فصل ۱ : درس اول مجموعه های متناهی و نامتناهی

مجموعه : دسته ای مشخص و متمایز (غیر تکراری) از اشیا را **مجموعه** می گویند.

یادآوری مجموعه های مختلف اعداد :

مجموعه اعداد حسابی : $w = \{۰,۱,۲,۳,۴,\dots\}$

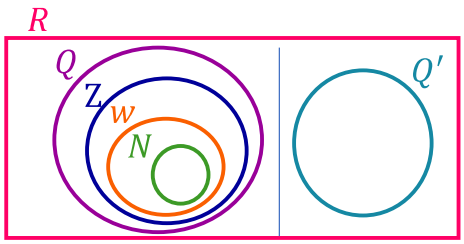
مجموعه اعداد طبیعی : $N = \{۱,۲,۳,۴,\dots\}$

مجموعه اعداد صحیح : $Z = \{\dots,-۲,-۱,۰,+۱,+۲,\dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $Q = \left\{\frac{a}{b} \middle| a,b \in Z, b \neq ۰\right\}$

مجموعه اعداد گنگ: $Q' = \{$اعدادی که جذر کامل ندارد و یا نتوان آنها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد$\}$

مجموعه اعداد حقیقی: $R = Q \cup Q'$



برخی روابط مهم بین مجموعه های اعداد :

۱) $N \subseteq w \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ ۲) $Q' \subseteq R$

۳) $R - Q = Q'$ ۴) $R - Q' = Q$

۵) $W - N = \{۰\}$ ۶) $Q \cap Q' = \emptyset$

۷) $Z - W = \{\dots,-۳,-۲,-۱\}$

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر است با : ۲^n

مثال ۱) تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی ۳۲ تاست . این مجموعه چند عضو دارد؟

$$۲^n = ۳۲ \rightarrow ۲^n = ۲^۵ \longrightarrow n = ۵$$

مثال ۲) تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ($۲n - ۵$) عضوی ۱۶ برابر تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ($n - ۲$) است . مقدار n را بیابید .

$$۲^{(۲n-۵)} = ۱۶ \times ۲^{(n-۲)} \longrightarrow ۲^{(۲n-۵)} = ۲^۴ \times ۲^{(n-۲)}$$

$$۲^{(۲n-۵)} = ۲^{(۴+n-۲)} \longrightarrow ۲^{(۲n-۵)} = ۲^{(n+۲)} \longrightarrow ۲n - ۵ = n + ۲ \longrightarrow ۲n - n = ۲ + ۵ \longrightarrow n = ۷$$

بازه (فاصله) :

هر زیرمجموعه از مجموعه اعداد حقیقی R که مشخص کننده یک قطعه ازمحور اعدادحقیقی باشد را بازه می نامیم که به صورت های زیر تعریف می شود .

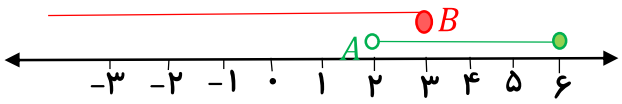
نوع بازه	بازه	نمایش به صورت مجموعه ای	نمایش هندسی
باز	(a,b)	$\{x \in R \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a,b]$	$\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a,b)$	$\{x \in R \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a,b]$	$\{x \in R \mid a < x \leq b\}$	
باز	$(a,+\infty)$	$\{x \in R \mid a < x\}$	
باز	$(-\infty,b)$	$\{x \in R \mid x < b\}$	
نیم باز	$[a,+\infty)$	$\{x \in R \mid a \leq x\}$	
نیم باز	$(-\infty,b]$	$\{x \in R \mid x \leq b\}$	

تذکر :

$+\infty$ (مثبت بی نهایت) و $-\infty$ (منفی بی نهایت) عدد نیستند بلکه نمادهایی هستند برای نشان دادن اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک

مثال : اگر $A=\{x|x\in R, ۲<x\leq ۶\}$ و $B=\{x|x\in R, x\leq ۳\}$ باشد . اولا A و B را به صورت بازه نشان دهید . ثانیا $A\cap B$ و $A\cup B$ را مشخص کنید .

$A=(۲,۶]$ $B=(-\infty,۳]$



$A\cup B=(-\infty,۶]$ $A\cap B=(۲,۳]$

مجموعه های متناهی و نامتناهی :

مجموعه A را یک مجموعه **متناهی (باپایان – قابل شمارش)** می گویند ، هرگاه تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد .در غیر این صورت آن را مجموعه **نامتناهی (بی پایان – غیرقابل شمارش)** می گویند.

