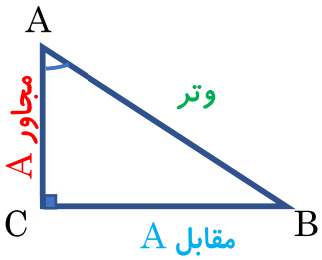
فصل دوم : مثلثات

درس اول : نسبت های مثلثاتی

در هر مثلث قائم الزاویه ، نسبت های مثلثاتی هر یک از زاویه های تند مثلث را که عبارتند از : سینوس ، کسینوس، تانژانت و کتانژانت به صورت زیر تعریف می کنیم :



$$\text{سینوس} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin\hat{A} = \frac{BC}{AB}$$

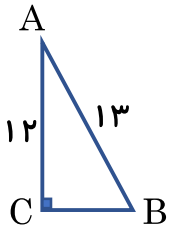
$$\text{کسینوس} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{تانژانت} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \tan\hat{A} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{کتانژانت} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} \Rightarrow Cot\hat{A} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\hat{A} = \frac{1}{Cot\hat{A}} \rightarrow \tan\hat{A}Cot\hat{A} = 1$$

تانژانت و کتانژانت معکوس یکدیگرند .

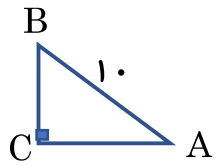


مثال ۱) با توجه به شکل مقابل نسبت های مثلثاتی زاویه $\hat{A}$ را به دست آورید .

حل: ابتدا با فیثاغورس مقدار CB را پیدا می کنیم . $CB^2 + 12^2 = 13^2 \rightarrow CB^2 = 169 - 144 \rightarrow CB = 5$

$$\sin\hat{A} = \frac{5}{13} \qquad \cos\hat{A} = \frac{12}{13} \qquad \tan\hat{A} = \frac{5}{12} \qquad Cot\hat{A} = \frac{12}{5}$$

مثال ۲) طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ۱۰ سانتی متر وسینوس یکی از زاویه های آن $\frac{3}{5}$ است . محیط مثلث چند سانتی متر است ؟



حل :

$$\sin\hat{A} = \frac{BC}{10} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{BC}{10} \rightarrow BC = 6$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AC^2 + 36 = 100 \rightarrow AC = 8$$

$$\text{محیط} = 6 + 8 + 10 = 44$$

* نسبت های مثلثاتی زوایای معروف (30° ، 45° ، 60°) :

مقدار	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$Cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

اگر با دقت نگاه کنیم مقدار $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ و مقدار $\cot 60^\circ = \tan 30^\circ$

یعنی اگر A و B دو زاویه باشند طوری که متمم هم باشند $A + B = 90$

می توان گفت :

$$Cot\hat{A} = \tan\hat{B}$$

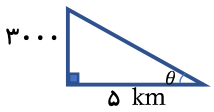
$$\cos\hat{A} = \sin\hat{B}$$

مثال ۱) مقدار عددی عبارت ها را به دست آورید .

الف) $4\cos 30^\circ - 4\sin^2 60^\circ = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 2\sqrt{3} - 3$

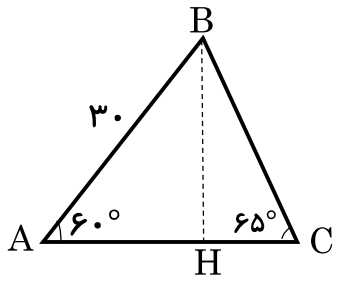
ب) $$\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال ۲) هواپیمایی در ارتفاع ۳۰۰۰ متری در حال پرواز است . این هواپیما وقتی به فاصله ۵ کیلومتری باند فرود می رسد روی یک خط شروع به پایین آمدن می کند . تانژانت زاویه ای که مسیر این هواپیما با زمین می سازد چقدر است ؟



$۳۰۰۰\ \text{m} = ۳\ \text{km}$ $\qquad \tan\theta = \frac{۳}{۵}$

مثال ۳) با توجه به شکل اندازه BC را به دست آورید.

