به نام خدا

ریاضی ۱ ـ دهم تجربی و ریاضی درس اول : مجموعه های متناهی و نامتناهی

یادآوری:

مجموعه : یکی از مفاهیم تعریف نشده در ریاضیات است ولی در اصطلاح به گروهی از افراد، اشیاء یا اعداد گفته می شود که کاملاً مشخص و دو به دو متمایز باشند. مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی مانند A و B و C و ... نام‌گذاری می‌کنیم؛ علامت مجموعه آکولاد است.

عضو یک مجموعه : به هرکدام از افراد یا اشیاء یا اعدادی که در یک مجموعه قرار دارند یک عضو از آن مجموعه می گوئیم. علامت عضویت : $\in$ علامت عدم عضویت : $\notin$

مثال : اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ آنگاه $1\in A$, $3\in A$, $10\notin A$, $\sqrt{2}\notin A$.

تذکر : ممکن است اعضای یک مجموعه خودشان مجموعه باشند. مثال $A=\{1,2,\{1\},\{1,2\}\}$

مجموعه‌های خاص :

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$: مجموعه‌ی اعداد طبیعی

$\mathbb{W}=\{0,1,2,3,\dots\}$: مجموعه‌ی اعداد حسابی

$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots\}$: مجموعه‌ی اعداد صحیح

$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0, (a,b)=1\}$: مجموعه‌ی اعداد گویا

$\mathbb{Q}'=\{x \mid x\notin\mathbb{Q}\}$: مجموعه‌ی اعداد گنگ

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$: مجموعه‌ی اعداد حقیقی

$\mathbb{P}=\{2,3,5,7,11,\dots\}$: مجموعه‌ی اعداد اول

$E=\{2,4,6,\dots,2k,\dots\}$: مجموعه‌ی اعداد زوج

$O=\{1,3,5,\dots,2k-1,\dots\}$: مجموعه‌ی اعداد فرد

تذکر : مجموعه‌ی اعداد زوج صحیح را با $E_{\mathbb{Z}}$ و مجموعه‌ی اعداد فرد صحیح را با $O_{\mathbb{Z}}$ نشان می‌دهیم.

زیرمجموعه : اگر A و B دو مجموعه باشند، A را زیرمجموعه‌ی B گوئیم هرگاه همه‌ی عضوهای A در B نیز باشند و می نویسیم $A\subseteq B$. مثال : اگر $A=\{1,4\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ آنگاه $A\subseteq B$.

نکته : اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ آنگاه $A\subseteq C$.

با توجه به تعریف زیرمجموعه در مورد مجموعه‌های خاص می توان نوشت :

$$\mathbb{P}\subseteq\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\ ,\ \mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}\ ,\ E\subseteq\mathbb{N}\ ,\ O\subseteq\mathbb{N}$$

مجموعه‌ی تهی : مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد که آن را با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.

مثال : مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۳ و ۴ یک مجموعه‌ی تهی است.

نکته : هر مجموعه‌ی n عضوی 2^n زیرمجموعه دارد مثلاً یک مجموعه‌ی ۳ عضوی دارای $2^3=8$ زیرمجموعه است

نکته : هر مجموعه زیرمجموعه‌ی خود آن مجموعه است یعنی $A\subseteq A$ و مجموعه‌ی تهی نیز زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌هاست یعنی $\emptyset\subseteq A$. این دو زیرمجموعه را زیرمجموعه‌های بدیهی مجموعه‌ی A می‌گوئیم.

Scanned with CamScanner

مجموعه‌های مساوی: دو مجموعه‌ی A و B را مساوی گوئیم هرگاه هرعضوی که در A هست در B نیز باشد و هرعضوی که در B وجود دارد در A نیز وجود داشته باشد به بیان دیگر دو مجموعه‌ی A و B وقتی مساویند که عضوهایشان مثل هم باشند و می‌نویسیم $A=B$.

با توجه به مفهوم زیر مجموعه می‌توان گفت: A و B وقتی مساویند که هرکدام زیر مجموعه‌ی دیگری باشد

یعنی: $A=B \iff (A\subseteq B, B\subseteq A)$.

مثال: مجموعه‌های $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{3,1,2\}$ باهم مساویند.

تمرین:

۱) مجموعه‌ی $A=\{1,2,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ چند عضو و چند زیر مجموعه دارد؟ تمام زیر مجموعه‌های آن را بنویسید.

۲) مجموعه‌های $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2\leq 4\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\leq 2\}$ را به صورت عضوی بنویسید. آیا این دو مجموعه مساویند؟

۳) درستی یا نادرستی هرقسمت را مشخص کنید:

الف - هرعدد صحیح یک عدد گویا است.

ب - هرعدد گویا یک عدد صحیح است.

پ - هر مجموعه حداقل دو زیر مجموعه دارد.

ت - $\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\mathbb{N}$

ث - $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0\}$

ج - $\mathbb{P}\subseteq O$

چ - $O\cup E=\mathbb{W}-\{0\}$

ح - $E\cup O=\mathbb{N}$

خ - $E\cup\mathbb{P}=\mathbb{N}$

د - $\mathbb{N}-E=\mathbb{P}$

ذ - $\mathbb{P}-O=\{2\}$

ر - $\mathbb{W}\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}$

ز - $E\cap\mathbb{P}=\phi$

ژ - $\mathbb{W}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$

۴) تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k+1$ عضوی از تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k-3$ عضوی ۱۲۰ تا بیشتر است تعداد عضوهای هریک را بیابید.

۵) اگر ۲ عضو از مجموعه‌ی A حذف کنیم تعداد زیر مجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، A چند عضو دارد؟

۶) اگر $A=\{\{1\},1,2\}$ آنگاه درستی یا نادرستی هرقسمت را تعیین کنید:

الف - $2\in A$ ب - $\{1\}\subseteq A$ پ - $\{2\}\in A$ ت - $\{1,2\}\in A$ ث - $\{1,2\}\subseteq A$

Scanned with CamScanner

مجموعه‌ی متناهی: مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن معلوم باشد به بیان دیگر تعداد اعضای آن برابر با یک عدد حسابی باشد. مثلاً مجموعه‌ی اعداد زوج اول یک مجموعه‌ی متناهی است زیرا فقط یک عضو دارد ($A=\{2\}$) یا مجموعه‌ی $B=\{27, 28, 29, \dots, 17269\}$ یک مجموعه‌ی متناهی است.

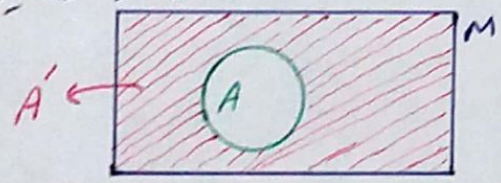
مجموعه‌ی نامتناهی: مجموعه‌ای است که متناهی نباشد یعنی تعداد اعضای آن مشخص نباشد. مثلاً مجموعه‌ی اعداد طبیعی مضرب ۳ یک مجموعه‌ی نامتناهی است زیرا تعداد اعضای آن برابر با یک عدد حسابی نمی باشد. ($A=\{3, 6, 9, 12, \dots\}$)

عدد اصلی یک مجموعه‌ی متناهی: اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد عدد اصلی آن را با نماد $n(A)$ یا $|A|$ نشان می دهیم و عبارت است از تعداد عضوهایی که در مجموعه‌ی A وجود دارند.

مثلاً اگر $A=\{5, 6, 7, \dots, 1000347\}$ آنگاه $n(A)=1000343$ همچنین اگر $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^3=x\}$ آنگاه $n(B)=3$ زیرا $B=\{-1, 0, 1\}$.

مجموعه‌ی مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند را مجموعه‌ی مرجع (اصلی - جهانی - مادر - عام) می گوئیم و آن را با نماد M یا U نشان می دهیم.

متمم یک مجموعه: متمم مجموعه‌ی A را با نماد A' یا A^c نشان می دهیم و عبارت است از همه‌ی عضوهایی که در مجموعه‌ی مرجع هستند ولی در A نیستند به بیان دیگر $A'=M-A$ به زبان ریاضی می توان نوشت: $A'=\{x\in M \mid x\notin A\}$. با استفاده از نمودار ون نیز می توان این مطلب را نشان داد:



مثال: اگر $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $M=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ آنگاه $A'=\{7, 8, 9, 10\}$.

