبه $|A^2|$، می‌توان حاصل $|A|^2$ را به‌دست آورد. از طرفی چون A ماتریس پایین‌مثلثی است، پس:

$$|A| = (-2)\times(-3)\times(-5) = -30 \Rightarrow |A|^2 = (-30)^2 = 900$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & f \\ 0 & a & 0 \\ e & c & b \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد دترمینان ماتریس A را بیابید.

پاسخ:

چون A ماتریسی اسکالر است پس:

$$\begin{cases} f = e = c = 0 \\ a = b = 2 \end{cases}$$

و دترمینان ماتریس A با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی برابر است، یعنی:

$$|A| = 2\times a\times b = 2\times 2\times 2 = 8$$

@DaneshSad

دوپینگ فوری شب امتحان

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\\ ۰ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ باشد حاصل $|A^{۳}|$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

ابتدا دترمینان ماتریس A را با بسط برحسب ستون اول به‌دست می‌آوریم (چرا ستون اول؟ چون صفر زیاد داره خب!)

$$|A|=۲\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}\underbrace{-(۰)\begin{vmatrix}۳ & ۴\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}+(۰)\begin{vmatrix}۳ & ۴\\ ۲ & ۳\end{vmatrix}}_{\text{می‌تونستی اینارو هم ننویسی}}=۲(۴-۳)-۰+۰=۲$$

حال برای محاسبه $|A^{۳}|$ داریم:

$$|A^{۳}|=|A|^{۳}=(۲)^{۳}=۸$$

مثال

اگر $۲A=\begin{bmatrix}|A| & -۴\\ ۱ & |A|\end{bmatrix}$ باشد در این صورت حاصل $|A^{-۱}|$ را بیابید.

پاسخ:

ابتدا دترمینان ماتریس $۲A$ را پیدا می‌کنیم:

$$|۲A|=(|A|^{۲}+۴)\xrightarrow[|۲A|=(۲)^{۲}|A|]{A\text{ ماتریسی }۲\times۲}|A|^{۲}-۴|A|+۴=۰$$

$$\Rightarrow(|A|-۲)^{۲}=۰\Rightarrow|A|=۲$$

حال حاصل $|A^{-۱}|$ برابر است با:

$$|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}=\frac{۱}{۲}$$

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ باشد حاصل $||A|A|$ را بیابید.

پاسخ:

$$|A|=-(۱\times۲\times(-۱))=۲$$

$$||A|A|=|A|^{۳}|A|=|A|^{۴}=۲^{۴}=۱۶$$

@DaneshSad

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۱ & -۲\\ ۰ & ۳ & ۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$ باشند، حاصل $|A|+|B^۲|$ را بیابید.

پاسخ:

$$|A|=۲\begin{vmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۴\end{vmatrix}=۲\times ۱۰=۲۰$$

$$|B|=-۶\Rightarrow |B^۲|=۳۶$$

$$|A|+|B^۲|=۵۶$$

◄ وارون ماتریس:

برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی مانند B است به‌طوری‌که:

$$A\times B=B\times A=I$$

در این صورت ماتریس B را وارون ماتریس A می‌گوییم و آن را با $A^{-۱}$ نمایش می‌دهیم. حال اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد در این صورت وارون ماتریس A (یعنی $A^{-۱}$) از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

توجه:

شرط لازم و کافی برای اینکه $A^{-۱}$ وجود داشته باشد (A وارون‌پذیر باشد) این است که $|A|\neq ۰$ باشد.

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A-۲I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است.)

پاسخ:

$$A-۲I=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$|A-۲I|=۲$$

$$(A-۲I)^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

@DaneshSad

دوپینگ فوری شب امتحان

مثال

اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}$ باشد حاصل عبارت $(۲A^{-۱}-۳B^{-۱})$ را بیابید.