مثال : متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

۱)مجموعه دانش آموزان سال دهم تجربی در کشور (متناهی)

۲) تعداد اعداد سه رقمی بزرگتر از ۵۰۰ (متناهی)

۳) بازه (۳ , ۲) (نامتناهی)

۴) تعداد برگ های درختان قم (متناهی)

* چند نکته :

* اگر $A\subseteq B$ و A مجموعه ای نامتناهی باشد ، قطعا B هم نامتناهی است .ولی اگر A متناهی باشد ، مجموعه B می تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

* اگر $A\subseteq B$ باشد و B مجموعه ای متناهی باشد، قطعا A هم متناهی است ولی اگر B نامتناهی باشد A می تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

درس دوم : مجموعه مرجع (جهانی – مادر) :

در هر مبحث ، مجموعه ای را که همه ی مجموعه های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند **مجموعه مرجع** می نامند و معمولا با U نمایش می دهند.

متمم یک مجموعه : اگر U مجموعه مرجع و $A\subseteq U$ باشد آنگاه مجموعه $U-A$ را متمم مجموعه A نامیده و با نماد A' نمایش می دهیم .به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند .

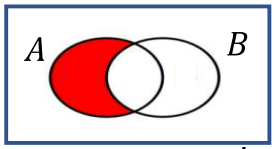


روابط مهم :

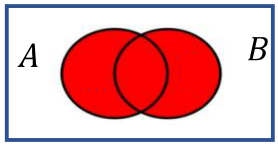
۱) $A\cup A'=U$ ۲) $A=U-A'$ ۳) $A'=U-A$

۴) $A\cap A'=\emptyset$ ۵) $\emptyset'=U$ ۶) $U'=\emptyset$ ۷) $(A')'=A$

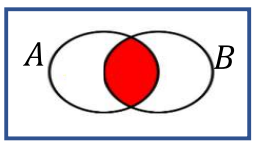
۸) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ۹) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ ۱۰) $A-B=A\cap B'$



$A-B=A\cap B'$



$A\cup B$



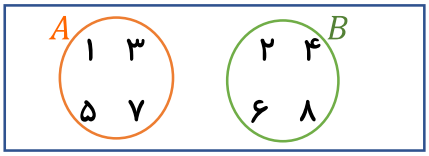
$A\cap B$

تعداد اعضای یک مجموعه : اگر A یک مجموعه متناهی باشد ،تعداد اعضای A را با علامت $n(A)$ نشان می دهند .

$A=\{۱,۲,۳,۴\}\longrightarrow n(A)=۴$

دو مجموعه جدا از هم : دو مجموعه A و B را جدا از هم می نامند هرگاه $A\cap B=\emptyset$

$A=\{۱,۳,۵,۷\}$ $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ $A\cap B=\emptyset$



مثال: اگر $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ مجموعه مرجع و $A=\{۱,۵,۶,۷,۹\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۱۰\}$ باشند. مطلوبست محاسبه :

الف) A' ب) $(A')'$ ج) B' د) $A'\cap B'$ ه) $A'\cup B'$

و) $(A\cup B)'$ ز) $A\cap B'$ ح) $(A\cap B)'$ ط) $A-B$

حل:

الف) $A'=\{۲,۳,۴,۸,۱۰\}$ ب) $(A')'=A=\{۱,۵,۶,۷,۹\}$ ج) $B'=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$

د) $A'\cap B'=\{۸\}$ ه) $A'\cup B'=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ و) $(A\cup B)'=\{۸\}=A'\cap B'$

ز) $A\cap B'=\{۵,۶,۷,۹\}$ ح) $(A\cap B)'=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}=A'\cup B'$ ط) $A-B=\{۵,۶,۷,۹\}$

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه :

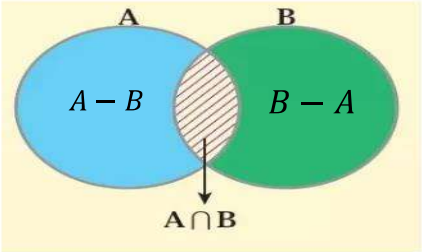
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

برخی روابط مهم رابطه اجتماع دو مجموعه :