مثال: اگر $M=\mathbb{Z}$ و $A=\mathbb{N}$ آنگاه $A'=\{\dots, -2, -1, 0\}$.

مثال: اگر $M=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2\leq 9\}$ و $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2=1\}$ آنگاه $A'=\{-3, -2, 0, 2, 3\}$ زیرا $M=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ و $A=\{-1, 1\}$.

نکته ۱: $M'=\emptyset$ نکته ۲: $(A')'=A$ نکته ۳: $\emptyset'=M$

هر سه مورد بالا را می توانیم با استفاده از تعریف متمم ثابت کنیم.

Scanned with CamScanner

ریاضی ۱ دهم تجربی و ریاضی

تمرین ۱) اگر $M=\{1,2,3,4,5\}$ مجموعه‌ی مرجع و $A=\{2,4\}$ و $B=\{2,3,5\}$ آنگاه حاصل هر قسمت را بیابید:

الف) A' ب) B' پ) $A'\cup B'$ ت) $A\cap B$ ث) $(A\cap B)'$ ج) $A\cup B$ چ) $(A\cup B)'$

ح) $A'\cap B'$ خ) $A-B$ د) $A\cap B'$ ذ) $M-B$ ر) $M-B'$ ز) $(M\cap B')\cap A$ ژ) $(M\cup B)\cap A'$

تمرین ۲) اگر $M=\{1,2,3,4,5,7,9,10,11\}$ مجموعه‌ی مرجع و $A=\{2,4,9,10\}$ و $B=\{9,10,11\}$ آنگاه درستی یا نادرستی روابط زیر را بررسی کنید:

الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ پ) $A-B=A\cap B'$

ت) $(B-A)'=A\cup B'$ ث) $(A-B')'\cup M=M$ ج) $(A-B')'\cap M=A'\cup B'$

تمرین ۳) درستی یا نادرستی هر قسمت را تعیین کنید:

الف- اجتماع هر دو مجموعه‌ی متناهی یک مجموعه‌ی متناهی است.

ب- اشتراک هر دو مجموعه‌ی نامتناهی یک مجموعه‌ی نامتناهی است.

پ- اگر A یک مجموعه‌ی متناهی و B یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد "$A\cup B$" یک مجموعه‌ی متناهی است.

ت- اگر A یک مجموعه‌ی متناهی و B یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد "$A\cap B$" یک مجموعه‌ی متناهی است.

ث- مجموعه‌ی اعداد گویای بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ یک مجموعه‌ی نامتناهی است.

ج- اگر $A\subseteq B$ و A نامتناهی باشد آنگاه B مجموعه‌ای نامتناهی است.

چ- اگر $A\subseteq B$ و B متناهی باشد آنگاه A مجموعه‌ای متناهی است.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

دو مجموعه‌ی جدا از هم: دو مجموعه مانند A و B که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند را دو مجموعه‌ی جدا از هم می‌گوییم پس اگر $A\cap B=\emptyset$ آنگاه A و B جدا از هم هستند و داریم $n(A\cap B)=0$

نتیجه: اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند آنگاه $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.

نکته: اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند آنگاه $A-B=A$ و $B-A=B$.

مثال: دو مجموعه‌ی E و O دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند زیرا $O\cap E=\emptyset$.

مثال: دو مجموعه‌ی W و $\mathbb{N}$ جدا از هم نیستند زیرا $\mathbb{N}\cap W=\{0\}$.

Scanned with CamScanner

مثال: اگر $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $B=\{۲,۳,۴\}$ آنگاه داریم:

$n(A)=۴$ ، $n(B)=۳$ ، $A\cup B=\{۲,۳,۴,۶,۸\}$ ، $n(A\cup B)=۵$ ، $A\cap B=\{۲,۴\}$ ، $n(A\cap B)=۲$

حال با این اطلاعات می توانیم درستی $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ را بررسی کنیم:

$$n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۴+۳-۲=۵=n(A\cup B)$$

مثال: اگر $A=\{$ اعداد طبیعی زوج کمتر از ۲۰ $\}$ و $B=\{$ مضرب‌های طبیعی عدد ۳ و کوچکتر از ۲۰ $\}$ درستی رابطه‌ی $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ را بررسی کنید.

حل:

$A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸\} \longrightarrow n(A)=۹$

$B=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸\} \longrightarrow n(B)=۶$

$A\cup B=\{۲,۳,۴,۶,۸,۹,۱۰,۱۲,۱۴,۱۵,۱۶,۱۸\} \longrightarrow n(A\cup B)=۱۲$

$A\cap B=\{۶,۱۲,۱۸\} \longrightarrow n(A\cap B)=۳$

$$n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۹+۶-۳=۱۲=n(A\cup B)$$

مثال: از بین ۴۰ کارمند یک شرکت ۲۶ نفر بیمه‌ی تأمین اجتماعی و ۲۰ نفر بیمه‌ی حوادث شده‌اند و ۵ نفر تحت هیچ بیمه‌ای نیستند. چند نفر از آن‌ها هم بیمه‌ی تأمین اجتماعی و هم بیمه‌ی حوادث هستند؟

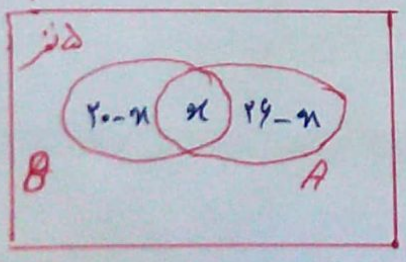
حل: چون ۵ نفر تحت هیچ بیمه‌ای نیستند پس $۴۰-۵=۳۵$ یعنی ۳۵ نفر تحت بیمه هستند اگر مجموعه‌ی افراد تحت پوشش بیمه تأمین اجتماعی را با A و افراد تحت پوشش بیمه‌ی حوادث را با B نشان دهیم داریم:

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

$$\Rightarrow n(A\cap B)=۲۶+۲۰-۳۵=۴۶-۳۵=۱۱$$

۱۱ نفر تحت پوشش هر دو بیمه اند

* این مسئله را می توانیم با توجه به شکل نیز حل کنیم اگر تعداد افراد تحت پوشش هر دو بیمه را x در نظر بگیریم با توجه به شکل داریم:



۴۰

$$۴۰-۵=۲۰-x+x+۲۶-x$$

$$۳۵=۴۶-x \Rightarrow x=۴۶-۳۵ \Rightarrow x=۱۱$$

۱۱ نفر تحت پوشش هر دو بیمه هستند

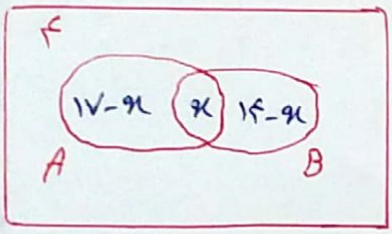
Scanned with CamScanner

مثال: در یک محله ۳۰ خانواده وجود دارد ۴ خانواده بدون فرزند و ۱۴ خانواده فرزند دختر و ۱۷ خانواده فرزند پسر دارند چند خانواده هم دارای فرزند پسر و هم دارای فرزند دختر هستند؟

حل: چون ۴ خانواده فرزند ندارند پس کل خانواده های دارای فرزند ۳۰ - ۴ = ۲۶ خانواده هستند حال اگر خانواده هایی که فرزند پسر دارند را با A و خانواده هایی که فرزند دختر دارند را با B نشان دهیم آنگاه داریم:

$$n(A\cap B) = n(A) + n(B) - n(A\cup B)$$

$$\Rightarrow n(A\cap B) = ۱۷ + ۱۴ - ۲۶ = ۵$$ خانواده هم دارای پسر و هم دارای دختر هستند



$$۳۰ - ۴ = ۱۷ - x + x + ۱۴ - x \Rightarrow ۲۶ = ۳۱ - x \Rightarrow x = ۳۱ - ۲۶$$

$$\Rightarrow x = ۵$$ خانواده هم پسر و هم دختر دارند

تمرین ۱: در یک کلاس ۱۲ نفر فوتبال و ۱۰ نفر والیبال بازی می کنند و ۶ نفر نه فوتبال و نه والیبال و ۳ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند این کلاس چند دانش آموز دارد؟