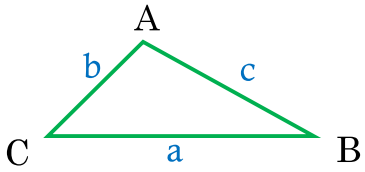


$$\text{Sin}\,\hat{A} = \frac{BH}{AB} \to \text{Sin}\,۶۰^\circ = \frac{BH}{۳۰} \to BH = ۳۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} \to BH = ۱۵\sqrt{۳} \simeq ۲۵/۵$$

$$\text{Sin}\,۶۵^\circ = ۰/۹ = \frac{BH}{BC} \to ۰/۹ = \frac{۲۵/۵}{BC} \to BC = \frac{۲۵/۵}{۰/۹} \simeq ۲۸/۳$$

*** نکته :** در این سوال می توان از قانون سینوس ها استفاده کرد :

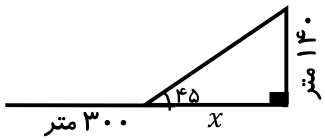
قانون سینوس ها :



$$\frac{a}{\text{Sin}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{Sin}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{Sin}\,\hat{C}}$$

$$\frac{BC}{\sin ۶۰^\circ} = \frac{AB}{\sin ۶۵^\circ} \to \frac{BC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۳۰}{۰/۹} \to BC = \frac{۳۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰/۹} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۰/۹} = \frac{۲۵/۵}{۰/۹} = ۲۸/۳$$

مثال ۴) هواپیمایی می خواهد از باند بلند شود . ابتدا ۳۰۰ متر روی باند حرکت می کند تا سرعت لازم را پیدا کند سپس با زاویه ۴۵ درجه از زمین بلند می شود وقتی به بالای انتهای باند می رسد ۱۴۰ متر ارتفاع گرفته است . طول کل باند چقدر است ؟

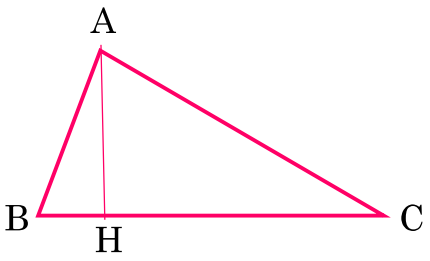


$$\tan ۴۵^\circ = \frac{۱۴۰}{x} \to x = ۱۴۰\times۱ = ۱۴۰$$

$$۳۰۰ + ۱۴۰ = ۴۴۰m$$

---

* فرمول مساحت مثلث :

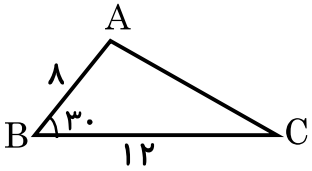


$$S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲}\times BC\times AH$$

$$\sin\hat{B} = \frac{AH}{AB} \to AH = \sin\hat{B}\times AB$$

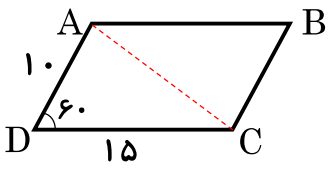
$$S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲}\times BC\times AB\times\sin\hat{B}$$

مثال ۱) مساحت مثلث زیر را بیابید .



$$S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲}\times۸\times۱۲\times\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}\times۸\times۱۲\times\frac{۱}{۲} = ۲۴$$

