در این مبحث می‌خواهیم تعداد حالتهای اتفاق افتادن یک پدیده را، بدون آنکه همه‌ی حالتها را نوشته باشیم، بشماریم. ترکیبیات یعنی چگونه بدون شمارش حالتها، تعداد آن حالتها را مشخص کنیم. اصل جمع و اصل ضرب و جایگشت و ترکیب مهمترین مطالب این فصل می‌باشند که در مبحث احتمال مورد استفاده قرار می‌گیرند. از این مطالب در بحث شماره‌گذاری پلاک اتومبیلها، شماره‌ی ملی افراد، رمزگذاریها و ساختن قفلها با امنیت بالا و ... استفاده می‌شود.

اصل جمع: اگر عملی را بتوانیم به دو روش انجام دهیم به طوریکه در روش اول، m انتخاب و در روش دوم، n انتخاب داشته باشیم، آنگاه آن عمل را می‌توانیم به $m+n$ روش مختلف انجام دهیم. به بیان دیگر، اگر برای شمارش تعداد راههای اتفاق افتادن کاری، بتوانیم آن را به چند حالت مجزا تفکیک کنیم، در این صورت تعداد راههای موجود در هر حالت را جداگانه می‌شماریم و در پایان همه‌ی آنها را با هم جمع می‌کنیم. که این روش شمارش را، اصل جمع می‌گوئیم.

این بدان معناست که در اصل جمع، عملی را به m حالت از یک روش **یا** به n حالت از روش دیگری می‌توانیم انجام دهیم؛ در نتیجه تعداد کل حالتهای انجام این عمل "$m+n$" خواهد بود.

تعمیم اصل جمع: اگر عملی را بتوان به k روش انجام داد به طوریکه برای انجام آن از روش اول، m_1 حالت، از روش دوم، m_2 حالت، ... و از روش k ام، m_k حالت وجود داشته باشد آنگاه برای انجام این عمل، $m_1+m_2+\cdots+m_k$ حالت مختلف وجود دارد.

اصل ضرب: اگر انجام دادن کاری، شامل دو مرحله باشد که برای انجام مرحله‌ی اول آن m روش وجود داشته باشد **و** برای هرکدام از این m روش، مرحله‌ی دوم را بتوان به n روش مختلف انجام دهیم، در این صورت این کار، به $m\times n$ روش مختلف قابل انجام است. اصل ضرب نیز مانند اصل جمع، برای چند مرحله قابل تعمیم می‌باشد.

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد که مرحله‌ی اول به m_1 روش **و** مرحله‌ی دوم به m_2 روش **و** ... **و** مرحله‌ی k ام به m_k روش قابل انجام باشند آنگاه این کار به "$m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$" روش مختلف قابل انجام می‌باشد.

در واقع می‌توان گفت که در اصل ضرب، اگر عملی را از یک روش، به m حالت **و** از روشی دیگر به n حالت بتوانیم انجام دهیم آنگاه این عمل به "$m\times n$" حالت مختلف قابل انجام می‌باشد.

Scanned with CamScanner

تذکر ۱ : در استفاده از اصل جمع ، عمل مورد نظر بایستی فقط از یکی از روشها انجام شود.

تذکر ۲ : در استفاده از اصل ضرب ، هر دو مرحله‌ی عمل مورد نظر باید انجام شود.

تذکر ۳ : اگر بین مراحل یا کارهایی که قرار است انجام دهیم ، «و» آمده باشد باید از اصل ضرب استفاده کنیم یعنی تعداد راههای هرکدام از آن کارها را بدست آوریم و در هم ضرب کنیم و اگر بین مراحل یا کارهایی که قرار است انجام دهیم ، «یا» آمده باشد باید از اصل جمع استفاده کنیم یعنی تعداد راههای هرکدام از آن کارها را بدست آوریم و با هم جمع کنیم.

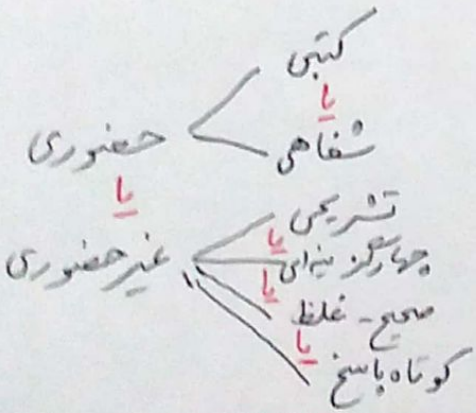
مثال ۱ : معلم یک درس برای برگزاری یک آزمون می‌تواند روش حضوری یا غیرحضوری را انتخاب کند در روش حضوری ، آزمون می‌تواند کتبی یا شفاهی و در روش غیرحضوری، آزمون می‌تواند به شکل تشریحی یا چهارگزینه‌ای یا صحیح-غلط یا کوتاه پاسخ برگزار شود ، هر فرد به چند روش می‌تواند در این آزمون شرکت کند ؟

حل : با توجه به اطلاعات داده شده در مثال ، از اصل جمع استفاده می‌کنیم پس داریم :

یعنی هر فردی می‌تواند به یکی از شش روش موجود در آزمون شرکت نماید پس شش انتخاب پیش روی او وجود دارد.

تعداد کل حالات = ۲ + ۴ = ۶

این مطلب را می‌توانیم با استفاده از نمودار درختی به صورت مقابل نیز نشان دهیم .



مثال ۲ : منابع یک آزمون به صورت کتاب چاپی یا pdf الکترونیکی می‌باشد ، اگر سه نسخه‌ی چاپی و چهار نسخه‌ی pdf الکترونیکی موجود باشد و هر فرد فقط مجاز به استفاده از یک مورد باشد به چند طریق می‌تواند منبع این آزمون را انتخاب کند؟

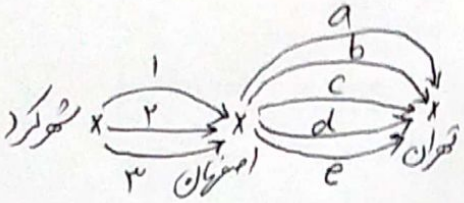
حل : با توجه به اطلاعات داده شده در مثال ، از اصل جمع استفاده می‌کنیم پس داریم :

تعداد انتخابها = ۳ + ۴ = ۷

پس این فرد یکی از این هفت مورد را می‌تواند انتخاب کند.

Scanned with CamScanner

مثال ۳: از شهرکرد به اصفهان سه مسیر و از اصفهان به تهران پنج مسیر وجود دارد به چند طریق می‌توانیم از شهرکرد به تهران سفر کنیم به شرطی که از اصفهان نگذریم؟



حل: با توجه به معرفی مسئله و با توجه به اصل ضرب داریم:

تعداد راه‌ها = طریق $۳ \times ۵ = ۱۵$

با توجه به شکل می‌توانیم مسیرهای ممکن را بنویسیم:

۱a, ۱b, ۱c, ۱d, ۱e, ۲a, ۲b, ۲c, ۲d, ۲e, ۳a, ۳b, ۳c, ۳d, ۳e

پس به ۱۵ طریق مختلف می‌توانیم از شهرکرد به تهران سفر کنیم به شرطی که از اصفهان نگذریم.

مثال ۴: در یک شهر ۳ سینما و ۴ پارک و ۲ ورزشگاه وجود دارد شخصی وارد این شهر شده و می‌خواهد از این مکان‌ها استفاده کند به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

حل: این مرد برای انتخاب سینما، ۳ انتخاب و برای رفتن به پارک، ۴ انتخاب و برای رفتن به ورزشگاه ۲ انتخاب پیش رو دارد پس بنابه اصل ضرب به $۳ \times ۴ \times ۲ = ۲۴$ طریق می‌تواند اینکار را انجام دهد البته توجه کنید که حتماً از سه مکان استفاده می‌کند و از هرکدام یکی را انتخاب می‌کند.

مثال ۵: در یک رستوران ۳ نوع برنج و ۴ نوع خورشت و ۵ نوع نوشیدنی و ۳ نوع نان و دو نوع ماست وجود دارد یک مرد به چند طریق می‌تواند غذای خود را انتخاب کند به شرطی که از هر مورد فقط یکی را انتخاب کند و از همه‌ی موارد استفاده کند؟

حل: با توجه به اصل ضرب داریم:

$$۳ \times ۴ \times ۵ \times ۳ \times ۲ = ۳۶۰$$

یعنی این مرد به ۳۶۰ طریق می‌تواند غذای خود را انتخاب کند که در آن برنج، خورشت، نوشیدنی، نان و ماست وجود داشته باشد و از هرکدام فقط یک مورد باشد.

مثال ۶: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ اگر تکرار ارقام مجاز نباشد چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

حل: چون نوشتن عدد سه رقمی شامل سه مرحله‌ی: نوشتن صدگان، نوشتن دهگان و نوشتن یکان است پس طبق اصل ضرب داریم:

عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام	عدد سه رقمی با تکرار ارقام
ص د ی	ص د ی
$۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$	$۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$

Scanned with CamScanner

مثال ۷ : از بین ۵ ایرانی و ۳ آلمانی و ۴ ژاپنی به چند طریق می توان ۲ نفر با ملیت‌های مختلف انتخاب کرد ؟

حل : ترکیب این دو نفر یا ایرانی - آلمانی است یا ایرانی - ژاپنی است یا آلمانی - ژاپنی می باشد

پس بنابه اصل جمع و اصل ضرب داریم : $۵\times۳ + ۵\times۴ + ۴\times۳ = ۱۵+۲۰+۱۲ = ۴۷$

(آلمانی ژاپنی، ژاپنی ایرانی، آلمانی ایرانی)

مثال ۸ : با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت که زوج یا بزرگتر از سیصد باشند؟ اگر تکرار ارقام مجاز نباشد چند عدد سه رقمی با شرایط گفته شده می توان نوشت؟

حل : با توجه به اصل ضرب باید اعداد سه رقمی زوج و همچنین اعداد سه رقمی بزرگتر از سیصد را بیابیم سپس با استفاده از اصل جمع آنها را با هم جمع کنیم پس داریم :

سه رقمی زوج: ی د ص — ۲ یا ۴ — $۵\times۵\times۲ = ۵۰$

سه رقمی بزرگتر از سیصد: ۳ یا ۴ یا ۵ — $۳\times۵\times۵ = ۷۵$

$\Rightarrow$ جواب $= ۵۰+۷۵ = ۱۲۵$

اگر تکرار مجاز نباشد آنگاه داریم :

سه رقمی زوج: ی د ص — ۲ یا ۴ — $۴\times۳\times۲ = ۲۴$

سه رقمی بزرگتر از سیصد: ۳ یا ۴ یا ۵ — $۳\times۴\times۳ = ۳۶$

$\Rightarrow$ جواب $= ۲۴+۳۶ = ۶۰$

مثال ۹ : با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ الف - چند عدد سه رقمی می توان نوشت ؟

ب - چند تا از این اعداد فرد هستند؟ پ - چند تا از این اعداد زوج هستند ؟

ت - چند تا از این اعداد کوچکتر از سیصد هستند ؟ ث - چند تا از این اعداد رقم صدگان آن مربع کامل است؟

حل : چون صفر در بین این رقم‌هاست و می دانیم که رقم سمت چپ اعداد ، صفر نمی‌تواند باشد پس :

الف) صفر نیست: ی د ص — $۴\times۵\times۵ = ۱۰۰$

ب) صفر نیست: ی د ص — ۱ یا ۳ — $۴\times۵\times۲ = ۴۰$

برای اینکه عددی فرد باشد باید رقم یکان آن فرد باشد پس ۱ یا ۳ می توانیم قرار دهیم

چون تعداد اعداد سه رقمی و تعداد اعداد سه رقمی فرد را بدست آورده‌ایم می توانیم تفاضل آنها را محاسبه کنیم تا تعداد اعداد سه رقمی زوج بدست آید.