تمرین ۲: در یک دانشکده ۱۰۰ نفر به زبان انگلیسی و ۷۰ نفر به زبان فرانسوی و ۲۰ نفر از آنها به هر دو زبان انگلیسی و فرانسوی تسلط دارند الف - این دانشکده چند دانشجو دارد؟

ب - چند نفر از آنها فقط به انگلیسی مسلط هستند؟ پ - چند نفر از آنها فقط به فرانسوی تسلط دارند؟

تمرین ۳: در یک بیمارستان از بین ۵۰ بیمار بستری ۳۰ بیمار قندخون و ۳۵ بیمار دارای فشارخون بالا هستند الف - چند تا از این بیماران هم قندخون و هم فشارخون دارند؟

ب - چند تا از آنها فقط قندخون دارند؟ پ - چند تا از آنها فقط فشارخون بالا دارند؟

تمرین ۴: اگر $n(A) = ۳۰$ و $n(B) = ۴۵$ و $n(A\cap B) = ۱۰$ و $n(M) = ۸۰$ آنگاه حاصل هر قسمت را بدست آورید:

الف - $n(A\cup B)$ ب - $n(A'\cap B')$ پ - $n(A-B)$

ت - $n(B-A)$ ث - $n(A'\cup B')$

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

Scanned with CamScanner

فاصله (بازه): اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $a<b$ آنگاه:

۱) مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی که بین a و b قرار دارند و خود این دو عدد را فاصله‌ی بسته‌ی a و b گوئیم و با نماد $[a,b]$ نشان می‌دهیم یعنی $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$ و داریم:



۲) مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی که بین a و b قرار دارند و خود عدد a را فاصله‌ی نیم بسته از طرف a یا نیم باز از طرف b گوئیم و با نماد $(a,b]$ یا $]a,b[$ نشان می‌دهیم یعنی $[a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}$ و داریم:



۳) مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی که بین a و b قرار دارند و خود عدد b را فاصله‌ی نیم بسته از طرف b یا نیم باز از طرف a گوئیم و با نماد $[a,b)$ یا $]a,b[$ نشان می‌دهیم یعنی $(a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$ و داریم:



۴) مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی که بین a و b قرار دارند را فاصله‌ی باز a و b گوئیم و با نماد (a,b) یا $]a,b[$ نشان می‌دهیم یعنی $(a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ و داریم:

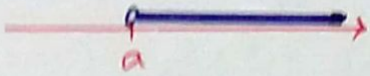


تذکر: در نمودارها هر طرف بازه که باز باشد به صورت توخالی و هر طرف بازه که بسته باشد به شکل توپُر نشان داده می‌شود ضمناً هر طرف بازه که بسته باشد در مجموعه، تساوی می‌گیرد.

نکته: برای نمایش اعداد خیلی خیلی بزرگ مثبت از نماد $+\infty$ و برای اعداد خیلی خیلی کوچک منفی از نماد $-\infty$ استفاده می‌کنیم.

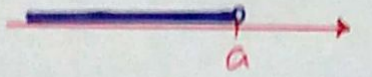
تعریف ۱: اعداد حقیقی بزرگتر از a را با نماد $(a,+\infty)$ نشان می‌دهیم و داریم:

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$ و نمودار آن به صورت می‌باشد:



تعریف ۲: اعداد حقیقی کوچکتر از a را با نماد $(-\infty,a)$ نشان می‌دهیم و داریم:

$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$ و نمودار آن به صورت می‌باشد:

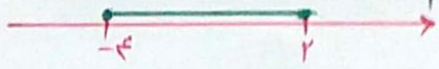


* توجه داشته باشید که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند و فقط به عنوان دو نماد از آنها استفاده می‌کنیم ضمناً $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

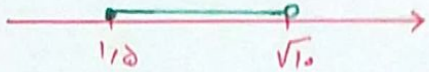
Scanned with CamScanner

مثال: هرکدام از فاصله‌های داده شده را به صورت مجموعه بنویسید و روی محور نشان دهید:

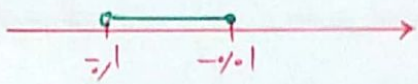
الف) $[-۴,۲]=\{x\in\mathbb{R}\mid -۴\le x\le ۲\}$



ب) $[۱/۵,\sqrt{۱۰})=\{x\in\mathbb{R}\mid ۱/۵\le x<\sqrt{۱۰}\}$



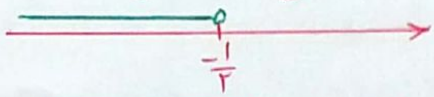
پ) $(-۰/۱,-۰/۰۱]=\{x\in\mathbb{R}\mid -۰/۱<x\le -۰/۰۱\}$



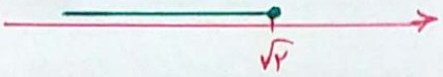
ت) $(\frac{-۲}{۵},\frac{۳}{۵})=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{-۲}{۵}<x<\frac{۳}{۵}\}$



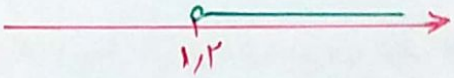
ث) $(-\infty,-\frac{۱}{۲})=\{x\in\mathbb{R}\mid x<\frac{-۱}{۲}\}$



ج) $(-\infty,\sqrt{۲}]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le\sqrt{۲}\}$



چ) $(۱/۲,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>۱/۲\}$



ح) $[۱۰,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge ۱۰\}$



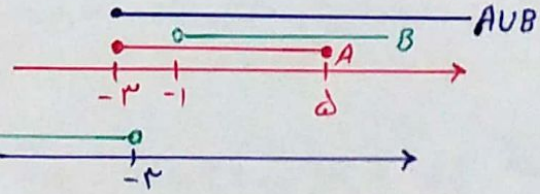
خ) $(\frac{۵}{۲},\frac{۲}{۵}]$ چون ابتدای بازه از انتهای بازه بزرگتر است یعنی شرط $a<b$ برقرار نیست پس این بازه تعریف نشده است.

تذکر: در نشان دادن بازه‌ها بر روی محور نیازی به واحد بندی دقیق نیست بلکه به طور فرضی ابتدا و انتهای بازه را مشخص می‌کنیم و نمودار بازه را رسم می‌کنیم اگرچه واحد بندی کنیم خیلی بهتر است.

* چون هر فاصله یک مجموعه می‌باشد پس می‌توانیم اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم را برای آنها به کار ببریم.

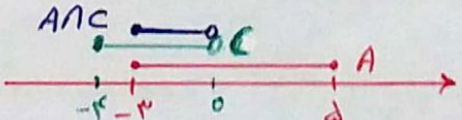
مثال: اگر $A=[-۳,۵]$ و $B=(-۱,+\infty)$ و $C=[-۴,۰)$ سه مجموعه باشند و $M=(-\infty,+\infty)$ آنگاه موارد خواسته شده را به صورت بازه و مجموعه بنویسید و روی محور نشان دهید:

الف) $A\cup B=[-۳,+\infty)$

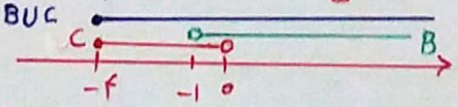


ب) $(A\cup B)'=(-\infty,-۳)$

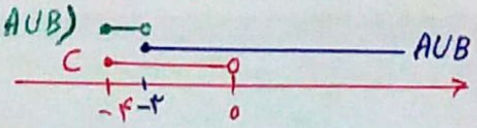
پ) $A\cap C=[-۳,۰)$



ت) $B\cup C=[-۴,+\infty)$



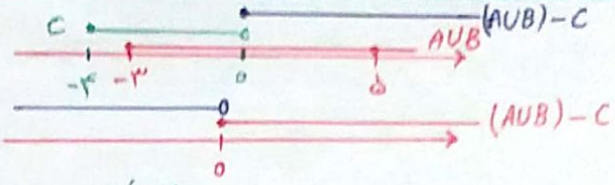
ث) $C-(A\cup B)=[-۴,۰)-[-۳,+\infty)$
$=[-۴,-۳)$



در حل این گونه سوالات مجموعه‌ها را روی یک محور نشان می‌دهیم و سپس موارد خواسته شده را بدست می‌آوریم.