۱) $n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$

۲) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

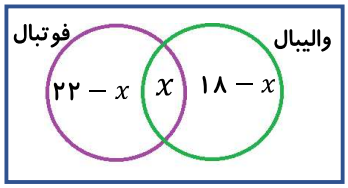
۳) $n(A)+n(A')=n(U)$ $\rightarrow$ $n(A)=n(U)-n(A')$ ، $n(A')=n(U)-n(A)$



مثال ۱ : در یک کلاس ۳۰ نفری ، ۲۲ نفر فوتبال و ۱۸ نفر والیبال بازی می کنند. چند نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند؟

روش اول : $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\rightarrow ۳۰=۲۲+۱۸-n(A\cap B)\rightarrow n(A\cap B)=۱۰$

روش دوم :



$۲۲-x+x+۱۸-x=۳۰\rightarrow ۴۰-x=۳۰\rightarrow x=۱۰$

مثال ۲ : از میان اعداد ۱ تا ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که : الف) بر ۵ یا ۷ بخش پذیر باشد؟

ب) بر ۵ بخش پذیر باشد ولی بر ۷ نباشد ؟ ج) نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیر باشد؟

حل :

الف) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۴۰+۲۸-۵=۶۳$

$n(A)=\frac{۲۰۰}{۵}\simeq ۴۰$ بخش پذیر بر ۵

$n(B)=\frac{۲۰۰}{۷}\simeq ۲۸$ بخش پذیر بر ۷

ب) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۴۰-۵=۳۵$

$n(c)=\frac{۲۰۰}{۳۵}\simeq ۵$ بخش پذیر بر ۵ و بر ۷

ج) $n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)=۲۰۰-۶۳=۱۳۷$

مثال ۳: اگر $n(A)+n(B)=۳n(A\cap B)$ باشد حاصل $\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}$ کدام است ؟

الف) ۲ ب) ۱ ج) ۴ د) ۳

حل :

$$\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=\frac{۳n(A\cap B)-n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=\frac{۲n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=۲$$

فرمول تعداد اعضای اجتماع سه مجموعه :

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

مثال: در میان اعداد ۱ تا ۲۱۰ چند عدد یافت می شود که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش پذیر باشند؟

الف) ۱۴۸ ب) ۱۴۷ ج) ۱۵۴ د) ۱۵۲

حل :

$n(B)=\frac{۲۱۰}{۳}=۷۰$ بخش پذیر بر ۳

$n(A\cap B)=\frac{۲۱۰}{۶}=۳۵$ بخش پذیر بر ۳و۲

$n(B\cap C)=\frac{۲۱۰}{۱۵}=۱۴$ بخش پذیر بر ۵و۳

$n(A)=\frac{۲۱۰}{۲}=۱۰۵$ بخش پذیر بر ۲

$n(C)=\frac{۲۱۰}{۵}=۴۲$ بخش پذیر بر ۵

$n(A\cap C)=\frac{۲۱۰}{۱۰}=۲۱$ بخش پذیر بر ۵و۲

$n(A\cap B\cap C)=\frac{۲۱۰}{۳۰}=۷۰$ بخش پذیر بر ۲و ۳ و ۵

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$۱۰۵+۷۰+۴۲-۳۵-۲۱-۱۴+۷=۱۵۴$$

درس سوم : الگو و دنباله

الگو : به هر ساختار منظم از اشیا یا اعداد ،**الگو** می گویند .هر یک از اعداد الگو را ،جملات آن الگو می نامند . جملات یک الگو را با حروف اندیس دار نشان می دهیم .مثلا **جمله اول** را با $a_۱$ و **جمله دوم** را با $a_۲$ و ..... و **جمله** n **ام** را که **جمله عمومی** الگو نامیده می شود با a_n نشان می دهیم .

در برخی ازالگوها بین جملات رابطه خاصی وجود دارد . $a_n=۳n+۲$ ← جمله عمومی

$a_۱$ $a_۲$ $a_۳$ $a_۴$

۵ و ۸ و ۱۱ و ۱۴ و....

+۳ +۳ +۳

مثال ۱: جمله n ام دنباله ای به صورت $t_n=(-۱)^n+\frac{۳}{n}$ است . چهار جمله اول این دنباله را بیابید.

حل: $t_۱=(-۱)^۱+\frac{۳}{۱}=-۱+۳=+۲$ $t_۲=(-۱)^۲+\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$ $t_۳=۰$ $t_۴=\frac{۷}{۴}$

مثال ۲: چندمین جمله از دنباله با جمله عمومی $t_n=\frac{۵n-۴}{n+۲}$ برابر ۴ می باشد ؟

حل: $\frac{۵n-۴}{n+۲}=۴\rightarrow ۵n-۴=۴n+۸\rightarrow n=۱۲$

الگوهای خطی :

به الگوهایی که اختلاف هر دو جمله متوالی در آنها عددی ثابت باشد **الگوی خطی** می گوییم . مثلا ۵ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۰ و ۲۵ .....