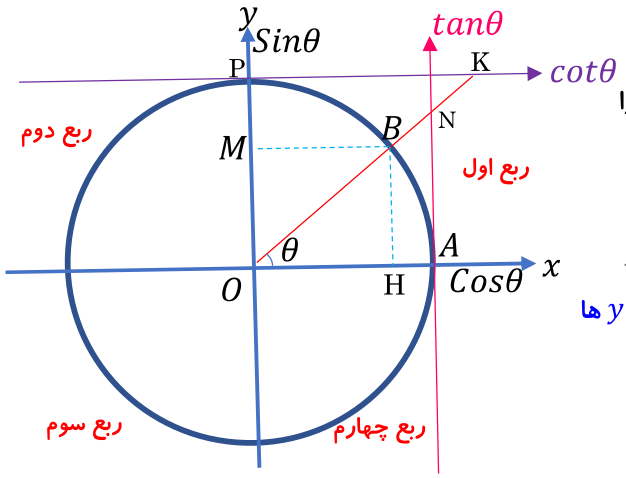
مثال ۲) مساحت متوازی الاضلاع مقابل را بیابید .



$$S_{\triangle ADC} = \frac{۱}{۲}\times۱۰\times۱۵\times\sin ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}\times۱۰\times۱۵\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۷۵}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{\square} = ۲\times S_{\triangle ADC} = ۲\times\frac{۷۵}{۲}\sqrt{۳} = ۷۵\sqrt{۳}$$

درس دوم : دایره مثلثاتی



دایره ای به شعاع یک که مرکز آن روی مبدا دستگاه مختصات می باشد را دایره مثلثاتی می گوییم .جهت حرکت عقربه های ساعت را جهت منفی و خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت را جهت مثبت در نظر می گیریم .

اگر از نقطه A ودرجهت مثبت مثلثاتی روی دایره حرکت کنیم وبه نقطه B برسیم زاویه θ تشکیل می شود . محور x ها را محور کسینوس ها و محور y ها را محور سینوس ها در نظر می گیریم .

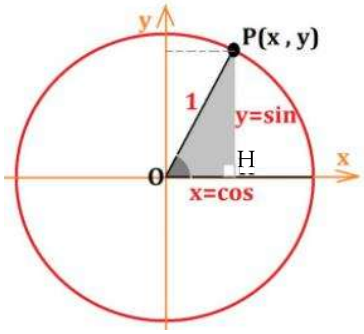
مطابق شکل :

$$\sin\theta = OM \qquad \cos\theta = OH \qquad \tan\theta = AN \qquad \cot\theta = PK$$

در ربع اول تمام زوایا بین ۰ تا ۹۰ درجه و در ربع دوم زوایای بین ۹۰ تا ۱۸۰ درجه و در ربع سوم زوایای بین ۱۸۰ تا ۲۷۰ درجه و در ربع چهارم زوایای بین ۲۷۰ تا ۳۶۰ درجه را داریم . اما اگر جهت حرکت منفی باشد یعنی در جهت عقربه های ساعت در ربع چهارم زوایای ۰ تا ۹۰- درجه و در ربع سوم زوایای ۹۰- تا ۱۸۰- درجه و در ربع دوم زوایای ۱۸۰- تا ۲۷۰- درجه و در ربع اول زوایای ۲۷۰- تا ۳۶۰- درجه قرار می گیرند .

مثال : مشخص کنید هر یک از زوایای زیر روی دایره مثلثاتی در کدام ناحیه قرار می گیرند ؟

$\theta = -۲۱۰^\circ$ ربع دوم $\quad \theta = ۱۵۰^\circ$ ربع دوم $\quad \theta = -۹۰^\circ$ مرز ربع چهارم و سوم $\quad \theta = ۱۲۰^\circ$ ربع دوم



فرض کنید $p\ (x_0 y)$ نقطه ای دلخواه روی دایره مثلثاتی باشد و θ زاویه ای است که نیم خط OP با محور xها در جهت مثبت می سازد از نقطه P عمودهایی بر محور x ها و y ها رسم می کنیم .مطابق شکل در مثلث $\hat{OPH}$ داریم $\Leftarrow$ $x^۲ + y^۲ = ۱$