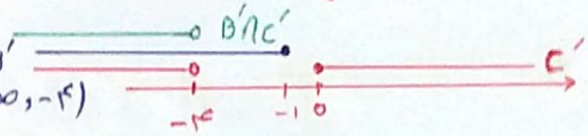
Scanned with CamScanner

ج) $(A\cup B)-C=[-۳,+\infty)-[-۴,۰)=[۰,+\infty)$

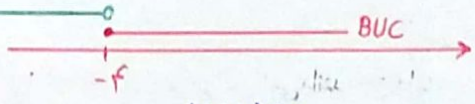


ه) $[(A\cup B)-C]'=[۰,+\infty)'=(-\infty,۰)$

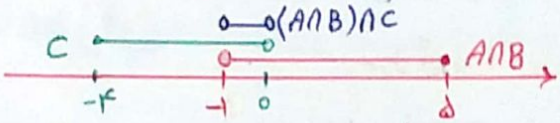
ج) $B'\cap C'=(-\infty,-۱]\cup\big((-\infty,-۴)\cup[۰,+\infty)\big)=(-\infty,-۴)$



ج) $(B\cup C)'=[-۴,+\infty)'=(-\infty,-۴)$



د) $(A\cap B)\cap C=(-۱,۵]\cap[-۴,۰)=(-۱,۰)$

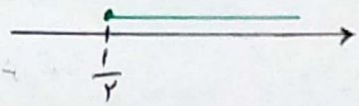


---

* برای نشان دادن مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ها می‌توانیم از نمادِ بازه استفاده کنیم.

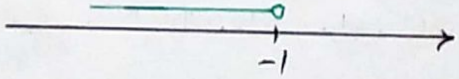
مثال: نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب آن‌ها را روی محور نشان دهید و به صورت بازه بنویسید:

الف) $۲x-۱\geq ۰\Rightarrow ۲x\geq ۱\Rightarrow x\geq \frac{۱}{۲}\Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب $=[\frac{۱}{۲},+\infty)$



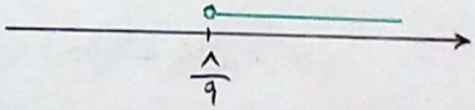
ب) $۱-۳x>x+۵\Rightarrow -۳x-x>۵-۱\Rightarrow -۴x>۴\xrightarrow{\div(-۴)} x<\frac{۴}{-۴}\Rightarrow x<-۱$

$\Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب $=(-\infty,-۱)$



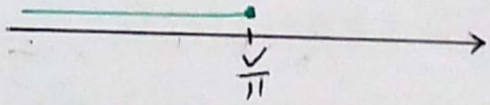
پ) $\frac{x}{۲}+۱<۵x-۳\xrightarrow{\times ۲} x+۲<۱۰x-۶\Rightarrow x-۱۰x<-۶-۲\Rightarrow -۹x<-۸\xrightarrow{\div(-۹)} x>\frac{-۸}{-۹}$

$\Rightarrow x>\frac{۸}{۹}\Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب $=(\frac{۸}{۹},+\infty)$

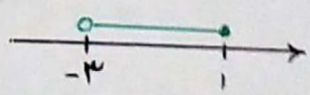


ت) $\frac{۳x-۱}{۲}\leq\frac{۲-x}{۳}\xrightarrow{\times ۶} ۹x-۳\leq ۴-۲x\Rightarrow ۹x+۲x\leq ۴+۳\Rightarrow ۱۱x\leq ۷\Rightarrow x\leq\frac{۷}{۱۱}$

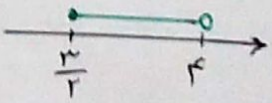
$\Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب $=(-\infty,\frac{۷}{۱۱}]$



ث) $-۱<x+۲\leq ۳\xrightarrow{-۲} -۳<x\leq ۱\Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب $=(-۳,۱]$

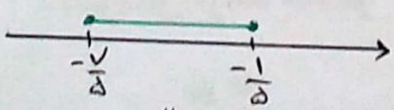


ج) $۰\leq ۲x-۳<۵\xrightarrow{+۳} ۳\leq ۲x<۸\xrightarrow{\div ۲}\frac{۳}{۲}\leq x<۴\Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب $=[\frac{۳}{۲},۴)$



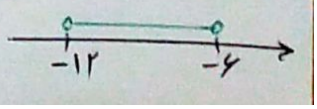
چ) $۱\leq\frac{۱-۵x}{۲}\leq ۴\xrightarrow{\times ۲} ۲\leq ۱-۵x\leq ۸\xrightarrow{-۱} ۱\leq -۵x\leq ۷\xrightarrow{\div(-۵)}\frac{۱}{-۵}\geq x\geq\frac{۷}{-۵}\Rightarrow\frac{-۷}{۵}\leq x\leq\frac{-۱}{۵}$

$\Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب $=[\frac{-۷}{۵},\frac{-۱}{۵}]$



تذکر: اگر طرفین یک نامعادله را بر عددی منفی تقسیم کنیم جهت نامعادله عوض می‌شود.

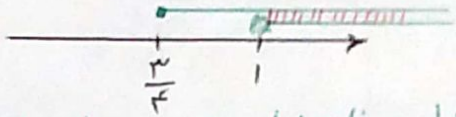
ح) $-۳<\frac{x}{۳}+۱<-۱\xrightarrow{\times ۳} -۹<x+۳<-۳\xrightarrow{-۳} -۱۲<x<-۶\Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب $=(-۱۲,-۶)$



Scanned with CamScanner

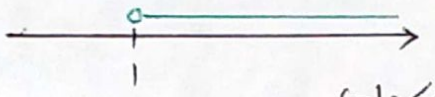
ج) $0 \leq \frac{2x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{3x}{2} + \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 6} 0 \leq 4x - 3 < 9x + 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 4x-3 \\ \text{و} \\ 4x-3 < 9x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq 4x \\ \text{و} \\ -5 < 5x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \leq x \\ \text{و} \\ -1 < x \end{cases}$



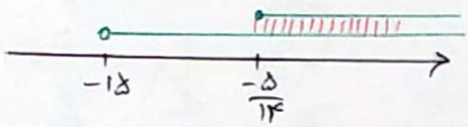
مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی اصلی برابر با اشتراک این دو بازه می‌باشد پس:

مجموعه‌ی جواب $= (1, +\infty)$

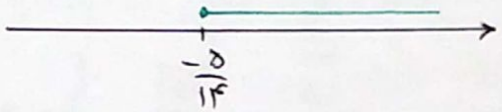


د) $-2 < \frac{x}{5} + 1 \leq 3x + 2 \xrightarrow{\times 5} -10 < x + 5 \leq 15x + 10 \Rightarrow \begin{cases} -10 < x+5 \\ \text{و} \\ x+5 \leq 15x+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10-5 < x \\ \text{و} \\ -5 \leq 14x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -15 < x \\ \text{و} \\ -5 \leq 14x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -15 \\ \text{و} \\ x \geq \frac{-5}{14} \end{cases}$



$\Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب $= [\frac{-5}{14}, +\infty)$



تمرین:

۱) اگر $A = (-2, +\infty)$ و $B = (-\infty, 3]$ و $C = (-2, 3)$ و $M = \mathbb{R}$ (مرجع) آنگاه موارد خواسته شده را بدست آورید:

الف) A' ب) B' پ) $A \cap B$ ت) $A \cup B$ ث) $(A \cup B)'$ ج) $B - A$ چ) $A - B$

ح) $A' \cap B$ خ) $A \cap (B \cap C)$ ز) $(C - B)'$ ژ) $C - B$ س) $(A \cup C)'$ ش) $A \cap C$ ص) $A \cup C$

۲) نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب آنها را به صورت بازه بنویسید و روی محور نشان دهید:

الف) $7x + 2 \leq -5$ ب) $1 - 3x > x - 6$ پ) $\frac{x}{2} \geq 2x - 6$

ت) $\frac{2x+3}{7} < x + 1$ ث) $-2 < 3x - 7 < 2$ ج) $-2 \leq 1 - x \leq 0$

چ) $1 > 5 - \frac{x}{3} \geq \frac{-1}{2}$ ح) $1 \geq x + 6 > 2 - x$ خ)