+۵ +۵ +۵ +۵

به طور کلی به الگوهایی که جمله عمومی آنها به صورت $t_n=an+b$ است الگوی خطی می گوییم که در آنها a و b عددهای حقیقی دلخواه و ثابتی هستند .

اگر جملات یک الگوی خطی را روی دستگاه مختصات نشان دهیم همگی روی یک **خط راست** هستند.

ویژگی الگوهای خطی : ۱) فاصله جملات ثابت است و برابر با ضریب n یعنی a است .

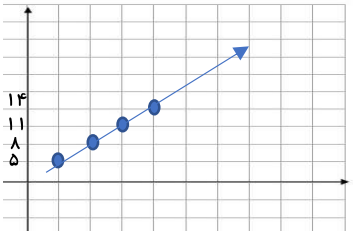
۲) نمودار جملات الگو، خط راست است .

۳) توان n برابر ۱ است .

مثال ۱: الگوی زیر را در نظر بگیرید و جمله عمومی آن را بنویسید وسپس در دستگاه مختصات رسم کنید. ۵ و ۸ و ۱۱ و ۱۴ و....

+۳ +۳ +۳

عدد ثابت اضافه شده همان a یا ضریب n است. ⟵ $t_n=۳n+۲$



مثال ۲: در یک الگوی خطی جمله دوم برابر ۷ و جمله ششم برابر ۹- است . جمله عمومی الگو را بیابید . $t_n = an+b$

$$\begin{cases} t_۲ = ۷ \to a(۲)+b=۷ \\ t_۶ = -۹ \to a(۶)+b=-۹ \end{cases} \xrightarrow{\times -۱} \begin{cases} ۲a+b=۷ \\ ۶a+b=-۹ \end{cases} \to \begin{cases} ۲a+b=۷ \\ -۶a-b=۹ \end{cases}$$

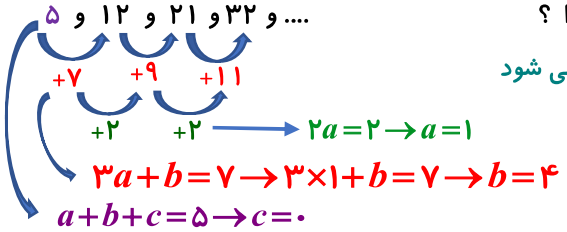
$$-۴a=۱۶ \to a=-۴ \qquad ۲a+b=۷ \to ۲(-۴)+b=۷ \to b=۱۵$$

جمله عمومی $t_n = an+b \to t_n = -۴n+۱۵$

*الگوهای غیرخطی :

الگوهایی که در آنها فاصله بین جملات ثابت نیست و نمودار جملات الگو خط راست نیست الگوهای غیرخطی نامیده می شود.

مثال) جمله عمومی الگوی زیر را به دست آورید . آیا این الگو خطی است ؟ چرا ؟ ۵ و ۱۲ و ۲۱ و ۳۲ و ....



خیر خطی نیست چون فاصله جملات ثابت نیست .اما چون در مرحله دوم ثابت می شود

الگوی درجه ۲ است . $a_n = an^۲+bn+c$

$a_n = ۱n^۲+۴n$

* دنباله :

تعدادی عدد که پشت سرهم نوشته شوند دنباله اعداد را تشکیل می دهند . هر عدد دنباله را یک جمله دنباله می نامند.

برخی دنباله های معروف : ...و ۷ و ۵ و۳ و ۲ : دنباله اعداد اول ....و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ : دنباله اعداد طبیعی

$n^۲$: جمله عمومی ....و ۲۵ و ۱۶ و ۹ و ۴ و ۱ : دنباله اعداد مربعی ....و ۸ و ۶ و ۴ و ۲ : دنباله اعداد طبیعی زوج

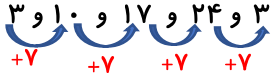
$\frac{n(n+۱)}{۲}$:جمله عمومی ...و ۱۵ و ۱۰ و ۶ و ۳ و ۱ : دنباله اعداد مثلثی

$t_۱ = ۱$ و $t_۲ = ۱ \to t_n = t_{n-۱} + t_{n-۲}$ $(n \geq ۳)$ .... و ۵۵ و ۳۴ و ۲۱ و ۱۳ و ۸ و ۵ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱ : دنباله فیبونانچی

درس چهارم : (دنباله حسابی و هندسی)

دنباله حسابی (عددی) : دنباله ای که به هر جمله آن (غیر از جمله اول) مقدار ثابتی اضافه شود تا جمله بعدی به دست آید را دنباله حسابی می نامند و آن مقدار ثابت را قدرنسبت نامیده و با d نشان می دهند و جمله اول آن را با $t_۱$ یا $a_۱$ نشان می دهند.