پ) روش اول : $۱۰۰ - ۴۰ = ۶۰$

روش دوم: برای اینکه عدد ساخته شده زوج باشد باید رقم یکان آن ۰ یا ۲ یا ۴ باشد

۴ : صفر نیست — $۴\times۵\times۱ = ۲۰$

یا ۲ : صفر نیست — $۴\times۵\times۱ = ۲۰$

یا ۰ : صفر نیست — $۴\times۵\times۱ = ۲۰$

پس داریم : عدد سه رقمی زوج $\Rightarrow$ اصل جمع $۲۰+۲۰+۲۰ = ۶۰$

Scanned with CamScanner

مثال ۱۰: مثال قبل را در صورتی که تکرار ارقام مجاز نباشد، حل کنید.

حل: در مکان صدگان، صفر نمی‌تواند قرار بگیرد پس یکی از ارقام ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ قرار می‌گیرد

الف) صفر نیست ← ی د ص

۴ × ۴ × ۳ = ۴۸ عدد سه رقمی

چون تکرار مجاز نیست پس در مکان دهگان، یکی از تعداد این چهار رقم کم می‌شود یعنی می‌شود سه تا ولی چون صفر هم می‌تواند باشد پس مکان دهگان به ۴ طریق می‌تواند پر شود و رقم یکان به سه طریق می‌تواند انتخاب شود.

ب) صفر نیست ← ی د ص ← ۱ یا ۳

۳ × ۳ × ۲ = ۱۸ عدد سه رقمی فرد

چون می‌خواهیم عدد سه رقمی فرد باشد پس رقم یکان می‌تواند ۱ یا ۳ باشد پس اگر یکی از این دو رقم را در مکان یکان قرار دهیم چهار رقم دیگری می‌ماند که یکی از آنها صفر است و در مکان صدگان نمی‌تواند قرار بگیرد پس برای صدگان، سه انتخاب وجود دارد، حال اگر یکی از این سه رقم را در صدگان قرار دهیم، دو رقم دیگر و صفری می‌ماند که می‌توانیم در مکان دهگان بنویسیم یعنی برای دهگان نیز سه انتخاب وجود دارد.

ب) روش اول: ۴۸ − ۱۸ = ۳۰ عدد زوج سه رقمی

روش دوم:

ی د ص ← ۰ ← ۴ × ۳ × ۱ = ۱۲

یا صفر نیست ← ی د ص ← ۲ ← ۳ × ۳ × ۱ = ۹

یا صفر نیست ← ی د ص ← ۴ ← ۳ × ۳ × ۱ = ۹

۱۲ + ۹ + ۹ = ۳۰ ⇐ اصل جمع عدد زوج سه رقمی

اعدادی که به صورت توان دوم یک عدد گویا باشند را مربع کامل می‌گوییم.

ت) ی د ص ← ۱ یا ۴

۲ × ۴ × ۳ = ۲۴ عدد سه رقمی با رقم صدگان مربع کامل

ت) ی د ص ← ۱ یا ۲

۲ × ۴ × ۳ = ۲۴ عدد سه رقمی کوچکتر از ۲۵۰

* **تذکر ۱:** در عدد نویسی بدون تکرار ارقام، اگر شرط خاصی نداشته باشیم (مثلاً زوج یا فرد بودن و...) و در ارقام داده شده صفر وجود نداشته باشد، در جایگاه سمت چپ تعداد کل ارقام داده شده را می‌نویسیم و در جایگاه‌های بعدی تعداد را یکی یکی کم می‌کنیم و می‌نویسیم. و اگر شرط خاصی داشته باشیم ابتدا باید آن شرط را رعایت کنیم و بعد جایگاه‌های دیگر را پر کنیم.

تذکر ۲: در کد نویسی، صفر می‌تواند در تمام جایگاه‌ها قرار گیرد.

مثال ۱۱: با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ چند کد سه رقمی می‌توان نوشت؟

حل: چون کد می‌نویسیم پس صفر در هر سه مکان می‌تواند قرار بگیرد بنابراین:

۵ × ۵ × ۵ = ۱۲۵ کد سه رقمی

«سر بلند و پیروز باشید» خالقی

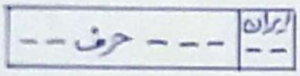
Scanned with CamScanner

مثال ۱۲: یک آزمون چهارگزینه‌ای شامل ۲۰ سؤال است یک فرد به چند طریق می‌تواند به این آزمون پاسخ دهد؟ اگر از او خواسته شود که به همه‌ی سؤالات پاسخ دهد این کار به چند طریق ممکن است؟

حل: چون آزمون چهارگزینه‌ای است و فردی می‌تواند سؤالها را بدون پاسخ نیز بگذارد پس در واقع در هر سؤال ۵ انتخاب برای او وجود دارد: گزینه‌ی اول یا گزینه‌ی دوم یا گزینه‌ی سوم یا گزینه‌ی چهارم یا جواب ندهد. پس برای سؤال ۱ پنج انتخاب و برای سؤال ۲ پنج انتخاب و ... و برای سؤال ۲۰ نیز پنج انتخاب وجود دارد پس تعداد $\underbrace{5\times5\times\cdots\times5}_{20\text{ تا}}=5^{20}$ انتخاب برای او وجود دارد.

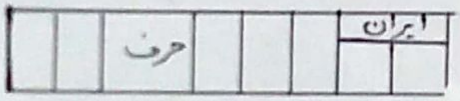
اگر از او خواسته شود که به همه‌ی سؤالات پاسخ دهد پس در هر سؤالی ۴ انتخاب وجود دارد یعنی 4^{20} حالت مختلف برای پاسخگویی وجود دارد.

مثال ۱۳: برای شماره گذاری پلاک خودروها مطابق شکل زیر چهار قسمت در نظر گرفته شده است:



از سمت چپ یک عدد دو رقمی پس یک حرف از حروف الفبای فارسی و بعد از آن یک عدد سه رقمی و در پایان یک عدد دو رقمی نوشته می‌شود اگر در اعداد مورد استفاده رقم صفر نباشد و در قسمت حروف نیز حروف «پ» و «ع» و «ث» وجود نداشته باشند به چند طریق می‌توانیم برای یک خودرو شماره‌ی پلاک انتخاب کنیم.

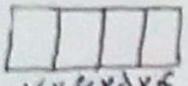
حل: با توجه به مفروضات مثال داریم:



$9\times9\times\ 29\times9\times9\times9\times9\times9=9^7\times29$

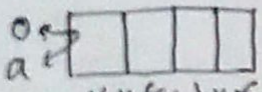
مثال ۱۴: با حروف کلمه‌ی «Farnosh» و بدون تکرار حروف:

الف- چند کلمه‌ی چهار حرفی می‌توان نوشت؟



$7\times6\times5\times4=840$

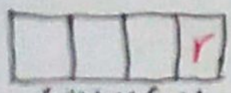
ب- چند تا از این کلمات چهار حرفی با حرف صدادار شروع می‌شوند؟



در بین حروف این کلمه دو حرف o و a صدادار هستند که در جایگاه سمت چپ می‌توانند قرار گیرند حال اگر یکی از این دو حرف را در آن قرار دهیم برای جایگاه دوم ۶ حرف و برای جایگاه سوم ۵ حرف و برای جایگاه آخر ۴ حرف، می‌توانیم انتخاب کنیم.

$2\times6\times5\times4=240$

پ- چند تا از این کلمات به حرف «ر» ختم می‌شوند؟



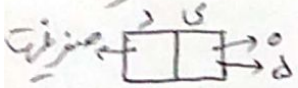
$6\times5\times4\times1=120$

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

Scanned with CamScanner

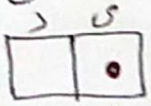
مثال ۱۵: چند عدد دو رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ چند عدد دو رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام وجود دارد؟

حل: برای اینکه عددی مضرب ۵ باشد رقم یکان آن باید ۰ یا ۵ باشد از طرفی رقم دهگان صفر نمی‌تواند باشد بنابراین:

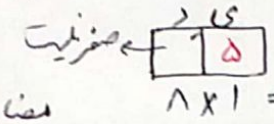


$9 \times 2 = 18 \longrightarrow$ عدد دو رقمی مضرب ۵

اگر تکرار مجاز نباشد آنگاه دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم و سپس بنابه اصل جمع، حالتها را با هم جمع می‌کنیم:



$9 \times 1 = 9$ مضارب ۵ که به صفر ختم می‌شوند



$8 \times 1 = 8$ مضارب ۵ که به ۵ ختم می‌شوند

$9 + 8 = 17 \Longrightarrow$ اصل جمع عدد دو رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام

تذکر: تنها عدد دو رقمی مضرب ۵ که رقمهای تکراری دارد ۵۵ می‌باشد پس برای قسمت دوم می‌توانیم این عدد را از ۱۸ مضرب دو رقمی ۵ کنار بگذاریم یعنی: $18 - 1 = 17$

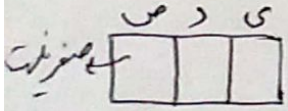
مثال ۱۶: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد می‌توان نوشت که از ۳۰۰۰ بزرگتر باشند؟

حل: چون می‌خواهیم ارقام این عدد فرد باشند پس باید از رقمهای ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ استفاده کنیم از طرفی رقم سمت چپ، ۱ نمی‌تواند باشد تا عدد بزرگتر از ۳۰۰۰ شود پس برای رقم سمت چپ (هزارگان) چهار انتخاب وجود دارد برای رقم صدگان، ۱ هم می‌تواند باشد پس با سه رقم باقیمانده، چهار انتخاب هم برای صدگان وجود دارد برای دهگان، سه انتخاب و برای یکان، دو انتخاب وجود خواهد داشت بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

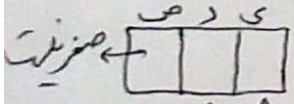
$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$

مثال ۱۷: چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که حداقل یک رقم بزرگتر از ۷ داشته باشد؟

حل: می‌توانیم کل اعداد سه رقمی را در نظر بگیریم و سپس اعدادی که همه‌ی رقمهای آنها کوچکتر از ۸ هستند را از روی آنها برداریم (روش متمم) پس داریم:



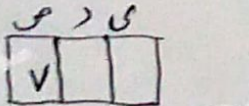
$9 \times 10 \times 10 = 900$ عدد سه رقمی



$7 \times 8 \times 8 = 448 \rightarrow$ عدد سه رقمی با ارقام کمتر از ۸

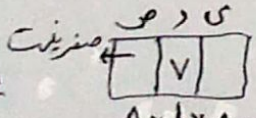
$900 - 448 = 452$ عدد سه رقمی که حداقل یک رقم بزرگتر از ۷ دارد.

بدون تکرار ارقام چند عدد سه رقمی شامل هفت داریم؟



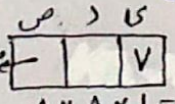
$1 \times 9 \times 8 = 72$

یا



$8 \times 1 \times 8 = 64$

یا



$8 \times 8 \times 1 = 64$

عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام که در آنها رقم ۷ وجود دارد.