د) $3 \leq \frac{5x-3}{2} < 1$ ذ) $-2 \leq x + 3 \leq 2x$ ر) $-2 < \frac{x}{3} + 1 < \frac{-1}{2} + x$

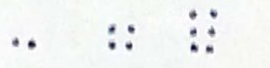
ز) $0 < \frac{x+1}{3} + 2 < \frac{x}{2} + 3$ ژ) $2x - 3 \leq x + 2 \leq 3x - 1$

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

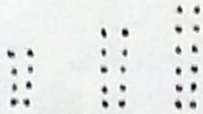
Scanned with CamScanner

الگو: یک ساختار منظم از اعداد، اشکال، تصاویر، وقایع، صداها یا نمادها می باشد که ممکن است رشد کننده، تکرار شونده یا ترکیبی از این دو باشد. الگوها ممکن است خطی یا غیر خطی باشند. در هر الگو اولین جمله را با t_1 و دومین جمله را با t_2، ... و nامین جمله را با t_n نشان می دهیم. nامین جمله را جمله‌ی عمومی الگو می نامیم. این جمله در واقع ساختار الگو را به ما معرفی می کند و با توجه به آن هرکدام از جملات الگو را می توانیم مشخص کنیم.

مثال: در الگوی زیر سه شکل بعدی را رسم کنید و سپس جمله‌ی عمومی آن را بنویسید:



حل: در مرحله‌ی اول دو نقطه داریم در مرحله‌ی دوم دو تا نقطه‌ی دیگر اضافه شده و در مرحله‌ی سوم دو نقطه به مرحله‌ی دوم اضافه شده است پس باید همین روال را ادامه دهیم پس سه شکل بعدی به صورت زیر می باشد:

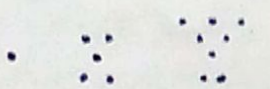


حال اگر تعداد نقطه ها را در این شکل ها مورد توجه قرار دهیم داریم:

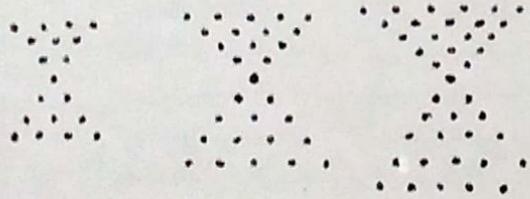
۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ۱۰ و ۱۲

پس الگوی موجود در شکل های بالا همان الگوی اعداد زوج می باشد که جمله‌ی عمومی آن $t_n = 2n$ است.

مثال: در الگوی زیر سه شکل بعدی را رسم کنید و سپس جمله‌ی عمومی آن را بنویسید:



حل: در مرحله‌ی اول یک نقطه داریم در مرحله‌ی دوم چهار تا نقطه‌ی دیگر اضافه شده است و در مرحله‌ی سوم شش نقطه به مرحله‌ی دوم اضافه شده است بنابراین باید در مرحله‌ی بعدی هشت نقطه به مرحله‌ی سوم اضافه کنیم و این کار را ادامه دهیم پس شکل ۳ شکل بعدی به صورت زیر می باشد:



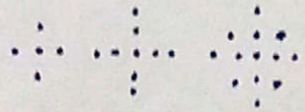
پس اگر تعداد نقطه ها را در این شکل ها بنویسیم داریم:

۱ ، ۵ ، ۱۱ ، ۱۹ ، ۲۹ و ۴۱

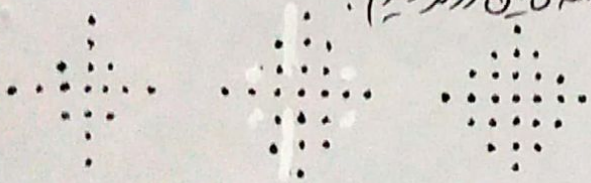
(+۴ ، +۶ ، +۸ ، +۱۰ ، +۱۲)

بنابراین جمله‌ی عمومی آن به صورت $t_n = t_{n-1} + 2n$; $n > 1$ می باشد.

مثال: در الگوی زیر سه شکل بعدی را رسم کنید و سپس جمله‌ی عمومی آن را بنویسید:



حل: در شکل اول پنج نقطه داریم در شکل دوم چهار تا نقطه‌ی دیگر اضافه شده و باز در شکل سوم چهار نقطه به شکل دوم اضافه شده است پس با ادامه‌ی این روند داریم:



بنابراین تعداد نقاط در این شکل ها به صورت زیر است:

۵ ، ۹ ، ۱۳ ، ۱۷ ، ۲۱ و ۲۵

(+۴ ، +۴ ، +۴ ، +۴ ، +۴)

پس جمله‌ی عمومی آن به صورت $t_n = 4n + 1$ می باشد.

Scanned with CamScanner

الگوی خطی: اگر اختلاف هر دو جملهٔ متوالی در یک الگو برابر عدد ثابتی باشد به آن یک الگوی خطی می‌گوییم مثلاً الگوی ...، ۲۶، ۱۹، ۱۲، ۵ یک الگوی خطی است زیرا تفاضل هر دو جملهٔ متوالی آن برابر مقدار ثابت ۷- می‌باشد. در حالی که الگوی ...، ۴۱، ۲۵، ۱۳، ۵، ۱ یک الگوی خطی نیست زیرا تفاضل هر دو جملهٔ متوالی آن یک مقدار ثابت نمی‌باشد مثلاً $5-1 \neq 13-5$.

به طور کلی الگوهایی که جملهٔ عمومی آنها به شکل $t_n=an+b$ می‌باشد را الگوهای خطی می‌گوییم که در آن a و b اعداد حقیقی هستند و n عددی طبیعی می‌باشد. اختلاف هر دو جملهٔ متوالی در الگوی خطی برابر a می‌باشد. همانطور که ملاحظه می‌شود این الگوها به معادلهٔ خطی $y=mx+h$ می‌باشد بنابراین جملات این الگو روی نمودار یک خط قرار می‌گیرند.

الگوی غیرخطی: الگویی که خطی نباشد را الگوی غیرخطی می‌گوییم. مثلاً: ...، ۸، ۳، ۰، -۳، -۴، -۶، -۷ یک الگوی غیرخطی می‌باشد.

مثال: در یک الگوی خطی جملهٔ سوم برابر ۷ و جملهٔ دهم برابر ۲۸ است جملهٔ عمومی الگو را بیابید و چند جملهٔ اول آن را بنویسید.

حل: فرض کنیم جملهٔ عمومی الگو به صورت $t_n=an+b$ باشد پس داریم:

$$\begin{cases} t_{10}=a\times 10+b \\ t_3=a\times 3+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 28=10a+b \\ 7=3a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 28=10a+b \\ -7=-3a-b \end{cases}$$

$$21=7a \Rightarrow a=\frac{21}{7} \Rightarrow \boxed{a=3}$$

$$7=3a+b \Rightarrow 7=3\times 3+b \Rightarrow 7-9=b \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

پس $t_n=3n-2$ و بنابراین داریم: ...، ۱۳، ۱۰، ۷، ۴، ۱

مثال: کدام یک از الگوهای زیر خطی هستند؟ الف) $t_n=n^2+n$ ب) $t_n=\frac{n}{2}-1$

حل: اگر چند جمله از هر کدام را بنویسیم داریم:

الف) $t_1=1^2+1=2$, $t_2=2^2+2=6$, $t_3=3^2+3=12$, $t_4=4^2+4=20$, ...

چون $6-2 \neq 12-6$ پس الگوی خطی نیست.

ب) $t_1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$, $t_2=\frac{2}{2}-1=0$, $t_3=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$, $t_4=\frac{4}{2}-1=1$, ...

چون تفاضل هر دو جملهٔ متوالی آن برابر مقدار ثابت $\frac{1}{2}$ است پس یک الگوی خطی می‌باشد مثلاً $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-0=0-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

Scanned with CamScanner

دنباله : به تعدادی از اعداد که پشت سر هم نوشته شوند یک دنباله از اعداد می گوئیم به هرکدام از این اعداد یک جمله از جملات دنباله می گوئیم . ممکن است جملات دنباله الگوی خاصی داشته باشند یا ممکن است نداشته باشند البته ما در ریاضی با دنباله هایی که نظم خاصی داشته باشند سروکار داریم . به عنوان مثال هرکدام از موارد زیر یک دنباله از اعداد است :

الف) ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ... ب) ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ و ...

