معادله‌ی درجه‌ی دوم یک مجهولی: هر معادله که پس از ساده کردن، فقط شامل یک مجهول بوده و بزرگترین توان آن مجهول ۲ باشد را یک معادله‌ی درجه‌ی دوم یک مجهولی یا به طور خلاصه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌نامیم. در حالت کلی هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ با شرط $a\neq 0$ را یک معادله‌ی درجه‌ی دوم برحسب x می‌گوئیم که در آن a و b و c اعداد حقیقی و x مجهول معادله است. در این معادله ax^2 را «جمله‌ی درجه‌ی دوم»، bx را «جمله‌ی درجه‌ی اول» و c را «جمله‌ی ثابت» می‌گوئیم. اگر b یا c یا هر دو صفر باشند آنگاه معادله به شکل $ax^2+c=0$ یا $ax^2+bx=0$ یا $ax^2=0$ درمی‌آید که در این صورت معادله را «معادله‌ی درجه‌ی دوم ناقص» می‌گوئیم. مثلاً معادله‌های $3x^2-7x+4=0$ و $4x^2+1=0$ و $-5x^2+2x=0$ و $7x^2=0$ هرکدام یک معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌باشند.

مثال: کدام یک از معادلات زیر درجه‌ی دوم هستند؟ در معادلات درجه‌ی دوم، جمله‌ی درجه‌ی دوم و جمله‌ی درجه‌ی اول و جمله‌ی ثابت را مشخص کنید:

حل: ابتدا معادله را ساده می‌کنیم یعنی ضرب و توان را که در معادله هست انجام می‌دهیم و همه‌ی جملات را به یک طرف منتقل می‌کنیم و جملات متشابه را با هم جمع یا از هم کم می‌کنیم.

۱) $x(x-2)+5=(x+2)^2+x$

$\Rightarrow x^2-2x+5=x^2+4x+4+x$

$\Rightarrow -2x-4x-x+5-4=0$

$\Rightarrow -7x+1=0$ معادله‌ی درجه‌ی اول است

---

۲) $(x-2)(3x+1)=2x+(x-3)^2 \Rightarrow 3x^2+x-6x-2=2x+x^2-6x+9$

$\Rightarrow 3x^2-x^2+x-2x-2-9=0 \Rightarrow 2x^2-x-11=0$ معادله‌ی درجه‌ی دوم است

جمله‌ی ثابت $=-11$ ، جمله‌ی درجه‌ی اول $=-x$ ، جمله‌ی درجه‌ی دوم $=2x^2$

---

۳) $5x^2-(2x+3)(2x-3)=0 \Rightarrow 5x^2-(4x^2-9)=0 \Rightarrow 5x^2-4x^2+9=0$

(مزدوج)

$\Rightarrow x^2+9=0$ معادله‌ی درجه‌ی دوم ناقص است $\Rightarrow$

- جمله‌ی درجه‌ی دوم $=x^2$
- جمله‌ی درجه‌ی اول $=$ ندارد $\longrightarrow (0x)$
- جمله‌ی ثابت $=9$

Scanned with CamScanner

۴) $(x+3)(x-4)+7 = (-2x+1)(3x-5) \Rightarrow x^2-x-12+7 = -6x^2+3x-5$ (جمله مشترک)

$\Rightarrow x^2+6x^2-x-3x-12+7+5=0 \Rightarrow 7x^2-4x=0$

معادله‌ی درجه‌ی دوم ناقص است

جمله‌ی ثابت $=0$ ، جمله‌ی درجه‌ی اول $= -4x$ ، جمله‌ی درجه‌ی دوم $= 7x^2$

---

۵) $x(x^2-6x)-1 = (x-1)(x^2+x+1) \Rightarrow x^3-6x^2-1 = x^3-1 \Rightarrow -6x^2=0$

(تفاضل مکعبات دو جمله)

معادله‌ی درجه‌ی دوم ناقص است

جمله‌ی ثابت $=0$ ، جمله‌ی درجه‌ی اول $= 0x$ (ندارد) ، جمله‌ی درجه‌ی دوم $= -6x^2$

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم: منظور از حل معادله بدست آوردن مجموعه‌ی جواب آن است یعنی تعیین مقادیری که به جای متغیر معادله قرار می‌گیرند و آن را به یک تساوی درست تبدیل می‌کنند. برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

۱) روش تجزیه: می‌دانیم که اگر حاصل ضرب دو عبارت برابر صفر شود حداقل یکی از آن‌ها برابر صفر است همچنین می‌دانیم که بعضی از عبارت‌های درجه‌ی دوم را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو عبارت درجه‌ی اول تجزیه نمود با استفاده از این دو مطلب؛ برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم از روش تجزیه ابتدا عبارت درجه‌ی دوم را تجزیه می‌کنیم (در صورت امکان) و سپس تک تک عامل‌های موجود در تجزیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم بدین ترتیب دو معادله‌ی درجه‌ی اول یک مجهولی بدست می‌آید که آن‌ها را حل می‌کنیم جواب‌های بدست آمده، جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌باشند

مثال: معادلات داده شده را به روش تجزیه حل کنید:

۱) $x^2-7x=0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(x-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-7=0 \Rightarrow x=7 \end{cases} \Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب $= \{0, 7\}$

۲) $5x^2+2x=0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(5x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 5x+2=0 \Rightarrow 5x=-2 \Rightarrow x=\frac{-2}{5} \end{cases} \Rightarrow$ ج ا $= \{\frac{-2}{5}, 0\}$

۳) $18x-6x^2=0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} 2x(9-3x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 9-3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -3x=-9 \Rightarrow x=\frac{-9}{-3}=\frac{9}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ ج ا $= \{0, \frac{9}{3}\}$

Scanned with CamScanner

۴) $x^2-25=0 \Rightarrow (x-5)(x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-5 \end{cases} \Rightarrow$ مج $=\{-5,5\}$

۵) $9-4x^2=0 \Rightarrow (3-2x)(3+2x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3-2x=0 \\ 3+2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x=-3 \\ 2x=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2} \\ x=\frac{-3}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ مج $=\left\{-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\}$

۶) $49x^2-25=0 \Rightarrow (7x-5)(7x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} 7x-5=0 \\ 7x+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x=5 \\ 7x=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{7} \\ x=\frac{-5}{7} \end{cases} \Rightarrow$ مج $=\left\{\frac{-5}{7},\frac{5}{7}\right\}$

۷) $x^2-5=0 \Rightarrow (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0 \Rightarrow \begin{cases} x-\sqrt{5}=0 \\ x+\sqrt{5}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow$ مج $=\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$

۸) $x^2-\frac{8}{9}=0 \Rightarrow \left(x-\frac{\sqrt{8}}{3}\right)\left(x+\frac{\sqrt{8}}{3}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{\sqrt{8}}{3}=0 \\ x+\frac{\sqrt{8}}{3}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{8}}{3} \\ x=-\frac{\sqrt{8}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ x=\frac{-2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ مج $=\left\{\frac{-2\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right\}$

۹) $x^2+7x+12=0 \Rightarrow (x+4)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+4=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow$ مج $=\{-3,-4\}$

۱۰) $x^2-x-42=0 \Rightarrow (x+6)(x-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+6=0 \\ x-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ x=7 \end{cases} \Rightarrow$ مج $=\{7,-6\}$

۱۱) $x^2+x-20=0 \Rightarrow (x+5)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+5=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow$ مج $=\{4,-5\}$

۱۲) $x^2-18x+15=0 \Rightarrow (x-3)(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow$ مج $=\{5,3\}$

۱۳) $x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow$ مج $=\{-2\}$

روش دوم: $(x+2)^2=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow$ مج $=\{-2\}$

۱۴) $x^2-10x+25=0 \Rightarrow (x-5)^2=0 \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow$ مج $=\{5\}$

روش دوم: $(x-5)(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow$ مج $=\{5\}$

۱۵) $9x^2+6x+1=0 \Rightarrow (3x+1)(3x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x+1=0 \\ 3x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=-1 \\ 3x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{3} \\ x=\frac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow$

مج $=\left\{\frac{-1}{3}\right\}$

روش دوم: $(3x+1)^2=0 \Rightarrow 3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{3} \Rightarrow$ مج $=\left\{\frac{-1}{3}\right\}$

Scanned with CamScanner

۱۶) $4x^2-20x+25=0 \Rightarrow (2x-5)(2x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases}2x-5=0\\2x-5=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=5\\2x=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{5}{2}\\x=\frac{5}{2}\end{cases}$

روش دوم: $(2x-5)^2=0 \rightarrow 2x-5=0 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \Rightarrow ج.ح=\{\frac{5}{2}\}$ $\Rightarrow ج.ح=\{\frac{5}{2}\}$

۱۷) $9x^2-6x-8=0 \Rightarrow (3x)^2-2(3x)-8=0 \Rightarrow (3x+2)(3x-4)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}3x+2=0\\3x-4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x=-2\\3x=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{-2}{3}\\x=\frac{4}{3}\end{cases} \Rightarrow ج.ح=\{\frac{-2}{3}, \frac{4}{3}\}$

۱۸) $5x^2-7x+2=0 \xrightarrow{\times 5} (5x)^2-7(5x)+10=0 \Rightarrow (5x-2)(5x-5)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}5x-2=0\\5x-5=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5x=2\\5x=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{2}{5}\\x=\frac{5}{5}=1\end{cases} \Rightarrow ج.ح=\{\frac{2}{5}, 1\}$

۱۹) $x^2+16=0$ تجزیه ناپذیر $\Rightarrow ج.ح=\phi$

۲۰) $-6x^2-7=0$ تجزیه ناپذیر $\Rightarrow ج.ح=\phi$

---

۲) حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به روش ریشه‌گیری: می‌دانیم که اگر $x^2=a^2$ آنگاه $x=\pm a$.

همچنین می‌دانیم که اگر $x^2=a$ و a عددی نامنفی باشد آنگاه $x=\pm\sqrt{a}$ و در صورتی که a عددی منفی باشد $x^2=a$ غیرممکن است یعنی مجموعه‌ی جواب این معادله تهی می‌باشد.

در حالت کلی‌تر اگر $(x\pm k)^2=a^2$ آنگاه $x\pm k=\pm a$ و اگر $(x\pm k)^2=a$ و a عددمثبتی باشد آنگاه $x\pm k=\pm\sqrt{a}$ و چنانچه a عددی منفی باشد $(x\pm k)^2=a$ غیرممکن است.

با استفاده از این نکات می‌توانیم معادلات درجه‌ی دومی که به فرم بالا باشند را حل کنیم این روش حل را روش ریشه‌گیری یا خاصیت ریشه‌ی زوج می‌گوئیم.

مثال: معادلات داده شده را به روش ریشه‌گیری حل کنید:

۱) $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow ج.ح=\{-2, 2\}$

۲) $9x^2-25=0 \Rightarrow 9x^2=25 \Rightarrow x^2=\frac{25}{9} \Rightarrow x=\pm\frac{5}{3} \Rightarrow ج.ح=\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\}$

۳) $1-4x^2=0 \Rightarrow 1=4x^2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow ج.ح=\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

Scanned with CamScanner

۴) $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow ج=\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

۵) $x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4$ غیرممکن $\Rightarrow ج=\phi$

۶) $-1-7x^2=0 \Rightarrow -7x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{-7}$ غیرممکن $\Rightarrow ج=\phi$

۷) $16x^2-5=0 \Rightarrow 16x^2=5 \Rightarrow x^2=\frac{5}{16} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{16}} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5}}{4} \Rightarrow ج=\{-\frac{\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{5}}{4}\}$

۸) $5x^2-16=0 \Rightarrow 5x^2=16 \Rightarrow x^2=\frac{16}{5} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{16}{5}} \Rightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$
$ج=\{-\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5}\}$

۹) $(x-3)^2=4 \Rightarrow x-3=\pm2 \Rightarrow \begin{cases} x-3=2 \\ x-3=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+3=5 \\ x=-2+3=1 \end{cases} \Rightarrow ج=\{1,5\}$

۱۰) $(x+5)^2=1 \Rightarrow x+5=\pm1 \Rightarrow \begin{cases} x+5=1 \\ x+5=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-5 \\ x=-1-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=-6 \end{cases} \Rightarrow ج=\{-6,-4\}$

۱۱) $(x+4)^2-36=0 \Rightarrow (x+4)^2=36 \Rightarrow \begin{cases} x+4=6 \\ x+4=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-4=2 \\ x=-6-4=-10 \end{cases} \Rightarrow ج=\{-10,2\}$

۱۲) $(2x-3)^2-25=0 \Rightarrow (2x-3)^2=25 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=5 \\ 2x-3=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=5+3 \\ 2x=-5+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=8 \\ 2x=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{2}=4 \\ x=\frac{-2}{2}=-1 \end{cases} \Rightarrow ج=\{-1,4\}$

۱۳) $(1-3x)^2-16=0 \Rightarrow (1-3x)^2=16 \Rightarrow \begin{cases} 1-3x=4 \\ 1-3x=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x=4-1 \\ -3x=-4-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -3x=3 \\ -3x=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{-3} \\ x=\frac{-5}{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow ج=\{-1,\frac{5}{3}\}$

۱۴) $(x+2)^2+5=0 \Rightarrow (x+2)^2=-5$ غیرممکن $\Rightarrow ج=\phi$

۱۵) $(\frac{3x-1}{2})^2+9=0 \Rightarrow (\frac{3x-1}{2})^2=-9$ غیرممکن $\Rightarrow ج=\phi$

۱۶) $(\frac{3x-1}{2})^2-9=0 \Rightarrow (\frac{3x-1}{2})^2=9 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x-1}{2}=3 \\ \frac{3x-1}{2}=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-1=6 \\ 3x-1=-6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x=6+1 \\ 3x=-6+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ x=\frac{-5}{3} \end{cases} \Rightarrow ج=\{-\frac{5}{3},\frac{7}{3}\}$

Scanned with CamScanner

۱۷) $(\frac{t}{۲}-۲)^۲-۱۰۰=۰ \Rightarrow (\frac{t}{۲}-۲)^۲=۱۰۰ \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{۲}-۲=۱۰ \\ \frac{t}{۲}-۲=-۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{۲}=۱۰+۲=۱۲ \\ \frac{t}{۲}=-۱۰+۲=-۸ \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} t=۲۴ \\ t=-۱۶ \end{cases} \Rightarrow \quad ج.ر=\{-۱۶, ۲۴\}$

۱۸) $(۲a-۳)^۲=۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲a-۳=\sqrt{۵} \\ ۲a-۳=-\sqrt{۵} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a=\sqrt{۵}+۳ \\ ۲a=-\sqrt{۵}+۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{\sqrt{۵}+۳}{۲} \\ a=\frac{-\sqrt{۵}+۳}{۲} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad ج.ر=\{\frac{-\sqrt{۵}+۳}{۲}, \frac{\sqrt{۵}+۳}{۲}\}$

۱۹) $(\frac{y}{۳}+۱)^۲=۲ \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{۳}+۱=\sqrt{۲} \\ \frac{y}{۳}+۱=-\sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{۳}=\sqrt{۲}-۱ \\ \frac{y}{۳}=-\sqrt{۲}-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=۳\sqrt{۲}-۳ \\ y=-۳\sqrt{۲}-۳ \end{cases}$

$\Rightarrow \quad ج.ر=\{-۳\sqrt{۲}-۳, ۳\sqrt{۲}-۳\}$

۲۰) $(۳t+\frac{۱}{۲})^۲-۷=۰ \Rightarrow (۳t+\frac{۱}{۲})^۲=۷ \Rightarrow \begin{cases} ۳t+\frac{۱}{۲}=\sqrt{۷} \\ ۳t+\frac{۱}{۲}=-\sqrt{۷} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} ۳t=\sqrt{۷}-\frac{۱}{۲} \\ ۳t=-\sqrt{۷}-\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{\sqrt{۷}-\frac{۱}{۲}}{۳} \\ t=\frac{-\sqrt{۷}-\frac{۱}{۲}}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{۲\sqrt{۷}-۱}{۶} \\ t=-\frac{۲\sqrt{۷}-۱}{۶} \end{cases} \Rightarrow ج.ر=\{\frac{-۲\sqrt{۷}-۱}{۶}, \frac{۲\sqrt{۷}-۱}{۶}\}$

---

۳) روش مربع کامل کردن: برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم از این روش به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) جملات را به ضریب $x^۲$ تقسیم می‌کنیم.