$72 + 64 + 64 = 200 \longrightarrow$ اصل جمع $\Longrightarrow$

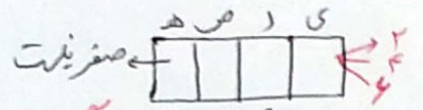
Scanned with CamScanner

مثال ۱۸ : چند عدد چهار رقمی زوج، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که از ۷۰۰۰ کوچکتر باشند؟

حل: چون اعداد خواسته شده باید کوچکتر از ۷۰۰۰ باشند پس باید از ارقام ۰ و ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ استفاده کنیم ولی صفر در رقم هزارگان نمی‌تواند باشد از طرفی چون اعداد باید زوج باشند پس رقم یکان آنها باید ۰ و ۲ و ۴ و ۶ باشد پس باید دو حالت در نظر بگیریم و از اصل جمع استفاده کنیم بنابراین داریم:



$۶ \times ۵ \times ۴ \times ۱ = ۱۲۰$

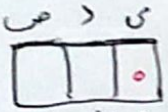


$۵ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۳۰۰$ ← همگی به جز صفر و رقم انتخابی یکان

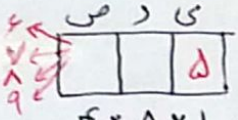
عدد $\Rightarrow$ اصل جمع $۱۲۰ + ۳۰۰ = ۴۲۰$

مثال ۱۹ : چند عدد سه رقمی مضرب ۵ با ارقام متمایز وجود دارد که از ۵۰۰ بزرگتر نباشد؟

حل: چون اعداد مضرب ۵ باید باشند پس رقم یکان ۰ یا ۵ باید قرار گیرد و چون ارقام متمایز باید باشند پس تکرار مجاز نیست ازطرفی رقم صدگان باید بزرگتر از ۴ باشد تا عدد حاصل بزرگتر از ۵۰۰ شود بنابراین داریم:



$۵ \times ۸ \times ۱ = ۴۰$



$۴ \times ۸ \times ۱ = ۳۲$

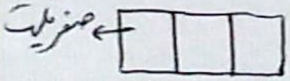
از بین ارقام ۰ تا ۹ باید دو رقم یکان و رقمی که در صدگان قرار گرفته را کم کنیم

عدد $\Rightarrow$ اصل جمع $۴۰ + ۳۲ = ۷۲$

عدد متقارن: عددی است که از هر دو طرف به یک صورت خوانده می‌شود مثلاً ۴۵۴ یا ۶۴۴۶

مثال ۲۰ : چند عدد سه رقمی متقارن می‌توانیم بنویسیم؟

حل: چون می‌خواهیم عدد متقارن باشد پس تکرار مجاز است.



$۹ \times ۱۰ \times ۱ = ۹۰$

در یکان صدگان، صفر نمی‌تواند باشد پس ۹ انتخاب برای آن وجود دارد و چون می‌خواهیم عدد متقارن باشد پس باید رقم یکان، مانند رقم صدگان باشد پس برای رقم یکان ۱ انتخاب وجود دارد (همانی که در صدگان نوشتیم) و برای رقم دهگان ارقام ۰ تا ۹ را می‌توانیم انتخاب کنیم.

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی که بخواهیم شامل k عضو خاص بوده و فاقد m عضو معلوم باشد برابر است با: ۲^{n-k-m}.

مثال ۲۱: مجموعه‌ی $A=\{۱, ۲, ۳, \{۱\}\}$ چند زیر مجموعه دارد که شامل ۲ عضو {۱} در آنها نیست؟

حل: با توجه به نکته‌ی بالا داریم:

تعداد زیر مجموعه‌های مطلوب $= ۲^{۴-۱-۱} = ۲^{۴-۲} = ۲^{۲} = ۴$

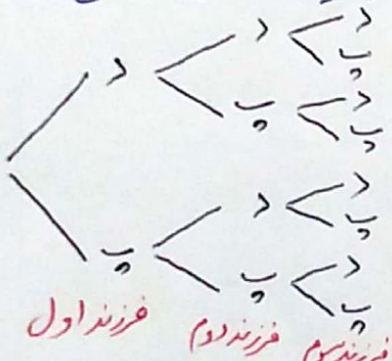
Scanned with CamScanner



مثال ۲۲: در یک صفحه‌ی شطرنج می‌خواهیم یک خانه‌ی سفید و یک خانه‌ی سیاه طوری انتخاب کنیم که در یک سطر و ستون نباشند تعداد حالت‌های ممکن را بدست آورید.

حل: فرض کنیم ابتدا خانه‌ی سفید را انتخاب کنیم این کار به ۳۲ حالت قابل انجام است چون می‌خواهیم خانه‌ی سیاهی که انتخاب می‌کنیم در یک سطر و ستون با خانه‌ی سفید نباشد پس سطر و ستون شامل خانه‌ی سفید انتخابی را حذف می‌کنیم بنابراین یک مربع ۷ در ۷ می‌ماند که ۲۴ خانه‌ی آن سیاه است پس تعداد انتخاب‌های خواسته شده برابر است با: $۳۲ \times ۲۴ = ۷۶۸$.

مثال ۲۳: اگر خانواده‌ای بخواهد سه فرزند داشته باشد کلیه‌ی حالت‌های ممکن برای جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.



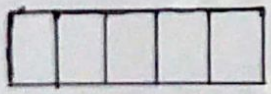
حل: فرزند اول می‌تواند دختر یا پسر باشد
فرزند دوم هم بدون توجه به جنسیت فرزند اول، می‌تواند دختر یا پسر باشد و فرزند سوم نیز بدون توجه به جنسیت دو فرزند قبلی می‌تواند دختر یا پسر باشد پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

حالت‌های ممکن: (پ پ پ)، (د پ پ)، (پ د پ)، (د د پ)، (پ پ د)، (د پ د)، (پ د د)، (د د د)

مثال ۲۴: آرش ۲ جفت کفش، ۳ تا شلوار و ۴ تا پیراهن و ۳ جفت جوراب دارد او به چند طریق می‌تواند لباس بپوشد که از هرکدام از موارد بالا استفاده کند و فقط یک بار استفاده نماید؟

حل: طبق اصل ضرب داریم: $۲ \times ۳ \times ۴ \times ۳ = ۷۲$

مثال ۲۵: به چند طریق می‌توانیم ۵ بلوک ساختمانی را با سه رنگ مختلف، رنگ بزنیم به شرطی که بلوک‌های مجاور هم‌رنگ نباشند؟



حل: بلوک اول را با هرکدام از رنگ‌ها می‌توانیم رنگ بزنیم پس سه انتخاب داریم ولی بلوک‌های بعدی را فقط با دو رنگ می‌توانیم رنگ‌آمیزی کنیم پس داریم: $۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۴۸$

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

Scanned with CamScanner

تمرین ۱ : با حروف کلمه‌ی «گروهان» و بدون تکرار حروف : الف - چند کلمه‌ی چهار حرفی می‌توان نوشت ؟ ب - چند تا از این کلمات با حرف نقطه‌دار شروع می‌شوند؟ پ - چند تا از این کلمات با حرف «الف» شروع می‌شوند؟ ت - چند تا از این کلمات با حرف «و» شروع و با حرف «د» ختم می‌شوند؟

تمرین ۲ : یک سکه را چهار بار پرتاب می‌کنیم چند حالت ممکن است برای این آزمایش اتفاق افتد؟

تمرین ۳ : چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز و زوج می‌توان نوشت که از ۶۰۰ بزرگتر باشند؟ چند تا از این اعداد مضرب ۱۰ می‌باشند؟

تمرین ۴ : در یک صفحه‌ی شطرنجی ۴×۴ که خانه‌های آن سیاه و سفید است ، می‌خواهیم یک خانه‌ی سفید و یک خانه‌ی سیاه انتخاب کنیم به طوری که در یک سطر و ستون نباشند؛ این کار به چند طریق قابل انجام است؟

تمرین ۵ : با ارقام ۱ تا ۸ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت که ارقام آن یک در میان زوج و فرد باشند؟

تمرین ۶ : هر شناسنامه یک شماره‌ی سریال به صورت [------] [حرف / --] که شامل یک حرف فارسی و در زیر آن یک عدد دو رقمی و بعد از آن یک عدد شش رقمی نوشته شده است چند حالت برای نوشتن شماره‌ی سریال شناسنامه وجود دارد؟

تمرین ۷ : یک ورزشگاه دارای سه ورودی است ؛ در ورودی غربی آن ۴ درب و در ورودی شرقی آن ۳ درب و در ورودی جنوبی آن ۲ درب وجود دارد یک مرد به چند طریق می‌تواند وارد ورزشگاه شود؟

تمرین ۸ : با ارقام ۰ و ۳ و ۴ و ۵ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ چند تا از این اعداد بر ۴ بخش‌پذیرند؟ در چند تا از این اعداد رقم صفر در وسط قرار می‌گیرد؟ چند تا از این اعداد متقارن هستند؟

تمرین ۹ : تمرین ۸ را با فرض تکراری نبودن ارقام حل کنید.

تمرین ۱۰ : چند عدد چهار رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که از ۵۰۰۰ بزرگتر و از ۸۰۰۰ کوچکتر باشند؟

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

Scanned with CamScanner

فاکتوریل: اگر اعداد طبیعی از ۱ تا n را در هم ضرب کنیم این حاصل ضرب را با نماد "!n" نشان می‌دهیم.

یعنی: $n! = 1\times2\times3\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n$ یا $n! = n(n-1)(n-2)\cdots\times3\times2\times1$.

پس فاکتوریل یک نماد خلاصه نویسی برای حاصل ضرب اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n می‌باشد.

مثال: حاصل هر قسمت را بدست آورید:

الف) $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

ب) $8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 40320$

پ) $3!\times4! = 3\times2\times1\times4\times3\times2\times1 = 144$

ت) $6!+2! = 6\times5\times4\times3\times2\times1+2\times1 = 720+2 = 722$

ج) $6!-4! = 6\times5\times4\times3\times2\times1-4\times3\times2\times1 = 720-24 = 696$

چ) $\frac{8!}{4!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = 1680$

تذکر ۱: $0! = 1$, $1! = 1$

تذکر ۲: $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)(n-3)!$

تذکر ۳: $n!+m! \neq (m+n)!$, $n!-m! \neq (n-m)!$, $n!\times m! \neq (m\times n)!$, $n!\div m! \neq (n\div m)!$

مثال: ساده کنید:

الف) $\frac{8!}{4!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4!}{4!} = 8\times7\times6\times5 = 1680$

ب) $\frac{10!}{7!+3!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1+3\times2\times1} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4}{7\times6\times5\times4+1} = \frac{604800}{841}$

پ) $\frac{12!}{10!} = \frac{12\times11\times10!}{10!} = 132$

ت) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\times(n-1)!}{(n-1)!} = n$

ث) $\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$

ج) $\frac{2\times4!}{8!} = \frac{2\times4!}{8\times7\times6\times5\times4!} = \frac{2}{1680} = \frac{1}{840}$

چ) $\frac{(n+2)!}{n!\times2!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!\times2\times1} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

ح) $\frac{5!}{4!-3!} = \frac{5\times4\times3!}{4\times3!-3!} = \frac{5\times4\times3!}{3!(4-1)} = \frac{20}{3}$

خ) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)\times n$

د) $\frac{8!}{6!+5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{6\times5!+5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!(6+1)} = \frac{8\times7\times6}{7} = 8\times6 = 48$

Scanned with CamScanner

مثال: مقدار n را از تساوی‌های زیر بدست آورید:

الف) $۲۱۰ \times ۲۴ = (n+1)! \rightarrow (۷\times۶\times۵)\times(۴\times۳\times۲\times۱) = (n+1)! \Rightarrow ۷! = (n+1)!$

$\Rightarrow (n+1) = ۷ \Rightarrow n = ۷-۱ \Rightarrow \boxed{n=۶}$

ب) $\frac{۸۰(۸!+۷!)}{(۵!+۳!)!} = n! \Rightarrow \frac{۸۰(۸\times۷!+۷!)}{(۱+۳\times۲\times۱)!} = n! \Rightarrow \frac{۸۰(۷!(۸+۱))}{۷!} = n! \Rightarrow ۸۰\times۹ = n!$

$\Rightarrow n! = ۷۲۰ \Rightarrow n! = ۶! \Rightarrow \boxed{n=۶}$

پ) $\frac{(n-۲)!}{۲n!} = \frac{۱}{۴!} \Rightarrow \frac{(n-۲)!}{۲\times n\times(n-۱)\times(n-۲)!} = \frac{۱}{۴\times۳\times۲\times۱} \Rightarrow \frac{۱}{۲n(n-۱)} = \frac{۱}{۴\times۳\times۲\times۱}$

