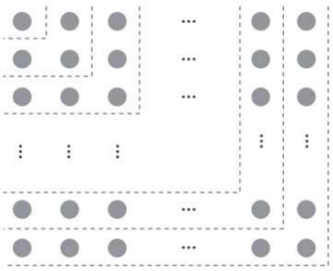
خرید آنلاین در gajmarket.com

تمرین

صفحهٔ ۶ کتاب درسی

۱) الف) به کمک شکل زیر حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=?$



با توجه به شکل، داریم:

اولین عدد فرد $\Rightarrow$ مجموع تا $1=1\times1=1^2=$ تعداد دایره‌ها

دومین عدد فرد $\Rightarrow$ مجموع تا $1+3=2\times2=2^2=$ تعداد دایره‌ها

سومین عدد فرد $\Rightarrow$ مجموع تا $1+3+5=3\times3=3^2=$ تعداد دایره‌ها

$\vdots$

n اُمین عدد فرد $\Rightarrow$ مجموع تا $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n\times n=n^2=$ تعداد دایره‌ها

$$\Rightarrow 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

در واقع باید مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_1=1$ و جملهٔ آخر $a_n=2n-1$ را پیدا کنیم.

$$S_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(1+(2n-1))=n^2$$

همان‌طور که دیده می‌شود، پاسخ قسمت (ب) درستی پاسخ قسمت (الف) را تأیید می‌کند.

۲) مجموع همهٔ اعداد طبیعی سه‌رقمی که مضرب شش هستند، چقدر می‌شود؟

باید حاصل جمع اعداد روبه‌رو را به دست آوریم: $102, 108, 114, \cdots, 996$ (+۶، +۶)

ابتدا بررسی می‌کنیم که در این دنباله، چند جمله وجود دارد: $a_1=102, d=6$

$$a_n=996\Rightarrow a_1+(n-1)d=996\Rightarrow 102+(n-1)(6)=6n+96=996\Rightarrow 6n=900\Rightarrow n=150$$

بنابراین باید مجموع ۱۵۰ جملهٔ اول این دنباله را به دست آوریم:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\Rightarrow S_{150}=\frac{150}{2}(102+996)=75\times1098=82350$$

دقت کنید که راه دیگری برای پیدا کردن تعداد جملات دنباله وجود دارد، به صورت زیر:

$$6n=\text{مضارب طبیعی عدد }6\Rightarrow 100\le 6n<1000\Rightarrow \frac{100}{6}\le n<\frac{1000}{6}\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}17\le n\le 166$$

بنابراین n می‌تواند $166-17+1=150$ مقدار مختلف اختیار کند، پس تعداد جملات دنباله ۱۵۰تاست.

نکته

اگر a ، b و n اعداد طبیعی و داشته باشیم $a\le n\le b$ در این صورت، n می‌تواند $(b-a+1)$ مقدار مختلف اختیار کند.

۳) در دنبالهٔ حسابی $5, 8, 11, \cdots$ حداقل چند جملهٔ آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

$$5, 8, 11, \cdots\Rightarrow a_1=5, d=3$$

$$S_n>493\Rightarrow\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]>493\Rightarrow\frac{n}{2}[2(5)+(n-1)(3)]>493\Rightarrow\frac{n}{2}(3n+7)>493\Rightarrow 3n^2+7n-986>0$$

$$3n^2+7n-986=0\Rightarrow n=\frac{-7\pm\sqrt{11881}}{6}=\frac{-7\pm109}{6}\Rightarrow\begin{cases}n=\frac{-7+109}{6}=17\\ n=\frac{-7-109}{6}=\frac{-58}{3}\end{cases}$$

n		$\frac{-58}{3}$		17	
$3n^2+7n-986>0$	+	ج	−	ج	+

$$\xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n>17\Rightarrow n\ge 18$$

بنابراین باید حداقل ۱۸ جملهٔ این دنباله را با هم جمع کنیم تا حاصل آن بیشتر از ۴۹۳ شود.

@zipbooks

خرید آنلاین در gajmarket.com

۴ در ۲۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جملهٔ اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

فرض می‌کنیم جملهٔ اول دنباله a_1 و قدر نسبت آن d باشد. بنابراین:

$$\text{مجموع جملات شماره‌های فرد} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} = 135$$

$$\Rightarrow a_1 + (a_1+2d) + (a_1+4d) + \cdots + (a_1+18d) = 135 \Rightarrow 10a_1 + 2d(1+2+3+\cdots+9) = 135$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 2d\left(\frac{9\times(9+1)}{2}\right) = 135 \Rightarrow 10a_1 + 90d = 135 \quad (1)$$

$$\text{مجموع جملات شماره‌های زوج} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} = 150$$

(دهمین عدد فرد)

$$\Rightarrow (a_1+d) + (a_1+3d) + (a_1+5d) + \cdots + (a_1+19d) = 150 \Rightarrow 10a_1 + d(1+3+5+\cdots+19) = 150$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 10^2 d = 150 \Rightarrow 10a_1 + 100d = 150 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} 10a_1 + 90d = 135 \\ 10a_1 + 100d = 150 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 0 \ , \ d = 1/5$$

۵ جملهٔ عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

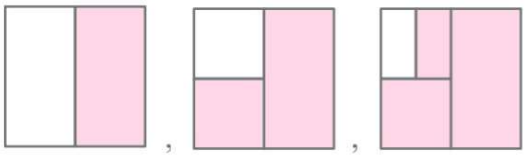
جملات دنباله: $2^0 , 2^1 , 2^2 , \cdots \Rightarrow a_n = 2^{n-1}$

این دنباله یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a = 2^0 = 1$ و قدر نسبت $q = 2$ است. بنابراین:

$$S_n = 255 \Rightarrow a\frac{1-q^n}{1-q} = 255 \Rightarrow 1\times\frac{1-2^n}{1-2} = 255 \Rightarrow 2^n - 1 = 255 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$$

بنابراین باید ۸ جملهٔ اول این دنباله را با هم جمع کنیم تا حاصل، برابر ۲۵۵ شود.

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست‌کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟ الگوی هندسی مربوطه را رسم می‌کنیم و در هر شکل، سطح رنگ‌شده را به دست می‌آوریم. پس باید داشته باشیم:



$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, $\cdots$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow S_n \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1-(\frac{1}{2})^n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow (\frac{1}{2})^n \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100$$

با حدس و آزمایش و اینکه $2^7 = 128$ ، نتیجه می‌شود $n \geq 7$. بنابراین پس از حداقل ۷ مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است.

@cipbooks قبل از استفاده حتما در کنکور سی ای پی بودن محض شوید