الف) اتحاد مربع

$$\begin{cases}(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\end{cases}$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را با کمک اتحاد مربع بدست آورید.



$(3x+4y)^2 =$

$(5x-3y)^2 =$

$(\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2 =$

$(x^3-\frac{1}{\sqrt{x}})^2 =$

$(x^2+y^3)^2 =$

مثال: در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$(3a-\dots)^2 = 9a^2 - \dots ab + 16b^2$

$(2x-\dots)^2 = \dots - 12x + \dots$

$(\dots + 4y)^2 = 25x^2 + \dots + \dots$

الف) اتحاد مربع

$$\begin{cases}(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\end{cases}$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را با کمک اتحاد مربع بدست آورید.



$$(3x+4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$$
$$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$$

$$(5x-3y)^2 = (5x)^2 - 2(5x)(3y) + (3y)^2$$
$$= 25x^2 - 30xy + 9y^2$$

$$(\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2 = (\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2$$
$$= x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$$

$$(x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 = (x^3)^2 - 2 \times x^3 \times \frac{1}{\sqrt{x}} + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2$$
$$= x^6 - \frac{2x^3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times y^3 + (y^3)^2$$
$$= x^4 + 2x^2y^3 + y^6$$

مثال: در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$$(3a - 4b)^2 = 9a^2 - 24ab + 16b^2$$

$$(2x - 3\square)^2 = (2x)^2 - 12x + 3^2$$
$$2(2x)(\square) = 12x \Rightarrow \square = 3$$

$$(5x + 4y)^2 = 25x^2 + 40xy + (4y)^2$$
$$2(5x)(4y) = 40xy$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: حاصل عبارت ۱۰۱×۱۰۱ را به کمک اتحاد مربع بدست آورید.



مثال: حاصل ۴۹×۴۹ را به کمک اتحاد مربع بدست آورید.

سئوال امتحانی: نشان دهید که: $(a+b)^۲-(a-b)^۲=۴ab$

سئوال امتحانی: اگر $x+\frac{۱}{x}=۷$ باشد، حاصل $x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ برابر است با

الف) ۴۹
ب) ۵۱
ج) ۴۷
د) هیچکدام

سئوال امتحانی: اگر $a+b=۱۳$ و $ab=۴۲$ باشد، حاصل $a^۲+b^۲$ برابر است با

الف) ۸۵
ب) ۷۵
ج) ۱۲۷
د) ۲۱۱

مثال: حاصل عبارت ۱۰۱×۱۰۱ را به کمک اتحاد مربع بدست آورید.



$101\times101=101^2=(100+1)^2=100^2+2\times100\times1+1^2$

اتحاد مربع $=10000+200+1$

$=10201$

مثال: حاصل ۴۹×۴۹ را به کمک اتحاد مربع بدست آورید.

$49\times49=49^2=(50-1)^2=50^2-2\times50\times1+1^2$

$=2500-100+1=2401$

سوال امتحانی: نشان دهید که: $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

جواب: می دانیم که:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^2-(a-b)^2=a^2+2ab+b^2-[a^2-2ab+b^2]$

$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=+2ab+2ab=4ab$

سوال امتحانی: اگر $x+\frac{1}{x}=7$ باشد، حاصل $x^2+\frac{1}{x^2}$ برابر است با

الف) ۴۹

ب) ۵۱

✓ ج) ۴۷

د) هیچکدام

$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\underbrace{2\times x\times\frac{1}{x}}_{=2}+\underbrace{(\frac{1}{x})^2}_{=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}}$

$\Rightarrow (x+\frac{1}{x})^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$

$(x+\frac{1}{x})^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$

$7^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$

$49-2=47$

سوال امتحانی: اگر $a+b=13$ و $ab=42$ باشد، حاصل a^2+b^2 برابر است با

الف) ۸۵

ب) ۷۵

ج) ۱۲۷

د) ۲۱۱

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$

$13^2-2\times42=a^2+b^2$

$169-84=a^2+b^2$

$85=a^2+b^2$

ب) اتحاد مزدوج $(a-b).(a+b)=a^2-b^2$

مثال: حاصل عبارات مقابل را با کمک اتحاد مزدوج بدست آورید.