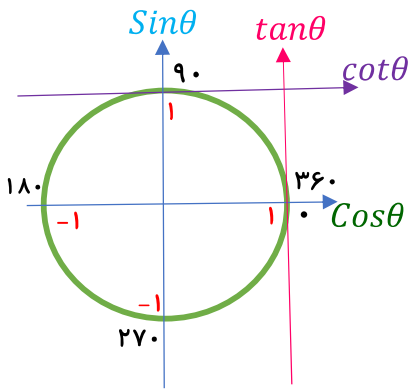
$$\cos\theta = x \qquad \sin\theta = y \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

مثال: اگر θ زاویه ای در جهت مثبت مثلثاتی باشد به طوری که نقطه انتهای کمان θ دایره مثلثاتی را در نقطه $P\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}, \frac{-۲}{\sqrt{۵}}\right)$ قطع کند . نسبت های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید .

$$x = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \qquad y = \frac{-۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\sin\theta = \frac{-۲}{\sqrt{۵}} \qquad \cos\theta = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \qquad \tan\theta = \frac{\frac{-۲}{\sqrt{۵}}}{\frac{۱}{\sqrt{۵}}} = -۲ \qquad \cot\theta = \frac{\frac{۱}{\sqrt{۵}}}{\frac{-۲}{\sqrt{۵}}} = \frac{-۱}{۲}$$

جدول نسبت های مثلثاتی زوایای (۰° ، ۹۰° ، ۱۸۰° ، ۲۷۰° ، ۳۶۰°):



مقدار	۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$Sin\theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$Cos\theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$tan\theta$	۰	ت ن	۰	ت ن	۰
$cot\theta$	ت ن	۰	ت ن	۰	ت ن

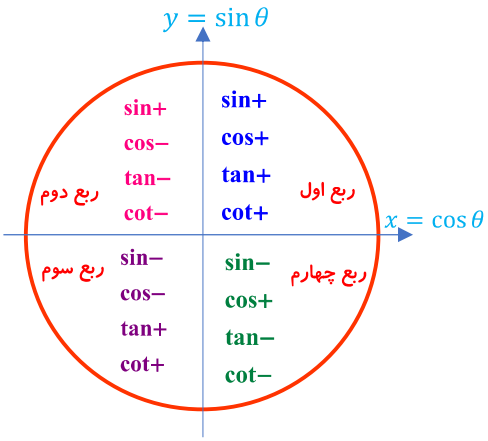
* **نکته :** به ازای هر زاویه دلخواه θ داریم : $-1 \le \sin\theta \le 1$ و $-1 \le \cos\theta \le 1$

$90 < \theta < 180$ در ربع دوم $0 < \theta < 90$ در ربع اول

$270 < \theta < 360$ در ربع چهارم $180 < \theta < 270$ در ربع سوم

زوایای ۰° ، ۹۰° ، ۱۸۰° ، ۲۷۰° ، ۳۶۰° زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچکدام از نواحی نمی توان دسته بندی کرد .

علامت نسبت های مثلثاتی :



مقدار	ربع اول $x,y>0$	ربع دوم $x<0$ و $y>0$	ربع سوم $x,y<0$	ربع چهارم $x>0$ و $y<0$
$y = Sin\theta$	+	+	–	–
$x = Cos\theta$	+	–	–	+
$\frac{y}{x} = tan\theta$	+	–	+	–
$\frac{x}{y} = cot\theta$	+	–	+	–

مثال ۱) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید .

$$A = \frac{2\sin 90^\circ + 3\cos 270^\circ - \tan 360^\circ}{1 + 2\cos 180^\circ + \sin 270^\circ} = \frac{2\times 1 + 3\times 0 - 0}{1 + 2\times -1 + (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

مثال ۲) اگر $\cos\theta = \frac{2}{7}$ و θ در ربع چهارم باشد ، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه θ و مختصات نقطه P روی دایره را بنویسید.