$\Rightarrow n(n-۱) = ۴\times۳$ چون n و n-۱ دو عدد طبیعی متوالی هستند پس $n=۴$ و $n-۱=۳$ $\boxed{n=۴}$

$\Rightarrow n^۲-n = ۱۲ \Rightarrow n^۲-n-۱۲=۰ \Rightarrow (n-۴)(n+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} n-۴=۰ \\ n+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{n=۴} \\ n=-۳ \end{cases}$ غ ق ق

ت) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = ۳! \Rightarrow \frac{(n+۱)n(n-۱)!}{(n-۱)!} = ۳\times۲\times۱ \Rightarrow n(n+۱)=۶ \Rightarrow n^۲+n-۶=۰ \Rightarrow$

$(n+۳)(n-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} n+۳=۰ \\ n-۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=-۳ \\ \boxed{n=۲} \end{cases}$ غ ق ق

ث) $\frac{(n+۱)!}{(n-۲)!} = n^۳-۱۰ \Rightarrow \frac{(n+۱)n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = n^۳-۱۰ \Rightarrow n(n^۲-۱) = n^۳-۱۰$

$\Rightarrow n^۳-n = n^۳-۱۰ \Rightarrow -n = -۱۰ \Rightarrow \boxed{n=۱۰}$

مثال: حاصل عبارت روبرو را بدست آورید: $۱(۱!)+۲(۲!)+۳(۳!)+\cdots+۲۰(۲۰!)$

حل: اگر $۱!$ را به این عبارت اضافه و کم کنیم داریم:

$= ۱! + ۱(۱!)+۲(۲!)+۳(۳!)+\cdots+۲۰(۲۰!) - ۱!$

$= ۱! + ۲(۲!)+۳(۳!)+\cdots+۲۰(۲۰!) - ۱ = ۲! + ۲(۲!)+۳(۳!)+\cdots+۲۰(۲۰!) - ۱$

$= ۱!(\underbrace{۱+۱}_{۲}) + ۲(۲!)+۳(۳!)+\cdots+۲۰(۲۰!) - ۱ = ۳! + ۳(۳!)+\cdots+۲۰(۲۰!) - ۱$

$= ۲!(\underbrace{۱+۲}_{۳}) + ۳(۳!)+\cdots+۲۰(۲۰!) - ۱ = ۴! + \cdots + ۲۰(۲۰!) - ۱$

$= ۳!(\underbrace{۱+۳}_{۴}) + \cdots + ۲۰(۲۰!) - ۱ = ۲۱! - ۱$

نتیجه: $۱(۱!)+۲(۲!)+۳(۳!)+\cdots+(n-۱)[(n-۱)!]+n(n!) = (n+۱)! - ۱$

Scanned with CamScanner

جایگشت: به هرکدام از حالتهای کنار هم قرار گرفتن n شیئ متمایز، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم تعداد جایگشتهای n شیئ متمایز برابر با $n!$ می باشد.

مثال: پنج نفر به چند طریق می‌توانند کنار هم بایستند و عکس یادگاری بگیرند؟

جواب: چون هر عکس در واقع یک جایگشت از این ۵ نفر می باشد پس به $5!$ روش می‌توانند کنار هم بایستند و عکس بگیرند. این مثال را از اصل ضرب نیز می‌توانیم حل کنیم بدین ترتیب که یک عکس را یک جایگاه ۵ نفره در نظر بگیریم و این جایگاهها را این ۵ نفر با هم پر کنند پس داریم:

جایگاه: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

توجه کنید که: اگر هر پنج نفر بخواهند در یک صف یا ستون بایستند نیز تعداد جایگشتها همان $5!$ است که با تعداد حالتهای عکس گرفتن آنها یکسان است.

جایگشتهای دوری: اگر n شیئ متمایز داشته باشیم و بخواهیم آنها را دور یک دایره قرار دهیم هرکدام از حالتهای قرارگرفتن آنها دور این دایره را یک «جایگشت دوری» از آنها می‌گوییم که تعداد این جایگشتها برابر با $(n-1)!$ می باشد. زیرا اگر شیئ اول را در نظر بگیریم فرقی نمی‌کند که در کدام جایگاه قرار گیرد پس به $!$ حالت در یکی از جایگاهها قرار می‌گیرد، شیئ سمت راست این شیئ به $n-1$ حالت می‌تواند باشد، شیئ سمت راست این شیئ جدید به $n-2$ حالت و به همین ترتیب پیش می‌رود پس تعداد کل حالتها $(n-1)!$ می باشد. به این صورت نیز می‌توانیم بیان کنیم که به ازای هر جایگشت خطی از این n شیئ، n حالت برای جایگشت دوری آنها وجود دارد (با چرخاندن دایره) پس: $\frac{n!}{n}$ حالت خواهیم داشت یعنی $\frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$ حالت وجود دارد.

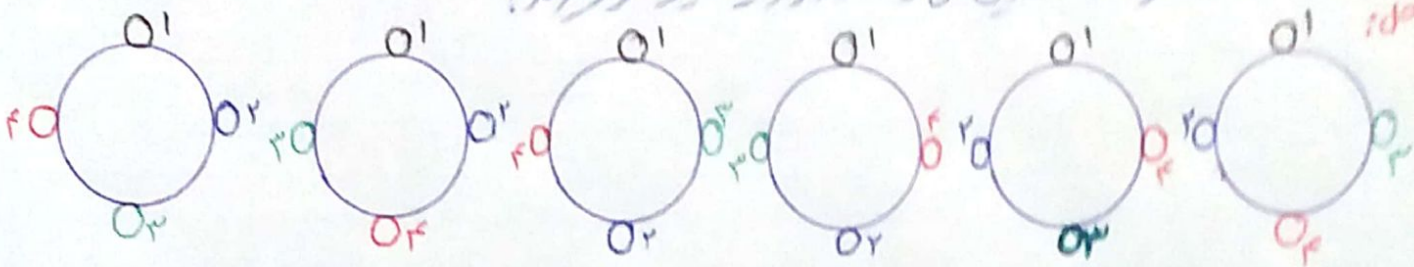
مثال: سه نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند؟

حل: این سه نفر هر طوری دور میز بنشینند یکی از این دو حالت پیش می‌آید. یعنی به هر حالت دیگری که دور میز قرار گیرند با چرخش میز به یکی از همین دو حالت تبدیل می‌شود که همان $(3-1)! = (n-1)!$ می باشد. به بیان دیگر اگر جایگاههای مشکی، سبز و قرمز را هر طور جابه‌جا کنیم، یکی از همین دو حالت خواهد بود.

Scanned with CamScanner

مثال: چهار نفر به چند طریق می توانند دور یک میز قرار گیرند؟

حل:



اگر جهار جایگاه مشکی، آبی، سبز و قرمز دور این میز برای چهار نفر در نظر بگیریم، یکی از شش حالت بالا ممکن است اتفاق افتد بدین ترتیب که نفر اول را در جایگاه مشکی قرار دهیم بن در سمت راست او می تواند نفر دوم یا سوم یا چهارم قرار گیرد و در جایگاه سمت راست این نفر جدید، یکی از دو نفر باقیمانده قرار گیرند یعنی به دو حالت و در جایگاه سمت راست این مرد جدید، یک نفر باقیمانده قرار می گیرد که به یک حالت امکان پذیر است پس به $۱\times۳\times۲\times۱=۶$ حالت می توانند دور یک میز قرار گیرند که همان $(۴-۱)!=۳!$ می باشد.

جایگشتهای با تکرار: اگر n شیئ داشته باشیم که n_1 تای آنها مثل هم و n_2 تای آنها مثل هم و ... و n_k تای آنها مثل هم باشند آنگاه جایگشتهای این n شیئ برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$$

که در آن $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$.

مثال: تعداد جایگشتهای حروف کلمه ی «امتحانات» را بیابید.

حل: با توجه به فرمول بالا داریم:

$$\frac{\text{تعداد کل حروف}}{\text{ا}^{۳}\times\text{ت}^{۲}\times\text{ح}^{۱}\times\text{ن}^{۱}\times\text{م}^{۱}}=\frac{۸!}{۳!\times۲!\times۱!\times۱!\times۱!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!\times۲\times۱}=۳۳۶۰$$

تعداد «ا» ، تعداد «ت» ، تعداد «ح» ، تعداد «ن» ، تعداد «م»

توجه کنید که چون $۱=۱!$ پس اشیائی که تعدادشان ۱ است را می توانیم $۱!$ را ننویسیم.

جایگشتهایی که می خواهیم در آنها چند شیئ کنار هم باشند یا نباشند: اگر در محاسبه ی جایگشتهای چند شیئ، بخواهیم تعداد خاصی از آنها کنار هم باشند، آنها را به عنوان یک شیئ در نظر می گیریم سپس جایگشتهای این شیئ را با بقیه ی اشیاء بدست می آوریم و در تعداد جایگشتهای خود این تعداد خاص ضرب می کنیم.

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد پنج رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت به طوری که:

الف- ارقام زوج کنار هم باشند ب- ۲ بعد از ۴ بیاید.

حل: اگر ۲ و ۴ را یک شیئ در نظر بگیریم با سه رقم دیگر می شود چهار شیئ پس داریم:

الف) $۴!\times۲!=۴۸$

برای قسمت «ب» ۲ و ۴ نمی توانند جا به جا شوند پس: ب) $۴!\times۱=۲۴$

Scanned with CamScanner

تذکر: در موارد دیگر بخواهیم اشیاء خاصی کنار هم نباشند از روش متمم استفاده می‌کنیم یعنی ابتدا حالتهایی که آن اشیاء کنار هم باشند را می‌یابیم و سپس از کل حالتها کم می‌کنیم.

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و بدون تکرار ارقام چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت که ارقام زوج کنار هم نباشند.

حل: می‌دانیم که تعداد کل اعداد پنج رقمی بدون تکرار ارقام که می‌توانیم با این ارقام بسازیم برابر با $5!$ می‌باشد و تعداد اعدادی که ۲ و ۴ کنار هم باشند هم برابر با $4! \times 2!$ می‌باشد پس تعداد اعداد پنج رقمی با این ارقام که ارقام زوج کنار هم نباشند برابر است با $5! - 4! \times 2! = 120 - 48 = 72$

جایگشتهای یک درمیان: اگر اشیاء داده شده به دو گروه A و B تفکیک شوند و بخواهند یک درمیان قرار گیرند آنگاه یکی از دو حالت زیر ممکن است اتفاق افتد:

حالت اول: تعداد اعضای دو گروه A و B مساوی باشند: در این صورت تعداد جایگشتهای یک درمیان آنها برابر است با: تعداد جایگشتهای گروه $A \times$ تعداد جایگشتهای گروه $B \times 2$.

حالت دوم: تعداد اعضای دو گروه یکی اختلاف داشته باشند: در این حالت تعداد جایگشتهای یک درمیان آنها برابر است با: تعداد جایگشتهای گروه $A \times$ تعداد جایگشتهای گروه B

واضح است که در این حالت مشروط جایگشت با عضوهای گروهی است که یک عضو بیشتر دارد.

مثال: ۴ دانش آموز کلاس دهم و ۴ دانش آموز کلاس یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم بایستند به شرطی که: الف- پایه‌های تحصیلی آنها مهم نباشد ب- یک درمیان قرار بگیرند

حل: الف- چون پایه‌های تحصیلی آنها مهم نیست پس تعداد جایگشتهای ۸ نفر را می‌خواهیم که برابر با $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$ می‌باشد. ب- با توجه به توضیح بالا داریم: $2 \times 4! \times 4! = 2 \times 24 \times 24 = 1152$

مثال: ۴ ایرانی و ۳ آلمانی به چند طریق می‌توانند کنار هم بایستند و عکس یادگاری بگیرند به شرطی که الف- ملیت آنها مهم نباشد ب- افراد از نظر ملیت یک درمیان باشند.