$(3x-5y).(3x+5y)=$

$(x^3+1)(x^3-1)=$

$(3+7x).(7x-3)=$

$(\frac{2}{3}x+\sqrt{x}).(\frac{2}{3}x-\sqrt{x})=$

مثال: در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$(5x-\dots).(5x+\dots)=\dots-16$

$(\dots+2y).(\dots-\dots)=25x^2-\dots$

$(\dots+\frac{1}{\sqrt{3}}).(\dots-\dots)=x^6-\dots$

سؤال امتحانی: اگر $a=x^4$ باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟

$(x-1).(x^2+1)(x+1)=$

الف) $a+1$

ب) a^2-1

ج) $a-1$

د) a^2+1

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

ب) اتحاد مزدوج

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد مزدوج بدست آورید.



$$(3x-5y)(3x+5y)=(3x)^2-(5y)^2=9x^2-25y^2$$

$$(x^3+1)(x^3-1)=(x^3)^2-1^2=x^6-1$$

$$(3+7x)(7x-3)=(7x+3)(7x-3)=(7x)^2-3^2=49x^2-9$$

$$\left(\frac{2}{3}x+\sqrt{x}\right)\left(\frac{2}{3}x-\sqrt{x}\right)=\left(\frac{2}{3}x\right)^2-(\sqrt{x})^2=\frac{4}{9}x^2-x$$

مثال: در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$$(5x-__)(5x+__)=(5x)^2-16$$ ← ۱۶ همان 4^2 می باشد

$$(5x+2y)(5x-2y)=25x^2-(2y)^2$$

$$\left(x^3+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x^3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=x^6-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

سؤال امتحانی: اگر $a=x^4$ باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟

$$(x-1)(x^2+1)(x+1)=\overbrace{(x-1)(x+1)}^{\text{اتحاد مزدوج}}(x^2+1)$$

$$=(x^2-1^2)(x^2+1)$$

$$=\underbrace{(x^2-1)(x^2+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}=(x^2)^2-1^2=x^4-1=a-1$$

الف) $a+1$

ب) a^2-1

ج) $a-1$ ✓

د) a^2+1

مثال: حاصل عبارت 99×101 را به کمک اتحاد مزدوج بدست آورید.

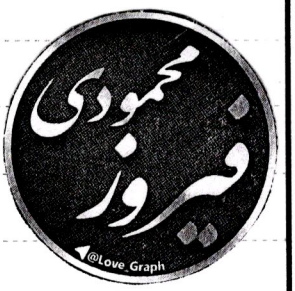
$99\times101=$

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد مزدوج بدست آورید.

$253^2-250^2-3^2=$

$104^2-96^2=$

سؤال امتحانی: اگر $5x+4y=-2$ و $5x-4y=22$ باشد، حاصل $25x^2-16y^2$ را بدست آورید.



سؤال امتحانی: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد مزدوج بدست آورید.

$1396\times1394-1395^2=$

$(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=$

$(x+2)(x^2+4)(x^4+16)(x-2)=$

مثال: حاصل عبارت 99×101 را به کمک اتحاد مزدوج بدست آورید.

$99\times101=(100-1).(100+1)=100^2-1^2=10000-1=9999$

اتحاد مزدوج

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد مزدوج بدست آورید.

$253^2-250^2-3^2=1509-9=1500$

مزدوج

$\hookrightarrow(253-250)(253+250)=3\times503=1509$

$104^2-96^2=\underbrace{(104-96)}_{8}\underbrace{(104+96)}_{200}=8\times200=1600$

سوال امتحانی: اگر $5x+4y=-2$ و $5x-4y=22$ باشد، حاصل $25x^2-16y^2$ را بدست آورید.

$25x^2-16y^2=(5x)^2-(4y)^2=\underbrace{(5x-4y)}_{22}\underbrace{(5x+4y)}_{-2}=22\times(-2)=-44$ مزدوج

سوال امتحانی: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد مزدوج بدست آورید.

$1396\times1394-1395^2=1395^2-1-1395^2=-1$

مزدوج $\hookrightarrow(1395+1)(1395-1)=1395^2-1^2=1395^2-1$

$(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=3^2-(2\sqrt{2})^2=9-8=1$

$\hookrightarrow(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4\sqrt{4}=4\times2=8$

$(x+2)(x^3+4)(x^4+16)(x-2)=(x+2)(x-2)(x^2+4)(x^4+16)$

$=(x^2-4)(x^2+4)(x^4+16)$

$=(x^4-16)(x^4+16)=(x^4)^2-16^2=x^8-256$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)
فیروز محمودی
همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

ج) اتحاد جمله ی مشترک:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a.b$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد جمله ی مشترک بدست آورید.