۲) جملات شامل مجهول را در یک طرف و عدد ثابت را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.

۳) ضریب x را نصف کرده و به توان ۲ می‌رسانیم و این مقدار را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم.

۴) طرف اول معادله را با استفاده از اتحادهای مربع دو جمله‌ای به شکل مربع می‌نویسیم.

۵) با توجه به فرمول‌های گفته شده در روش قبل (ریشه‌گیری) از دو طرف معادله ریشه‌ی دوم می‌گیریم.

۶) مجموعه‌ی جواب معادله را تعیین می‌کنیم.

تذکر: اگر بعد از مربع کامل ساختن طرف دوم منفی باشد، نمی‌توانیم ریشه‌ی دوم بگیریم یعنی معادله غیرممکن و مجموعه‌ی جوابش تهی است یعنی حالت: $(x \pm k)^۲=a$ و $a<۰$ بوجود می‌آید.

Scanned with CamScanner

مثال: معادلات زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید:

۱) $x^2+6x-7=0 \Rightarrow x^2+6x=7 \Rightarrow x^2+6x+3^2=7+3^2 \Rightarrow (x+3)^2=16$

$\Rightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ x+3=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-3 \\ x=-4-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-7 \end{cases} \Rightarrow ج.م=\{-7,1\}$

۲) $x^2-10x-11=0 \Rightarrow x^2-10x=11 \Rightarrow x^2-10x+(-5)^2=11+(-5)^2 \Rightarrow (x-5)^2=36$

$\Rightarrow \begin{cases} x-5=6 \\ x-5=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5+6 \\ x=5-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=11 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow ج.م=\{-1,11\}$

تذکر: اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک باشد ابتدا طرفین معادله را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم.

۳) $3x^2+12x-15=0 \xrightarrow{\div 3} x^2+4x-5=0 \Rightarrow x^2+4x=5 \Rightarrow$

$x^2+4x+2^2=5+2^2 \Rightarrow (x+2)^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ x+2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2=1 \\ x=-3-2=-5 \end{cases}$

$\Rightarrow ج.م=\{-5,1\}$

۴) $-x^2+3x+2=0 \xrightarrow{\div(-1)} x^2-3x-2=0 \Rightarrow x^2-3x=2 \Rightarrow x^2-3x+\left(\frac{-3}{2}\right)^2=2+\left(\frac{-3}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=2+\frac{9}{4} \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{4} \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{17}}{2} \\ x-\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow ج.م=\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$

۵) $-2x^2+5x+3=0 \xrightarrow{\div(-2)} x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x^2-\frac{5}{2}x=\frac{3}{2} \Rightarrow$

$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{-5}{4}\right)^2=\frac{3}{2}+\left(\frac{-5}{4}\right)^2 \Rightarrow \left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{3}{2}+\frac{25}{16} \Rightarrow \left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{24+25}{16}$

$\Rightarrow \left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16} \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{5}{4}=\frac{7}{4} \\ x-\frac{5}{4}=\frac{-7}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{4}+\frac{5}{4}=\frac{12}{4} \\ x=\frac{-7}{4}+\frac{5}{4}=\frac{-2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow ج.م=\left\{\frac{-1}{2},3\right\}$

۶) $x^2+x+4=0 \Rightarrow x^2+x=-4 \Rightarrow x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=-4+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-4+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{-16+1}{4} \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{-15}{4}$ غیرممکن $\Rightarrow ج.م=\phi$

Scanned with CamScanner

۷) $x^2+6x=0 \Rightarrow x^2+6x+3^2=3^2 \Rightarrow (x+3)^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x+3=3 \\ x+3=-3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=3-3 \\ x=-3-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-6 \end{cases} \Rightarrow$ ج.پ $=\{-6,0\}$

۸) $4x^2-8x=0 \xrightarrow{\div 4} x^2-2x=0 \Rightarrow x^2-2x+(-1)^2=(-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2=1 \Rightarrow$

$\begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+1 \\ x=-1+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow$ ج.پ $=\{0,2\}$

۹) $x^2+x-2=0 \Rightarrow x^2+x=2 \Rightarrow x^2+x+(\frac{1}{2})^2=2+(\frac{1}{2})^2 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2=\frac{2}{1}+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ x+\frac{1}{2}=\frac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2} \\ x=\frac{-3}{2}-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{2}=1 \\ x=\frac{-4}{2}=-2 \end{cases} \Rightarrow$ ج.پ $=\{-2,1\}$

۱۰) $x^2+2x-1=0 \Rightarrow x^2+2x=1 \Rightarrow x^2+2x+1^2=1+1^2 \Rightarrow (x+1)^2=2$

$\Rightarrow \begin{cases} x+1=\sqrt{2} \\ x+1=-\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}-1 \\ x=-\sqrt{2}-1 \end{cases} \Rightarrow$ ج.پ $=\{-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1\}$

۱۱) $2x^2+8x-12=0 \xrightarrow{\div 2} x^2+4x-6=0 \Rightarrow x^2+4x=6 \Rightarrow x^2+4x+2^2=6+2^2$

$\Rightarrow (x+2)^2=10 \Rightarrow \begin{cases} x+2=\sqrt{10} \\ x+2=-\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{10}-2 \\ x=-\sqrt{10}-2 \end{cases} \Rightarrow$ ج.پ $=\{-\sqrt{10}-2, \sqrt{10}-2\}$

۱۲) $x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow$ ج.پ $=\{-2\}$

مربع کامل

۱۳) $x^2-8x+16=0 \Rightarrow (x-4)^2=0 \Rightarrow x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow$ ج.پ $=\{4\}$

۱۴) $x^2+2x+7=0 \Rightarrow x^2+2x=-7 \Rightarrow x^2+2x+1^2=-7+1^2$

$\Rightarrow (x+1)^2=-6$ غیرممکن $\Rightarrow$ ج.پ $=\phi$

۱۵) $6x^2-5x-1=0 \xrightarrow{\div 6} x^2-\frac{5}{6}x-\frac{1}{6}=0 \Rightarrow x^2-\frac{5}{6}x=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow x^2-\frac{5}{6}x+(\frac{-5}{12})^2=\frac{1}{6}+(\frac{-5}{12})^2 \Rightarrow (x-\frac{5}{12})^2=\frac{1}{6}+\frac{25}{144} \Rightarrow (x-\frac{5}{12})^2=\frac{24+25}{144}$

$\Rightarrow (x-\frac{5}{12})^2=\frac{49}{144} \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{5}{12}=\frac{7}{12} \\ x-\frac{5}{12}=-\frac{7}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{12}+\frac{7}{12} \\ x=\frac{5}{12}-\frac{7}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{12}{12}=1 \\ x=\frac{-2}{12}=\frac{-1}{6} \end{cases} \Rightarrow$ ج.پ $=\{\frac{-1}{6},1\}$

Scanned with CamScanner

۴) روش کلّی (دستور Δ): برای حل معادله از این روش به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) معادله را ساده می‌کنیم تا به شکل $ax^2+bx+c=0$ درآید.

۲) ضرایب معادله را مشخص می‌کنیم.

۳) مبیّن معادله ($\Delta=b^2-4ac$) را تشکیل می‌دهیم.

۴) با توجه به علامت Δ و با استفاده از حالت‌های زیر مجموعه‌ی جواب معادله را تعیین می‌کنیم.

حالت اول: $\Delta>0$ در این حالت معادله، دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است که از دستور $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند.

حالت دوم: $\Delta=0$ در این صورت معادله، دارای دو جواب مساوی (ریشه‌ی مضاعف) است که از دستور $x=\frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید.

حالت سوم: $\Delta<0$ در این حالت معادله، ریشه‌ی حقیقی ندارد یعنی مجموعه‌ی جواب آن، تهی می‌باشد.

تذکر: اگر b عددی زوج باشد می‌توانیم نصف b را به دست آوریم و کا بنامیم و $\Delta'=b'^2-ac$ را به دست آوریم و از حالت‌های زیر مجموعه‌ی جواب معادله را بیابیم:

حالت اول: $\Delta'>0$ در این صورت معادله، دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است که از دستور $x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$ به دست می‌آیند.

حالت دوم: $\Delta'=0$ در این حالت معادله، ریشه‌ی مضاعف دارد که از دستور $x=\frac{-b'}{a}$ به دست می‌آید.

حالت سوم: $\Delta'<0$ در این صورت معادله، ریشه‌ی حقیقی ندارد یعنی مجموعه‌ی جواب آن، تهی است.

مثال: معادلات زیر را از روش دلتا حل کنید:

۱) $2x(x-3)=x-10 \Rightarrow 2x^2-6x-x+10=0 \Rightarrow 2x^2-7x+10=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-7 \\ c=10 \end{cases}$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times2\times10=49-80=-31<0$

پس معادله جواب حقیقی ندارد بنابراین: $ج.م=\phi$

Scanned with CamScanner

۲) $3x^2-x+7=0 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=7 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times3\times7=1-84=-83<0$

پس معادله جواب حقیقی ندارد بنابراین: $\text{ج}=\phi$.

۳) $4x^2+1=0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=0^2-4\times4\times1=-16<0$

پس معادله جواب حقیقی ندارد بنابراین: $\text{ج}=\phi$.

۴) $-x^2-8=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=-8 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=0^2-4(-1)(-8)=-32<0$

پس معادله جواب حقیقی ندارد بنابراین: $\text{ج}=\phi$.

۵) $x^2+20x+100=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=20 \\ c=100 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=20^2-4\times1\times100=400-400=0$

پس معادله ریشه‌ی مضاعف دارد بنابراین:

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-20}{2\times1}=-10 \Rightarrow \text{ج}=\{-10\}$

۶) $\frac{x^2}{4}+3x+9=0 \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=3 \\ c=9 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times\frac{1}{4}\times9=9-9=0$

پس معادله ریشه‌ی مضاعف دارد بنابراین:

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{2\times\frac{1}{4}}=\frac{-3}{\frac{1}{2}}=-6 \Rightarrow \text{ج}=\{-6\}$

۷) $-x^2+6x-9=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=6 \\ c=-9 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=6^2-4(-1)(-9)=36-36=0$

پس معادله ریشه‌ی مضاعف دارد بنابراین:

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2(-1)}=3 \Rightarrow \text{ج}=\{3\}$

۸) $4x^2-12x+9=0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-12 \\ c=9 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\times4\times9=144-144=0$

پس معادله ریشه‌ی مضاعف دارد بنابراین:

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-12)}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2} \Rightarrow \text{ج}=\{\frac{3}{2}\}$

۹) $x^2-6x=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=0 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times0=36>0$

پس معادله دارای دو ریشه‌ی متمایز است بنابراین:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{36}}{2\times1}=\frac{6\pm6}{2}$ $\begin{cases} x=\frac{6+6}{2}=\frac{12}{2}=6 \\ x=\frac{6-6}{2}=\frac{0}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \text{ج}=\{0,6\}$

پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد $0>$

روش دیگر: $b=-6 \Rightarrow b'=-3 \Rightarrow \Delta'=b'^2-ac=(-3)^2-1\times0=9>0$

$\Rightarrow x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{9}}{1}=3\pm3$ $\begin{cases} x=3+3=6 \\ x=3-3=0 \end{cases} \Rightarrow \text{ج}=\{0,6\}$ بنابراین

۱۰) $x^2+3x=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=0 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times1\times0=9>0$

پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد

$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-3\pm3}{2}$ $\begin{cases} x=\frac{-3+3}{2}=\frac{0}{2}=0 \\ x=\frac{-3-3}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \end{cases} \Rightarrow \text{ج}=\{-3,0\}$ بنابراین:

Scanned with CamScanner

۱۱) $1-4x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=0^2-4(-4)\times1=16>0$

پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد بنابراین:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-0\pm\sqrt{16}}{2(-4)}=\frac{\pm4}{-8}$ $\begin{cases} x=\frac{-4}{8}=\frac{-1}{2} \\ x=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ ج.م $=\{\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\}$

۱۲) $9x^2-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=0 \\ c=-2 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=0^2-4\times9\times(-2)=72>0$

پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد بنابراین:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-0\pm\sqrt{72}}{2\times9}=\frac{\pm6\sqrt{2}}{18}=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ $\Rightarrow$ ج.م $=\{\frac{-\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3}\}$

۱۳) $x^2+4x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=-2 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times1(-2)=16+8=24>0$

پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد بنابراین:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{24}}{2\times1}=\frac{-4\pm2\sqrt{6}}{2}=\frac{2(-2\pm\sqrt{6})}{2}=-2\pm\sqrt{6} \Rightarrow$ ج.م $=\{-2-\sqrt{6},-2+\sqrt{6}\}$

روش دیگر: $b=4 \Rightarrow b'=2 \Rightarrow \Delta'=b'^2-ac=2^2-1(-2)=4+2=6>0$

پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد بنابراین: $x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{1} \Rightarrow$ ج.م $=\{-2-\sqrt{6},-2+\sqrt{6}\}$

۱۴) $\frac{x^2}{2}-5x+12=0 \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-5 \\ c=12 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times\frac{1}{2}\times12=25-24=1>0$

پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد بنابراین:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\times\frac{1}{2}}=\frac{5\pm1}{1}$ $\begin{cases} x=5+1=6 \\ x=5-1=4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ ج.م $=\{4,6\}$

۱۵) $2\sqrt{3}x^2-x-2\sqrt{3}=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2\sqrt{3} \\ b=-1 \\ c=-2\sqrt{3} \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\sqrt{3}(-2\sqrt{3})$
$=1+16\times3=1+48=49>0$

پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد بنابراین:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2\times2\sqrt{3}}=\frac{1\pm7}{4\sqrt{3}}$ $\begin{cases} x=\frac{1+7}{4\sqrt{3}}=\frac{8}{4\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x=\frac{1-7}{4\sqrt{3}}=\frac{-6}{4\sqrt{3}}=\frac{-3}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{-3\sqrt{3}}{2\times3}=\frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ ج.م $=\{\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{2\sqrt{3}}{3}\}$

۱۶) $\sqrt{3}x^2-3=0 \Longrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=0 \\ c=-3 \end{cases}$ $\Delta=b^2-4ac=0^2-4\times\sqrt{3}\times(-3)=12\sqrt{3}>0$

پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد بنابراین:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-0\pm\sqrt{12\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}=\frac{\pm2\sqrt{3\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt[4]{3^3}\times\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}=\pm\sqrt[4]{3} \Rightarrow$ ج.م $=\{-\sqrt[4]{3},\sqrt[4]{3}\}$

Scanned with CamScanner

۱۷) $۲x^۲-۵x+۳=۰ \rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=-۵ \\ c=۳ \end{cases}$ $\Delta=b^۲-۴ac=(-۵)^۲-۴\times۲\times۳=۲۵-۲۴=۱>۰$

پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد بنابراین:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۵)\pm\sqrt{۱}}{۲\times۲}=\frac{۵\pm۱}{۴} \begin{cases} x=\frac{۵+۱}{۴}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲} \\ x=\frac{۵-۱}{۴}=\frac{۴}{۴}=۱ \end{cases} \Rightarrow ج.م=\{۱, \frac{۳}{۲}\}$$

۱۸) $-x^۲+۱۰x-۹=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=۱۰ \\ c=-۹ \end{cases}$ $\Delta=b^۲-۴ac=۱۰^۲-۴(-۱)(-۹)=۱۰۰-۳۶=۶۴>۰$

پس معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است بنابراین:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۱۰\pm\sqrt{۶۴}}{۲(-۱)}=\frac{-۱۰\pm۸}{-۲} \begin{cases} x=\frac{-۱۰+۸}{-۲}=\frac{-۲}{-۲}=۱ \\ x=\frac{-۱۰-۸}{-۲}=\frac{-۱۸}{-۲}=۹ \end{cases} \Rightarrow ج.م=\{۱, ۹\}$$