حل: با توجه به مطالب بالا داریم:

الف) $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

ب) $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$

Scanned with CamScanner

ترتیب (تبدیل): تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیئ متمایز ($0 < r \leq n$) را با نماد $P(n,r)$ (یا $(n)_r$ یا ${}_nP_r$) نشان می‌دهند که از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

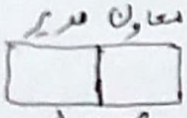
$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

در واقع انتخاب r شیئ از n شیئ متمایز می‌باشد که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها مهم است.

مثال: از بین ۵ نفر به چند طریق می‌توان یک مدیر و یک معاون انتخاب کرد؟

حل: در این انتخاب، ترتیب مهم می‌باشد پس داریم: $P(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\times4\times3!}{3!} = 20$

می‌توانستیم یک جایگاه دوتایی در نظر بگیریم و به کمک اصل ضرب به همین نتیجه برسیم بدین ترتیب که:

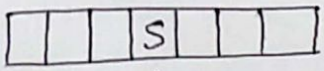


$5 \times 4 = 20$

مثال: تعداد جایگشت‌هایی که با حروف کلمه‌ی «student» می‌توان ساخت را بیابید. در چند تا از آن‌ها حرف «s» در وسط قرار می‌گیرد؟

حل: چون در این کلمه حرف تکراری t وجود دارد پس داریم: $\frac{7!}{2!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = 2520$

برای قسمت بعد که حرف s در وسط قرار می‌گیرد پس شش حرف دیگر داریم که باز هم t دوبار تکرار شده است پس داریم:



$\frac{6!}{2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = 360$

مثال: تعداد جایگشت‌هایی که با حروف کلمه‌ی «بازاریابی» می‌توان ساخت را بیابید. در چند تا از آن‌ها حرف «ز» در وسط قرار می‌گیرد؟ در چند تا از آن‌ها حروف «ر» و «ز» کنار هم هستند؟

حل: با توجه به فرمول جایگشت‌های با تکرار داریم: $\frac{9!}{2!\times3!\times2!\times1!\times1!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3!}{2\times1\times3!\times2\times1} = 15120$

چون «ز» در وسط قرار می‌گیرد پس هشت حرف دیگر با تکرار داریم بنابراین: $\frac{8!}{2!\times3!\times2!\times1!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3!}{2\times1\times3!\times2\times1} = 1680$

چون می‌خواهیم «ر» و «ز» پیش هم باشند پس این دو حرف را یک مجموعه در نظر می‌گیریم که با هفت حرف دیگر می‌شود هشت شیئ پس داریم:

$\frac{8!}{2!\times3!\times2!} \times \underset{\text{جابجایی «ر» و «ز»}}{2!} = 1680\times2 = 3360$

Scanned with CamScanner

مثال: یک پدر و مادر، ۳ فرزند دختر و ۲ فرزند پسر دارند الف- این خانواده به چند طریق می‌توانند کنار هم بایستند و عکس یادگاری بگیرند؟ ب- در چند تا از این عکسها پسرها کنار هم، دخترها کنار هم و والدین نیز کنار هم هستند؟ پ- در چند تا از این عکسها دخترها کنار هم هستند؟ ت- در چند تا از این عکسها پسرها کنار هم نیستند؟

حل: الف- درواقع تعداد جایگشتهای هفت نفر را باید بیابیم که برابراست با $7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5040$

حل ب: والدین را به عنوان یک شیئ و دخترها را نیز به عنوان یک شیئ و پسرها را نیز به عنوان یک شیئ در نظر می‌گیریم پس داریم:

$$(2! \times 3! \times 2!) \times 3! = (2\times6\times2)\times6 = 144$$

(2! ↓ والدین) (3! ↓ دخترها) (2! ↓ پسرها) (3! ↓ جابجایی سه گروه)

حل پ- دخترها را به عنوان یک شیئ در نظر می‌گیریم پس با چهار نفر دیگر تشکیل ۵ شیئ می‌دهند پس جایگشتهای آنها برابر $5!$ می‌شود ولی چون دخترها خودشان می‌توانند به $3!$ جابجا شوند پس $5! \times 3! = 120\times6 = 720$ حالت مختلف وجود دارد که دخترها کنار هم باشند.

حل ت- از روش متمم استفاده می‌کنیم یعنی حالتهایی که پسرها کنار هم باشند را از همه حالتها کم می‌کنیم پس داریم: $7! - 2!\times6! = 5040 - 2\times720 = 5040 - 1440 = 3600$

مثال: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب ریاضی و ۲ کتاب فیزیک متمایز که از نظر ظاهری مشابه هستند را کنار هم قرار داد به طوریکه الف- کتابهای هم موضوع کنار هم باشند ب- کتابهای ریاضی کنار هم باشند پ- کتابهای فیزیک کنار هم باشند. ت- کتابها از نظر موضوع یک در میان قرار گیرند.

حل: الف- کتابهای ریاضی را یک مجموعه و کتابهای فیزیک را هم یک مجموعه در نظر می‌گیریم پس این دو شیئ به $2!$ می‌توانند جابجا شوند اما خود کتابهای ریاضی به $3!$ و خود کتابهای فیزیک نیز به $2!$ می‌توانند با هم جابجا شوند پس داریم: $2!\times3!\times2! = 2\times6\times2 = 24$

حل ب: کتابهای ریاضی را یک مجموعه در نظر می‌گیریم و با دو کتاب فیزیک می‌شوند سه شیئ پس $3!\times3! = 6\times6 = 36$ حالت می‌توانند جایگشت داشته باشند. حل پ: مشابه با حالت ب داریم: $4!\times2! = 24\times2 = 48$

حل ت- چون تعداد کتابهای ریاضی و فیزیک یکی اختلاف دارند و می‌خواهیم یک در میان باشند پس داریم $3!\times2! = 6\times2 = 12$

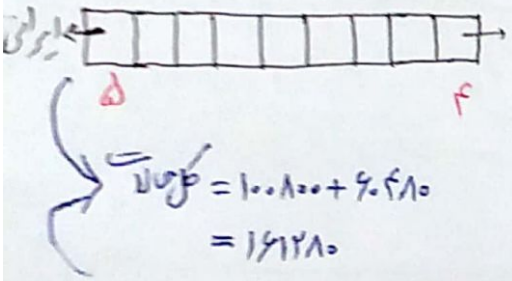
Scanned with CamScanner

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و بدون تکرار ارقام چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت که ارقام فرد کنار هم باشند. (کنکور ۸۲)

حل: اگر ارقام فرد (۱ و ۳ و ۵) را یک مجموع در نظر بگیریم به همراه دو رقم ۲ و ۴ می‌شوند سه تا که ۳! جایگشت دارند از طرفی خود این ارقام فرد نیز می‌توانند به ۳! جا جابجا شوند پس طبق اصل ضرب داریم: $3! \times 3! = 6 \times 6 = 36$

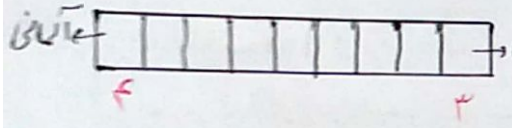
مثال: ۵ نفر ایرانی و ۴ نفر آلمانی به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند به طوری که نفرات اول و آخر ردیف هم ملیت باشند

حل: دو حالت می‌تواند اتفاق افتد: ۱) نفرات اول و آخر ردیف ایرانی باشند که در این صورت جایگاه ابتدایی به ۵ طریق و جایگاه انتهایی به ۴ طریق می‌تواند پر شود و هفت جایگاه باقیمانده نیز به ۷! می‌تواند پر شود پس در این حالت داریم: $5 \times 4 \times 7! = 20 \times 5040 = 100800$



کل حالات $= 100800 + 60480 = 161280$

۲) نفرات اول و آخر ردیف آلمانی باشند که در این صورت جایگاه ابتدایی به ۴ طریق و جایگاه انتهایی به ۳ طریق می‌تواند پر شود و هفت جایگاه باقیمانده نیز به ۷! می‌تواند پر شود پس داریم: $4 \times 3 \times 7! = 12 \times 5040 = 60480$

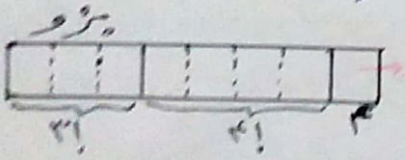


مثال: حروف کلمه‌ی «LAGRANGE» را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم، در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟ (کنکور ۸۴)

حل: چون می‌خواهیم حروف یکسان کنار هم باشند پس دو حرف A و دو حرف G باید کنار هم باشند پس «AA» و «GG» را هم یک شیئ در نظر می‌گیریم که با چهار حرف باقیمانده‌ی L و R و N و E شش شیئ می‌شوند پس $6! = 720$ حالت بوجود می‌آید توجه کنید که جابجایی در حروف یکسان حالت جدیدی بوجود نمی‌آورد.

مثال: با حروف کلمه‌ی مرکب «دانش‌پژوه» و بدون تکرار حروف چند کلمه‌ی هفت حرفی می‌توان نوشت که با حرف «ه» شروع شوند و حروف کلمه‌ی «پژو» سه حرف آخر آن باشند.

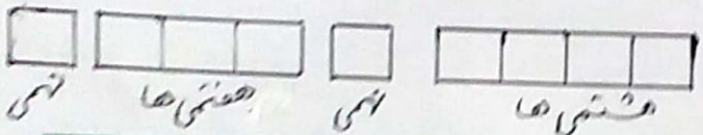
حل: چون می‌خواهیم سه حرف «پژو» در آخر باشند پس به ۳! حالت می‌توانیم سه جایگاه آخر را پر کنیم و چون می‌خواهیم حرف «ه» اول بنا شود پس در جایگاه اول یکی از چهار حرف «د و ا و ن و ش» را قرار دهیم پس از این دو مرحله، چهار حرف داریم که باید در چهار جایگاه باقی مانده قرار دهیم که این کار به ۴! ممکن است پس کل حالات برابر است با $4 \times 4! \times 3! = 576$



Scanned with CamScanner

مثال: به چند روش می‌توان سه دانش آموز کلاس هفتم، چهار دانش آموز کلاس هشتم و دو دانش آموز کلاس نهم را کنار هم قرار داد به طوری که دانش آموزان کلاس هفتمی کنار هم باشند و دانش آموزان کلاس نهم در دو طرف کلاس هفتمی‌ها قرار گیرند.

حل: سه دانش آموز کلاس هفتم را یک شیء در نظر می‌گیریم که در دو طرف آن دو دانش آموز کلاس نهم قرار دارند حال این شیء به همراه چهار دانش آموز کلاس هشتم می‌شود پنج تا که به $5!$ می‌توانند جابه‌جا شوند از طرفی سه دانش آموز کلاس هفتم هم به $3!$ و دو دانش آموز کلاس نهم هم به $2!$ می‌توانند جابه‌جا شوند پس بنابه اصل ضرب کل حالتها برابر است با: $3! \times 2! \times 5! = 6 \times 2 \times 120 = 1440$



مثال: با جابه‌جایی حروف کلمه‌ی «ادارات»، چند کلمه‌ی شش حرفی می‌توان ساخت که حرف‌های «الف» کنار هم باشند.

حل: اگر سه حرف «الف» را یک گروه و سه حرف «د»، «ر» و «ت» را یک گروه در نظر بگیریم آنگاه بنابه مطالب گفته شده داریم: (جابه‌جایی‌های گروه دوم) $\times$ (جابه‌جایی‌های گروه اول) $2 \times$

$= 2 \times 1 \times 3! = 2 \times 6 = 12$

توجه کنید که چون سه حرف «الف» مثل هم هستند پس تنها یک جابه‌جایی دارند.

