درس دوم : عبارتهای گویا :

تعریف عبارت گویا : به کسرهایی که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای باشد را عبارت گویا می‌گوییم

مثال: عبارات زیر گویا هستند

$$\frac{3x^2}{x+y} \qquad \frac{xy}{y^3} \qquad \frac{x+y}{x-2y}$$

نکته مهم : عبارتهایی که در آنها متغیر زیر رادیکال یا داخل قدرمطلق باشند و یا اینکه توان متغیر داشته باشند، عبارت گویا به حساب نمی‌آیند.

مثال : عبارات زیر گویا نیستند.

$$\frac{\sqrt{x}}{xy} \qquad \frac{|x|}{x^2+y^2} \qquad \frac{1}{x^{-2}}$$

$$\frac{\sqrt{x+y}}{x^{-3}} \qquad \frac{x^2+y^{-3}}{x+3y} \qquad \sqrt{xy}$$



مثال: کدام یک از عبارات زیر گویا و کدام یک غیر گویا هستند.

$$\frac{3z+5}{3z-5} \qquad \frac{x+9}{\sqrt{x}+3} \qquad \frac{4x^2+\sqrt{2}x+1}{x-1} \qquad \frac{x\sqrt{x+1}}{x^3}$$

$$\frac{a^2+3}{a^2-a} \qquad \frac{\sqrt{v+y}}{|y|} \qquad \frac{|x+y|}{\sqrt{y-x}} \qquad \frac{\sqrt{19}+x}{x-\sqrt{3}}$$

مثال: عبارات مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{x^2-9}{x+3} =$$

$$\frac{x+2}{x^2-4} =$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲



$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} =$$

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} =$$

$$\frac{2x-6}{x^2-9} \times \frac{x+3}{5} =$$

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+3} =$$

$$\frac{x^2+3x-10}{x^2-25} \times \frac{2x-10}{x-2} =$$

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-4} =$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: عبارات گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها یشان تعریف نشده اند



$$\frac{1}{x-2}$$

$$\frac{p}{2p-8}$$

$$\frac{1}{x^2-16}$$

$$\frac{x+3}{x^2+4x+8}$$

$$\frac{2x+8}{x^2-x-20}$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.



$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

$$\frac{x}{3}+\frac{2}{5}=$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=$$

$$\frac{x}{3}+\frac{x+1}{2}=$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=$$

$$\frac{x-2}{x-3}+\frac{1}{x+2}=$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=$$

$$\frac{x+3}{x-3}-1=$$

$$\frac{1+\frac{1}{m}}{m+1}-m$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

معادله‌ی درجه دوم : معادله‌ای به‌شکل $ax^2+bx+c=0$ می‌باشد که در آن

الف) $a\neq 0$ می‌باشد

ب) a,b,c اعداد حقیقی هستند $(a,b,c\in R)$

مثال: معادلات مقابل درجه‌ی دوم می‌باشند.

$3x^2+5x+9=0$ ($a=3$, $b=5$, $c=9$)

$-6x+4x^2+12=0$ ($b=-6$, $a=4$, $c=12$)

مثال: در هریک از معادلات زیر a,b,c را مشخص کنید.

$5x^2-3x+7=0$ $\quad a=\dots\ ,\ b=\dots\ ,\ c=\dots$

$-2x+4x^2-1=0$ $\quad a=\dots\ ,\ b=\dots\ ,\ c=\dots$

$x^2-5-x=0$ $\quad a=\dots\ ,\ b=\dots\ ,\ c=\dots$

$x^2-1=0$ $\quad a=\dots\ ,\ b=\dots\ ,\ c=\dots$

$7-x^2-x=0$ $\quad a=\dots\ ,\ b=\dots\ ,\ c=\dots$



مثال: معادلات مقابل را حل کنید.

$(x-1).(x-3)=0 \Rightarrow$

$(x+1).(-2x+8)=0 \Rightarrow$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره‌ی اول و دوم و...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: معادلات مقابل را حل کنید.



$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow$

$3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow$

مثال: معادلات مقابل را به کمک تجزیه کردن حل کنید.

$3x^2 - 27 = 0$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$x^2 - x - 20 = 0$

$x^2 - 14x + 49 = 0$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)
فیروز محمودی
همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

نکته : معادله‌ی درجه‌دومی که ریشه‌های آن b و a باشند عبارتست از: $(x-a).(x-b)=0$

مثال: معادله‌ی درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۲ و ۳ باشند.

جواب : $(x-2).(x-3)=0$ یا $x^2-5x+6=0$

مثال: معادله‌ی درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۳- و ۲+ باشند.

جواب : $(x-(-3)).(x-(+2))=(x+3).(x-2)=0$ یا $x^2+1x-6=0$

مثال: معادله‌ی درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{5}-$ و ۳ باشند.

جواب : $(x-3).(x-(-\frac{1}{5}))=0 \Rightarrow (x-3)(x+\frac{1}{5})=0$

مثال: معادله‌ی درجه‌دومی بنویسید که هردو ریشه‌ی آن ۴- باشند.