۱۹) $x^۲+۷x+۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۷ \\ c=۶ \end{cases}$ $\Delta=b^۲-۴ac=۷^۲-۴\times۱\times۶=۴۹-۲۴=۲۵>۰$

پس معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است بنابراین:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۷\pm\sqrt{۲۵}}{۲\times۱}=\frac{-۷\pm۵}{۲} \begin{cases} x=\frac{-۷+۵}{۲}=\frac{-۲}{۲}=-۱ \\ x=\frac{-۷-۵}{۲}=\frac{-۱۲}{۲}=-۶ \end{cases} \Rightarrow ج.م=\{-۶, -۱\}$$

۲۰) $-۳x^۲+۲x+۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۳ \\ b=۲ \\ c=۵ \end{cases}$ $\Delta=b^۲-۴ac=۲^۲-۴(-۳)\times۵=۴+۶۰=۶۴>۰$

پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد بنابراین:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲\pm\sqrt{۶۴}}{۲\times(-۳)}=\frac{-۲\pm۸}{-۶} \begin{cases} x=\frac{-۲+۸}{-۶}=\frac{۶}{-۶}=-۱ \\ x=\frac{-۲-۸}{-۶}=\frac{-۱۰}{-۶}=\frac{۵}{۳} \end{cases} \Rightarrow ج.م=\{-۱, \frac{۵}{۳}\}$$

حالت‌های خاص معادله‌ی درجه‌ی دوم:

در معادله‌ی درجه‌ی دوم ممکن است بین ضرایب رابطه‌ای وجود داشته باشد که بدون تشکیل Δ بتوان جواب‌های معادله را تعیین کرد البته دلیل این حالت‌ها را در سال بعد خواهید دید این حالت‌ها عبارتند از:

۱) $a+b+c=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{c}{a} \end{cases}$ (مانند مثال ۱۷ و ۱۸)

۲) $a+c=b \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=-\frac{c}{a} \end{cases}$ (مانند مثال ۱۹ و ۲۰)

۳) $c=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-\frac{b}{a} \end{cases}$ (مانند مثال ۹ و ۱۰)

۴) $b=۰, a\cdot c<۰ \Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (مانند مثال ۱۱ و ۱۲ و ۱۶)

۵) $b=۰, a\cdot c>۰ \Rightarrow ج.م=\phi$ (مانند مثال ۳ و ۴)

نکته: اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم a و c هم علامت نباشند یعنی $a\cdot c<۰$ آنگاه آن معادله حتماً دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

Scanned with CamScanner

حل مسئله به کمک معادله‌ی درجه‌ی دوم: گاهی اوقات با مسائلی روبه‌رو می‌شویم که حل آن‌ها منجر به تشکیل یک معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌شود که بایستی آن را به یکی از روش‌های گفته شده حل کنیم.

مثال: عددی بدست آورید که با مربعش برابر باشد.

حل: فرض کنیم عدد خواسته شده x باشد پس: $x^2=x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1} \end{cases}$

یعنی دو عدد ۰ و ۱ با مربعشان برابرند.

مثال: عدد صحیحی بدست آورید که اگر به دو برابر مربع آن، یک واحد اضافه کنیم حاصل از هفت برابر آن دو واحد کمتر باشد.

حل: فرض کنیم عدد خواسته شده x باشد پس: $2x^2+1=7x-2$

$\Rightarrow 2x^2-7x+1+2=0 \Rightarrow 2x^2-7x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-7 \\ c=3 \end{cases}$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times2\times3$

$\Rightarrow \Delta=49-24=25>0$

$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{25}}{2\times2}=\frac{7\pm5}{4}$ / $x=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3 \Rightarrow \boxed{x=3}$ ق ق ق

$x=\frac{7-5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ غ ق ق

مثال: عدد مربوط به مساحت مربعی با عدد مربوط به محیط آن برابر است، اندازه‌ی ضلع این مربع را بیابید.

حل: فرض کنیم اندازه‌ی ضلع این مربع a باشد پس: $a^2=4a \Rightarrow a^2-4a=0 \Rightarrow a(a-4)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \text{ ق ق غ} \\ a-4=0 \Rightarrow \boxed{a=4} \end{cases}$

مثال: مساحت مستطیلی $48cm^2$ می‌باشد اگر اندازه‌ی طول آن سه برابر عرض آن باشد، محیط این مستطیل را بدست آورید.

حل: برای محاسبه‌ی محیط مستطیل باید اندازه‌ی طول و عرض را بیابیم اگر عرض مستطیل را x فرض کنیم طول آن $3x$ خواهد بود پس: $3x\cdot x=48 \Rightarrow 3x^2=48 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm4$

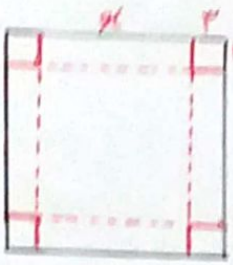
غ ق ق

$\rightarrow \begin{cases} \text{طول}=3\times4=12\,cm \\ \text{عرض}=4\,cm \end{cases}$

$\text{محیط}=2(\text{عرض}+\text{طول})=2(12+4)=2\times16=32\,cm$

Scanned with CamScanner

مثال: با یک مقوای مربع شکل می‌خواهیم یک جعبه‌ی درباز درست کنیم اگر از هر گوشه‌ی این مقوا یک مربع به ضلع $3cm$ برش بزنیم و حجم این جعبه $675cm^3$ باشد اندازه‌ی ضلع مقوا را بدست آورید.



حل: مطابق شکل روبه رو اگر از هر گوشه‌ی مقوا $3cm$ ببریم و از محل‌های خط چین تا بزنیم یک جعبه‌ی درباز بوجود می‌آید که در کف آن مربعی به ضلع x وجود دارد و ارتفاع آن $3cm$ می‌باشد پس داریم:

$$\text{حجم جعبه} = \text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = x \times x \times 3 \Rightarrow 3x^2 = 675 \Rightarrow x^2 = 225$$

$$\Rightarrow x = \pm 15 \xrightarrow[\text{ق ق غ}]{} \text{ضلع مقوای اولیه} = 15 + 2\times 3 = 15 + 6 = 21\ cm$$

مثال: حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی برابر 132 است آن اعداد را بیابید.

حل: اگر عدد اولی را x فرض کنیم عدد بعدی $x+1$ می‌باشد پس داریم:

$$x(x+1) = 132 \Rightarrow x^2 + x - 132 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-132 \end{cases} \quad \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 1 \times (-132)$$

$$= 1 + 528 = 529 > 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2\times 1} = \frac{-1 \pm 23}{2} \begin{cases} x = \frac{-1+23}{2} = \frac{22}{2} = 11 \Rightarrow x+1 = 12 \\ x = \frac{-1-23}{2} = \frac{-24}{2} = -12 \Rightarrow x+1 = -11 \end{cases}$$

پس اعداد مورد نظر 11 و 12 یا -12 و -11 می‌باشند.

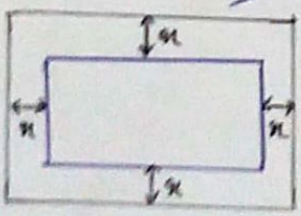
مثال: حاصل ضرب دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر 224 می‌باشد آن اعداد را بیابید.

حل: اگر عدد اولی را $2k$ فرض کنیم عدد بعدی $2k+2$ خواهد بود پس داریم:

$$2k(2k+2) = 224 \Rightarrow 4k^2 + 4k - 224 = 0 \xrightarrow{\div 4} k^2 + k - 56 = 0 \Rightarrow (k+8)(k-7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+8 = 0 \Rightarrow k = -8 \notin \mathbb{N} \quad \text{ق ق غ} \\ k-7 = 0 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow \text{عدد اول} = 2k = 14 \ , \ \text{عدد دوم} = 2k+2 = 16 \end{cases}$$

مثال: یک قالی مستطیل شکل به مساحت $8m^2$ را در یک اتاق به ابعاد $6m$ و $4m$ پهن کرده‌ایم اگر فاصله‌ی قالی تا هرکدام از دیوارهای اتاق یکسان باشد، طول و عرض قالی را بدست آورید.



حل: با توجه به شکل داریم: $\begin{matrix} \text{طول قالی} = 6 - 2x \\ \text{عرض قالی} = 4 - 2x \end{matrix} \Longrightarrow (6-2x)(4-2x) = 8$

$$\Rightarrow 24 - 12x - 8x + 4x^2 = 8 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ x-4 = 0 \Rightarrow x = 4 \quad \text{ق ق غ} \end{cases}$$

$$\text{طول قالی} = 6 - 2\times 1 = 4m \ , \ \text{عرض قالی} = 4 - 2\times 1 = 2m$$

Scanned with CamScanner

تمرین ۱ : کدام یک از معادلات زیر درجه‌ی دوم هستند؟ در معادلات درجه‌ی دوم، جمله‌ی ثابت، جمله‌ی درجه‌ی اول و جمله‌ی درجه‌ی دوم را مشخص کنید.

۱) $(2x-3)(x+2)-4x=(x-2)(x+2)$
۲) $3x(x-4)+5=(1-2x)^2+x$
۳) $(x+5)(x+7)=(x+3)^2-5x$
۴) $(x+2)(x^2-2x+4)=(x^2-1)(x+2)-3$

تمرین ۲ : هریک از معادلات زیر را از روش خواسته شده حل کنید :

۱) $2x^2+7x=0$ (روش تجزیه)
۲) $5x-20x^2=0$ (روش تجزیه)
۳) $9x^2-100=0$ (روش تجزیه)
۴) $x^2-x-72=0$ (روش تجزیه)
۵) $x^2+x-72=0$ (روش تجزیه)
۶) $x^2-17x+72=0$ (روش تجزیه)
۷) $x^2-7=2$ (روش ریشه‌گیری)
۸) $x^2-14x+49=0$ (روش ریشه‌گیری)
۹) $25x^2+30x+9=0$ (روش ریشه‌گیری)
۱۰) $4-81x^2=0$ (روش ریشه‌گیری)
۱۱) $x^2+8x=0$ (روش مربع کامل)
۱۲) $3x^2-6x=0$ (روش مربع کامل)
۱۳) $x^2+7x-2=0$ (روش مربع کامل)
۱۴) $-x^2+10x-3=0$ (روش مربع کامل)
۱۵) $7x^2-9x-4=0$ (روش دلتا)
۱۶) $-3x^2+2x=0$ (روش دلتا)
۱۷) $4x^2+x+7=0$ (روش دلتا)
۱۸) $-x^2+2x-9=0$ (روش دلتا)
۱۹) $1-18x+81x^2=0$ (روش دلتا)
۲۰) $9x^2+24x+16=0$ (روش دلتا)

تمرین ۳ : با یک تکه طناب به طول $40m$ می خواهیم دور زمین مستطیل شکلی به مساحت $96m^2$ را محصور کنیم. طول و عرض این زمین را بدست آورید.

تمرین ۴ : مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی برابر ۲۲۱ می باشد آن اعداد را بیابید.

تمرین ۵ : مجموع دو عدد ۲۴ و حاصل ضربشان ۱۲۸ می باشد این دو عدد را بیابید.

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

Scanned with CamScanner

سهمی: هر معادله به شکل $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند یک تابع درجه‌ی دوم می‌باشد که نمودار آن یک منحنی به نام «سهمی» است.

در این معادله طول رأس سهمی برابر $x=\frac{-b}{2a}$ می‌باشد که با جایگذاری در معادله‌ی تابع، عرض رأس سهمی بدست می‌آید که اگر این کار را انجام دهیم داریم: $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ یعنی نقطه‌ی

$S\left|\begin{matrix}\frac{-b}{2a}\\ \frac{-\Delta}{4a}\end{matrix}\right.$ رأس سهمی می‌باشد. در این معادله خط $x=\frac{-b}{2a}$ خط تقارن سهمی است.

اگر در این معادله x را مساوی صفر قرار دهیم محل برخورد نمودار سهمی با محور yها بدست می‌آید یعنی نمودار در نقطه‌ای به مختصات $(0,c)$ محور yها را قطع می‌کند.

همچنین اگر y را مساوی صفر قرار دهیم محل برخورد نمودار سهمی با محور xها بدست می‌آید (در صورت وجود) که این نقاط را «صفرهای تابع درجه‌ی دوم» یا ریشه‌های معادله‌ی $y=0$ می‌نامیم یعنی در نقاط برخورد نمودار تابع با محور xها، مقدار تابع صفر است یعنی تعداد نقاط برخورد نمودار $y=f(x)$ با محور xها در واقع تعداد جواب‌های معادله‌ی $y=0$ می‌باشد.

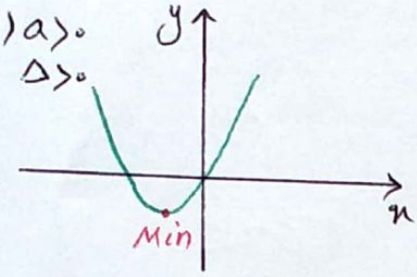
شکل دیگر معادله‌ی سهمی: معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ را می‌توانیم با تبدیل به مربع کامل به صورت $y=a(x-h)^2+k$ $(a\neq 0)$ درآوریم که در آن $S(h,k)$ رأس سهمی و خط $x=h$ خط تقارن نمودار می‌باشد.

در هر دو شکل معادله‌ی سهمی، a را ضریب انحنای منحنی می‌گوییم اگر a عدد مثبتی باشد دهانه‌ی نمودار رو به بالا است و در این حالت رأس سهمی، کمترین مقدار تابع یا مینیمم تابع (Min) است و اگر a عددی منفی باشد دهانه‌ی نمودار رو به پائین می‌باشد و در این حالت رأس سهمی، بیشترین مقدار تابع یا ماکزیمم تابع (Max) است. اگر $a\geq 1$ یا $a\leq -1$ آنگاه دهانه‌ی سهمی بسته‌تر و اگر $-1<a<1$ آنگاه دهانه‌ی سهمی بازتر می‌باشد به بیان دیگر اگر $a\geq 1$ یا $a\leq -1$ آنگاه نمودار در راستای محور yها کشیده می‌شود (انبساط عمودی) و اگر $-1<a<1$ آنگاه نمودار در راستای محور yها فشرده می‌شود (انقباض عمودی).

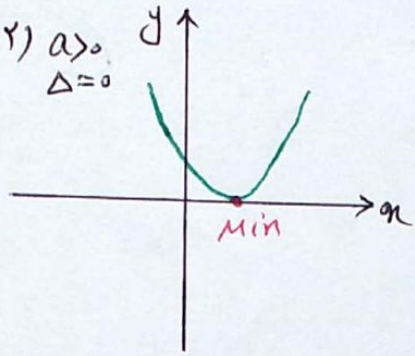
Scanned with CamScanner

با توجه به علامت a و Δ ممکن است یکی از شش حالت زیر اتفاق افتد و برعکس از روی نمودارها می‌توان به علامت a و Δ پی برد:

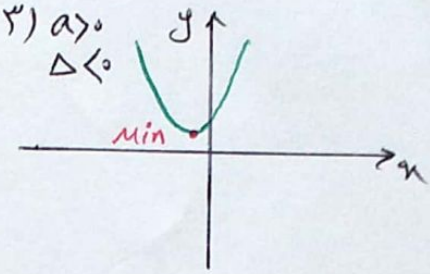
۱) $a>0$ $\Delta>0$



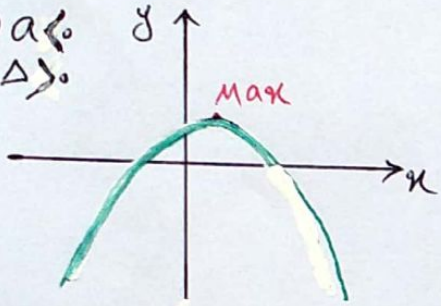
۲) $a>0$ $\Delta=0$



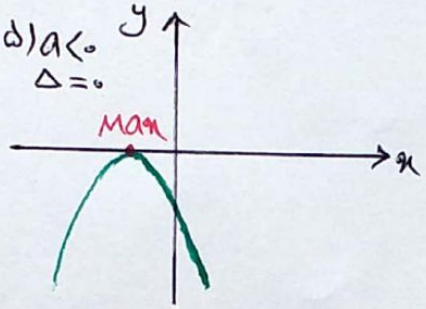
۳) $a>0$ $\Delta<0$



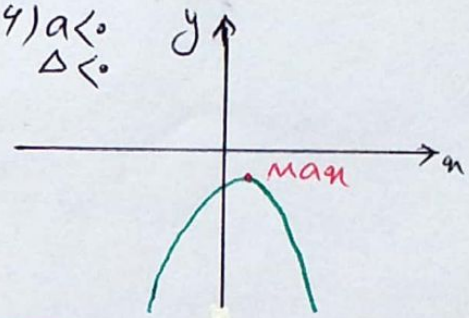
۴) $a<0$ $\Delta>0$



۵) $a<0$ $\Delta=0$



۶) $a<0$ $\Delta<0$



رسم نمودار سهمی: برای رسم نمودار سهمی ابتدا مختصات رأس را با توجه به معادله‌ی سهمی مشخص می‌کنیم سپس در دو طرف رأس نقاطی دلخواه در نظر می‌گیریم سپس این نقاط را به شکل منحنی به هم وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. برای مشخص کردن نقاط هم، برای x مقادیر دلخواهی انتخاب می‌کنیم و این مقادیر را در معادله‌ی تابع قرار می‌دهیم تا مقادیر y به دست آیند.