مثال: با جابه‌جایی حروف کلمه‌ی «پیشکار» چند کلمه‌ی شش حرفی می‌توان ساخت که حروف لفظ دار کنار هم باشند؟ چند کلمه‌ی شش حرفی می‌توان ساخت که حروف کلمه‌ی «کار» پیش هم باشند؟ چند کلمه‌ی شش حرفی می‌توان ساخت که در آن کلمات «کلمه‌ی» و «کار» وجود داشته باشد؟

حل: بنابه مطالب گفته شده برای قسمت اول داریم: $2 \times 3! \times 4! = 2 \times 6 \times 6 = 72$

برای قسمت دوم کلمه‌ی کار را یک شیء در نظر می‌گیریم که با سه حرف دیگر ۴ شیء داریم پس تعداد کلمات شش حرفی برابر است با $4! \times 4! = 24 \times 6 = 144$ چون حروف کلمه‌ی کار می‌توانند جابه‌جا شوند.

برای قسمت سوم کلمه‌ی کار را یک شیء در نظر می‌گیریم که با سه حرف دیگر ۴ شیء داریم پس تعداد کلمات شش حرفی برابر است با $4! = 24$ چون حروف کلمه‌ی کار می‌توانند جابه‌جا شوند.

Scanned with CamScanner

مثال: حاصل هر قسمت را بیابید:

الف) $P(n,n-1)=\frac{n!}{[n-(n-1)]!}=\frac{n!}{(n-n+1)!}=\frac{n!}{1!}=n!$

ب) $P(10,2)=\frac{10!}{(10-2)!}=\frac{10\times 9\times 8!}{8!}=90$

پ) $\frac{P(8,1)}{P(7,2)}=\frac{\frac{8!}{(8-1)!}}{\frac{7!}{(7-2)!}}=\frac{\frac{8\times 7!}{7!}}{\frac{7\times 6\times 5!}{5!}}=\frac{8}{42}=\frac{4}{21}$

ت) $\frac{P(n-1,r-1)}{P(n,r)}=\frac{\frac{(n-1)!}{[n-1-(r-1)]!}}{\frac{n!}{(n-r)!}}=\frac{\frac{(n-1)!}{(n-1-r+1)!}}{\frac{n(n-1)!}{(n-r)!}}=\frac{(n-1)!\,(n-r)!}{n(n-1)!\,(n-r)!}=\frac{1}{n}$

ث) $\frac{P(n,1)}{P(n-1,0)}=\frac{\frac{n!}{(n-1)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-1-0)!}}=\frac{\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-1)!}}=n$

مثال: مقدار n را از تساوی‌های زیر بدست آورید:

الف) $P(n,2)=2P(n-1,1)\Rightarrow\frac{n!}{(n-2)!}=2\times\frac{(n-1)!}{(n-1-1)!}\Rightarrow\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=2\times\frac{(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$

$\Rightarrow n(n-1)=2(n-1)\Rightarrow n^2-n=2n-2\Rightarrow n^2-3n+2=0\Rightarrow(n-2)(n-1)=0\Rightarrow\begin{cases}n-2=0\\n-1=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{n=2}\\n=1\end{cases}$ غ ق ق

ب) $P(5,n)=P(5,n-1)\Rightarrow\frac{5!}{(5-n)!}=\frac{5!}{(5-(n-1))!}\Rightarrow(5-n)!=(5-n+1)!$

$\Rightarrow(5-n)!=(6-n)!\Rightarrow(5-n)!=(6-n)(5-n)!\Rightarrow(5-n)!-(6-n)(5-n)!=0$

$\Rightarrow(5-n)![1-(6-n)]=0\Rightarrow(5-n)!(1-6+n)=0\Rightarrow(5-n)!(n-5)=0\Rightarrow\begin{cases}(5-n)!=0 & \text{غیرممکن}\\ n-5=0\Rightarrow\boxed{n=5}\end{cases}$

پ) $P(n+1,n-1)=360\Rightarrow\frac{(n+1)!}{(n+1-(n-1))!}=360\Rightarrow\frac{(n+1)!}{(n+1-n+1)!}=360\Rightarrow\frac{(n+1)!}{2!}=360$

$\Rightarrow(n+1)!=720\Rightarrow(n+1)!=6!\Rightarrow n+1=6\Rightarrow\boxed{n=5}$

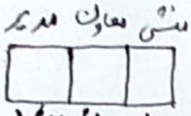
"پیروز و سربلند باشید" خالقی

Scanned with CamScanner

مثال: به چند طریق می‌توان از بین هفت نفر، یک مدیر، یک معاون و یک منشی انتخاب کرد؟

حل: چون ترتیب انتخاب مهم است پس داریم: $P(7,3)=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{4!}=210$

* می‌توانیم سه جایگاه در نظر بگیریم و از اصل ضرب استفاده کنیم:

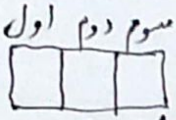


$7\times6\times5=210$

مثال: در یک لیگ ۱۶ تیمی به چند طریق ممکن است تیم‌ها به مقام اول و دوم و سوم برسند؟

حل: چون ترتیب مهم است پس داریم: $P(16,3)=\frac{16!}{(16-3)!}=\frac{16\times15\times14\times13!}{13!}=3360$

* از جدول نیز می‌توانیم استفاده کنیم:



$16\times15\times14=3360$

مثال: یک شرکت با ۳۰ نوع گزینش برای استخدام یک فروشنده و یک کارمند اداری روبرو شده است، چند نفر داوطلب برای این شاغل وجود داشته است؟

حل: چون انتخاب ۲ نفر از بین n نفر داریم که ترتیب انتخاب مهم است پس باید $P(n,2)=30$

$$\frac{n!}{(n-2)!}=30\Rightarrow\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=30\Rightarrow n(n-1)=30\Rightarrow n^2-n-30=0\Rightarrow(n-6)(n+5)=0$$

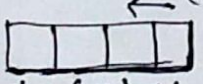
$$\Rightarrow\begin{cases}n-6=0\\n+5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{n=6}\\n=-5\quad\text{غ ق ق}\end{cases}$$

مثال: با حروف کلمه‌ی «سلامتی» و بدون تکرار حروف چند کلمه‌ی چهار حرفی می‌توان نوشت؟

حل: چون جابجا شدن حروف باعث ایجاد یک کلمه‌ی جدید می‌شود پس ترتیب مهم است و داریم:

$$P(6,4)=\frac{6!}{(6-4)!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!}=360$$

* می‌توانیم از جدول و اصل ضرب نیز استفاده کنیم پس داریم:

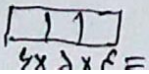


$3\times4\times5\times6=360$

مثال: با حروف کلمه‌ی «LAGRANGE» چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان نوشت که در آن حرف تکراری وجود نداشته باشد.

حل: چون می‌خواهیم حرف تکراری در کلمات نباشد پس از حروف «L و A و G و R و N و E» می‌خواهیم سه تا انتخاب کنیم که ترتیب آنها مهم است بنابراین داریم: $P(6,3)=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6\times5\times4\times3!}{3!}=120$

* اگر از جدول و اصل ضرب استفاده کنیم داریم:



$6\times5\times4=120$

Scanned with CamScanner

مثال: شش نفر را به چند طریق می‌توان در دو ردیف که هر ردیف ۴ صندلی دارد، جای داد؟

حل: چون تعداد نفرات از تعداد صندلیهای یک ردیف بیشتر است پس حتماً در دو ردیف قرار می‌گیرند از طرفی چون افراد و جایگاهها متمایزند و ترتیب مهم است پس داریم:

$$P(8,6) = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = 20160$$

مثال: در یک جلسه دو ردیف صندلی ۱۰ تایی وجود دارد اگر در این جلسه ۵ مقام کشوری و ۷ مقام استانی و ۶ مقام محلی وجود داشته باشد و بخواهیم مقامات کشوری در ردیف اول و مقامات محلی در ردیف دوم بنشینند اینکار به چند طریق ممکن است؟

حل: مقامات کشوری می‌توانند ۵ صندلی از ۱۰ صندلی اول را انتخاب کنند و چون افراد متفاوت هستند پس تعداد حالتهای ممکن برای آنها $P(10,5)$ می‌باشد همچنین شش مقام محلی نیز می‌توانند شش صندلی از ردیف دوم را انتخاب کنند پس تعداد حالتهای ممکن برای آنها $P(10,6)$ می‌باشد برای ۷ مقام استانی، ۹ صندلی باقی می‌ماند که تعداد حالات ممکن برای آنها $P(9,7)$ می‌باشد بنابراین طبق اصل ضرب کل حالات برای اینکار برابر است با $P(10,5)\times P(10,6)\times P(9,7)$

مثال: ۴ دانش آموز به چند طریق می‌توانند روی ۹ صندلی یکسان در یک ردیف بنشینند که هیچ دو نفری کنار هم نباشند. (بین هر دو نفر یک صندلی خالی وجود داشته باشد.)

حل: ابتدا پنج جایگاه به عنوان صندلی خالی در نظر می‌گیریم سپس افراد را بین آنها قرار می‌دهیم پس اگر دایره‌ها نشان دهنده‌ی صندلی‌های خالی باشند و مثلثها جایگاههایی باشند که افراد می‌توانند بنشینند آنگاه این ۴ دانش آموز از شش جایگاه

△ ○ △ ○ △ ○ △ ○ △ ○ △

موجود می‌توانند در ۴ جایگاه قرار گیرند و چون افراد متفاوت هستند پس ترتیب مهم است بنابراین می‌توانند به $P(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = 360$ طریق اینکار را انجام دهند

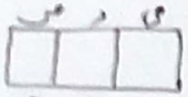
«سر بلند و پیروز باشید» خالقی

Scanned with CamScanner

ترکیب: هرگاه در انتخابها، ترتیب قرار گرفتن اشیاء مهم نباشد با مفهومی به نام «ترکیب» مواجه هستیم. ترکیب r شیئ از n شیئ متمایز را با نماد $C(n,r)$ یا C_n^r یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم که در آن $0 \leq r \leq n$. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار ارقام چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ با همین ارقام چند مجموعه‌ی سه عضوی می‌توان نوشت؟

حل: با توجه به اینکه در عدد نویسی ترتیب قرار گرفتن ارقام در جدول ارزش مکانی مهم است پس داریم:



$۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$

این اعداد عبارتند از: ۴۳۱، ۴۱۲، ۲۱۴، ۲۴۱، ۱۴۲، ۱۲۴، ۴۲۱، ۴۱۳، ۲۳۱، ۲۱۳، ۱۳۲، ۱۲۳،
۴۳۲، ۴۲۳، ۳۴۲، ۲۴۳، ۲۳۴، ۴۱۳، ۴۳۱، ۳۴۱، ۳۱۴، ۱۴۳، ۱۳۴

حال اگر بخواهیم مجموعه‌های سه عضوی بنویسیم، چون ترتیب اعضای مجموعه در ماهیت مجموعه تأثیری ندارد پس این مجموعه‌ها عبارتند از: $A_1=\{۱,۲,۳\}$ ، $A_2=\{۲,۳,۴\}$ ، $A_3=\{۱,۳,۴\}$ ، $A_4=\{۱,۲,۴\}$

یعنی در نوشتن مجموعه‌ها با مفهوم ترکیب روبرو هستیم، حال اگر بخواهیم از فرمولها کمک بگیریم می‌گوئیم که هر ۳ شیئ ۳! ترتیب و فقط یک ترکیب بوجود می‌آورند پس داریم:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} \Rightarrow C(n,r) = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} \Rightarrow \boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

* در مثال بالا اگر از فرمولها استفاده کنیم داریم:

$$P(۴,۳) = \frac{۴!}{(۴-۳)!} = \frac{۴\times۳\times۲\times۱}{۱!} = \frac{۲۴}{۱} = ۲۴$$ عدد سه رقمی

$$C(۴,۳) = \frac{۴!}{۳!(۴-۳)!} = \frac{۴\times۳!}{۳!\times۱!} = \frac{۴}{۱} = ۴$$ مجموعه‌ی سه عضوی