پاسخ:

$$|A|=۲۰-۶=۱۴\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow ۲A^{-۱}=\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}$$

$$|B|=۲-(-۱۵)=۱۷\Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ -۵ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow ۳B^{-۱}=\frac{۳}{۱۷}\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ -۵ & -۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (۲A^{-۱}-۳B^{-۱})=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۷} & -\frac{۳}{۷}\\ -\frac{۲}{۷} & \frac{۴}{۷}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۱۷} & \frac{۹}{۱۷}\\ -\frac{۱۵}{۱۷} & -\frac{۶}{۱۷}\end{bmatrix}$$

مثال

مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}m & ۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

پاسخ:

برای اینکه ماتریس A وارون‌پذیر نباشد باید $|A|=۰$ باشد، یعنی:

$$|A|=۲m-۴=۰\Rightarrow ۲m=۴\Rightarrow m=۲$$

ویژگی‌های وارون ماتریس:

اگر A ماتریسی مربعی و وارون‌پذیر باشد، داریم:

- $(kA)^{-۱}=\frac{۱}{k}A^{-۱}$
- $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$
- $(A^{-۱})^{-۱}=A$
- $(A^{n})^{-۱}=(A^{-۱})^{n}$

مثال

ماتریس $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس A را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow |A^{-۱}|=۶-(-۲)=۸$$

می‌دانیم که $(A^{-۱})^{-۱}=A$ است پس باید وارون ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست بیاوریم:

$$(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۸} & \frac{۱}{۸}\\ -\frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴}\end{bmatrix}$$

@DaneshSad

حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با استفاده از ماتریس وارون:

در حالت کلی هر دستگاه دو معادله و دو مجهولی به‌صورت $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ را می‌توان به شکل زیر نمایش داد که در آن $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ را ماتریس ضرایب، $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را ماتریس مجهولات و $B=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ را ماتریس مقادیر معلوم می‌گوییم، ببینید:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}}_{B} \Rightarrow AX=B$$

حال برای حل معادله ماتریسی $AX=B$، (به شرطی که A ماتریسی وارون‌پذیر باشد $(|A|\neq 0)$)، با ضرب A^{-1} از سمت چپ در معادله $AX=B$، می‌توان مجهولات را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$AX=B \xrightarrow[\text{از سمت چپ}]{\times A^{-1}} A^{-1}(AX)=A^{-1}B$$
$$\Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

مثال

دستگاه $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 2x+y=8 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ:

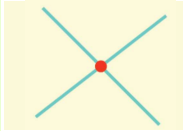
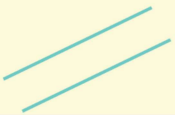
$$A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=3+10=13 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$B=\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$
$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow X=A^{-1}B \Rightarrow X=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1+40 \\ 2+24 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

@DaneshSad

دوپینگ فوری شب امتحان

نکته طلایی

یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، از دو معادله تشکیل شده است که هریک معادله یک خط هستند حال اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$، ماتریس ضرایب این دستگاه باشد، داریم:

$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$	دو خط متقاطع هستند	$\lvert A\rvert\neq 0$	دستگاه یک جواب یکتا دارد	
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	دو خط موازی هستند	$\lvert A\rvert=0$	دستگاه هیچ جوابی ندارد.	
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	دو خط بر هم منطبق هستند.	$\lvert A\rvert=0$	دستگاه بی‌شمار جواب دارد.	

مثال

مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+3y=-3 \\ 4x+(m+4)y=2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

پاسخ:

می‌دانیم شرط اینکه دستگاه فوق جواب نداشته باشد این است که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد:

$$\frac{m}{4}=\frac{3}{m+4}\neq\frac{-3}{2}$$

$$\frac{m}{4}=\frac{3}{m+4}\Rightarrow m(m+4)-12=0\Rightarrow\begin{cases} m=-6 \\ m=2 \end{cases}$$

$$\frac{3}{m+4}\neq-\frac{3}{2}\Rightarrow m\neq-6$$

بنابراین تنها $m=2$ قابل قبول است.

@DaneshSad