$d = ۷$ $t_۱ = ۳$ ... و ۳۱ و ۲۴ و ۱۷ و ۱۰ و ۳



دنباله حسابی که قدرنسبت آن مثبت باشد را دنباله صعودی و اگر قدرنسبت آن منفی باشد را دنباله نزولی می نامند.

صعودی $d = +۲$ $t_۱ = ۱$ ....و ۹ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱

نزولی $d = -۵$ $t_۱ = ۲۰$ ...و ۵- و ۰ و ۵ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۰

* فرمول جمله n ام یا جمله عمومی در دنباله های حسابی :

۳ و ۷ و ۱۱ و ۱۵ و ...

$t_۱$ $t_۲ = t_۱ + d$ $t_۳ = t_۱ + ۲d$ $t_۴ = t_۱ + ۳d$

$$t_n = t_۱ + (n-۱)d$$

قدر نسبت — شماره جمله — جمله اول — جمله n ام

مثال ۱: جمله اول یک دنباله عددی (۱۵-) و قدرنسبت آن ۸ می باشد . اولا : جمله بیستم این دنباله را بیابید . ثانیا : چندمین جمله این دنباله برابر ۲۲۵ است ؟

$t_۱ = -۱۵$ $d = ۸$

حل :

الف) $t_{۲۰} = t_۱ + (۲۰-۱)d \to t_{۲۰} = -۱۵ + ۱۹ \times ۸ = ۱۳۷$

ب) $t_n = t_۱ + (n-۱)d \to ۲۲۵ = -۱۵ + (n-۱) \times ۸ \to -۱۵ + ۸n - ۸ = ۲۲۵ \to n = ۳۱$

مثال ۲: جمله هفدهم یک دنباله عددی ۴۸ و جمله سی و یکم آن ۹۰ می باشد . این دنباله را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{cases} t_{17}=48 \\ t_{31}=90 \end{cases} \quad \xrightarrow{-1\times} \begin{cases} t_1+16d=48 \\ t_1+30d=90 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -t_1-16d=-48 \\ t_1+30d=90 \end{cases}$$

$$14d=42 \rightarrow d=3$$

$$t_1+30\times 3=90 \rightarrow t_1=0$$

جمله عمومی :

$$t_n=0+(n-1)\times 3 \rightarrow t_n=3n-3$$

.... و ۱۲ و ۹ و ۶ و ۳ و ۰ : جملات دنباله

مثال ۳ : در یک دنباله حسابی $t_4+t_{11}=105$ و $t_3+t_7=80$ این دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_4+t_{11}=105 \\ t_3+t_7=80 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1+3d+t_1+10d=105 \\ t_1+2d+t_1+6d=80 \end{cases} \xrightarrow{-1\times} \begin{cases} 2t_1+13d=105 \\ 2t_1+8d=80 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2t_1-13d=-105 \\ 2t_1+8d=80 \end{cases}$$

$$d=5 \quad t_1=20$$

* فرمول قدرنسبت در دنباله های حسابی :

اگر دریک دنباله حسابی جمله n ام (t_n) و جمله m ام (t_m) مشخص باشند قدر نسبت این دنباله از فرمول $d=\frac{t_m-t_n}{m-n}$ بدست می آید.

اثبات فرمول: $\frac{t_m-t_n}{m-n}=\frac{(t_1+(m-1)d)-(t_1+(n-1)d}{m-n}=\frac{t_1+md-d-t_1-nd+d}{m-n}=\frac{d(m-n)}{m-n}=d$

مثال : جمله دوازدهم یک دنباله عددی ۱۲۷ و جمله هفتم آن ۹۲ می باشد . قدر نسبت این دنباله را به دست آورید .