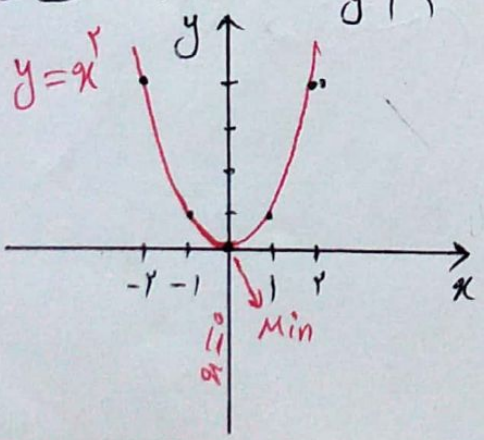
مثال: مختصات رأس و معادله‌ی خط تقارن هر یک از سهمی‌های زیر را مشخص کنید و سپس به روش نقطه‌یابی نمودار آن‌ها را رسم نمائید:

۱) $y=x^2$

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-0}{2\times1}=0$ $\xrightarrow{\text{در تابع}}$ $y=0^2=0 \Rightarrow$ رأس $S\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$

خط تقارن $\rightarrow x=0$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

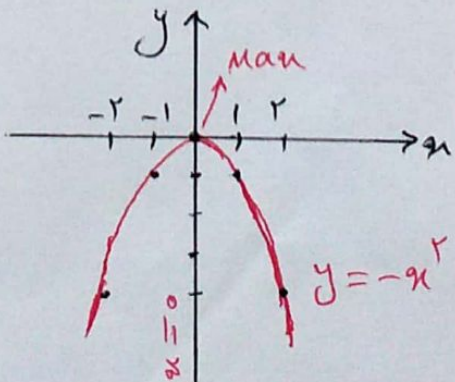


۲) $y=-x^2$

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-0}{2(-1)}=0$ $\xrightarrow{\text{در تابع}}$ $y=-0^2=0 \Rightarrow S\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$

خط تقارن $\rightarrow x=0$

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4



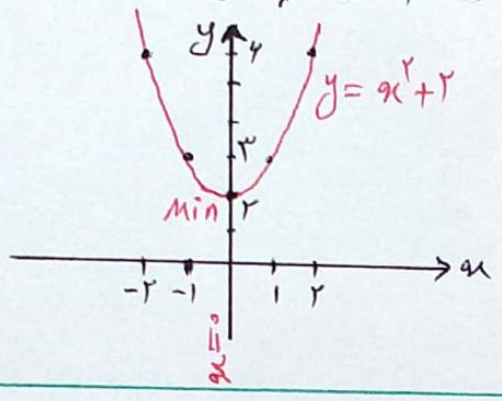
Scanned with CamScanner

۳) $y=x^2+2$

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-0}{2\times1}=0$ درتابع $\xrightarrow{}$ $y=0^2+2=2 \Rightarrow S|_{2}^{0}$

خط تقارن $\Rightarrow x=0$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۶	۳	۲	۳	۶

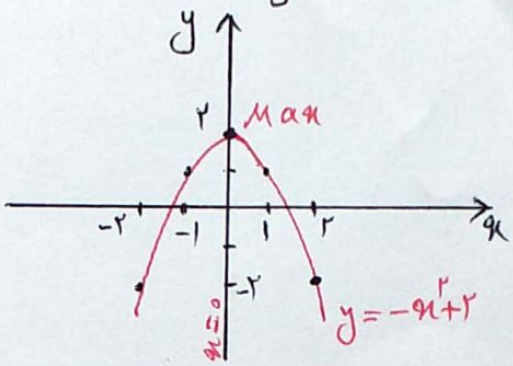


۴) $y=-x^2+2$

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-0}{2(-1)}=0$ درتابع $\xrightarrow{}$ $y=-0^2+2=2 \Rightarrow S|_{2}^{0}$

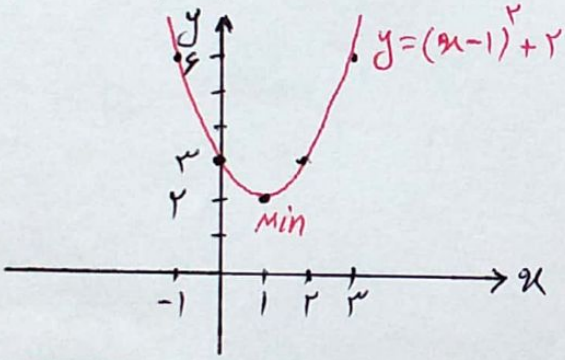
خط تقارن $\Rightarrow x=0$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۲	۱	۲	۱	-۲



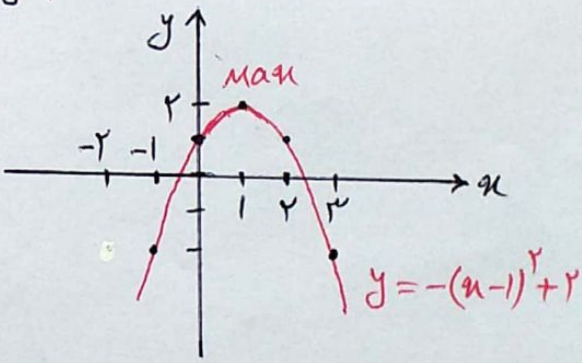
۵) $y=(x-1)^2+2 \rightarrow S|_{2}^{1}$ ، خط تقارن: $x=1$

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۶	۳	۲	۳	۶



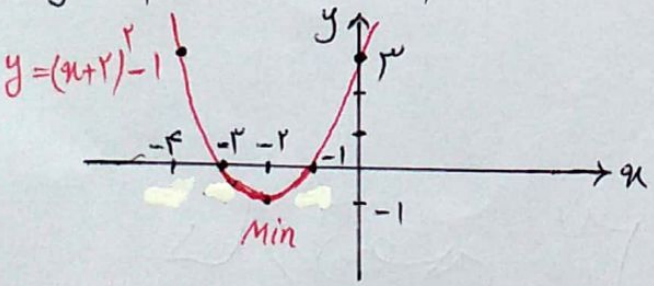
۶) $y=-(x-1)^2+2 \rightarrow S|_{2}^{1}$ ، خط تقارن: $x=1$

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	-۲	۱	۲	۱	-۲



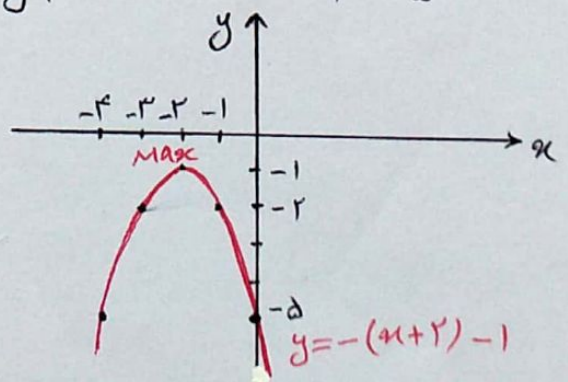
۷) $y=(x+2)^2-1 \rightarrow S|_{-1}^{-2}$ ، خط تقارن: $x=-2$

x	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
y	۳	۰	-۱	۰	۳



۸) $y=-(x+2)^2-1 \rightarrow S|_{-1}^{-2}$ ، خط تقارن: $x=-2$

x	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
y	-۵	-۲	-۱	-۲	-۵



تذکر ۱: در فصل ۵ رسم نمودار این سهمی‌ها را به روش انتقال مورد بررسی قرار خواهیم داد.

تذکر ۲: می‌توانیم رأس و خط تقارن سهمی را مشخص کنیم و نمودار سهمی را در یک طرف خط تقارن رسم کنیم سپس قرینه‌ی آن را نسبت به خط تقارن بدست آوریم.

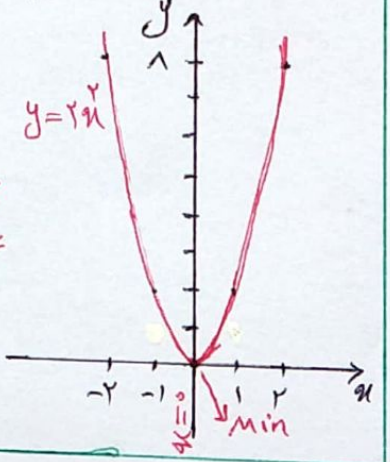
Scanned with CamScanner

۹) $y=2x^2 \rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-0}{2\times 2}=0 \xrightarrow{\text{در تابع}} y=2\times 0^2=0$

$\Rightarrow S|_0^0$ ، خط تقارن: $x=0$

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

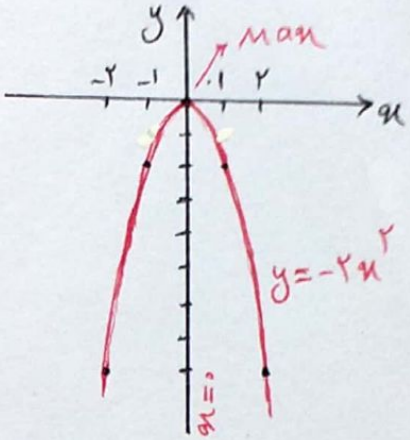
چون $a>1$ نمودار در راستای عمودی کشیده شده است



۱۰) $y=-2x^2 \rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-0}{2(-2)}=0 \xrightarrow{\text{در تابع}} y=-2\times 0^2=0$

$\Rightarrow S|_0^0$ ، خط تقارن: $x=0$

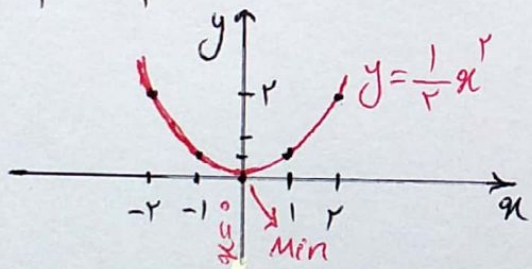
x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8



۱۱) $y=\frac{1}{2}x^2 \rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-0}{2\times\frac{1}{2}}=0 \xrightarrow{\text{در تابع}}$

$y=\frac{1}{2}\times 0^2=0 \Rightarrow S|_0^0$ ، خط تقارن: $x=0$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

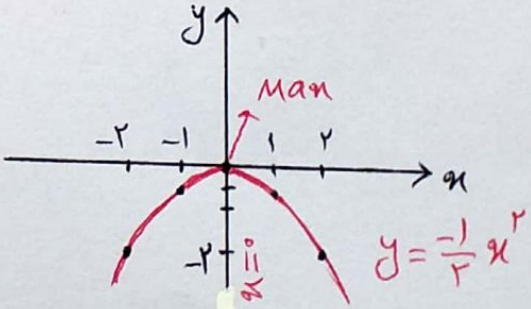


چون $0<a<1$ نمودار در راستای عمودی فشرده شده است

۱۲) $y=\frac{-1}{2}x^2 \rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-0}{2(\frac{-1}{2})}=0 \xrightarrow{\text{در تابع}}$

$y=\frac{-1}{2}\times 0^2=0 \Rightarrow S|_0^0$ ، خط تقارن: $x=0$

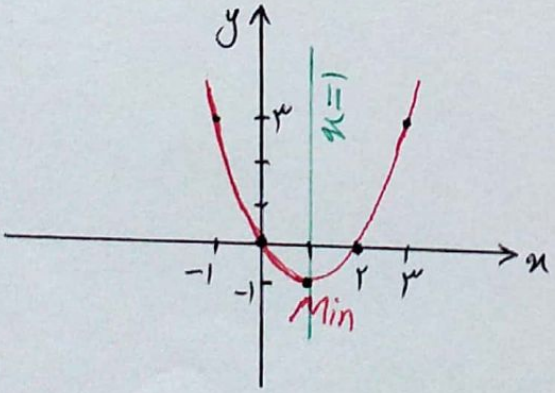
x	-2	-1	0	1	2
y	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2



۱۳) $y=x^2-2x \rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2\times 1}=1 \xrightarrow{\text{در تابع}}$

$y=1^2-2\times 1=-1 \Rightarrow S|_{-1}^1$ ، خط تقارن: $x=1$

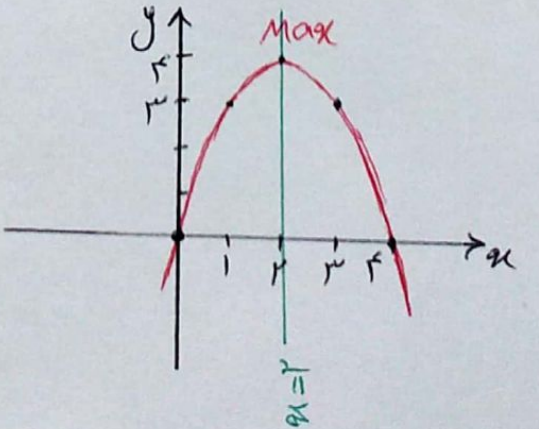
x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3



۱۴) $y=-x^2+4x \rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2(-1)}=2 \xrightarrow{\text{در تابع}}$

$y=-2^2+4\times 2=4 \Rightarrow S|_4^2$ ، خط تقارن: $x=2$

x	0	1	2	3	4
y	0	3	4	3	0

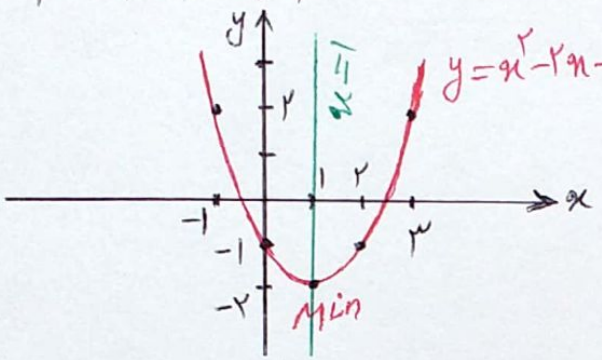


Scanned with CamScanner

۱۶) $y=x^2-2x-1 \rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2\times1}=1$ درتابع

$y=1^2-2\times1-1=-2 \Rightarrow S\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ ، خط تقارن: $x=1$

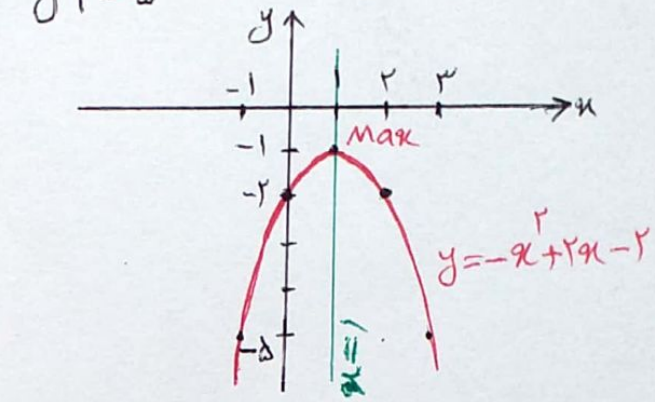
x	-1	0	1	2	3
y	2	-1	-2	-1	2



۱۴) $y=-x^2+2x-2 \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2(-1)}=1$ درتابع

