خرید آنلاین در gajmarket.com

۲ مجموع همهٔ عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

می‌دانیم عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ عبارت‌اند از: $۱۲, ۱۶, ۲۰, \dots, ۹۶$

که تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱ = ۱۲$ و قدر نسبت $d = ۴$ می‌دهند. ابتدا به دنبال این هستیم که بدانیم این دنباله دارای چند جمله است. داریم: $a_n = ۹۶ \Rightarrow a_۱ + (n-۱)d = ۹۶ \Rightarrow ۱۲ + (n-۱)(۴) = ۹۶ \Rightarrow ۴n + ۸ = ۹۶ \Rightarrow n = ۲۲$

حال باید مجموع ۲۲ جملهٔ اول این دنباله را پیدا کنیم:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \xrightarrow{n=۲۲} S_{۲۲} = \frac{۲۲}{۲}(۱۲ + ۹۶) = ۱۱ \times ۱۰۸ = ۱۱۸۸$$

نکته

اگر جملهٔ اول و جملهٔ آخر و همچنین تعداد جملات یک دنبالهٔ حسابی را داشته باشیم، برای پیدا کردن مجموع جملات آن، کافی است تعداد جملات را در میانگین جملهٔ اول و جملهٔ آخر، ضرب کنیم: $S_n = n(\frac{a_۱ + a_n}{۲})$

فعالیت

صفحهٔ ۴ و ۵ کتاب‌درسی

۱ قدر نسبت و مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی زیر را به دست آورید. $(a \neq ۰)$

$$a, a, a, \dots, a \Rightarrow q = ۱, S_n = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n\text{ تا}} = na$$

۲ دنبالهٔ هندسی مقابل را در نظر بگیرید. $(q \neq ۱)$ $a, aq, aq^۲, \dots$

الف) جملهٔ nام دنباله چیست؟ $a_n = aq^{n-۱}$

نکته

در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع n جملهٔ اول دنباله از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $S_n = a\frac{۱-q^n}{۱-q}$

کار در کلاس

صفحهٔ ۵ کتاب‌درسی

مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی مقابل را به دست آورید. $\frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \dots$

دنبالهٔ داده شده، یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a = \frac{۱}{۸}$ و قدر نسبت $q = ۲$ است.

$$S_n = a\frac{۱-q^n}{۱-q} \Rightarrow S_{۱۰} = \frac{۱}{۸} \times \frac{۱-۲^{۱۰}}{۱-۲} = ۲^{-۳}(۲^{۱۰} - ۱) = ۲^۷ - ۲^{-۳} = ۱۲۸ - \frac{۱}{۸} = ۱۲۷/۸۷۵$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۶ کتاب‌درسی

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانهٔ اول یک دانه گندم و در خانهٔ دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دو برابر خانهٔ قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانهٔ گندم را یک گرم در نظر بگیریم:

الف) این جایزه چند گرم می‌شود؟ صفحهٔ شطرنج ۶۴ خانه دارد. باید حاصل جمع زیر را به دست آوریم:

$$۱ + ۲ + ۴ + ۸ + \dots + ۲^{۶۳} = ۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + \dots + ۲^{۶۳}$$

بنابراین باید مجموع ۶۴ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a = ۱$ و قدر نسبت $q = ۲$ را محاسبه کنیم.

$$S_n = a\frac{۱-q^n}{۱-q} \Rightarrow S_{۶۴} = ۱ \times \frac{۱-۲^{۶۴}}{۱-۲} = ۲^{۶۴} - ۱ \Rightarrow$$ این جایزه، $۲^{۶۴} - ۱$ گرم می‌شود.

ب) نشان دهید جایزهٔ او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تُن خواهد شد. $۱۰۰۰ \text{ میلیارد تُن} = ۱۰۰۰ \times ۱۰^۹ \text{ تُن} = ۱۰^{۱۲} \times ۱۰^۶ g = ۱۰^{۱۸} g$

حال نشان می‌دهیم $۲^{۶۴} - ۱$ از $۱۰^{۱۸}$ بزرگ‌تر است.

$$۲^{۶۴} - ۱ \simeq ۲^{۶۴} = ۲^۴ \times (۲^{۱۰})^۶ = ۱۶ \times (۱۰۲۴)^۶ \simeq ۱۶ \times (۱۰۰۰)^۶ = ۱۶ \times ۱۰^{۱۸} > ۱۰^{۱۸}$$

@cipbooks قبل از ارتقاء حتماً در کانال سی ای پی بوک عضو شوید