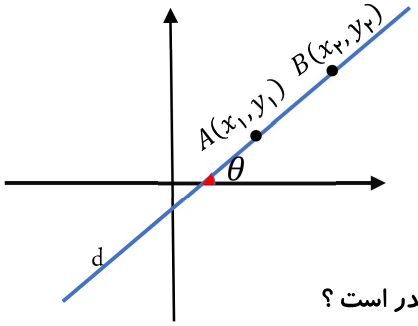
$$\cos\theta = \frac{2}{7} = x \longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow y^2 = 1 - x^2 \longrightarrow y^2 = 1 - \frac{4}{49} = \frac{45}{49} \longrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{45}}{7}$$

چون θ در ربع چهارم قرار دارد y یا Sin در ربع چهارم منفی است پس مقدار منفی قابل قبول است . $y = \sin\theta = \frac{-\sqrt{45}}{7}$

$$\frac{y}{x} = tan\theta = \frac{-\sqrt{45}}{2} \qquad \frac{x}{y} = cot\theta = \frac{-2}{\sqrt{45}}$$

شیب خط و رابطه آن با تانژانت زاویه :

از نظر هندسی **شیب** هر خط برابر است با **تانژانت** زاویه ای که خط با محور x ها در جهت مثبت مثلثاتی بسازد .



$$\text{شیب} = m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

$$\tan\theta = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

$$\Rightarrow \text{شیب} = m = \tan\theta$$

مثال : خط d با محور x ها در جهت مثبت مثلثاتی زاویه ۳۰ درجه ساخته است . شیب خط چقدر است ؟

$$m = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

*** نکته ریاضی :** معادله خطی که از نقطه $A|_{y_۱}^{x_۱}$ گذشته و شیب آن برابر m باشد از فرمول زیر به دست می آید :

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

مثال : معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A|_۲^{\sqrt{۳}}$ گذشته و با محور x ها در جهت مثبت مثلثاتی زاویه ۶۰ درجه بسازد .

$$m = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \rightarrow y - ۲ = \sqrt{۳}(x - \sqrt{۳})$$

$$\rightarrow y - ۲ = \sqrt{۳}x - ۳ \rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۱$$

مثال : معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A|_۲^{-۱}$ گذشته و با محور x ها در جهت مثبت مثلثاتی زاویه ۴۵ درجه بسازد .

$$m = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \rightarrow y - ۲ = ۱(x - (-۱)) \rightarrow y - ۲ = x + ۱ \rightarrow y = x + ۳$$

*** نکته ریاضی :**

اگر معادله خطی به صورت $ax + by = c$ باشد در این صورت :

$$\text{شیب} = m = \frac{-a}{b} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}$$

مثال : خط $۳x - \sqrt{۳}y = ۷$ با محور x ها چه زاویه ای در جهت مثبت می سازد؟

$$m = -\frac{۳}{-\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{-۳\sqrt{۳}}{-۳} = \sqrt{۳} \rightarrow m = \tan\theta = \sqrt{۳} \rightarrow \theta = ۶۰^\circ$$

روابط بین نسبت های مثلثاتی :

۱) $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱ \rightarrow \begin{cases} \sin^۲\theta = ۱ - \cos^۲\theta \\ \cos^۲\theta = ۱ - \sin^۲\theta \end{cases}$

۲) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۳) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۴) $\tan\theta\cot\theta = ۱ \rightarrow \begin{cases} \tan\theta = \frac{۱}{\cot\theta} \\ \cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta} \end{cases}$