$y=-1^2+2\times1-2=-1 \Rightarrow S\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.$ ، خط تقارن: $x=1$

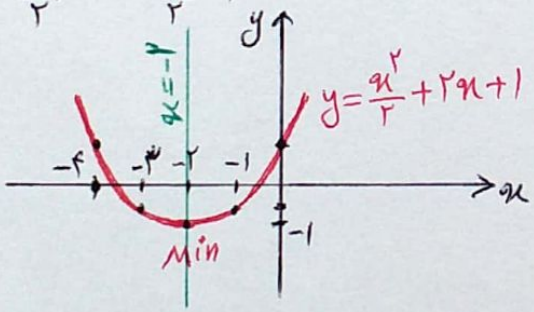
x	-1	0	1	2	3
y	-5	-2	-1	-2	-5



۱۷) $y=\frac{x^2}{2}+2x+1 \rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\times\frac{1}{2}}=-2$ درتابع

$y=\frac{(-2)^2}{2}+2(-2)+1=-1 \Rightarrow S\left|\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}\right.$ ، خط تقارن: $x=-2$

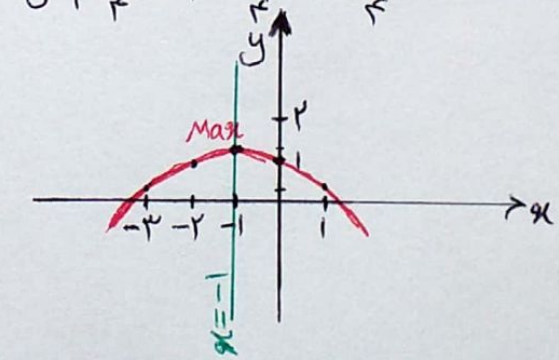
x	-4	-3	-2	-1	0
y	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1



۱۸) $y=\frac{-x^2}{4}-\frac{x}{2}+1 \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{+1}{2(\frac{-1}{4})}=-1$ درتابع

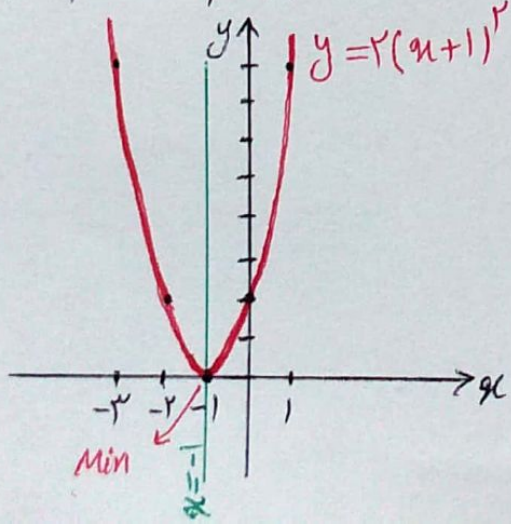
$y=\frac{-(-1)^2}{4}-\frac{-1}{2}+1=\frac{5}{4} \Rightarrow S\left|\begin{matrix}-1\\\frac{5}{4}\end{matrix}\right.$ ، خط تقارن: $x=-1$

x	-3	-2	-1	0	1
y	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{1}{4}$



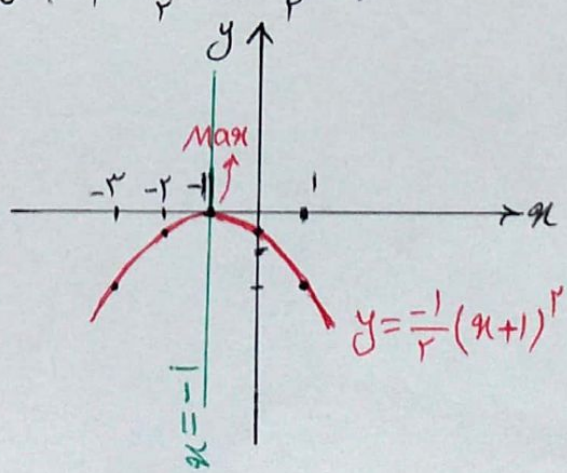
۱۹) $y=2(x+1)^2 \Rightarrow S\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$ ، خط تقارن: $x=-1$

x	-3	-2	-1	0	1
y	8	2	0	2	8



۲۰) $y=\frac{-1}{2}(x+1)^2 \Rightarrow S\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$ ، خط تقارن: $x=-1$

x	-3	-2	-1	0	1
y	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2



Scanned with CamScanner

مسئله: اگر طول رأس سهمی $y=kx^2+4x+1$ برابر 1 باشد مقدار k را بیابید.

حل: $x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow 1=\frac{-4}{2k} \Rightarrow 2k=-4 \Rightarrow k=\frac{-4}{2} \Rightarrow \boxed{k=-2}$

مسئله: اگر طول رأس سهمی $y=-x^2+(k+1)x-2$ برابر -2 باشد مقدار k را بیابید سپس مقدار ماکزیمم سهمی را بدست آورید.

حل: $x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow -2=\frac{-(k+1)}{2(-1)} \Rightarrow 4=-k-1 \Rightarrow k=-1-4 \Rightarrow \boxed{k=-5}$

$\Rightarrow y=-x^2-4x-2 \xrightarrow[x=-2]{} y=-(-2)^2-4(-2)-2 \Rightarrow y=-4+8-2 \Rightarrow y=2$

پس مقدار ماکزیمم سهمی برابر 2 می‌باشد.

مسئله: اگر خط $x=-1$ خط تقارن سهمی $y=2x^2+\frac{k}{2}x-3$ باشد مقدار k را بیابید سپس مقدار مینیمم سهمی را بدست آورید.

حل: $x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow -1=\frac{-\frac{k}{2}}{2\times 2} \Rightarrow -4=\frac{-k}{2} \Rightarrow -8=-k \Rightarrow \boxed{k=8}$

$\Rightarrow y=2x^2+4x-3 \xrightarrow[x=-1]{} y=2(-1)^2+4(-1)-3 \Rightarrow y=2-4-3 \Rightarrow y=-5$

پس مقدار مینیمم سهمی برابر -5 می‌باشد.

مسئله: اگر نمودار سهمی $y=kx^2+nx-2$ محور xها را در نقاطی به طول -2 و 1 قطع کند مقدارهای k و n را بدست آورید سپس حاصل $(n-2k)^{100}$ را بیابید و معادله‌ی سهمی را بنویسید.

حل: چون نمودار محور xها را در نقاطی به طول -2 و 1 قطع می‌کند پس باید $(-2,0)$ و $(1,0)$ در معادله‌ی سهمی صدق کنند بنابراین:

$$\begin{cases} 0=k(-2)^2+n(-2)-2 \\ 0=k\times 1^2+n\times 1-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4k+2n=-2 \\ -2k-2n=-4 \end{cases}$$

$$-6k=-6 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

$$-4k+2n=-2 \Rightarrow -4\times 1+2n=-2$$

$$\Rightarrow 2n=-2+4 \Rightarrow 2n=2 \Rightarrow \boxed{n=1}$$

$$\Rightarrow (n-2k)^{100}=(1-2\times 1)^{100}=(-1)^{100}=1$$

$$n=1,\ k=1 \Longrightarrow y=x^2+x-2$$

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

Scanned with CamScanner

تمرین ۱: مختصات رأس و معادله‌ی خط تقارن هر یک از سهمی‌های زیر را بدست آورید و سپس نمودار آن‌ها را رسم کنید:

۱) $y=x^2-3$ ۲) $y=-x^2+4$ ۳) $y=x^2+\frac{1}{2}$

۴) $y=-x^2-3$ ۵) $y=x^2+4x$ ۶) $y=-x^2-x$

۷) $y=x^2+x-2$ ۸) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x$ ۹) $y=2x^2-x$

۱۰) $y=(x+4)^2-2$ ۱۱) $y=(x-3)^2+1$ ۱۲) $y=-(x+2)^2+3$

۱۳) $y=-(x-4)^2+1$ ۱۴) $y=-2(x+1)^2$ ۱۵) $y=-\frac{1}{2}(x+4)+2$

تمرین ۲: اگر نقطه‌ی $S(-2,0)$ رأس سهمی $y=x^2+kx+n$ باشد آنگاه بین k و n چه رابطه‌ای وجود دارد؟ همچنین مقدار $(k-n)^{50}$ را بیابید.

تمرین ۳: اگر نقطه‌ی $S(1,-2)$ ماکزیمم نمودار سهمی $y=-x^2+(k-2)x+2n$ باشد مقادیر n و k را بیابید سپس معادله‌ی سهمی را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

تمرین ۴: مقادیر a و b و c را طوری تعیین کنید که سهمی $y=ax^2+bx+c$ در نقطه‌ای به طول -1 ماکزیمم برابر 3 داشته باشد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض 1 قطع کند.

تمرین ۵: مقادیر a و b و c را طوری بیابید که سهمی $y=ax^2+2bx+c-1$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض 2 قطع کند و از نقطه‌ی $A(2,-1)$ بگذرد و خط $x=3$ خط تقارن آن باشد سپس مقدار مینیمم آن را بدست آورید.

تمرین ۶: اگر نمودار سهمی $y=kx^2-(m-2)x+3$ محور xها را در نقاطی به طول‌های 1 و -1 قطع کند معادله‌ی سهمی را بیابید همچنین حاصل $(m+k)^{99}$ را محاسبه کنید.

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

Scanned with CamScanner

تعیین علامت یک عبارت: منظور از تعیین علامت یک عبارت این است که بدانیم آن عبارت در چه نقاطی مثبت، در چه نقاطی صفر و در چه نقاطی منفی است؛ این بدان معناست که اگر آن عبارت را به عنوان ضابطه‌ی یک تابع در نظر بگیریم و نمودار آن را رسم کنیم می‌خواهیم بدانیم که در کجا نمودار بالای محور xها و در چه جاهایی نمودار محور xها را قطع می‌کند و در چه نقاطی نمودار زیر محور xهاست.

تعیین علامت عبارت درجه‌ی اول: $(ax+b)$ اگر بخواهیم عبارت $ax+b$ را تعیین علامت کنیم مراحل زیر را باید انجام دهیم:

۱) عبارت را مساوی صفر قرار می‌دهیم بدین ترتیب یک معادله‌ی درجه‌ی اول به وجود می‌آید $(ax+b=0)$

۲) معادله‌ی به دست آمده را حل می‌کنیم $(ax=-b \Rightarrow x=\frac{-b}{a})$

۳) طبق جدول زیر عبارت را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$	مخالف علامت a (ضریب x)		0	موافق علامت a (ضریب x)	

* این جدول را با توجه به علامت a می‌توانیم به دو جدول زیر تبدیل کنیم:

$a>0$

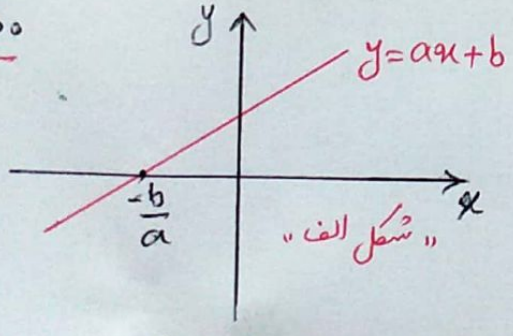
x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

$a<0$

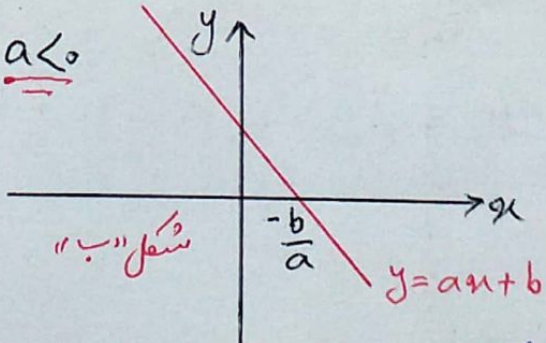
x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

این مطلب را از روی نمودار نیز می‌توان بیان کرد بدین ترتیب که اگر $ax+b$ را به عنوان ضابطه‌ی یک تابع در نظر بگیریم یعنی $y=ax+b$ آنگاه a شیب خط است و داریم:

$a>0$



$a<0$



در حالتی که $a>0$ (شکل الف) نمودار محور xها را در نقطه‌ای به طول $\frac{-b}{a}$ قطع کرده است یعنی در این نقطه $y=0$ می‌باشد و برای $x<\frac{-b}{a}$ نمودار زیر محور xهاست یعنی $y<0$ و برای $x>\frac{-b}{a}$ نمودار بالای محور xهاست یعنی $y>0$. ولی در حالتی که $a<0$ (شکل ب) برای $x<\frac{-b}{a}$ نمودار بالای محور xها است یعنی $y>0$ و برای $x>\frac{-b}{a}$ نمودار زیر محور xهاست یعنی $y<0$.

Scanned with CamScanner

مثال: عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید:

۱) $P=۳x-۲$ $a=۳>۰$

$۳x-۲=۰ \Rightarrow ۳x=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$

x	$-\infty$		$\frac{۲}{۳}$		$+\infty$
P		$-$	۰	$+$	

۲) $P=۵-۱۰x$ $a=-۱۰<۰$

$۵-۱۰x=۰ \Rightarrow -۱۰x=-۵ \Rightarrow x=\frac{-۵}{-۱۰} \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
P		$+$	۰	$-$	

۳) $P=۴x+۱۲$ $a=۴>۰$

$۴x+۱۲=۰ \Rightarrow ۴x=-۱۲ \Rightarrow x=\frac{-۱۲}{۴} \Rightarrow x=-۳$

x	$-\infty$		-۳		$+\infty$
P		$-$	۰	$+$	

۵) $P=-۲x-۱۶$ $a=-۲<۰$

$-۲x-۱۶=۰ \Rightarrow -۲x=۱۶ \Rightarrow x=\frac{۱۶}{-۲} \Rightarrow x=-۸$

x	$-\infty$		-۸		$+\infty$
P		$+$	۰	$-$	

۵) $P=\frac{۲x-۳}{۵}=\frac{۲}{۵}x-\frac{۳}{۵}$ $a=\frac{۲}{۵}>۰$

$P=۰ \Rightarrow ۲x-۳=۰ \Rightarrow ۲x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$

x	$-\infty$		$\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
P		$-$	۰	$+$	

۶) $P=\frac{x+۲}{-۳}=\frac{-۱}{۳}x-\frac{۲}{۳}$ $a=\frac{-۱}{۳}<۰$

$P=۰ \Rightarrow x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$

x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
P		$+$	۰	$-$	

تذکر: ممکن است عبارتی به شکل حاصل ضرب یا حاصل تقسیم دو یا چند عبارت درجه‌ی اول باشد در این صورت تک تک آن عبارت‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم و جواب‌هایشان را می‌یابیم و آن‌ها را در یک جدول، تعیین علامت می‌کنیم و سپس علامت حاصل ضرب یا حاصل تقسیم آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

۷) $P=(x-۲)(۲x+۱)$

$P=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \\ ۲x+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ ۲x=-۱ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۲} \end{cases}$

x	$-\infty$		$\frac{-۱}{۲}$		۲		$+\infty$
$x-۲$	$-$		$-$	۰	$+$		
$۲x+۱$	$-$	۰	$+$		$+$		
P	$+$	۰	$-$	۰	$+$		

۸) $P=(۳-x)(۲-\frac{x}{۲})$

$P=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳-x=۰ \\ ۲-\frac{x}{۲}=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x=-۳ \\ \frac{-x}{۲}=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=۴ \end{cases}$

x	$-\infty$		۳		۴		$+\infty$
$۳-x$	$+$	۰	$-$		$-$		
$۲-\frac{x}{۲}$	$+$		$+$	۰	$-$		
P	$+$	۰	$-$	۰	$+$		