$$d=\frac{t_{12}-t_7}{12-7}=\frac{127-92}{5}=7$$

* فرمول تعداد جملات در دنباله حسابی

$$n=\frac{t_n-t_1}{d}+1$$

مثال : تعداد جملات در دنباله زیر چندتاست ؟

۴۰ و ۴۷ و ۵۴ و .... و ۲۰۸ (t_1 = ۴۰ ، $d=7$ ، t_n = ۲۰۸)

$$n=\frac{208-40}{7}+1=25$$

* فرمول واسطه حسابی :

اگر a و b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند b را واسطه حسابی بین a و c می نامند که از فرمول زیر به دست می آید :

$$b=\frac{a+c}{2} \quad \text{یا} \quad 2b=a+c$$

a و b و c و ... : دنباله حسابی

مثال ۱ : مقدار x را چنان تعیین کنید که سه جمله زیر یک دنباله حسابی تشکیل دهند. x^2+2 و x^2+8 و $12x-6$

حل:

$$2(x^2+8)=(x^2+2)+(12x-6) \rightarrow 2x^2+16=x^2+12x-4 \rightarrow x^2-12x+20=0$$

$$x^2-12x+20=0 \rightarrow (x-2)(x-10)=0$$

$x=2$ → ۶,۱۲,۱۸

$x=10$ → ۱۰۲,۱۰۸,۱۱۴ (جایگزین در جملات)

مثال ۲: بین دو عدد ۷- و ۲۳ پنج واسطه حسابی درج کنید .

روش اول:

$$d=\frac{t_7-t_1}{7-1}=\frac{23-(-7)}{6}=5$$

جملات دنباله: ۲۳ و ۱۸ و ۱۳ و ۸ و ۳ و ۲- و ۷-

روش دوم:: * اگر a و b دوعدد ازدنباله حسابی باشند و بخواهیم k واسطه حسابی بین آنها درج کنیم می توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم .

$$d=\frac{b-a}{k+1}$$

$$d=\frac{23-(-7)}{5+1}=5$$

جملات دنباله: ۲۳ و ۱۸ و ۱۳ و ۸ و ۳ و ۲- و ۷-

* فرمول مجموع جملات(S_n) در دنباله حسابی متناهی :

۱) $S_n = \frac{n}{۲}(t_۱ + t_n)$ ← زمانی استفاده می کنیم که جمله اول و جمله آخر و تعداد جملات را داشته باشیم .

۲) $S_n = \frac{n}{۲}\left[۲t_۱ + (n-۱)d\right]$ ← زمانی استفاده می کنیم که جمله اول و قدر نسبت و تعداد جملات را داشته باشیم .

مثال ۱: در یک دنباله حسابی جمله اول برابر ۲۱- و قدر نسبت برابر ۵ می باشد . مجموع ۲۰ جمله اول این دنباله را بنویسید .

$t_۱ = -۲۱$
$d = ۵$
$S_{۲۰} = ?$

$$S_n = \frac{n}{۲}\left[۲t_۱ + (n-۱)d\right] \rightarrow S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}\left[۲\times -۲۱ + (۲۰-۱)\times ۵\right] = ۱۰\left[-۴۲ + ۹۵\right] = ۵۳۰$$

مثال ۲: مجموع بیست و یک جمله اول یک دنباله عددی برابر ۹۰۳ و جمله هفتم آن ۲۷ می باشد . جمله اول و قدرنسبت این دنباله را مشخص کنید.

حل : $S_{۲۱} = \frac{۲۱}{۲}\left[۲t_۱ + (۲۱-۱)d\right] \rightarrow \frac{۲۱}{۲}\left[۲t_۱ + ۲۰d\right] = ۹۳۰ \rightarrow ۲t_۱ + ۲۰d = ۸۶$

از طرفی : $t_۷ = ۲۷ \rightarrow t_۱ + ۶d = ۲۷$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲t_۱ + ۲۰d = ۸۶ \\ t_۱ + ۶d = ۲۷ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲t_۱ + ۲۰d = ۸۶ \\ -۲t_۱ - ۱۲d = -۵۴ \end{cases} \rightarrow t_۱ = ۳, d = ۴$$

چند تمرین مهم :

تمرین ۱ : مجموع ۵ جمله متوالی از یک دنباله حسابی ۱۰ و حاصلضرب آنها ۳۲۰ می باشد . دنباله را مشخص کنید.

تمرین ۲ : مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی می دهند ۲۱ و مجموع مربعات آنها ۱۶۵ می باشد . آن سه عدد کدامند ؟

تمرین ۳ : اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل یک دنباله حسابی می دهند . اگر محیط این مثلث ۳۶ باشد مساحت آن را حساب کنید.