پ) 1 و $\sqrt{2}$ و ۵ و ۱۰ و ۱۱ و ... ت) ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷

ث) 1 و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ و ... و $\frac{1}{100}$ ج) -2 و -1 و ۴ و ۷ و ۲۰ و ۲۵

چ) ۰ و ۱ و ۴ و ۹ و ۱۶ و ۲۵ و ... و ۱۰۰ ح) $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و ۲ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt{6}$ و ... و ۱۰

خ) ۱ و ۳ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۱ و ۲۸ و ... د) $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ و $\frac{5}{6}$ و ... و $\frac{99}{100}$

همانطور که می بینید بعضی از این دنباله ها دارای نظم (مانند الف و ب و ث و چ و ح و خ و د) و برخی دیگر بدون نظم هستند (مانند پ و ت و ج) .

همچنین بعضی از این دنباله ها دارای تعدادی محدود جمله هستند که به آنها **دنباله های متناهی** می گوئیم (مانند ت و ث و ج و ح و د) و برخی دیگر دارای بیشمار جمله می باشند که به آنها **دنباله های نامتناهی** می گوئیم (مانند الف و ب و پ و چ و خ)

در بعضی از این دنباله ها با زیاد شدن شماره ی جمله، خود جمله نیز افزایش می یابد که آنها را **دنباله های افزایشی (صعودی)** می گوئیم (مانند الف و ب و پ و ت و ج و چ و ح و خ و د) و در برخی دیگر (مانند ث) با افزایش شماره ی جمله ، خود جمله کاهش می یابد که این گونه دنباله ها را **نزولی (کاهشی)** می گوئیم .

مثال : سه جمله ی بعدی در هر دنباله را بنویسید و سپس جمله ی عمومی دنباله را حدس بزنید :

(دنباله ی مضارب ۳) جمله ی عمومی : $t_n = 3n$ الف) ۳ و ۶ و ۹ و ۱۲ و ۱۵ و ۱۸ و ۲۱

(دنباله ی مثلثی) جمله ی عمومی : $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ب) ۱ و ۳ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۱ و ۲۸

(دنباله ی مربعی) $t_n = n^2$ پ) ۱ و ۴ و ۹ و ۱۶ و ۲۵ و ۳۶ و ۴۹

(دنباله ی فیبوناچی) $t_n = \begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \end{cases} ; n > 2$ ت) ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۸ و ۱۳

Scanned with CamScanner

(دنباله‌ی مکعبی)

ث) $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343$ — $t_n = n^3$

ج) $0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125$ — $t_1=0, t_2=1, t_3=2$; $t_n = t_{n-1}+t_{n-2}+t_{n-3}$; $n>3$

ج) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}$ — $t_n = \frac{n}{n+1}$

چ) $0, 3, 8, 15, 24, 35, 48$ — $t_n = n^2-1$

خ) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}, \frac{13}{15}$ — $t_n = \frac{2n-1}{2n+1}$

د) $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \frac{7}{36}, \frac{8}{49}$ — $t_n = \frac{n+1}{n^2}$

مسئله: چندمین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n = \frac{n^2}{2n}+1$ برابر 26 است؟

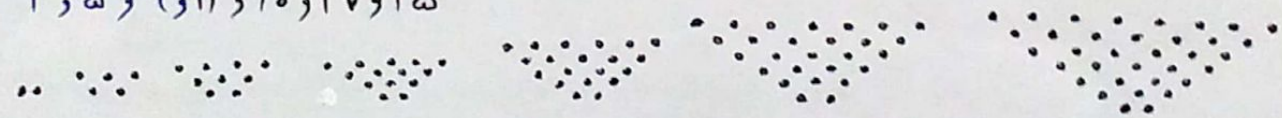
حل: $\frac{n^2}{2n}+1 = 26 \Rightarrow \frac{n^2}{2n} = 25 \Rightarrow n^2 = 50n \Rightarrow n^2-50n=0 \Rightarrow n(n-50)=0 \Rightarrow$ $n=0$ غ ق ق ; $n-50=0 \Rightarrow \boxed{n=50}$

مسئله: چندمین جمله‌ی دنباله‌ی $t_n = \frac{3n+5}{n-3}$ برابر 5 می‌باشد؟

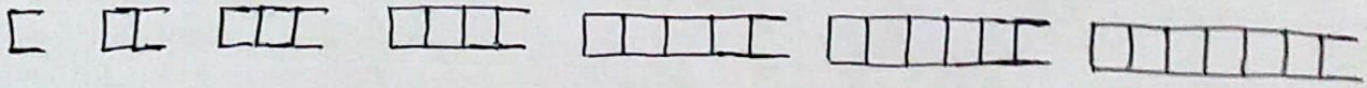
حل: $\frac{3n+5}{n-3} = \frac{5}{1} \Rightarrow 5n-15 = 3n+5 \Rightarrow 5n-3n = 5+15 \Rightarrow 2n = 20 \Rightarrow \boxed{n=10}$

مسئله: در هر دنباله چهار جمله‌ی بعدی را بنویسید و برای آن شکل مناسب رسم کنید:

الف) $2, 5, 9, 14, 20, 27, 35$



ب) $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$



مسئله: جمله‌ی عمومی دنباله‌های زیر را بنویسید:

الف) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ — $a_n = (-1)^n$

ب) $-1, 7, 26, 63, 124, \ldots$ — $t_n = n^3-1$

پ) $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \ldots$ — $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

ت) $2, -4, 6, -8, 10, -12, \ldots$ — $v_n = (-1)^{n+1} \times 2n$

Scanned with CamScanner

تمرین ۱ : چهار جمله‌ی بعدی در هر دنباله را بنویسید و سپس جمله‌ی عمومی آن را حدس بزنید همچنین مشخص کنید که کدام یک خطی و کدام یک غیرخطی هستند :

الف) ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ۱۹, ... ب) ۲, ۶, ۱۲, ۲۰, ۳۰, ...

پ) -۱, -۴, -۷, -۱۰, -۱۳, ... ت) ۷, ۲۶, ۶۳, ۱۲۴, ...

تمرین ۲ : پنج جمله‌ی اول هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید :

الف) $t_n = \sqrt[3]{n+1}$ ب) $t_n = \frac{n-1}{n+2}$ پ) $t_n = (n+1)^n$ ت) $t_n = \frac{1}{n} - 1$

ث) $t_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ج) $t_n = (-1)^n \times n^2$ چ) $t_n = (\frac{1}{2})^n$ ح) $t_n = n^3 - n^2$

تمرین ۳ : چندمین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n = 7n + 4$ برابر ۹۵ می‌شود؟

تمرین ۵ : چندمین جمله‌ی دنباله‌ی $u_n = \frac{n^2 - n}{2}$ برابر ۲۱ می‌شود؟

تمرین ۶ : چندمین جمله‌ی دنباله‌ی $t_n = 2^{n+1} + 3$ برابر ۵۱۵ می‌باشد؟

تمرین ۷ : چهار جمله‌ی اول هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید و برای آن‌ها یک شکل مناسب نظیر کنید.

الف) $a_n = 3n + 2$ ب) $b_n = n^2 + 3$ پ) $c_n = 5n$

تمرین ۸ : سه دنباله مثال بزنید که صعودی (افزایشی) باشند.

تمرین ۹ : سه دنباله مثال بزنید که نزولی (کاهشی) باشند.

تمرین ۱۰ : دنباله‌های $a_n = \sqrt{n} + n$ و $b_n = \sqrt{n} - n$ و $c_n = a_n + b_n$ را در نظر بگیرید و پنج جمله‌ی اول هرکدام را بنویسید سپس صعودی یا نزولی بودن هر یک را مشخص کنید.