۹) $P=(x+۵)(۷+x)$

$P=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۵=۰ \\ ۷+x=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-۵ \\ x=-۷ \end{cases}$

x	$-\infty$		-۷		-۵		$+\infty$
$x+۵$	$-$		$-$	۰	$+$		
$x+۷$	$-$	۰	$+$		$+$		
P	$+$	۰	$-$	۰	$+$		

۱۰) $P=(۱-۲x)(x+۲)$

$P=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱-۲x=۰ \\ x+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲x=-۱ \Rightarrow x=\frac{-۱}{-۲}=\frac{۱}{۲} \\ x=-۲ \end{cases}$

x	$-\infty$		-۲		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$۱-۲x$	$+$		$+$		۰	$-$	
$x+۲$	$-$	۰	$+$		$+$		
P	$-$	۰	$+$	۰	$-$		

Scanned with CamScanner

۱۱) $P=(x-1)^2$ $\quad P=0 \Rightarrow (x-1)^2=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
P		$+$	0	$+$	

۱۲) $P=(3-5x)^2$

$P=0 \Rightarrow (3-5x)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} 3-5x=0 \\ 3-5x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ x=\frac{3}{5} \end{cases}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$3-5x$		$+$	0	$-$	
$3-5x$		$+$	0	$-$	
P		$+$	0	$+$	

۱۳) $P=(x-1)^3$

$P=0 \Rightarrow (x-1)^3=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-1=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1 \\ x=1 \end{cases}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$		$-$	0	$+$	

۱۴) $P=(3-5x)^3$

$P=0 \Rightarrow (3-5x)^3=0 \Rightarrow \begin{cases} 3-5x=0 \\ 3-5x=0 \\ 3-5x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ x=\frac{3}{5} \\ x=\frac{3}{5} \end{cases}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$3-5x$		$+$	0	$-$	
$3-5x$		$+$	0	$-$	
$3-5x$		$+$	0	$-$	
P		$+$	0	$-$	

۱۵) $P=|x-1|$

$P=0 \Rightarrow |x-1|=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-1\rvert$		$+$	0	$+$	

۱۶) $P=|3-5x|$

$P=0 \Rightarrow |3-5x|=0 \Rightarrow 3-5x=0 \Rightarrow x=\frac{3}{5}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$3-5x$		$+$	0	$-$	
$\lvert 3-5x\rvert$		$+$	0	$+$	

نتیجه: با کمی دقت در مثال‌های بالا درمی‌یابیم که اگر عبارتی توان مزدار داشته باشد علامت آن عبارت با علامت هر توان مزدی از آن یکسان است (مثال‌های ۱۳ و ۱۴) بنابراین برای تعیین علامت چنین عبارت‌هایی کافیست یک بار عبارت داخل پرانتز را بنویسیم و مساوی صفر قرار دهیم و جواب آن را پیدا کنیم و در جدول، تعیین علامت کنیم سپس علامت هر توان فردی از آن را مانند خودش بنویسیم.

در مورد توان‌های زوج و قدرمطلق همانطور که می‌بینید علامت عبارت با توان زوج و قدرمطلق همواره مثبت یا صفر است پس کافیست جواب عبارت داخل پرانتز یا قدرمطلق را پیدا کنیم و در آنجا عبارت را صفر قرار دهیم و در بقیه‌ی جاها، مثبت بنویسیم.

Scanned with CamScanner

۱۷) $P=(۳x+۴)^۵$

$۳x+۴=۰ \Rightarrow ۳x=-۴ \Rightarrow x=\frac{-۴}{۳}$

x	$-\infty$	$\frac{-۴}{۳}$	$+\infty$
$۳x+۴$	−	۰	+
P	−	۰	+

۱۸) $P=(-x+\frac{۱}{۲})^۴$

$-x+\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow -x=\frac{-۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

x	$-\infty$	$\frac{۱}{۲}$	$+\infty$
$-x+\frac{۱}{۲}$	+	۰	−
P	+	۰	+

۱۹) $P=\frac{x-۷}{x+۱}$

تذکر: اگر عبارت کسری باشد برای جوابهای مخرج تعریف نشده است

$x-۷=۰ \Rightarrow x=۷$

$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

x	$-\infty$	-۱	۷	$+\infty$
$x-۷$	−	−	۰	+
$x+۱$	−	۰	+	+
P	+	‖	−	+

۲۰) $P=\frac{۲-x}{۲+x}$

$۲-x=۰ \Rightarrow ۲=x$

$۲+x=۰ \Rightarrow x=-۲$

x	$-\infty$	-۲	۲	$+\infty$
$۲-x$	+	+	۰	−
$۲+x$	−	۰	+	+
P	−	‖	+	−

۲۱) $P=\frac{x^۲+۵x+۶}{۱-۳x}=\frac{(x+۲)(x+۳)}{۱-۳x}$

$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$

$x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳$

$۱-۳x=۰ \Rightarrow ۱=۳x \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$

x	$-\infty$	-۳	-۲	$\frac{۱}{۳}$	$+\infty$
$x+۲$	−	−	۰	+	+
$x+۳$	−	۰	+	+	+
$۱-۳x$	+	+	+	۰	−
P	+	۰ −	۰ +	‖	−

۲۲) $P=\frac{-۲x}{-x^۲+۴}=\frac{-۲x}{(۲-x)(۲+x)}$

$-۲x=۰ \Rightarrow x=۰$

$۲-x=۰ \Rightarrow ۲=x$

$۲+x=۰ \Rightarrow x=-۲$

x	$-\infty$	-۲	۰	۲	$+\infty$
$-۲x$	+	+	۰	−	−
$۲-x$	+	+	+	۰	−
$۲+x$	−	۰	+	+	+
P	−	‖	+	‖	+

۲۳) $P=x^۳-x=x(x^۲-۱)=x(x-۱)(x+۱)$

$x=۰$ ، $x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$ ، $x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

x	$-\infty$	-۱	۰	۱	$+\infty$
x	−	−	۰	+	+
$x-۱$	−	−	−	۰	+
$x+۱$	−	۰	+	+	+
P	−	۰	+	۰ −	۰ +

۲۴) $P=-۳x^۳+۳x^۲+۳۶x$

$\Rightarrow P=-۳x(x^۲-x-۱۲)=-۳x(x-۴)(x+۳)$

$-۳x=۰ \Rightarrow x=۰$ ، $x-۴=۰ \Rightarrow x=۴$ ،

$x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳$

x	$-\infty$	-۳	۰	۴	$+\infty$
$-۳x$	+	+	۰	−	−
$x-۴$	−	−	−	۰	+
$x+۳$	−	۰	+	+	+
P	+	۰	−	۰ +	۰ −

Scanned with CamScanner

تعیین علامت چند جمله ای درجه ی دوم: برای تعیین علامت عبارت ax^2+bx+c به ترتیب زیر عمل می کنیم: ۱) عبارت را مساوی صفر قرار می دهیم $(ax^2+bx+c=0)$ بدین ترتیب یک معادله ی درجه ی دوم بوجود می آید ۲) دلتای این معادله را تشکیل می دهیم و معادله را حل می کنیم. ۳) با توجه به علامت Δ و جدولهای زیر عبارت را تعیین علامت می کنیم.

حالت اول: اگر $\Delta>0$ و جوابهای معادله x_1 و x_2 باشند و $x_1<x_2$ آنگاه:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a (ضریب x^2)		مخالف علامت a (ضریب x^2)		موافق علامت a (ضریب x^2)		

حالت دوم: اگر $\Delta=0$ آنگاه $x=\frac{-b}{2a}$ و داریم:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a				موافق علامت a

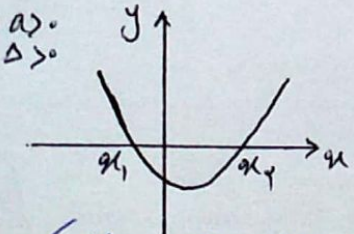
حالت سوم: اگر $\Delta<0$ آنگاه معادله جواب حقیقی ندارد و داریم:

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a		

تذکر ۱: با توجه به علامت a هرکدام از این جدولها را می توان به دو جدول تبدیل کرد.

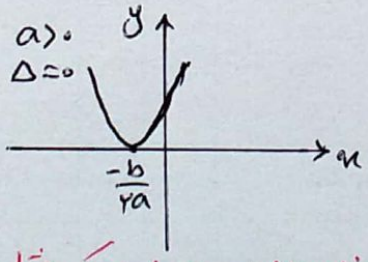
تذکر ۲: اگر نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ را رسم کنیم از روی نمودار هم می توان این جدولها را نتیجه گیری کرد.

۱) $a>0$ $\Delta>0$



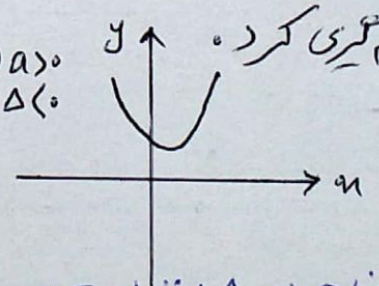
در اینجا $\Delta>0$ و $a>0$ همانطور که دیده می شود از x_1 تا x_2 نمودار زیر محور x ها قرار دارد پس منفی است و قبل از x_1 و بعد از x_2 نمودار بالای محور x هاست پس مثبت می باشد. یعنی بین دو ریشه مخالف با علامت a و خارج از دو ریشه موافق با علامت a است.

۲) $a>0$ $\Delta=0$



در اینجا $\Delta=0$ پس نمودار در یک نقطه بر محور x ها مماس شده است و چون $a>0$ پس دهانه رو به بالاست و نمودار زیر محور x ها نیست یعنی در $\frac{-b}{2a}$ برابر صفر و در بقیه ی جاها مثبت است و با علامت a موافق می باشد.

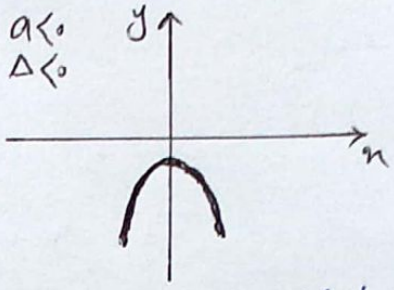
۳) $a>0$ $\Delta<0$



در اینجا چون Δ منفی است پس نمودار محور x ها را قطع نمی کند و چون $a>0$ پس دهانه رو به بالاست و نمودار بالای محور x هاست یعنی همواره مثبت است یعنی علامت آن با علامت a یکی است.

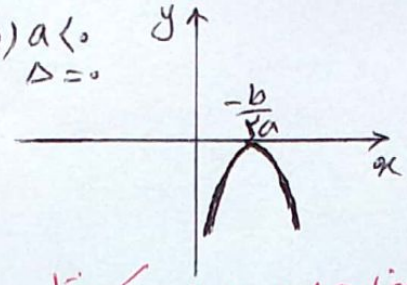
Scanned with CamScanner

۶) $a<0$ $\Delta<0$



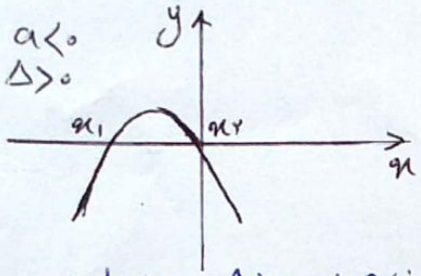
در اینجا چون $\Delta<0$ پس نمودار محور xها را قطع نمی‌کند و چون $a<0$ پس دهانه رو به پائین است و نمودار پائین محور xهاست یعنی همواره منفی است یعنی علامت آن با علامت a یکی می‌باشد.

۵) $a<0$ $\Delta=0$



در اینجا $\Delta=0$ پس نمودار در یک نقطه بر محور xها مماس می‌شود و چون $a<0$ پس دهانه رو به پائین می‌باشد و نمودار بالای محور xها نیست یعنی در $-\frac{b}{2a}$ برابر صفر و در بقیه‌ی جاها منفی است یعنی با علامت a موافق است.

۴) $a<0$ $\Delta>0$



در اینجا چون $\Delta>0$ پس نمودار محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و چون $a<0$ پس دهانه رو به پائین است و نمودار بین x_1 و x_2 بالای محور xهاست یعنی مثبت است پس مخالف علامت a است و قبل از x_1 و بعد از x_2 زیر محور xهاست پس منفی می‌باشد یعنی موافق علامت a است.

مثال: عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید:

۱) $P=3x^2-7x$

$3x^2-7x=0 \xrightarrow{c=0} \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-b}{a}=\frac{-(-7)}{3}=\frac{7}{3} \end{cases}$

x	$-\infty$		0		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

۲) $P=4x-x^2$

$4x-x^2=0 \xrightarrow{c=0} \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-b}{a}=\frac{-4}{-1}=4 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
P		$-$	0	$+$	0	$-$	

۳) $P=x^2+5x$

$x^2+5x=0 \xrightarrow{c=0} \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-b}{a}=\frac{-5}{1}=-5 \end{cases}$

x	$-\infty$		-5		0		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

۴) $P=-2x^2-3x$

$-2x^2-3x=0 \xrightarrow{c=0} \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-b}{a}=\frac{-(-3)}{-2}=\frac{-3}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		0		$+\infty$
P		$-$	0	$+$	0	$-$	

۵) $P=4x^2-1$

$4x^2-1=0 \Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

۶) $P=4-x^2$

$4-x^2=0 \Rightarrow 4=x^2 \Rightarrow x=\pm 2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
P		$-$	0	$+$	0	$-$	

۷) $P=x^2+4$

$x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4$ جواب حقیقی ندارد ⇒ غیرممکن

x	$-\infty$		$+\infty$
P		$+$	

۸) $P=-x^2-4$

$-x^2-4=0 \Rightarrow x^2=-4$ جواب حقیقی ندارد ⇒ غیرممکن

x	$-\infty$		$+\infty$
P		$-$	

نکته: شرط اینکه عبارت درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد این است که $\Delta<0$ و $a>0$.
و شرط اینکه عبارت درجه‌ی دوم همواره منفی باشد این است که $\Delta<0$ و $a<0$.