تمرین ۴ : زاویه های داخلی یک ۵ ضلعی محدب تشکیل دنباله حسابی می دهند . اندازه کوچکترین زاویه ۹۲ درجه می باشد . اندازه بزرگترین زاویه را به دست آورید .

دنباله هندسی :

دنباله ای که هر جمله آن (غیر از جمله اول) در مقدار ثابتی ضرب شود تا جمله بعدی به دست آید را دنباله هندسی نامیده و آن مقدار ثابت را قدرنسبت نامیده و با q یا r نشان می دهند .

$$r=\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{t_۳}{t_۲}=\frac{t_۴}{t_۳}=\frac{t_n}{t_{n-۱}}$$

الف) ۲ و ۶ و ۱۸ و ۵۴ و .... $\times ۳$ $\quad r=۳$

ب) ۴ و ۸- و ۱۶ و ۳۲- و .... $\times -۲$ $\quad r=-۲$

* فرمول جمله n ام یا جمله عمومی در دنباله های هندسی :

$t_۱$ و $t_۱r^۱$ و $t_۱r^۲$ و $t_۱r^۳$ و ...

$$t_n = t_۱ \, r^{n-۱}$$

t_n: جمله n ام، $t_۱$: جمله اول، r: قدرنسبت، $n-۱$: تعداد جملات

مثال ۱) جمله دهم در دنباله هندسی .... و ۲۰ و ۱۰ و ۵ را بیابید .

$t_۱=۵$
$r=۲$

$$t_{۱۰}=t_۱r^۹ \rightarrow t_{۱۰}=۵\times ۲^۹=۲۵۶۰$$

مثال ۲) در یک دنباله هندسی جمله هشتم ۸۱ برابر جمله چهارم است . قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

$$t_۸=۸۱t_۴ \rightarrow \frac{t_۱r^۷}{t_۱r^۳}=۸۱ \rightarrow r^۴=۸۱ \rightarrow r=\pm ۳$$

* فرمول قدرنسبت در دنباله های هندسی :

اگر جمله n ام (t_n) و جمله m ام (t_m) در یک دنباله هندسی مشخص باشد قدرنسبت دنباله از فرمول زیر به دست می آید .

$$r^{m-n}=\frac{t_m}{t_n}$$

مثال ۱) جمله هفتم یک دنباله هندسی مساوی ۸ برابر جمله چهارم آن است . نسبت جمله دوازدهم به جمله هشتم آن را حساب کنید .

$$t_۷=t_۴\times ۸ \rightarrow \frac{t_۱r^۶}{t_۱r^۳}=۸ \rightarrow r^۳=۸ \rightarrow r=۲ \longrightarrow \frac{t_{۱۲}}{t_۸} \rightarrow \frac{t_۱r^{۱۱}}{t_۱r^۷}=r^۴=۲^۴=۱۶$$ روش اول :

$$r^{m-n}=\frac{t_m}{t_n} \rightarrow r^{۷-۴}=۸ \rightarrow r^۳=۸ \rightarrow r=۲ \longrightarrow \frac{t_{۱۲}}{t_۸} \rightarrow \frac{t_۱r^{۱۱}}{t_۱r^۷}=r^۴=۲^۴=۱۶$$ روش دوم :

مثال ۲) در یک دنباله هندسی جمله ششم ۵۳ و جمله هشتم ۴۷۷ می باشد . قدرنسبت را بیابید .

$$r^{m-n}=\frac{t_m}{t_n} \rightarrow r^{۸-۶}=\frac{۴۷۷}{۵۳} \rightarrow r^۲=۹ \rightarrow r=\pm ۳$$

مثال ۳) حاصلضرب ۱۰۰ جمله از دنباله هندسی ... و ۱۲۵ و ۲۵ و ۵ را به دست آورید .

$$۵^۱\times ۵^۲\times ۵^۳\times ...\times ۵^{۱۰۰}=۵^{۱+۲+۳+...+۱۰۰}=۵^{\frac{۱۰۰\times ۱۰۱}{۲}}=۵^{۵۰۵۰}$$

* فرمول واسطه هندسی :

اگر a و b و c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند b را واسطه هندسی بین a و c می نامند و بین آنها رابطه زیر برقرار است :

دنباله هندسی : a و b و c و ... $\longrightarrow$ $b^۲=ac$ یا $b=\sqrt{ac}$

مثال ۱) مقدار x را چنان تعیین کنید که سه عبارت $x-۱$ و $۲x+۶$ و $۴x+۴۴$ تشکیل یک دنباله هندسی بدهند.