جواب : $(x-(-4)).(x-(-4))=0 \Rightarrow (x+4)(x+4)=0 \Rightarrow x^2+8x+16=0$

نکته‌ی مهم: برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad \Delta=b^2-4ac$$

مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$2x^2-3x+1=0$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=+1 \end{cases} \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(2)(+1)=9-8=1$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{+3\pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{+3+1}{4}=\frac{4}{4}=1 \\ x_2=\frac{+3-1}{4}=\frac{2}{4} \end{cases}$$

بنابراین ریشه‌های این معادله عبارتند از ۱ و $\frac{2}{4}$

فیروز محمودی
@Love Graph

مثال: با استفاده از مبین (Δ) تعداد جواب‌های معادلات زیر را بیابید.



$x^2 + 2x - 3 = 0$

$\begin{cases} a= \\ b= \\ c= \end{cases}$

$2x^2 - 4x + 2 = 0$

$\begin{cases} a= \\ b= \\ c= \end{cases}$

$2x^2 - 9 = -3x$

نکته ی مهم: در معادله ی درجه ی دوم مقابل: $ax^2+bx+c=0$

الف) اگر $\Delta<0$ باشد، معادله ریشه ی حقیقی ندارد.
ب) اگر $\Delta=0$ باشد، معادله ریشه ی مضاعف دارد (یعنی دو ریشه مثل هم دارد)
ج) اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دو ریشه ی حقیقی دارد.

مثال: معادلات مقابل را حل کنید.

$2x^2+5x+7=0$

$\begin{cases} a=2 \\ b=+5 \\ c=+7 \end{cases} \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(+5)^2-4(2)(+7)$

$=+25-56=-31 \Rightarrow \Delta<0$

چون $\Delta<0$ می باشد پس این معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

$x^2-6x+9=0$

$\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=+9 \end{cases} \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(1)(+9)$

$=+36-36=0 \Rightarrow \Delta=0$

چون $\Delta=0$ شده است پس معادله دارای ریشه ی مضاعف است.

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{0}}{2\times1}=\frac{+6\pm0}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{+6+0}{2}=\frac{+6}{2}=+3 \\ x_2=\frac{+6-0}{2}=\frac{+6}{2}=+3 \end{cases}$

$x^2-5x+6=0$

$\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=+6 \end{cases} \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(+6)$

$=+25-24=1 \Rightarrow \Delta>0$

چون $\Delta>0$ می باشد، پس معادله دارای دو ریشه ی حقیقی است.

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{+5\pm1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{+5+1}{2}=\frac{+6}{2}=+3 \\ x_2=\frac{+5-1}{2}=\frac{+4}{2}=+2 \end{cases}$

فیروز محمودی
@Love_Graph

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: بنیا از محمد سه سال بزرگتر است. اگر حاصلضرب سن آنها ۴۰ باشد، سن هرکدام را مشخص کنید.



سن محمد $= x$

سن بنیا $= x + 3$

حاصلضرب سن بنیا و محمد $= 40 \Rightarrow x(x+3) = 40$

$x^2 + 3x = 40$

$x^2 + 3x - 40 = 0$

اکنون هدف ما حل معادله‌ی متقابل می‌باشد،

$x^2 + 3x - 40 = 0$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = +3 \\ c = -40 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (+3)^2 - 4(1)(-40)$

$= +9 + 160 = 169 > 0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه دارد.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(+3) \pm \sqrt{169}}{2 \times 1} = \dfrac{-3 \pm 13}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3-13}{2} = \dfrac{-16}{2} = -8 \\ \text{این جواب قابل قبول نیست} \\ x_2 = \dfrac{-3+13}{2} = \dfrac{+10}{2} = 5 \end{cases}$

سن محمد ۵

دلیل غیرقابل قبول بودن ۸- این است که سن هیچ فردی نمی‌تواند عددی منفی باشد.

سن محمد $= 5 \Rightarrow$ سن بنیا $= 5 + 3 = 8$

چون بنیا سه سال از محمد بزرگتر است.

مثال: معادله‌ی متقابل را حل کنید:

$p^2 - 20 = p$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره‌ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: معادله‌ی مقابل را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

$x^2+6x+5=0$

حل: ابتدا مقدار $(\frac{b}{2})^2$ را محاسبه می‌کنیم

$\begin{cases} a=1 \\ b=+6 \\ c=+5 \end{cases}$ $(\frac{b}{2})^2=(\frac{+6}{2})^2=(+3)^2=+9$

اکنون عدد $+9$ را یکبار با معادله اضافه و یکبار هم کم می‌کنیم. واضح است که سه جمله‌ی اول اتحاد مربع

$x^2+6x+9-9+5=0$

$(x+3)^2-4=0 \Rightarrow (x+3)^2=4$

$x+3=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x+3=+2 \Rightarrow x=+2-3=-1 \\ x+3=-2 \Rightarrow x=-2-3=-5 \end{cases}$

مثال: معادله مقابل را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

$x^2+10x+24=0$



مثال: معادله‌ی مقابل را به روش تجزیه حل کنید.