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

Scanned with CamScanner

دنباله‌ی حسابی: دنباله‌ای است که در آن هر جمله به جز جمله‌ی اول از جمع جمله‌ی قبلی با یک مقدار ثابت به دست می‌آید این مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله‌ی حسابی (عددی) می‌گوئیم و با d نشان می‌دهیم. به بیان دیگر دنباله‌ای که در آن تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی برابر مقدار ثابتی باشد را دنباله‌ی حسابی (عددی) می‌گوئیم و این مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله نامیده و با d نشان می‌دهیم یعنی:

$$\boxed{d=t_n-t_{n-1}}$$

که در آن t_{n-1} و t_n دو جمله‌ی متوالی می‌باشند.

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی: اگر جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی برابر t_1 و قدر نسبت آن d باشد آنگاه با توجه به تعریف داریم:

$$t_2=t_1+d\ ,\ t_3=t_2+d=t_1+d+d=t_1+2d\ ,$$

$$t_4=t_3+d=t_1+2d+d=t_1+3d\ ,\ t_5=t_4+d=t_1+3d+d=t_1+4d$$

با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت $\boxed{t_n=t_1+(n-1)d}$ این جمله را جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی می‌گوئیم

نکته: هر دنباله‌ی حسابی یک الگوی عددی خطی می‌باشد.

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی داریم $t_1=5$ و $d=3$ جمله‌ی عمومی و جمله‌ی بیستم این دنباله را بنویسید.

حل:

$$t_n=t_1+(n-1)d \Rightarrow t_n=5+(n-1)\times 3 \Rightarrow t_n=5+3n-3 \Rightarrow \boxed{t_n=3n+2}$$

برای بدست آوردن جمله‌ی بیستم به دو روش می‌توانیم عمل کنیم یا در جمله‌ی عمومی به جای n عدد ۲۰ را قرار دهیم یعنی

$$t_{20}=3\times 20+2=62$$

یا مستقیماً در فرمول جایگذاری کنیم یعنی:

$$t_{20}=t_1+(20-1)d=5+19\times 3=5+57=62$$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی داریم $t_7=14$ ، $t_1=-10$ جمله‌ی عمومی این دنباله را بنویسید.

حل: ابتدا باید قدر نسبت را بدست آوریم بدین منظور داریم: $t_n=t_1+(n-1)d$

$$t_7=14 \Rightarrow t_1+(7-1)d=14 \xrightarrow[t_1=-10]{} -10+6d=14 \Rightarrow 6d=14+10 \Rightarrow 6d=24 \Rightarrow \boxed{d=4}$$

$$t_n=t_1+(n-1)d \Rightarrow t_n=-10+(n-1)\times 4 \Rightarrow t_n=-10+4n-4 \Rightarrow \boxed{t_n=4n-14}$$

Scanned with CamScanner

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی داریم $d=-۴$ و $t_{۳۰}=-۱۱۰$ جمله‌ی عمومی و چهار جمله‌ی اول آن را بنویسید.

حل: ابتدا باید جمله‌ی اول دنباله را محاسبه کنیم بدین منظور داریم: $t_n=t_1+(n-1)d$

$$t_{۳۰}=t_1+(۳۰-1)d \Rightarrow -۱۱۰=t_1+۲۹\times(-۴) \Rightarrow -۱۱۰=t_1-۱۱۶ \Rightarrow \boxed{t_1=۶}$$

$$t_n=t_1+(n-1)d \Rightarrow t_n=۶+(n-1)\times(-۴) \Rightarrow t_n=۶-۴n+۴ \Rightarrow \boxed{t_n=-۴n+۱۰}$$

برای محاسبه‌ی ۴ جمله‌ی اول می‌توانیم در جمله‌ی عمومی اعداد ۱ تا ۴ را جایگزین کنیم یعنی: $t_1=-۴\times۱+۱۰=۶$

$$t_۲=-۴\times۲+۱۰=۲ \quad , \quad t_۳=-۴\times۳+۱۰=-۲ \quad , \quad t_۴=-۴\times۴+۱۰=-۶$$

یا می‌توانیم جمله‌ی اول را بنویسیم و مرتباً با قدرنسبت جمع کنیم یعنی

$$۶ \xrightarrow{-۴} ۲ \xrightarrow{-۴} -۲ \xrightarrow{-۴} -۶$$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی داریم: $t_۵=۱۷$ و $t_۹=۴۵$ جمله‌ی عمومی این دنباله را بیابید.

حل: ابتدا باید جمله‌ی اول و قدرنسبت دنباله را بدست آوریم بدین منظور داریم:

$$\begin{cases} t_۹=۴۵ \\ t_۵=۱۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1+۸d=۴۵ \\ -\ (t_1+۴d=۱۷) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1+۸d=۴۵ \\ -t_1-۴d=-۱۷ \end{cases}$$

$$۴d=۲۸ \Rightarrow d=\frac{۲۸}{۴}=۷$$

$$t_1+۴d=۱۷ \Rightarrow t_1+۲۸=۱۷ \Rightarrow t_1=۱۷-۲۸ \Rightarrow \boxed{t_1=-۱۱}$$

$$t_n=t_1+(n-1)d \Rightarrow t_n=-۱۱+(n-1)\times۷ \Rightarrow t_n=-۱۱+۷n-۷ \Rightarrow \boxed{t_n=۷n-۱۸}$$

مثال: اگر t_n و t_m دو جمله‌ی متمایز از یک دنباله‌ی حسابی باشند آنگاه قدرنسبت آن را بدست آورید.

حل: اگر جمله‌ی اول دنباله را t_1 و قدرنسبت آن را d بنامیم آنگاه داریم:

$$\begin{cases} t_n=t_1+(n-1)d \\ -\ (t_m=t_1+(m-1)d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_n=t_1+nd-d \\ -t_m=-t_1-md+d \end{cases}$$

$$t_n-t_m=nd-md \Rightarrow t_n-t_m=(n-m)d \Rightarrow \boxed{d=\frac{t_n-t_m}{n-m}}$$

در مثال قبل می‌توانیم برای پیدا کردن d از این فرمول استفاده کنیم بنابراین داریم:

$$d=\frac{t_n-t_m}{n-m} \Rightarrow d=\frac{t_۹-t_۵}{۹-۵}=\frac{۴۵-۱۷}{۴}=\frac{۲۸}{۴}=۷$$

Scanned with CamScanner

واسطه‌ی حسابی (عددی): اگر a و b و c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند آنگاه داریم: $b-a=c-b$ پس $\boxed{2b=a+c}$ بنابراین $\boxed{b=\frac{a+c}{2}}$.

هرگاه a و b و c سه عدد باشند که $2b=a+c$ یا $b=\frac{a+c}{2}$ آنگاه b را واسطه‌ی عددی (میانگین حسابی) بین a و c می‌گوئیم.

مثال: بین ۳ و ۱۳ عدد ۸ واسطه‌ی حسابی است زیرا $2\times 8=13+3$.

یا ۱۲ واسطه‌ی حسابی بین ۴ و ۲۰ می‌باشد زیرا $2\times 12=4+20$.

یا ۱۲ واسطه‌ی عددی بین ۸ و ۱۶ می‌باشد زیرا $2\times 12=8+16$.

یا ۱۲ واسطه‌ی عددی بین ۱ و ۲۳ می‌باشد زیرا $2\times 12=1+23$.

مثال: اگر $2n+2$ و $2n+3$ و $4n-1$ جملات متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند مقدار n را بیابید.
(اگر $2n+3$ واسطه‌ی حسابی بین $2n+2$ و $4n-1$ باشد مقدار n را بدست آورید.)

حل:
$$2b=a+c \Rightarrow 2(2n+3)=n+2+4n-1 \Rightarrow 4n+6=5n+1$$
$$\Rightarrow 6-1=5n-4n \Rightarrow \boxed{n=5} \rightarrow \text{جملات: } 7, 13, 19$$

مثال: مقدار n را طوری بیابید که $2n+2$ واسطه‌ی حسابی بین $n+2$ و $5n-4$ باشد.

حل:
$$2b=a+c \Rightarrow 2(2n+2)=n+2+5n-4 \Rightarrow 4n+4=6n-2 \Rightarrow 4+2=6n-4n$$
$$\Rightarrow 2n=6 \Rightarrow \boxed{n=3} \longrightarrow \text{جملات: } 5, 8, 11$$

مثال: بین ۷ و ۴۳ سه عدد چنان بیابید که اعداد حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند.
(بین ۷ و ۴۳ سه واسطه‌ی حسابی درج کنید.)