۵) $۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$

۶) $۱ + \cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta}$

۷) $(۱ - \sin\theta)(۱ + \sin\theta) = ۱ - \sin^۲\theta = \cos^۲\theta$

۸) $(۱ - \cos\theta)(۱ + \cos\theta) = ۱ - \cos^۲\theta = \sin^۲\theta$

۹) $\hat{A}+\hat{B}=۹۰ \rightarrow \begin{cases}\sin A=\cos B\\ \cos A=\sin B\\ \tan A=\cot B\\ \cot A=\tan B\end{cases}$ مثال $\rightarrow ۱۵^\circ+۷۵^\circ=۹۰^\circ \rightarrow \begin{cases}\sin ۱۵^\circ=\cos ۷۵^\circ\\ \cos ۱۵^\circ=\sin ۷۵^\circ\\ \tan ۱۵^\circ=\cot ۷۵^\circ\\ \cot ۱۵^\circ=\tan ۷۵^\circ\end{cases}$

مثال ۱ : اگر θ یک زاویه حاده و $\sin\theta=\frac{۲}{۳}$ باشد مقدار $\cos\theta$ و $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را بیابید .

حل: چون θ یک زاویه حاده است پس در ربع اول قرار دارد و در ربع اول تمام نسبت های مثلثاتی مثبت هستند .

$$\cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta\rightarrow\cos^۲\theta=۱-\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}\rightarrow\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۳}\rightarrow\cos\theta=+\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

مثال ۲ : اگر θ زاویه ای در ربع سوم و $\cos\theta=\frac{-۳}{۵}$ باشد سایر نسبت های مثلثاتی زاویه θ را بیابید .

حل : در ربع سوم $\sin$ و $\cos$ منفی هستند.

$$\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta\rightarrow\sin\theta=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}\rightarrow\sin\theta=-\frac{۴}{۵}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{-۴}{۵}}{\frac{-۳}{۵}}=\frac{۴}{۳}$$

$$\cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=\frac{۳}{۴}$$

مثال ۳: اگر $\tan\theta=\frac{۱}{۲}$ و θ یک زاویه حاده باشد سایر نسبت های مثلثاتی زاویه θ را بیابید.

حل: θ یک زاویه حاده است پس در ربع اول قرار دارد و در ربع اول تمام نسبت های مثلثاتی مثبت هستند .

$$\tan\theta=\frac{۱}{۲}\rightarrow\cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=۲$$

$$۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\rightarrow ۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\rightarrow\frac{۵}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\rightarrow\cos^۲\theta=\frac{۴}{۵}\rightarrow\cos\theta=\pm\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\rightarrow\cos\theta=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta\rightarrow\sin\theta=\sqrt{۱-\frac{۴}{۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

مثال ۴ : اگر $\sin\theta=۲a+b$ و $\cos\theta=a-۲b$ باشد چه رابطه ای بین a و b برقرار است ؟

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\rightarrow(۲a+b)^۲+(a-۲b)^۲=۱\rightarrow ۴a^۲+۴ab+b^۲+a^۲-۴ab+۴b^۲=۱$$

$$۵a^۲+۵b^۲=۱\rightarrow۵(a^۲+b^۲)=۱\rightarrow a^۲+b^۲=\frac{۱}{۵}$$

مثال۵ : اگر $\tan\theta=۲$ باشد حاصل عبارت $A=\frac{۳\sin^۲\theta+۲\cos^۲\theta}{۵\sin^۲\theta-۴\cos^۲\theta}$ را به دست آورید .

$$A=\frac{۳\sin^۲\theta+۲\cos^۲\theta}{۵\sin^۲\theta-۴\cos^۲\theta}=\frac{۳\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}+۲\frac{\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}}{۵\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}-۴\frac{\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}}=\frac{۳\tan^۲\theta+۲}{۵\tan^۲\theta-۴}=\frac{۳\times۴+۲}{۵\times۴-۴}=\frac{۱۴}{۱۶}=\frac{۷}{۸}$$

اتحادهای مثلثاتی :

درستی تساوی ها را ثابت کنید.