$(x+3)(x+4) =$

$(x+4)(x-5) =$

$(x-3)(x-2) =$

$(3x-5)(3x+7) =$

$(x^3-2)(x^3-7) =$

مثال: اگر $A=(5-x)x$ باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟

$$(x-3)(x-1)(x-4)(x-2) =$$

الف) $3A$

ب) $A(A+6)$

ج) $A^2+10A+24$

د) A^2+A-24

مثال: در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$(x+3)(x+\dots) = \dots + 7x + \dots$

$(\dots - 7).(\dots + 3) = x^2 - \dots - \dots$

ج) اتحاد جمله ی مشترک:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a.b$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد جمله ی مشترک بدست آورید.



$(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$

$12 \leftarrow$ ضرب $4+3$ ، $7 \leftarrow$ جمع $4+3$

$(x+4)(x-5) = x^2 - 1x - 20$

$(x-3)(x-2) = x^2 - 5x + 6$

$(3x-5)(3x+7) = (3x)^2 + 2(3x) - 35 = 9x^2 + 6x - 35$

$-35 \leftarrow$ ضرب $7+$ و $5-$ ، $2 \leftarrow$ جمع $7+$ و $5-$

$(x^3-2)(x^3-7) = (x^3)^2 - 9x^3 + 14$

$= x^6 - 9x^3 + 14$

مثال: اگر $A = x(x-5)$ باشد، حاصل عبارت

$A = x^2 - 5x \rightarrow$

$(x-3)(x-1)(x-4)(x-2) = (x-3)(x-2)(x-1)(x-4)$

$= [x^2 - 5x + 6][x^2 - 5x + 4]$

$= (A+6)(A+4)$

$= A^2 + 10A + 24$

الف) $3A$

ب) $A(A+6)$

ج) $A^2 + 10A + 24$ ✓

د) $A^2 + A - 24$

مثال: در جای خالی عبارت مناسب بنویسید

$(x+3)(x+\ldots) = \ldots x^2 + 7x + 12$

$(\ldots x - 7)(\ldots x + 3) = x^2 - \ldots 4x - 21$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

سؤال امتحانی؛ عبارات مقابل را به کمک اتحادها تجزیه کنید.

$9x^2 - 25y^2 =$

$x^4 - 16y^2 =$

$\frac{9}{16}x^2 - 25y^2 =$

$x^2 + 7x + 12 =$

$9x^2 + 18x - 7 =$



سئوال امتحانی: عبارت $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ را تجزیه کنید.

سئوال امتحانی؛ عبارت $x^8 - 1$ را تا حد امکان تجزیه کنید.

مثال: تجزیه کنید. $x^4 - 16x^2 =$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)
فیروز محمودی
همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

سوال امتحانی: عبارات مقابل را به کمک اتحادها تجزیه کنید.

$9x^2-25y^2=(3x)^2-(5y)^2=(3x-5y)(3x+5y)$

$x^6-16y^2=(x^3)^2-(4y)^2=(x^3-4y)(x^3-4y)$

$\frac{9}{16}x^2-25y^2=(\frac{3}{4}x)^2-(5y)^2=(\frac{3}{4}x-5y)(\frac{3}{4}x+5y)$

$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$
(مجموع: 7، ضرب: 12)

$9x^2+18x-7=(3x)^2+6(3x)-7=(3x+7)(3x-1)$
(مجموع: 6، ضرب: -7)

سوال امتحانی: عبارت $x^2-3x+\frac{5}{4}$ را تجزیه کنید.

ابتدا عبارت داده شده را در 4 ضرب می‌کنیم و بعد از تجزیه کردن عبارت بدست آمده، آنرا بر 4 تقسیم می‌کنیم.

$A=x^2-3x+\frac{5}{4}$

$4A=4x^2-12x+5=(2x)^2-6(2x)+5=(2x-1)(2x-5)$
(ضرب: 5، مجموع: -6)

$\Rightarrow A=\frac{1}{4}(2x-1)(2x-5)$

سوال امتحانی: عبارت x^8-1 را تا حد امکان تجزیه کنید.

$x^8-1=(x^4)^2-1^2=(x^4-1)(x^4+1)=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

x^2-1 مزدوج $\rightarrow (x-1)(x+1)$

x^4-1 مزدوج $\rightarrow x^4-1=(x^2)^2-1^2=(x^2-1)(x^2+1)$

مثال: تجزیه کنید.