$x^3-9x=0$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره‌ی اول و دوم و ...)
فیروز محمودی
همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

نکته ی مهم: در معادله ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta \geq 0$ باشد، معادله درجه دوم دارای دو ریشه ی حقیقی می باشد که اگر آنها را با x_1 و x_2 نشان دهیم، داریم:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \qquad x_1 \times x_2=\frac{c}{a}$$

مثال: اگر x_2, x_1 ریشه های معادله ی درجه دوم $x^2+5x+6=0$ باشند، بدون حل این معادله حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.

$x_1+x_2=?$

$x_1 \times x_2=?$

جواب: ابتدا باید متغیرهای a, b, c را مشخص کنیم.

$a=+1$
$b=+5$
$c=+6$

$$\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-(+5)}{+1}=\frac{-5}{+1}=-5$$

$$x_1 \times x_2=\frac{c}{a}=\frac{+6}{+1}=+6$$

اکنون با حل کردن معادله، درستی آنها را بررسی می کنیم.

$x^2+5x+6=0$

$a=+1$
$b=+5$
$c=+6$

$$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(+5)^2-4(+1)(+6)$$
$$=+25-24=+1=1$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(+5)\pm\sqrt{1}}{2\times(+1)}=\frac{-5\pm1}{+2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-5+1}{+2}=\frac{-4}{+2}=-2 \\ x_2=\frac{-5-1}{+2}=\frac{-6}{+2}=-3 \end{cases}$$

اکنون داریم:

$$x_1+x_2=-2+(-3)=-2-3=-5$$
$$x_1 \times x_2=(-2)\times(-3)=+6$$

مثال: در معادله ی درجه دوم $2x^2-3x-5=0$ حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.

$a=+2$
$b=-3$
$c=-5$

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-(-3)}{+2}=\frac{+3}{+2}=\frac{3}{2}$$

$$x_1 \times x_2=\frac{c}{a}=\frac{-5}{+2}=-\frac{5}{2}$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: در معادله‌ی درجه دوم $x^2-2=0$ حاصل جمع ریشه‌ها و حاصل ضرب ریشه‌ها را بدست آورید.

$a=+1$
$b=0$
$c=-2$

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-0}{+1}=\frac{0}{+1}=0$ $\qquad x_1\times x_2=\frac{c}{a}=\frac{-2}{+1}=-2$

مثال: مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4=3x$ را بدست آورید.

$x^2-4=3x$

$x^2-3x-4=0 \Rightarrow a=+1\ ,\ b=-3\ ,\ c=-4$

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-(-3)}{+1}=\frac{+3}{+1}$

مثال: در معادله‌ی درجه دوم زیر حاصل $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ را بدست آورید.

$x^2+x-30=0$

$\begin{cases} a=+1 \\ b=+1 \\ c=-30 \end{cases} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-(+1)}{+1}=\frac{-1}{+1}=-1$

$x_1\times x_2=\frac{c}{a}=\frac{-30}{+1}=-30$

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-1}{-30}=\frac{1}{30}$



مثال: در معادله‌ی درجه دوم $x^2-12x+35=0$ حاصل $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ چقدر است.

الف) ۱۲
ب) $\frac{35}{12}$
ج) ۳۵
د) $\frac{12}{35}$

مثال: معادله‌ی درجه دوم مقابل را به روش دلخواه خودتان حل کنید. $x^2+3x-4=0$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره‌ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

معادله‌های شامل عبارتهای گویا:

مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\frac{1}{2x} = -\frac{1}{x+3}$$

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{x+3+2x}{2x(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x+3}{2x(x+3)} = 0 \Rightarrow 3x+3 \neq 0$$

$$3x \neq -3$$

$$x \neq \frac{-3}{3} = -1$$

بنابراین جواب این معادله $x=-1$ می باشد.

مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{2x+1}{6}$$



مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\frac{5}{x} + \frac{x+1}{2x} = 1$$

مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$1 - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{1} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x^2-2-x}{x^2} = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\begin{cases} a=+1 \\ b=-1 \\ c=-2 \end{cases} \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(+1)(-2) = +1+8 = +9 = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2\times(+1)} = \frac{+1 \pm 3}{+2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{+1+3}{+2} = \frac{+4}{+2} = +2 \\ x_2 = \frac{+1-3}{+2} = \frac{-}{+2} = -1 \end{cases}$$

مثال: به ازای چه مقداری از a معادله‌ی $\frac{a}{x}=\frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است؟

$$x=1 \Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{1+1}{1+a} \Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{2}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{1}-\frac{2}{a+1}=0 \Rightarrow \frac{a(a+1)-2}{a+1}=0$$

$$a(a+1)-2=0 \Rightarrow a^2+a-2=0 \Rightarrow (a+2)(a-1)=0 \Rightarrow a+2\neq 0 \text{ یا } a-1\neq 0$$

ضرب جمع

$$a\neq -2 \qquad a\neq +1$$

بنابراین مقدار a می‌تواند ۱+ و ۲- باشد.

مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید. $\frac{3x-5}{x+3}=1$

مثال: مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی $\frac{3}{4}$ می‌باشد، هر دو عدد را بدست آورید.