مثال: از بین ۵ نفر به چند طریق می‌توان الف- یک رئیس و یک منشی انتخاب کرد؟
ب- یک گروه دو نفره انتخاب کرد؟

حل: الف- چون ترتیب انتخاب مهم است پس داریم:

$$P(۵,۲) = \frac{۵!}{(۵-۲)!} = \frac{۵\times۴\times۳!}{۳!} = ۲۰$$

ب- چون ترتیب در گروه مهم نیست پس مسئله‌ی ترکیب می‌باشد بنابراین داریم:

$$C(۵,۲) = \frac{۵!}{۲!(۵-۲)!} = \frac{۵\times۴\times۳!}{۲\times۱\times۳!} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$$

Scanned with CamScanner

مثال: حاصل هر قسمت را بیابید:

الف) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$

ب) $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1$

$\Rightarrow \boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1}$ مثلاً: $\binom{10}{0} = \binom{10}{10} = 1$

ج) $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1 \times (n-1)!} = \frac{n}{1} = n$

$\Rightarrow \boxed{\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n}$ مثلاً: $\binom{10}{1} = \binom{10}{9} = 10$

د) $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!(n-n+1)!} = \frac{n}{1!} = \frac{n}{1} = n$

ه) $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$\Rightarrow \boxed{\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}}$ مثلاً: $\binom{7}{2} = \binom{7}{5} = 21$

و) $\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

ز) $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$

ح) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

مخرج مشترک $= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$

(ز)، (ح) $\Rightarrow \boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$ قاعده‌ی پاسکال:

(دو عدد متوالی)

مثلاً: $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \binom{10}{4}$

ط) $C(n,r) \times r! = \frac{n!}{r!(n-r)!} \times r! = \frac{n!}{(n-r)!}$

$\Rightarrow \boxed{C(n,r) \times r! = P(n,r)}$

مثلاً: $\binom{5}{2} \times 2! = P(5,2) \Rightarrow \binom{5}{2} \times 2! = \frac{5!}{2!(5-2)!} \times 2! = \frac{5!}{(5-2)!}$

"پیروز و سربلند باشید" خالقی

Scanned with CamScanner

مثال: از بین ۴ مرد و ۵ زن به چند طریق می‌توان یک گروه سه نفره انتخاب کرد به شرطی که:

الف- جنسیت افراد مهم نباشد ب- هر سه همجنس باشند. پ- یک نفر مرد و دو نفر زن باشند ت- حداقل یک نفر مرد باشد ث- حداکثر یک نفر مرد باشد.

حل: در این مثال چون در گروه ترتیب مهم نیست پس با مفهوم ترکیب مواجه هستیم

الف- چون جنسیت مهم نیست پس از بین ۹ نفر می‌خواهیم سه نفر انتخاب کنیم بنابراین:

$$C(9,3) = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9\times8\times7\times6!}{3\times2\times1\times6!} = 84$$

ب- هر سه همجنس باشند یعنی یا هر سه مرد یا هر سه زن باشند پس داریم:

$$C(4,3) + C(5,3) = 4 + \frac{5!}{3!(5-3)!} = 4 + \frac{5\times4\times3!}{3!\times2!} = 4+10 = 14$$

پ-

$$C(4,1)\times C(5,2) = 4\times10 = 40$$

ت- حداقل یک مرد یعنی یا یک مرد یا دو مرد یا هر سه مرد باشند پس داریم:

$$\binom{4}{1}\times\binom{5}{2} + \binom{4}{2}\times\binom{5}{1} + \binom{4}{3}\times\binom{5}{0} = 4\times10+6\times5+4\times1 = 74$$

می‌توانستیم از متمم استفاده کنیم بدین صورت که حداقل یک مرد، متمم هر سه زن باشند، است بنابراین داریم:

$$C(9,3) - C(5,3) = 84 - 10 = 74$$

ث- حداکثر یک نفر مرد یعنی یا یک مرد یا هیچ مرد، پس داریم:

$$\binom{4}{1}\times\binom{5}{2} + \binom{4}{0}\times\binom{5}{3} = 4\times10 + 1\times10 = 40+10 = 50$$

مثال: مقدار n را از تساوی روبرو بیابید:

$$C(n,2) = C(6,2) + 13$$

حل: با توجه به فرمول ترکیب داریم:

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{6!}{2!(6-2)!} + 13$$

$$\rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2\times1\times(n-2)!} = \frac{6\times5\times4!}{2\times1\times4!} + 13 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 15+13 \Rightarrow n^2-n = 56 \Rightarrow n^2-n-56 = 0$$

$$\Rightarrow (n-8)(n+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n-8=0 \\ n+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{n=8} \\ n=-7 \end{cases}$$ غ ق ق

Scanned with CamScanner

مثال: از بین ۳ خودکار آبی و ۵ خودکار قرمز و ۴ خودکار سبز به چند طریق می توان ۳ خودکار انتخاب کرد که الف - رنگ آنها مهم نباشد. ب - از هر رنگ یکی باشد پ - هر سه هم رنگ نباشند ت - حداقل دو تا از آنها سبز باشند ث - حداکثر دو تا از آنها سبز باشند.

حل: الف - $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12\times11\times10\times9!}{3\times2\times1\times9!} = 220$

ب - باید یکی آبی و یکی قرمز و یکی سبز باشد پس: $\binom{3}{1}\times\binom{5}{1}\times\binom{4}{1} = 3\times5\times4 = 60$

پ - از روش متمم استفاده می کنیم پس ابتدا هر سه هم رنگ باشند را می یابیم و از کل حالتها کم می کنیم

هر سه هم رنگ یعنی هر سه آبی یا هر سه قرمز یا هر سه سبز باشند پس داریم: $\binom{3}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} =$

$1 + 10 + 4 = 15$ هر سه هم رنگ نباشند = کل حالات - هر سه هم رنگ باشند $= 220 - 15 = 205$

ت - حداقل دو تا سبز باشند یعنی یا دو تا سبز باشند و یکی سبز نباشد یا هر سه سبز باشند پس داریم:

$\binom{4}{2}\times\binom{8}{1} + \binom{4}{3}\times\binom{8}{0} = 6\times8 + 4\times1 = 52$

ث - حداکثر دو تا سبز باشند یعنی یا دو تا سبز یا یکی سبز یا هیچکدام سبز؛ پس بهتر است از متمم استفاده کنیم بنابراین داریم:

هر سه سبز باشند - کل حالات = حداکثر دو تا سبز

$= 220 - \binom{4}{3} = 220 - 4 = 216$

مثال: حاصل عبارت مقابل را بیابید: $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{8}{4}+\binom{9}{5}+\binom{10}{6}$

حل: با توجه به فرمول پاسکال داریم:

$= \binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{9}{5}+\binom{10}{6}$

$= \binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\binom{10}{6} = \binom{10}{5}+\binom{10}{6} = \binom{11}{6} = \frac{11!}{6!(11-6)!} = \frac{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5!}{6\times5\times4\times3\times2\times1\times5!}$

$= 11\times3\times2\times7 = 462$

تذکر: می توانیم هر کدام از ترکیبها را حساب کنیم و با هم جمع کنیم.

Scanned with CamScanner

مثال: تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از یک مجموعه‌ی هشت عضوی را بیابید. تعداد زیر مجموعه‌های چهار عضوی آن را بیابید. این مجموعه چند زیر مجموعه‌ی پنج عضوی دارد؟

حل: چون ترتیب اعضا در مجموعه‌ها مهم نیست پس داریم:

تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی $= \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{3\times2\times1\times5!} = 56$

تعداد زیر مجموعه‌های چهار عضوی $= \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4!}{4\times3\times2\times1\times4!} = 70$

تعداد زیر مجموعه‌های پنج عضوی $= \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!\times3!} = 56$

نکته: به طور کلی تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با $\binom{n}{k}$.

نتیجه:

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{تعداد زیر مجموعه‌های تهی}} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{تعداد زیر مجموعه‌های یک عضوی}} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{تعداد زیر مجموعه‌های } k \text{ عضوی}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-2}}_{\text{تعداد زیر مجموعه‌های } (n-2) \text{ عضوی}} + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{\text{تعداد زیر مجموعه‌های } (n-1) \text{ عضوی}} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{تعداد زیر مجموعه‌ی } n \text{ عضوی}} = \underbrace{2^n}_{\text{تعداد کل زیر مجموعه‌ها}}$$

مثال: مقدار n را از تساوی روبرو بیابید: $C(n,3) = P(n-1,2)$

حل: با استفاده از فرمول ترتیب و ترکیب داریم:

$$\frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-2)!}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)!}{3\times2\times1\times(n-3)!} = \frac{(n-1)!}{(n-3)!} \Rightarrow \frac{n}{6} = 1 \Rightarrow \boxed{n=6}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{P(8,3)}{C(8,3)}$ را بیابید.

روش اول: از فرمول $P(n,r) = r!\,C(n,r)$ استفاده می‌کنیم پس داریم:

$$\frac{P(8,3)}{C(8,3)} = \frac{3!\,C(8,3)}{C(8,3)} = 3! = 6$$

روش دوم: حاصل صورت و مخرج را بیابیم و بر هم تقسیم کنیم:

$$P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!} = 336 \quad , \quad C(8,3) = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{3\times2\times1\times5!} = 56 \Rightarrow \frac{P(8,3)}{C(8,3)} = \frac{336}{56} = 6$$

Scanned with CamScanner

مثال: تعداد انتخاب‌های ۳ دانش آموز از بین n دانش آموز برابر ۱۲۰ می‌باشد تعداد دانش آموزان را بیابید. (تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی یک مجموعه برابر ۱۲۰ می‌باشد تعداد اعضای این مجموعه را بیابید)

حل: چون ترتیب مهم نیست پس داریم: $C(n,3)=120$

$$\rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!}=120 \Longrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3\times2\times1\times(n-3)!}=120 \Rightarrow n(n-1)(n-2)=720$$

چون $(n-2)$ و $(n-1)$ و n سه عدد متوالی هستند پس باید ۷۲۰ را به صورت حاصل ضرب سه عدد متوالی بنویسیم و چون رقم سمت راست این عدد صفر است بهتر است که ۱۰ (یا مضارب ۱۰) را امتحان کنیم که در اینجا ۱۰ عدد مورد نظر است زیرا: پس $n=10$ $10\times9\times8=720$

(n $n-1$ $n-2$)

مثال: از بین n کتاب مختلف، چهار کتاب را می‌توان به ۳۶۰ طریق مختلف در یک قفسه کتاب چید؛ به چند طریق می‌توان چهار کتاب از این n کتاب را به کسی هدیه داد؟

حل: چیدن چهار کتاب از بین n کتاب در یک قفسه، همان $P(n,4)$ است ولی هدیه دادن چهار کتاب از بین n کتاب همان $C(n,4)$ می‌باشد پس داریم:

$$P(n,4)=4!\times C(n,4) \Rightarrow 360=4\times3\times2\times1\times C(n,4) \Rightarrow C(n,4)=\frac{360}{24}=15$$

مثال: با انتخاب ۷ نقطه روی یک دایره الف- چند وتر در دایره می‌توان رسم کرد؟
ب- چند مثلث می‌توان ساخت؟ پ- چند چهارضلعی محدب می‌توان ساخت؟

حل: الف- می‌دانیم که از به هم وصل کردن هر دو نقطه روی محیط یک دایره یک وتر بوجود می‌آید و چون ترتیب آنها مهم نیست پس داریم:

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7\times6\times5!}{2\times1\times5!}=21$$

ب- چون هر سه نقطه روی محیط دایره که در نظر بگیریم در یک امتداد نیستند پس یک مثلث بوجود می‌آید و چون ترتیب رئوس مهم نیست پس داریم:

$$\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{3\times2\times1\times4!}=35$$

پ- چون ترتیب رئوس مهم نیست پس داریم:

$$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{4!\times3!}=35$$

Scanned with CamScanner

مثال: از بین ۹ نفر اعضای شورای شهر به چند طریق می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد به شرطی که همواره رئیس شورای شهر در بین آنها باشد.