Scanned with CamScanner

۹) $P=2x^2-3x+1$

$2x^2-3x+1=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

۱۰) $P=-5x^2-2x+3$

$-5x^2-2x+3=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{-c}{a}=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5} \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
P		$-$	0	$+$	0	$-$	

۱۱) $P=x^2+5x-2$

$x^2+5x-2=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=5^2-4\times1\times(-2)$

$\Rightarrow \Delta=25+8=33>0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-5-\sqrt{33}}{2}$		$\frac{-5+\sqrt{33}}{2}$		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

۱۲) $P=9x^2+6x+1$

$9x^2+6x+1=0 \Rightarrow (3x+1)^2=0 \Rightarrow 3x+1=0$

$\Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$+\infty$
P		$+$	0	$+$	

۱۳) $P=-x^2+8x-16$

$-x^2+8x-16=0 \Rightarrow x^2-8x+16=0$

$\Rightarrow (x-4)^2=0 \Rightarrow x-4=0 \Rightarrow x=4$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
P		$-$	0	$-$	

۱۴) $P=-3x^2+6x+4$

$-3x^2+6x+4=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=6^2-4(-3)\times4$

$\Rightarrow \Delta=36+48=84>0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{84}}{2(-3)}=\frac{-6\pm2\sqrt{21}}{-6}=\frac{2(-3\pm\sqrt{21})}{-6}$

$\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{-3}$ ⟨ $x=\frac{3-\sqrt{21}}{3}$ ، $x=\frac{3+\sqrt{21}}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{21}}{3}$		$\frac{3+\sqrt{21}}{3}$		$-\infty$
P		$-$	0	$+$	0	$-$	

۱۵) $P=3x^2+x+5$

$3x^2+x+5=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=1^2-4\times3\times5$

$\Rightarrow \Delta=1-60=-59<0$ معادله جواب حقیقی ندارد

x	$-\infty$		$+\infty$
P		$+$	

۱۶) $P=-2x^2+3x-1$

$-2x^2+3x-1=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=3^2-4(-2)(-1)$

$\Rightarrow \Delta=9-8=1>0$ معادله جواب حقیقی ندارد

x	$-\infty$		$+\infty$
P		$-$	

۱۷) $P=4x^2-3$

$4x^2-3=0 \Rightarrow 4x^2=3 \Rightarrow x^2=\frac{3}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

۱۸) $P=5-x^2$

$5-x^2=0 \Rightarrow -x^2=-5 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow$

$x=\pm\sqrt{5}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
P		$-$	0	$+$	0	$-$	

Scanned with CamScanner

۱۹) $P=(2-x)(x^2+x)$

$2-x=0 \Rightarrow -x=-2 \Rightarrow x=2$

$x^2+x=0 \overset{c=0}{\Rightarrow} \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{1}=-1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-1		0		2	$-\infty$
$2-x$	+		+		+	0	−
x^2+x	+	0	−	0	+		+
P	+	0	−	0	+	0	−

۲۰) $P=(x^2-8)(x^2+7)$

$x^2-8=0 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$

$x^2+7=0 \Rightarrow x^2=-7$ غیرممکن $\Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow \Delta=\phi$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$8-x^2$	+	0	−	0	+		
x^2+7	+		+		+		
P	+	0	−	0	+		

۲۱) $P=\dfrac{x^2+8x+12}{1-9x^2}$

$x^2+8x+12=0 \Rightarrow (x+2)(x+6)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-6 \end{cases}$

$1-9x^2=0 \Rightarrow 9x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{9} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{3}$

x	$-\infty$	-6		-2		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$x^2+8x+12$	+	0	−	0	+		+		+
$1-9x^2$	−		−		−	0	+	0	−
P	−	0	+	0	−	∄	+	∄	−

۲۲) $P=\dfrac{3x^2-7x+4}{-x^2+x-10}$

$3x^2-7x+4=0 \overset{a+b+c=0}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=\frac{4}{3} \end{cases}$

$-x^2+x-10=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=1^2-4(-1)(-10)$

$\Rightarrow \Delta=1-40=-39 \Rightarrow \exists=\phi$

x	$-\infty$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$4+7x-3x^2$	+	0	−	0	+		
$-x^2+x-10$	−		−		−		
P	−	0	+	0	−		

۲۳) $P=\dfrac{(x^2-9)(x^2+4x+4)}{(4-2x)(x^2+4)}$

$x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

$x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$4-2x=0 \Rightarrow -2x=-4 \Rightarrow x=\frac{-4}{-2} \Rightarrow x=2$

$x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow \exists=\phi$

x	$-\infty$	-3		-2		2		3	$+\infty$
x^2-9	+	0	−		−		−	0	+
x^2+4x+4	+		+	0	+		+		+
$4-2x$	+		+		+	0	−		−
x^2+4	+		+		+		+		+
P	+	0	−	∄	−	0	+	0	−

۲۴) $P=\dfrac{(x^2+4x-21)(-x^2+x-6)}{2x^2(x+10)}$

$x^2+4x-21=0 \Rightarrow (x+7)(x-3)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x+7=0 \\ x-3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-7 \\ x=3 \end{cases}$

$-x^2+x-6=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=1^2-4(-1)(-6)=1-24=-23$

$\Rightarrow \exists=\phi$

$2x^2=0 \Longrightarrow x=0$

$x+10=0 \Rightarrow x=-10$

x	$-\infty$	-10		-7		0		3	$+\infty$
$x^2+4x-21$	+		+	0	−		−	0	+
$-x^2+x-6$	−		−		−		−		−
$2x^2$	+		+		+	0	+		+
$x+10$	−	0	+		+		+		+
P	+	∄	−	0	+	∄	+	0	−

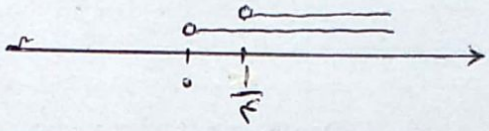
Scanned with CamScanner

مسئله: مقدار k را طوری بیابید که عبارت $A=kx^2+(2k-1)x+k$ همواره مثبت باشد.

حل: برای اینکه یک عبارت درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد باید $\Delta<0$ و $a>0$ پس داریم:

$$\begin{cases} b^2-4ac<0 \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2k-1)^2-4k\cdot k<0 \\ k>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k^2-4k+1-4k^2<0 \\ k>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4k<-1 \\ k>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k>\frac{1}{4} \\ k>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k>\frac{1}{4} \\ k>0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} k>\frac{1}{4}$$



مسئله: به ازای چه مقادیری از k، نمودار تابع $y=kx^2+kx-2$ همواره پایین محور xها است

حل: برای اینکه نمودار این سهمی زیر محور xها باشد یعنی باید همواره منفی باشد پس باید:

$$\begin{cases} \Delta<0 \Rightarrow b^2-4ac<0 \Rightarrow k^2+8k<0 \\ a<0 \Rightarrow k<0 \end{cases}$$

باید تعیین علامت کنیم

$$k^2+8k=0 \xrightarrow{c=0} \begin{cases} k=0 \\ k=\frac{-b}{a}=-8 \end{cases}$$

k	$-\infty$	-8	0	$+\infty$
k^2+8k	$+$	0	$-$	0 $+$

پس باید $-8<k<0$

$$\begin{cases} -8<k<0 \\ k<0 \end{cases} \Rightarrow -8<k<0 \quad \text{یا} \quad k\in(-8,0)$$

مسئله: حدود k را طوری بیابید که نمودار $y=(k+1)x^2-kx+1$ همواره بالای محور xها باشد.

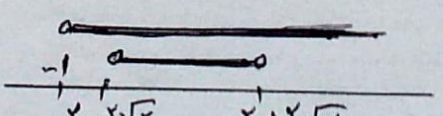
حل: برای اینکه نمودار این تابع بالای محور xها باشد باید y مثبت باشد پس باید:

$$\begin{cases} \Delta<0 \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2-4ac<0 \\ k+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-k)^2-4(k+1)\times 1<0 \Rightarrow k^2-4k-4<0 \\ k>-1 \end{cases}$$

باید تعیین علامت کنیم

$$k^2-4k-4=0 \Rightarrow \Delta=16+16=32>0 \Rightarrow k=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{32}}{2}=\frac{4\pm4\sqrt{2}}{2}=2\pm2\sqrt{2}$$

k	$-\infty$	$2-2\sqrt{2}$	$2+2\sqrt{2}$	$+\infty$
k^2-4k-4	$+$	0	$-$	0 $+$



بنابراین:

$$\begin{cases} 2-2\sqrt{2}<k<2+2\sqrt{2} \\ k>-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2-2\sqrt{2}<k<2+2\sqrt{2}$$

نکته: یکی از کاربردهای تعیین علامت، حل نامعادله‌ها می‌باشد.

Scanned with CamScanner

مثال: مجموعه‌ی جواب نامعادلات زیر را با استفاده از تعیین علامت بدست آورید:

۱) $5x+9 \geq 0$

$5x+9=0 \Rightarrow 5x=-9 \Rightarrow x=\frac{-9}{5}$

x	$-\infty$	$\frac{-9}{5}$	$+\infty$
$5x+9$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ ج.ق $= [\frac{-9}{5}, +\infty)$

۲) $3-2x < 0$

$3-2x=0 \Rightarrow -2x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{-2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3-2x$	$+$	0	$-$

ج.ق $= (\frac{3}{2}, +\infty)$

۳) $-7x-14 > 0$

$-7x-14=0 \Rightarrow -7x=14 \Rightarrow x=\frac{14}{-7} \Rightarrow x=-2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$-14-7x$	$+$	0	$-$

ج.ق $= (-\infty, -2)$

۴) $3x-12 \leq 0$

$3x-12=0 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=\frac{12}{3} \Rightarrow x=4$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$12-3x$	$-$	0	$+$

ج.ق $= [4, \infty-)$

۵) $14-x^2 > 0$

$14-x^2=0 \Rightarrow 14=x^2 \Rightarrow x=\pm 4$

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
$14-x^2$	$-$	0	$+$	0 $-$

ج.ق $= (-4, 4)$

۶) $4x^2-8 \geq 0$

$4x^2-8=0 \Rightarrow 4x^2=8 \Rightarrow x^2=\frac{8}{4} \Rightarrow x^2=2$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$8-4x^2$	$+$	0	$-$	0 $+$

ج.ق $= (-\sqrt{2}, \sqrt{2})-\mathbb{R} = (\infty-, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

۷) $-x^2-5x+14 \geq 0$

$-x^2-5x+14=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac \Rightarrow$

$\Delta=(-5)^2-4(-1)(14)=25+56=81 > 0$

$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{81}}{2(-1)}=\frac{5\pm 9}{-2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5+9}{-2}=\frac{14}{-2}=-7 \\ x=\frac{5-9}{-2}=\frac{-4}{-2}=2 \end{cases}$

x	$-\infty$	-7	2	$+\infty$
$14+5x-x^2$	$-$	0	$+$	0 $-$

ج.ق $= [2, -7]$

۸) $2x^2+3x-2 < 0$

$2x^2+3x-2=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=3^2-4\times 2\times(-2)$

$\Rightarrow \Delta=9+16=25 > 0$

$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2\times 2}=\frac{-3\pm 5}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-3+5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ x=\frac{-3-5}{4}=\frac{-8}{4}=-2 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-1+3x+2x^2$	$+$	0	$-$	0 $+$

ج.ق $= (-2, \frac{1}{2})$

Scanned with CamScanner

۹) $x^2+8x+16 \leq 0$

$x^2+8x+16=0 \Rightarrow (x+4)^2=0 \Rightarrow x+4=0$

$\Rightarrow x=-4$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$x^2+8x+16$	$+$	0	$+$

$J=\{-4\}$

۱۰) $-9x^2+6x-1 > 0$

$-9x^2+6x-1=0 \Rightarrow 9x^2-6x+1=0$

$\Rightarrow (3x-1)^2=0 \Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow 3x=1$

$\Rightarrow x=\frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-9x^2+6x-1$	$-$	0	$-$

$J=\phi$

۱۱) $x^2-x+2 < 0$

$x^2-x+2=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times2$

$\Rightarrow \Delta=1-8=-7<0$ جواب حقیقی ندارد

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2-x+2	$+$	

$J=\phi$

۱۲) $-x^2+2x-7 \leq 0$

$-x^2+2x-7=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac \Rightarrow$

$\Delta=2^2-4(-1)(-7)=4-28=-24<0$

جواب حقیقی ندارد

x	$-\infty$	$+\infty$
$-x^2+2x-7$	$-$	

$J=\mathbb{R}$

۱۳) $\frac{x+3}{2x-5} \geq 0$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

$2x-5=0 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$

x	$-\infty$	-3	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$2x-5$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+3}{2x-5}$	$+$	0	$\nexists$	$+$

$J=(-\infty,-3] \cup (\frac{5}{2},+\infty)=\mathbb{R}-(-3,\frac{5}{2})$

۱۴) $\frac{3-x}{2x+6} < 0$

$3-x=0 \Rightarrow -x=-3 \Rightarrow x=3$

$2x+6=0 \Rightarrow 2x=-6 \Rightarrow x=\frac{-6}{2}=-3$

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$3-x$	$+$	$+$	0	$-$
$2x+6$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{3-x}{2x+6}$	$-$	$\nexists$	$+$	0

$J=(-\infty,-3) \cup (3,+\infty)=\mathbb{R}-[-3,3]$

۱۵) $\frac{4-2x}{x^2+1} > 0$

$4-2x=0 \Rightarrow -2x=-4 \Rightarrow x=\frac{-4}{-2}=2$

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ غیرممکن $\Rightarrow J=\phi$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$4-2x$	$+$	0	$-$
x^2+1	$+$	$+$	$+$
$\frac{4-2x}{x^2+1}$	$+$	0	$-$

$J=(-\infty,2)$

۱۶) $\frac{-x^2+4x}{x^2-4} \leq 0$

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm2$

$-x^2+4x=0 \overset{c=0}{\Rightarrow} \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-b}{a}=\frac{-4}{-1}=4 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2	0	2	4	$+\infty$
$-x^2+4x$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{-x^2+4x}{x^2-4}$	$-$	$\nexists$	0	$\nexists$	0	$-$

$J=(-\infty,-2) \cup [0,2) \cup [4,+\infty)$

Scanned with CamScanner

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را بدست آورید:

۱) $y=\sqrt{x^2-3x}$

$x^2-3x\geq 0$

$x^2-3x=0 \xrightarrow{c=0} \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-b}{a}=\frac{3}{1}=3 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D=(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$

۲) $y=\sqrt[4]{5x-x^2}$

$5x-x^2\geq 0$

$-x^2+5x=0 \xrightarrow{c=0} \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-b}{a}=\frac{-5}{-1}=5 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$5x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D=[0,5]$

۳) $y=\sqrt[4]{x^2+x-2}$

$x^2+x-2\geq 0$

$x^2+x-2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=-2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D=(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

۴) $y=\sqrt[8]{-2x^2+3x+5}$

$-2x^2+3x+5\geq 0$

$-2x^2+3x+5=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{-c}{a}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+3x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D=[-1,\frac{5}{2}]$

۵) $y=\sqrt[10]{x^2+10}$

$x^2+10\geq 0$

$x^2+10=0 \Rightarrow x^2=-10$ غیرممکن $\Rightarrow \Delta<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2+10		$+$	

$D_f=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

۶) $y=\sqrt{-3x^2+2x-7}$

$-3x^2+2x-7\geq 0$

$-3x^2+2x-7=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=2^2-4(-3)(-7)$

$\Rightarrow \Delta=4-84=-80<0$ جواب حقیقی ندارد

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x^2+2x-7$		$-$	

$D=\emptyset$

۷) $y=\sqrt{\frac{36-x^2}{1+2x}}$ $\quad \frac{36-x^2}{1+2x}\geq 0$

$36-x^2=0 \Rightarrow 36=x^2 \Rightarrow x=\pm 6$

$1+2x=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$

x	$-\infty$		-6		$\frac{-1}{2}$		6		$+\infty$
$36-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$1+2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{36-x^2}{1+2x}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$D=(-\infty,-6]\cup(\frac{-1}{2},6]$

۸) $y=\sqrt{\frac{4x^2+8x}{-1-2x^2}}$ $\quad \frac{4x^2+8x}{-1-2x^2}\geq 0$

$4x^2+8x=0 \xrightarrow{c=0} \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-b}{a}=\frac{-8}{4}=-2 \end{cases}$

$-1-2x^2=0 \Rightarrow -2x^2=+1 \Rightarrow x^2=\frac{-1}{2}$ غیرممکن

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$4x^2+8x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-1-2x^2$		$-$		$-$		$-$	
$\frac{4x^2+8x}{-1-2x^2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D=[-2,0]$

Scanned with CamScanner

نامعادله‌های قدرمطلقی: می‌دانیم که $|x|$ یعنی فاصله‌ی x از مبدأ، که همواره مقداری مثبت یا صفر است. مثلاً $|-۵/۲|$ برابر $۵/۲$ و $|۱/۷۵|$ برابر $۱/۷۵$ و $|۰|$ برابر صفر است.

پس $|x|=|-x|$. همچنین می‌دانیم که اگر $|x|=a$ و a عددی مثبت باشد آنگاه $x=\pm a$ و اگر a عددی منفی باشد تساوی $|x|=a$ غیرممکن است.

در نامعادله‌ی $|x|\leq a$ اگر a عددی مثبت باشد و طرفین را به توان ۲ برسانیم داریم:

$$|x|\leq a \Rightarrow x^2\leq a^2 \Rightarrow x^2-a^2\leq 0$$

$$x^2-a^2=0 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a$$

x	$-\infty$	$-a$	a	$+\infty$
x^2-a^2	+	0 −	0 +	

پس مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|x|\leq a$ عبارت است از $[-a,a]$.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که اگر a عددی مثبت و $|x|\leq a$ آنگاه $-a\leq x\leq a$ و برعکس. و در صورتی که a عددی منفی باشد آنگاه $|x|\leq a$ غیرممکن است.

