

اکنون در مثلث ABC ($\hat{A} > ۹۰^\circ$) ارتفاع BH را در بیرون مثلث رسم می‌کنیم.

اگر $\hat{A}_۱$ زاویهٔ خارجی رأس A باشد با توجه به اینکه $\hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$ داریم:

$\sin\hat{A}_۱ = \sin\hat{A}$ و $\cos\hat{A}_۱ = -\cos\hat{A}$ و در مثلث ABH نیز با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی می‌توان نوشت:

$$\cos A_۱ = \frac{AH}{c} \text{ و } \sin A_۱ = \frac{BH}{c} \Rightarrow AH = c \times \cos A_۱ \text{ و } BH = c \times \sin A_۱ \text{ و } CH = b + AH = b + c.\cos A_۱$$

$$\Delta BHC : BC^۲ = BH^۲ + CH^۲ \Rightarrow a^۲ = (c.\sin A_۱)^۲ + (b + c.\cos A_۱)^۲$$

و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید: $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos A$

$$a^۲ = (c.\sin A_۱)^۲ + (b + c.\cos A_۱)^۲ = c^۲.\sin^۲ A_۱ + b^۲ + ۲bc.\cos A_۱ + c^۲.\cos^۲ A_۱$$

$$= c^۲(\underbrace{\sin^۲ A_۱ + \cos^۲ A_۱}_{۱}) + b^۲ + ۲bc(-\cos A) = c^۲ + b^۲ - ۲bc.\cos A$$

سؤال

صفحهٔ ۶۷ کتاب‌درسی

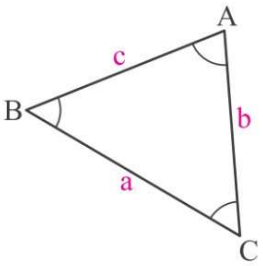
در حالتی که زاویهٔ A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت درمی‌آید؟

اگر $\hat{A} = ۹۰^\circ$، آنگاه $\cos A = ۰$ و در نتیجه: $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc(۰) \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$

که همان رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه است. یعنی می‌توان گفت قضیهٔ کسینوس‌ها، تعمیمی از قضیهٔ فیثاغورس برای مثلث دلخواه است.

پرسش متن

صفحهٔ ۶۷ کتاب‌درسی



قضیهٔ کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آنها:

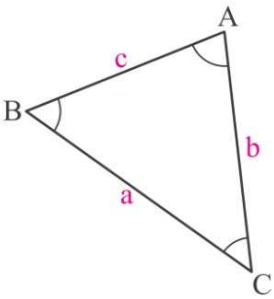
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos A$$

$$b^۲ = c^۲ + a^۲ - ۲ca.\cos B$$

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab.\cos C$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۶۷ و ۶۸ کتاب‌درسی



در مثلث ABC، $AB = ۲\sqrt{۲}$ و $AC = \sqrt{۶} + \sqrt{۲}$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$

۱ طول ضلع BC را به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها به دست آورید.

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲ \times AB \times AC \times \cos A$$

$$\Rightarrow BC^۲ = (۲\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۶} + \sqrt{۲})^۲ - ۲(۲\sqrt{۲})(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})(\cos ۶۰^\circ) \quad (\cos ۶۰^\circ = \tfrac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow BC^۲ = ۸ + (۸ + ۴\sqrt{۳}) - (۴\sqrt{۳} + ۴) = ۱۲ \quad \text{و} \quad BC = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

خرید آنلاین در gajmarket.com
@cipbooks
قبل از استفاده حتما با کتابهای سی آی پی بوکس مشورت کنید