حل: چون می‌خواهیم همواره رئیس شورای شهر در این انتخابها باشد پس در واقع ما می‌خواهیم دو نفر از بین ۸ نفر بقیه اعضای شورای شهر انتخاب کنیم بنابراین تعداد انتخابها برابر است با:

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8\times7\times6!}{2\times1\times6!} = 28$$

تذکر: هرگاه بخواهیم از بین n شیء متمایز تعداد r شیء انتخاب کنیم که حتماً m انتخاب اجباری بین آنها باشد تعداد انتخابها برابر است با $\binom{n-m}{r-m}$ یعنی در واقع از بین $n-m$ شیء باقیمانده تعداد $r-m$ شیء انتخاب می‌کنیم.

مثال: از بین ۱۲ نفر $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ به چند طریق می‌توان یک گروه ۶ نفره انتخاب کرد به طوری که نفر a_1 حتماً در گروه باشد ولی نفر a_{12} در گروه نباشد.

حل: چون می‌خواهیم a_1 در گروه باشد پس ۱ نفر از شش نفر گروه، مشخص می‌باشد. برای انتخاب گروه شش نفره، ۵ نفر دیگر را باید از بقیه‌ی افراد به جز a_{12} انتخاب کنیم پس تعداد انتخابها برابر است با:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5!}{5\times4\times3\times2\times1\times5!} = 252$$

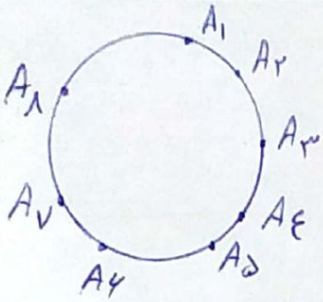
مثال: به چند طریق می‌توان ۴ دانش آموز از ۶ دانش آموز دهمی و ۳ دانش آموز از ۷ دانش آموز نهمی را یک در میان در یک صف کنار هم قرار داد؟

حل: تعداد انتخابهای ۴ دانش آموز از بین ۶ دانش آموز دهمی برابر است با $\binom{6}{4}$ و تعداد انتخابهای ۳ دانش آموز از بین ۷ دانش آموز نهمی برابر است با $\binom{7}{3}$. حال برای اینکه یک در میان باشند باید به صورت: (د ن د ن د ن د) قرار گیرند. چون دهمی‌ها می‌توانند خودشان جابه‌جا شوند پس $4!$ جایگشت بین خودشان می‌توانند داشته باشند و همین ترتیب نهمی‌ها نیز به $3!$ حالت می‌توانند بین خودشان جابه‌جا شوند پس کل حالات ممکن طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\binom{6}{4}\times4!\times\binom{7}{3}\times3! = \frac{6!}{4!(6-4)!}\times4!\times\frac{7!}{3!(7-3)!}\times3! = \frac{6\times5\times4!}{2!}\times\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2!}{4!} = 25200$$

Scanned with CamScanner

مثال: در شکل مقابل ۷ نقطه روی دایره قرار دارند تعداد مثلثهایی که یکی از رئوس آنها A_2 است، چند برابر تعداد مثلثهایی است که یکی از اضلاع آنها پاره خط A_4A_7 می باشد؟



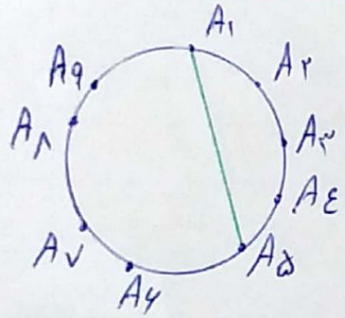
حل: تعداد مثلثهایی که یکی از رئوس آنها A_2 می باشد برابر است با:

$$(^{8-1}_{3-1})=\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7\times6\times5!}{2\times1\times5!}=21$$

اگر بخواهیم A_4A_7 یکی از اضلاع مثلث باشد آنگاه رأس سوم مثلث یا از بین نقاط A_1, A_2, A_3, A_8 انتخاب می شود یا از بین نقاط A_5 و A_6 انتخاب می شود پس داریم: $\binom{4}{1}+\binom{2}{1}=4+2=6$

بنابراین $\frac{\text{تعداد مثلثهایی که یک رأس آن } A_2 \text{ است}}{\text{تعداد مثلثهایی که یک ضلعش } A_4A_7 \text{ است}}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}=3/5$

مثال: ۹ نقطه مطابق شکل مقابل بر روی دایره ای قرار دارند تعداد چهار ضلعی هایی که A_1A_5 قطر آنها می باشد را بدست آورید.



حل: برای اینکه A_1A_5 قطر یک چهار ضلعی باشد باید یکی از رأسهای آن از بین نقاط A_2 و A_3 و A_4 و رأس دیگر از بین نقاط A_6 و A_7 و A_8 و A_9 انتخاب شود بنابراین تعداد این چهار ضلعیها برابر است با:

$$\binom{3}{1}\times\binom{4}{1}=3\times4=12$$

مثال: به چند طریق می توان یک عدد پنج رقمی با ارقام متمایز غیر صفر ساخت به طوری که دقیقاً دو رقم آن زوج باشند.

حل: چون می خواهیم دقیقاً دو رقم آن زوج باشند پس دو رقم را باید از بین ارقام ۲ و ۴ و ۶ و ۸ انتخاب کنیم (چون ارقام صفر نیستند) و سه رقم دیگر باید از بین ارقام ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ انتخاب شوند؛ از طرفی چون پنج رقم انتخابی می توانند به $5!$ حالت کنار هم قرار بگیرند پس تعداد اعداد مورد نظر با توجه به اصل ضرب برابر است با:

$$\binom{4}{2}\times\binom{5}{3}\times5!=\frac{4!}{2!(4-2)!}\times\frac{5!}{3!(5-3)!}\times5!=\frac{4\times3\times2!}{2\times1\times2!}\times\frac{5\times4\times3\times2!}{3\times2\times1\times2!}\times5\times4\times3\times2\times1$$

$$=6\times10\times120=7200$$

"پیروز و سربلند باشید" خالقی

Scanned with CamScanner

ریاضی ۱ دهم تجربی و ریاضی «شمارش بدون شمردن»

تمرین ۱: مقدار n را از تساوی‌های زیر بدست آورید:

الف) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=42$ ب) $\frac{9(9!+8!)}{(0!+3!)!}=n!$ پ) $P(9,n)=6C(9,n)$

تمرین ۲: با حروف کلمه‌ی «problem» و بدون تکرار حروف الف- چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان نوشت؟ ب- در چند تا از این کلمات حرف m در وسط قرار می‌گیرد؟ پ- چند تا از این کلمات با حرف صدادار شروع می‌شوند؟ ت- در چند تا از این کلمات حروف صدادار کنار هم هستند؟

تمرین ۳: چهار فرمانده و پنج سرباز به چند طریق می‌توانند در یک ستون بایستند به طوری که: الف- یک در میان باشند ب- حداقل دو سرباز پشت سر هم باشند پ- سربازها پشت سر فرماندهان باشند ت- سربازها پشت سر هم و فرماندهان نیز پشت سر هم قرار گیرند.

تمرین ۴: با حروف کلمه‌ی «فضانوردی» و بدون تکرار حروف: الف- چند کلمه‌ی هشت حرفی می‌توان نوشت؟ ب- چند تا از این کلمات با «فضا» شروع می‌شوند پ- در چند تا از این کلمات حرف «الف» در ابتدا نیست و حروف کلمه‌ی «نور» در آخر آنها قرار دارند.

تمرین ۵: از بین پنج ایرانی و ۴ عراقی و ۲ افغانی به چند طریق می‌توان سه نفر انتخاب کرد به شرطی که: الف- ملیت آنها هم نباشد ب- از هر کشور یک نفر باشد پ- هم ملیت باشند ت- حداقل دو نفر ایرانی باشند ث- حداکثر دو نفر ایرانی باشند. ج- حتماً یک ایرانی باشد.

تمرین ۶: در یک مسابقه‌ی دوی صد متر ۱۰ نفر شرکت کرده‌اند به چند طریق نفرات اول تا سوم می‌توانند مشخص شوند به شرطی که هیچ دو نفری هم زمان به خط پایان نرسند.

تمرین ۷: به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ نفر، ۴ نفر را برای سمت‌های مختلف، انتخاب کرد؟

تمرین ۸: تعداد قطرهای یک ۱۲ ضلعی محدب را محاسبه کنید.

تمرین ۹: با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و بدون تکرار ارقام الف- چند عدد شش رقمی می‌توان نوشت؟ ب- در چند تا از این اعداد، ارقام یک در میان زوج و فرد هستند؟ پ- در چند تا از این اعداد، ارقام فرد پیش هم و ارقام زوج نیز پیش هم قرار دارند؟

تمرین ۱۰: تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۹ شیئ متمایز چند برابر تعداد ترکیبات ۲ تایی از ۸ شیئ متمایز است؟

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

Scanned with CamScanner

تمرین ۱۱ : در یک ظرف ۶ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سبز و ۵ مهره‌ی سیاه وجود دارد به چند طریق می‌توان سه مهره از این مهره‌ها انتخاب کرد به شرطی که: الف- هر سه هم‌رنگ نباشند ب- از هر رنگ یکی باشد.

تمرین ۱۲ : گل فروشی در مغازه‌اش ۱۲ نوع گل دارد، او با توجه به تقاضای مشتریان، دسته گل‌هایی با حداقل ۱۰ شاخه گل درست می‌کند، او چند دسته گل متفاوت می‌تواند درست کند؟

تمرین ۱۳ : از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به شرطی که حداقل دو نفر از آن‌ها دانش‌آموز تجربی باشند؟ (کنکور ۹۰ خارج از کشور)

تمرین ۱۴ : از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد، به شرطی که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟ (کنکور ۸۹ ریاضی)

تمرین ۱۵ : از بین ۶ نفر زن و ۵ نفر مرد به چند طریق می‌توان ۴ نفر انتخاب کرد به شرطی که تعداد افراد انتخاب شده از زنان و مردان یکسان نباشند؟

تمرین ۱۶ : با ارقام ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ چند عدد سه رقمی با شرط «رقم صدگان > رقم دهگان > رقم یکان» می‌توان نوشت (کنکور ۹۱ ریاضی)

تمرین ۱۷ : از هر یک از شش منطقه‌ی کشوری، ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند، انتخاب کرد؟ (کنکور ریاضی ۹۲)

تمرین ۱۸ : از هر یک از ۸ مدرسه‌ی علامه‌مند، ۶ نفر برای تنیس ۴ نفره (۲ نفر در مقابل ۲ نفر) انتخاب شده‌اند به چند طریق این بازی‌ها ممکن است انجام شود به طوری که هر دو نفر هم تیمی، از یک مدرسه باشند؟ (کنکور ۹۲ ریاضی خارج از کشور)

تمرین ۱۹ : ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۶ کتاب فیزیک مختلف را به چند طریق می‌توان در یک قفسه چید به طوری که هیچ دو کتاب ریاضی، پیش هم نباشند؟

تمرین ۲۰ : در یک رستوران ۸ نوع غذای A و B و C و D و E و F و G و H وجود دارد یک فرد به چند طریق می‌تواند سه غذای مختلف انتخاب کند به طوری که الف- حداقل یکی از غذاهای A یا B در بین غذاهایش باشد. ب- دو غذای A و B را هم‌زمان نتواند انتخاب کند. پ- غذاها به دو دسته‌ی ۴ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ‌کدام از غذاهای دسته‌ی اول با هیچ‌کدام از غذاهای دسته‌ی دوم سازگار نیستند.

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

Scanned with CamScanner