همچنین با توجه به جدول تعیین علامت بالا می‌توان نتیجه گرفت که اگر $|x|\geq a$ آنگاه مجموعه‌ی جواب نامعادله عبارت است از $(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$ بنابراین داریم:

$$|x|\geq a \Rightarrow \begin{cases} x\geq a \\ \text{یا} \\ x\leq -a \end{cases} \quad , \quad \underset{a>0}{|x|\leq a} \Rightarrow -a\leq x\leq a$$

با استفاده از این قوانین می‌توانیم نامعادله‌های قدرمطلقی را حل کنیم.

مثال: نامعادله‌های قدرمطلقی داده شده را حل کنید:

۱) $|x+۷|\leq ۲ \Rightarrow -۲\leq x+۷\leq ۲ \xrightarrow{-۷} -۹\leq x\leq -۵ \Rightarrow مج=[-۹,-۵]$

۲) $|x-۴|\leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}\leq x-۴\leq \frac{۱}{۲} \xrightarrow{+۴} \frac{۷}{۲}\leq x\leq \frac{۹}{۲} \Rightarrow مج=[\frac{۷}{۲},\frac{۹}{۲}]$

۳) $|۴-x|\leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}\leq ۴-x\leq \frac{۱}{۲} \xrightarrow{-۴} -\frac{۹}{۲}\leq -x\leq -\frac{۷}{۲} \xrightarrow{\times(-۱)} \frac{۹}{۲}\geq x\geq \frac{۷}{۲}$

$\Rightarrow مج=[\frac{۷}{۲},\frac{۹}{۲}]$

۴) $|۲x-۳|<۵ \Rightarrow -۵<۲x-۳<۵ \xrightarrow{+۳} -۲<۲x<۸ \xrightarrow{\div ۲} -۱<x<۴$

$\Rightarrow مج=(-۱,۴)$

Scanned with CamScanner

۵) $\left|\frac{۳-x}{۲}\right| < ۱ \Rightarrow -۱ < \frac{۳-x}{۲} < ۱ \xrightarrow{\times ۲} -۲ < ۳-x < ۲ \xrightarrow{-۳} -۵ < -x < -۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۵ > x > ۱ \Rightarrow$ ج.پ $= (۱, ۵)$

۶) $\left|\frac{x}{۳}+۱\right| < ۵ \Rightarrow -۵ < \frac{x}{۳}+۱ < ۵ \xrightarrow{-۱} -۶ < \frac{x}{۳} < ۴ \xrightarrow{\times ۳} -۱۸ < x < ۱۲$
$\Rightarrow$ ج.پ $= (-۱۸, ۱۲)$

۷) $|۲x+۵| \leq -۳$ غیرممکن $\Rightarrow$ ج.پ $= \phi$

۸) $\left|\frac{۵x+۱}{۳}-۲\right| < ۴ \Rightarrow -۴ < \frac{۵x+۱}{۳}-۲ < ۴ \xrightarrow{+۲} -۲ < \frac{۵x+۱}{۳} < ۶ \xrightarrow{\times ۳}$
$-۶ < ۵x+۱ < ۱۸ \xrightarrow{-۱} -۷ < ۵x < ۱۷ \Rightarrow \frac{-۷}{۵} < x < \frac{۱۷}{۵} \Rightarrow$ ج.پ $= \left(\frac{-۷}{۵}, \frac{۱۷}{۵}\right)$

۹) $|۷x-۲| \geq ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۷x-۲ \geq ۳ \\ \text{یا} \\ ۷x-۲ \leq -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۷x \geq ۵ \\ ۷x \leq -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{۵}{۷} \\ x \leq \frac{-۱}{۷} \end{cases} \Rightarrow$ ج.پ $= (-\infty, -\frac{۱}{۷}] \cup [\frac{۵}{۷}, +\infty)$
$= \mathbb{R} - (\frac{-۱}{۷}, \frac{۵}{۷})$

۱۰) $|۱-۵x| > ۴ \Rightarrow \begin{cases} ۱-۵x > ۴ \\ \text{یا} \\ ۱-۵x < -۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۵x > ۳ \\ \text{یا} \\ -۵x < -۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{-۳}{۵} \\ x > \frac{۵}{۵} = ۱ \end{cases} \Rightarrow$ ج.پ $= (-\infty, \frac{-۳}{۵}) \cup (۱, +\infty)$
$= \mathbb{R} - [\frac{-۳}{۵}, ۱]$

۱۱) $\left|\frac{x}{۲}+۳\right| > ۱ \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{۲}+۳ > ۱ \\ \frac{x}{۲}+۳ < -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{۲} > -۲ \\ \frac{x}{۲} < -۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -۴ \\ x < -۸ \end{cases} \Rightarrow$ ج.پ $= (-\infty, -۸) \cup (-۴, +\infty)$
$= \mathbb{R} - [-۸, -۴]$

۱۲) $\left|\frac{۳x+۱}{۵}\right| \geq ۲ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۳x+۱}{۵} \geq ۲ \\ \frac{۳x+۱}{۵} \leq -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x+۱ \geq ۱۰ \\ ۳x+۱ \leq -۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x \geq ۹ \\ ۳x \leq -۱۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۳ \\ x \leq \frac{-۱۱}{۳} \end{cases}$
$\Rightarrow$ ج.پ $= (-\infty, \frac{-۱۱}{۳}] \cup [۳, +\infty)$

۱۳) $\left|\frac{۴-۳x}{۳}-۱\right| \geq ۲ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۴-۳x}{۳}-۱ \geq ۲ \\ \frac{۴-۳x}{۳}-۱ \leq -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۴-۳x}{۳} \geq ۳ \\ \frac{۴-۳x}{۳} \leq -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴-۳x \geq ۹ \\ ۴-۳x \leq -۳ \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -۳x \geq ۵ \\ -۳x \leq -۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-۵}{۳} \\ x \geq \frac{۷}{۳} \end{cases} \Rightarrow$ ج.پ $= (-\infty, \frac{-۵}{۳}] \cup [\frac{۷}{۳}, +\infty) = \mathbb{R} - (\frac{-۵}{۳}, \frac{۷}{۳})$

۱۴) $|۳x-۷| > -۵$ چون قدرمطلق همواره نامنفی است پس این نامعادله همواره برقرار است بنابراین: ج.پ $= \mathbb{R}$

تذکر: اگر مانند مثال‌های قبل هم عمل کنیم باز هم به همین مجموعه‌ی جواب می‌رسیم.

۱۵) $|۲x+\frac{۵}{۲}|>۳ \Rightarrow \begin{cases} ۲x+\frac{۵}{۲}>۳ \\ ۲x+\frac{۵}{۲}<-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x>۳-\frac{۵}{۲} \\ ۲x<-۳-\frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x>\frac{۱}{۲} \\ ۲x<\frac{-۱۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{۱}{۴} \\ x<\frac{-۱۱}{۴} \end{cases}$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-\infty, \frac{-۱۱}{۴}) \cup (\frac{۱}{۴}, +\infty) = \mathbb{R} - [\frac{-۱۱}{۴}, \frac{۱}{۴}]$

۱۶) $x-۲ < ۲x+۱ \leq x+۸ \Rightarrow \begin{cases} x-۲ < ۲x+۱ \\ \text{و} \\ ۲x+۱ \leq x+۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲-۱ < ۲x-x \\ \text{و} \\ x \leq ۸-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳ < x \\ \text{و} \\ x \leq ۷ \end{cases}$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-۳, ۷] = (-۳, +\infty) \cap (-\infty, ۷]$

۱۷) $\frac{x}{۲}+۱ \leq x-۲ < ۲x+۳ \Rightarrow \begin{cases} -x+۲ \leq \frac{x}{۲}+۱ \\ \text{و} \\ x-۲ < ۲x+۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-\frac{x}{۲} \leq ۱-۲ \\ \text{و} \\ -x-۲x < ۳+۲ \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{۳x}{۲} \leq -۳ \\ \text{و} \\ -۳x < ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۷ \\ \text{و} \\ x > -\frac{۵}{۳} \end{cases} \Rightarrow$ مجموعه جواب $= [۷, +\infty) \cap (-\frac{۵}{۳}, +\infty) = [۷, +\infty)$

۱۸) $۱ < x < ۸ \xrightarrow{+۲} ۳ < x+۲ < ۱۰ \xrightarrow{-۲} ۱ < |x-۲| < ۸ \Rightarrow ۳ < |x-۲|+۲ < ۱۰$

مجموعه جواب $= (۳, ۱۰)$

۱۹) $۳ \leq |۲x+۱| \Rightarrow \begin{cases} ۲x+۱ \geq ۳ \\ \text{یا} \\ ۲x+۱ \leq -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x \geq ۲ \\ \text{یا} \\ ۲x \leq -۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۱ \\ \text{یا} \\ x \leq -۲ \end{cases}$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-\infty, -۲] \cup [۱, +\infty) = \mathbb{R} - (-۲, ۱)$

۲۰) $|\frac{۲x}{۳}-۲| < ۳ \Rightarrow -۳ < \frac{۲x}{۳}-۲ < ۳ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲x}{۳}-۲ > -۳ \\ \text{و} \\ \frac{۲x}{۳}-۲ < ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x > -۳ \\ \text{و} \\ ۲x < ۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{۳}{۲} \\ \text{و} \\ x < \frac{۱۵}{۲} \end{cases}$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-\frac{۳}{۲}, \frac{۱۵}{۲}) = \mathbb{R} - [\frac{۱۵}{۲}, -\frac{۳}{۲}]$

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

Scanned with CamScanner

تمرین ۱: عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید:

۱) $P=12-3x$ ۲) $P=5x+4$ ۳) $P=-7x-21$ ۴) $P=\frac{x}{2}-3$

۵) $P=(2x-5)^4$ ۶) $P=(7x+1)^{13}$ ۷) $P=|3-10x|$ ۸) $P=(2-\frac{x}{3})^6$

۹) $P=\frac{x+4}{-2x+8}$ ۱۰) $P=\frac{7-3x}{x+9}$ ۱۱) $P=(x-8)(5x+2)$ ۱۲) $P=\frac{3x-7}{-4}$

۱۳) $P=x^2+4x-27$ ۱۴) $P=-7x^2+3x+4$ ۱۵) $P=25-4x^2$ ۱۶) $P=25+4x^2$

۱۷) $P=-2x^2+8x-8$ ۱۸) $P=\frac{x^2}{4}+x+1$ ۱۹) $P=-2x^2+5x+3$ ۲۰) $P=3x^2+7x+2$

۲۱) $P=\frac{x^2+7x}{-x^2+3}$ ۲۲) $P=\frac{-x^2+8x-7}{-2x^2+x-6}$ ۲۳) $P=\frac{2x^2-10x+25}{x^2+8}$ ۲۴) $P=\frac{-3x^2-x}{x^2-81}$

تمرین ۲: نامعادلات زیر را حل کنید:

۱) $7-4x\geq 0$ ۲) $\frac{-x}{2}-3>0$ ۳) $3x+\frac{1}{5}<0$ ۴) $-10x+20\leq 0$

۵) $\frac{-x-4}{5x+7}>0$ ۶) $\frac{10-2x}{3x-9}\geq 0$ ۷) $\frac{7x+14}{-x+3}\leq 0$ ۸) $\frac{2x+9}{-4x-18}<0$

۹) $x^2+10x\geq 0$ ۱۰) $-x^2+25-4>0$ ۱۱) $-3x^2-4<0$ ۱۲) $4x^2-3x\leq 0$

۱۳) $7x^2+3>0$ ۱۴) $-9x^2-18\geq 0$ ۱۵) $3x^2+2x+10\leq 0$ ۱۶) $-x^2+3x-1<0$

۱۷) $\frac{-2x^2-1}{x^2+5}\geq 0$ ۱۸) $\frac{x^2+x+\frac{1}{4}}{x^2-7x+4}>0$ ۱۹) $\frac{3x-x^2}{x^2-14x+49}<0$ ۲۰) $\frac{4x^2+5x+4}{2-x^2}\leq 0$

۲۱) $\frac{5x^2+4x-1}{-x^2+2x}>0$ ۲۲) $\frac{9x^2-12x+4}{3-2x}\geq 0$ ۲۳) $\frac{(1-x)(2+x)}{3x^2+7}\leq 0$ ۲۴) $\frac{x^2+2x-4}{x^2-4x+2}<0$

۲۵) $\frac{x^3+2x^2}{x^2+x+7}\geq 0$ ۲۶) $\frac{-5x^2+4}{x^3-x}>0$ ۲۷) $\frac{x^3-8}{2x^2+4x}<0$ ۲۸) $\frac{2x+x^3}{x^4-16}\leq 0$

Scanned with CamScanner

۲۹) $|۳x+۴|<۶$ ۳۰) $|۲-۷x|\leq ۴$ ۳۱) $۱-۲|x-۵|\geq ۷$

۳۲) $۲+|۶x-۳|\leq ۱۰$ ۳۳) $|\frac{۲x}{۵}-۳|<۱$ ۳۴) $|\frac{۹-۲x}{۳}|<۲$

۳۵) $|\frac{۲x+۷}{۹}|+۲<-۳$ ۳۶) $|\frac{x+۷}{۳}-۲|\leq ۱$ ۳۷) $|۳x-۷|>۵$

۳۸) $|۵-۶x|\geq ۴$ ۳۹) $|۷x+۴|+۳>\frac{۱}{۲}$ ۴۰) $|\frac{۳-۴x}{۲}+۱|\geq ۱$

تمرین ۳ : دامنه‌ی هریک از توابع زیر را با استفاده از جدول تعیین علامت بدست آورید:

۱) $y=\sqrt{۱۰-۲x}$ ۲) $y=\sqrt[۴]{۳x-۹}$ ۳) $y=\sqrt[۶]{\frac{-x-۲}{۳}}$

۴) $y=\sqrt[۸]{۵x+۱۵}$ ۵) $y=\sqrt[۱۰]{x-۷x^۲}$ ۶) $y=\sqrt{-۴x^۲-۱}$

۷) $y=\sqrt{۴x^۲+۱}$ ۸) $y=\sqrt{۴x^۲-۱}$ ۹) $y=\sqrt{x^۲+۱۴x+۴۹}$

۱۰) $y=\sqrt{-۲۵x^۲+۲۰x-۴}$ ۱۱) $y=\sqrt{۳x^۲-۱۰x+۷}$ ۱۲) $y=\sqrt{-۵x^۲+۲x+۷}$

۱۳) $y=\sqrt[۴]{\frac{x-۵}{۵-x}}$ ۱۴) $y=\sqrt[۶]{\frac{۱-۲x}{x+۲}}$ ۱۵) $y=\sqrt[۸]{\frac{۳x+۱}{x^۲+۳}}$

۱۶) $y=\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۴+x^۲}}$ ۱۷) $y=\sqrt[۱۰]{\frac{x^۲+۶}{x^۲+۷x}}$ ۱۸) $y=\sqrt{\frac{۲x}{x^۲+x-۴۲}}$

۱۹) $y=\sqrt{x^۳-۴x}$ ۲۰) $y=\sqrt{x-x^۳}$

تمرین ۴ : نشان دهید که عبارت $P=۳x^۲-x+۱۰$ همواره مثبت است.

تمرین ۵ : نشان دهید که نمودار تابع $y=-x^۲+x-۴$ همواره پایین محور xها قرار می‌گیرد.

Scanned with CamScanner

تمرین ۶ : مقدار k را طوری بیابید که عبارت $(k-2)x^2+(1-2k)x+k+2$ همواره مثبت باشد.

تمرین ۷ : به ازای چه مقادیری از k عبارت $2kx^2+6x-3$ همواره منفی است

تمرین ۸ : حدود k را طوری تعیین کنید که نمودار تابع $y=(3-k)x^2-kx+1$ همواره بالای محور xها باشد.

تمرین ۹ : اگر نمودار تابع $y=kx^2+4kx+k-3$ همواره پائین محور xها باشد حدود k را مشخص کنید.

تمرین ۱۰ : اگر نمودار تابع $y=kx^2+2kx+4-k$ محور xها را قطع نکند حدود k را تعیین کنید.

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

Scanned with CamScanner