$x^6-16x^2=x^2(x^4-16)=x^2((x^2)^2-4^2)$
(x^2-4 مزدوج)

$=x^2(x^2-4)(x^2+4)=x^2(x-2)(x+2)(x^2+4)$
(x^2-4 مزدوج)

فیروز محمودی
@Love_Graph

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)
فیروز محمودی
همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

د) اتحاد مکعب:

$$\begin{cases}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3a^2b-b^3\end{cases}$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد مکعب بدست آورید.



$(2a+1)^3=$

$(2a-2b)^3=$

$(x^2-y)^3=$

$(2x+1)^3=$

مثال: درجای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$(\dots\dots-\dots\dots)^3=27a^3-\dots\dots+\dots\dots-8$

$(2x+5y)^3=\dots\dots+\dots\dots+\dots\dots+125y^3$

مثال: حاصل عبارت $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ را به ازای $b=5$ و $a=7$ بدست آورید.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)
فیروز محمودی
همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

د) اتحاد مکعب:

$$\begin{cases}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3a^2b-b^3\end{cases}$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد مکعب بدست آورید.



$(2a+1)^3=(2a)^3+3\times(2a)^2\times1+3\times(2a)\times1^2+1^3$
$=8a^3+12a^2+6a+1$

$(4a-2b)^3=(4a)^3-3(4a)^2\times(2b)+3(4a)(2b)^2-(2b)^3$
$=64a^3-96a^2b+48ab^2-8b^3$

$(x^2-y)^3=(x^2)^3-3(x^2)^2.y+3x^2.y^2-y^3$
$=x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3$

$(x+1)^3=x^3+3x^2.1+3x\times1^2+1^3$
$=x^3+3x^2+3x+1$

مثال: درجای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$(3a-2..)^3=27a^3-3(3a)^2\times2+3(3a)\times2^2-8$

$(2x+5y)^3=(2x)^3+3(2x)^2\times5y+3(2x)(5y)^2+125y^3$

مثال: حاصل عبارت $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ را با ازای $b=5$ و $a=7$ بدست آورید.

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ اتحاد مکعب $(a-b)^3=(7-5)^3=2^3=8$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)
فیروز محمودی
همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

نکته ی مهم:

$$\begin{cases} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \end{cases}$$

مثال: با کمک روابط بالا عبارات زیر را تجزیه کنید.



$x^3+8=x^3+\dots=(\dots+\dots)(x^2+\dots+\dots)$

$x^3-27=$

$8y^3-1=$

$t^6-125=$

مثال: حاصل عبارت $101\times101\times101$ را با کمک اتحادها بدست آورید.

مثال: حاصل عبارت $8y^3-(x^2-2xy+4y^2)(x+2y)$ را با ازای $x=\frac{3}{2}$ و $y=\sqrt{2}$ بدست آورید.

مثال: در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$(\dots-\dots)^3=t^6-\dots+\dots-8$

$1-p^3=(\quad-\quad)(\dots+\dots+\dots)$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

نکته‌ی مهم:

$$\begin{cases} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \end{cases}$$

مثال: با کمک روابط بالا عبارات زیر را تجزیه کنید.

$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+2^2)$

$x^3-27=x^3-3^3=(x-3)(x^2+3x+3^2)=(x-1)(x^2+3x+9)$

$8y^3-1=(2y)^3-1^3=(2y-1)((2y)^2+1\times 2y+1^2)=(2y-1)(4y^2+2y+1)$

$t^6-125=(t^2)^3-5^3=(t^2-5)((t^2)^2+5t^2+5^2)=(t^2-1)(t^4+5t^2+25)$

مثال: حاصل عبارت $101\times 101\times 101$ را با کمک اتحادها بدست آورید.

$101\times 101\times 101=101^3=(100+1)^3=100^3+3\times 100^2\times 1+3\times 100\times 1^2+1^3$

$=1000000+30000+300+1$

$=1030301$

مثال: حاصل عبارت $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)-8y^3$ را با ازای $x=\frac{3}{2}$ و $y=\sqrt{2}$ بدست آورید.

$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)-8y^3=x^3+(2y)^3-8y^3$

$=x^3-8y^3-8y^3=x^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$

به بالای صفحه دقت کن

مثال: درجای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$(t^2-\dots)^3=t^6-3\times(t^2)^2\times 2+3\times t^2\times 2^2-8$

$1-p^3=(1-p)(1^2+1p+p^2)$

فیروز محمودی
@Love_Graph