$$(۲x+۶)^۲=(x-۱)(۴x+۴۴) \rightarrow ۴x^۲+۲۴x+۳۶=۴x^۲+۴۴x-۴x-۴۴ \rightarrow ۱۶x=۸۰ \rightarrow x=۵$$

مثال ۲) بین ۱۰ و ۳۲۰ چهار واسطه هندسی درج کنید . ۳۲۰ و..... و ..... و .....و ..... و ۱۰

روش اول : $r^{m-n}=\frac{t_m}{t_n}\to r^{۶-۱}=\frac{t_۶}{t_۱}\to r^۵=\frac{t_۱r^۵}{t_۱}=\frac{۳۲۰}{۱۰}\to r^۵=۳۲\to r=۲$

روش دوم: اگر a و b دو عدد از واسطه هندسی باشند و قرار باشد k واسطه هندسی بین آنها درج کنیم از فرمول زیر استفاده می کنیم :

$r^{k+۱}=\frac{b}{a}$ ⟶ $r^{۴+۱}=\frac{۳۲۰}{۱۰}=۳۲\to r^۵=۳۲\to r=۲$

* فرمول مجموع جملات(S_n) در دنباله هندسی :

اگر در یک دنباله هندسی جمله اول $t_۱$ و جمله n ام برابر t_n و قدرنسبت r باشد مجموع n جمله اول را با S_n نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم .

$S_n=\frac{t_۱(r^n-۱)}{r-۱}$ یا $S_n=\frac{t_۱(۱-r^n)}{۱-r}$

مثال ۱) در یک دنباله هندسی $t_۱=۳$ و $r=۴$ و $n=۵$ است . $S_۵$ و $t_۵$ را به دست آورید.

$t_n=t_۱r^{n-۱}\to t_n=۳\times۴^{n-۱}\to t_۵=۳\times۴^۴=۷۶۸$

$S_n=\frac{t_۱(r^n-۱)}{r-۱}\to S_۵=\frac{۳\times(۴^۵-۱)}{۴-۱}=۴^۵-۱=۱۰۲۳$

مثال ۲) در یک دنباله هندسی $t_۱=۶$ و $r=۲$ است .مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله را به دست آورید .

$S_n=\frac{t_۱(r^n-۱)}{r-۱}\to S_{۱۰}=\frac{۶\times(۲^{۱۰}-۱)}{۲-۱}=۶(۱۰۲۴-۱)=۶۱۳۸$

مثال ۳) در یک دنباله هندسی $t_۵-t_۱=۲۰$ و $S_۴=۱۰$ است . قدرنسبت دنباله را بیابید .

$\frac{x}{r}\times x\times xr=۲۷۴۴\to x^۳=۲۷۴۴\to x=۱۴$

$\frac{x}{r}+x+xr=۴۹\to\frac{۱۴}{r}+۱۴+۱۴r=۴۹\to ۲r^۲-۵r+۲=۰\to r=۲$

مثال ۴) در یک دنباله هندسی جمله اول ۲ و مجموع ۶ جمله اول ۲۸ برابر مجموع سه جمله اول است . قدرنسبت و جمله پنجم را بیابید .

$t_۱=۲$ $S_۶=۲۸S_۳$ $\frac{t_۱(r^۶-۱)}{r-۱}=۲۸\frac{t_۱(r^۳-۱)}{r-۱}\to r^۶-۱=۲۸(r^۳-۱)$

$\to\frac{r^۶-۱}{r^۳-۱}=۲۸\to\frac{(r^۳-۱)(r^۳+۱)}{(r^۳-۱)}=۲۸\to r^۳+۱=۲۸\to r^۳=۲۷\to r=۳$

$t_۵=t_۱r^۴\to t_۵=۲\times۳^۴=۱۶۲$

مثال ۵) حاصلضرب سه عدد که تشکیل دنباله هندسی می دهند برابر ۲۷۴۴ و مجموع آنها ۴۹ می باشد . آن سه عدد کدامند؟

$\frac{x}{r}\times x\times xr=۲۷۴۴\to x^۳=۲۷۴۴\to x=۱۴$

$\frac{x}{r}+x+xr=۴۹\to\frac{۱۴}{r}+۱۴+۱۴r=۴۹\to ۲r^۲-۵r+۲=۰\to r=\frac{۱}{۲}$

$r=۲$ اعداد دنباله : ۷و ۱۴ و۲۸