$$A)\ ۱-\frac{\cos^۲\theta}{۱+\sin\theta}=\sin\theta$$

$$۱-\frac{\cos^۲\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{۱}{۱}-\frac{۱-\sin^۲\theta}{۱+\sin\theta}=۱-\frac{(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta)}{۱+\sin\theta}=۱-۱+\sin\theta=\sin\theta$$

$$B)\ \frac{\sin\theta}{۱+\cos\theta}+\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{۲}{\sin\theta}$$

$$\frac{\sin\theta\times\sin\theta}{(۱+\cos\theta)\times\sin\theta}+\frac{(۱+\cos\theta)\times(۱+\cos\theta)}{\sin\theta\times(۱+\cos\theta)}=\frac{\sin^۲\theta+(۱+\cos\theta)^۲}{\sin\theta(۱+\cos\theta)}=\frac{\overbrace{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta}^{=۱}+۱+۲\cos\theta}{\sin\theta(۱+\cos\theta)}=$$

$$\frac{۲+۲\cos\theta}{\sin\theta(۱+\cos\theta)}=\frac{۲(۱+\cos\theta)}{\sin\theta(۱+\cos\theta)}=\frac{۲}{\sin\theta}$$

$$C)\ \tan^۲\theta-\sin^۲\theta=\tan^۲\theta\times\sin^۲\theta$$

$$\tan^۲\theta-\sin^۲\theta=\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}-\sin^۲\theta=\frac{\sin^۲\theta-\sin^۲\theta\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{\sin^۲\theta(۱-\cos^۲\theta)}{\cos^۲\theta}=\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}\times\overbrace{(۱-\cos^۲\theta)}^{\sin^۲\theta}=\tan^۲\theta\times\sin^۲\theta$$

$$D)\ \frac{\cos\theta}{\tan\theta}+\sin\theta=\frac{۱}{\sin\theta}$$

$$\frac{\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\sin\theta=\frac{\cos^۲\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{۱}=\frac{\cos^۲\theta+\sin^۲\theta}{\sin\theta}=\frac{۱}{\sin\theta}$$

$$E)\ \frac{۲\tan\theta}{۱+\tan^۲\theta}=۲\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{۲\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{۱+\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}}=\frac{۲\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos^۲\theta+\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}}=\frac{۲\sin\theta\cos^۲\theta}{۱\times\cos\theta}=۲\sin\theta\cos\theta$$

$$F)\ \cos^۲\theta-\sin^۲\theta=۱-۲\sin^۲\theta$$

$$\cos^۲\theta-\sin^۲\theta=۱-\sin^۲\theta-\sin^۲\theta=۱-۲\sin^۲\theta$$

G) $\sin^۴\theta-\cos^۴\theta=۲\sin^۲\theta-۱$

$(\sin^۲\theta)^۲-(\cos^۲\theta)^۲=(\sin^۲\theta-\cos^۲\theta)(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)=\sin^۲\theta-\cos^۲\theta=$
$\sin^۲\theta-۱+\sin^۲\theta=۲\sin^۲\theta-۱$

H) $(\sin\theta+\cos\theta)^۲+(\sin\theta-\cos\theta)^۲=۲$

$\sin^۲\theta+۲\sin\theta\cos\theta+\cos^۲\theta+\sin^۲\theta-۲\sin\theta\cos\theta+\cos^۲\theta=$
$۲\sin^۲\theta+۲\cos^۲\theta=۲(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)=۲\times۱=۲$

---

* بیشتر بدانیم :

رادیان :

هرگاه محیط دایره را به اندازه شعاع دایره تقسیم بندی کنیم یعنی به ۲π تقسیم کنیم آنگاه به هرکدام آنها یک رادیان می گوییم و با R نمایش می دهیم .برای تبدیل رادیان به درجه یا برعکس از رابطه زیر استفاده می کنیم :

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$$

مثال : ۳۰ درجه چند رادیان است ؟

$$\frac{۳۰}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{۳۰\pi}{۱۸۰}=\frac{\pi}{۶}$$