حل: بین ۷ و ۴۳ اگر سه فاصله بگذاریم آنگاه داریم: $7, 16, 25, 34, 43$ (+9 +9 +9 +9)

بنابراین $t_1=7$ و $t_5=43$ پس داریم: $t_5=43 \Rightarrow t_1+4d=43 \Rightarrow 7+4d=43$
$$\Rightarrow 4d=43-7 \Rightarrow 4d=36 \Rightarrow d=\frac{36}{4}=9$$

با اضافه کردن ۹ به عدد ۷ جمله‌ی دوم بدست می‌آید که ۱۶ می‌باشد با اضافه کردن ۹ به ۱۶ جمله‌ی سوم بدست می‌آید که برابر ۲۵ است و با اضافه کردن ۹ به ۲۵ عدد ۳۴ بدست می‌آید.

Scanned with CamScanner

چند نکته در دنباله‌ی حسابی :

۱) در دنباله‌ی حسابی سه جمله‌ی متوالی را بهتر است به صورت t_1-d ، t_1 ، t_1+d در نظر بگیریم و اگر تعدادی فرد از جملات را بخواهیم به همین ترتیب از دو طرف ادامه دهیم مثلاً پنج جمله‌ی متوالی را به صورت t_1-2d ، t_1-d ، t_1 ، t_1+d ، t_1+2d در نظر بگیریم.

۲) در دنباله‌ی حسابی چهار جمله‌ی متوالی را بهتر است به صورت $t_1-\frac{3d}{2}$ ، $t_1-\frac{d}{2}$ ، $t_1+\frac{d}{2}$ ، $t_1+\frac{3d}{2}$ در نظر بگیریم و اگر تعدادی زوج از جملات را بخواهیم به همین ترتیب ادامه دهیم مثلاً شش جمله‌ی متوالی را به صورت $t_1-\frac{5d}{2}$ ، $t_1-\frac{3d}{2}$ ، $t_1-\frac{d}{2}$ ، $t_1+\frac{d}{2}$ ، $t_1+\frac{3d}{2}$ ، $t_1+\frac{5d}{2}$ در نظر بگیریم.

۳) تعداد جملات در دنباله‌ی حسابی از دستور $n=\frac{t_n-t_1}{d}+1$ بدست می‌آید.

۴) در دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی t_n داریم: $m+n=p+k \Longrightarrow t_m+t_n=t_p+t_k$

۵) اگر بخواهیم بین a و b تعداد k واسطه‌ی حسابی قرار دهیم آنگاه $d=\frac{b-a}{k+1}$.

۶) اگر t_n و t_m دو جمله‌ی متمایز از یک دنباله‌ی حسابی باشند آنگاه $d=\frac{t_n-t_m}{n-m}$.

مثال: مجموع سه جمله‌ی متوالی در یک دنباله‌ی حسابی برابر ۶۳ می‌باشد جملات این دنباله را بدست آورید اگر بدانیم قدرنسبت دنباله برابر ۴ است.

حل: اگر این جملات را به صورت t_1-d ، t_1 ، t_1+d در نظر بگیریم داریم:

$$t_1-d+t_1+t_1+d=63 \Rightarrow 3t_1=63 \Rightarrow t_1=\frac{63}{3} \Rightarrow t_1=21 \Rightarrow 21-4\ ,\ 21\ ,\ 21+4 \rightarrow 17,21,25$$

نکته: اگر تعدادی فرد از جملات دنباله را با هم جمع کنیم و حاصل را بر تعداد تقسیم کنیم جمله‌ی وسط بدست می‌آید. با اضافه کردن قدرنسبت جملات بعدی و با کم کردن قدرنسبت جملات قبلی بدست می‌آیند.

مثال: مجموع شش ضرب طبیعی متوالی عدد ۳ برابر ۱۵۰ می‌باشد آن اعداد را بیابید.

حل: ضرب طبیعی و متوالی عدد ۳ تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۳ می‌دهند پس اگر جملات را به صورت t_1-2d ، t_1-d ، t_1 ، t_1+d ، t_1+2d در نظر بگیریم داریم:

t_1-6 ، t_1-3 ، t_1 ، t_1+3 ، t_1+6 بنابراین

$$t_1-6+t_1-3+t_1+t_1+3+t_1+6=150$$

$$\Rightarrow 5t_1=150 \Rightarrow t_1=\frac{150}{5} \Rightarrow \boxed{t_1=30} \longrightarrow \text{جملات: } 24,27,30,33,36$$

روش دیگر: از نکته‌ی بالا استفاده کنیم داریم:

$$t_1=\frac{150}{5}=30$$

$$\Rightarrow \text{جملات: } 24\ ,\ 27\ ,\ 30\ ,\ 33\ ,\ 36 \Leftarrow 30-6\ ,\ 30-3\ ,\ 30\ ,\ 30+3\ ,\ 30+6$$

Scanned with CamScanner

مثال: مجموع چهار عدد زوج متوالی برابر ۱۴۰ می‌باشد این اعداد را بیابید.

حل: می‌دانیم که اعداد زوج متوالی یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند پس می‌توانیم این جملات را به صورت $t_1-\frac{3d}{2}$, $t_1-\frac{d}{2}$, $t_1+\frac{d}{2}$, $t_1+\frac{3d}{2}$ در نظر بگیریم بنابراین:

$$t_1-\frac{3d}{2}+t_1-\frac{d}{2}+t_1+\frac{d}{2}+t_1+\frac{3d}{2}=140 \Rightarrow 4t_1=140 \Rightarrow t_1=\frac{140}{4}=35$$

پس جملات عبارتند از: $35-\frac{3\times2}{2}, 35-\frac{2}{2}, 35+\frac{2}{2}, 35+\frac{3\times2}{2}$ یعنی جملات عبارتند از: ۳۲، ۳۴، ۳۶، ۳۸

مثال: بین ۱۳ و ۷۸ چهار واسطه‌ی عددی قرار دهید.

حل: اگر فرض کنیم $a=13$ و $b=78$ آنگاه داریم:

$$d=\frac{b-a}{k+1}=\frac{78-13}{4+1}=\frac{65}{5}=13$$

بنابراین:

$$13, \underbrace{26}_{+13}, \underbrace{39}_{+13}, \underbrace{52}_{+13}, \underbrace{65}_{+13}, \underbrace{78}_{+13}$$

روش دیگر: می‌توانیم فرض کنیم $t_1=13$ و $t_6=78$ و از دستور $d=\frac{t_n-t_m}{n-m}$ استفاده کنیم در این صورت داریم:

$$d=\frac{t_6-t_1}{6-1}=\frac{78-13}{5}=\frac{65}{5}=13 \longrightarrow 13, 26, 39, 52, 65, 78$$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی مجموع چهار جمله‌ی اول برابر ۷۴ و مجموع سه جمله‌ی بعدی برابر ۱۰۸ می‌باشد این دنباله را مشخص کنید.

حل: در واقع مجموع هفت جمله‌ی اول این دنباله برابر است با $74+108=182$ با استفاده از نکات قبلی چون تعداد جملات فرد است با تقسیم این مجموع بر تعداد جمله‌ی وسط یعنی چهارمین جمله برابر می‌آید پس $t_4=\frac{182}{7}=26$. یعنی $t_1+3d=26$ از طرفی $t_1+t_1+d+t_1+2d+t_1+3d=74$

$$\Rightarrow 3t_1+3d+26=74 \Rightarrow 3t_1+3d=48 \xrightarrow{\div(-3)} \begin{cases} -t_1-d=-16 \\ t_1+3d=26 \end{cases}$$

$$2d=10 \Rightarrow d=5$$

پس جملات به صورت: 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41 می‌باشند

روش دیگر:

$$\begin{cases} t_1+t_1+d+t_1+2d+t_1+3d=74 \\ t_1+4d+t_1+5d+t_1+6d=108 \end{cases} \xrightarrow{\times(-\frac{2}{3})} \begin{cases} 4t_1+6d=74 \\ -3t_1-15d=-162 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_1+3d=37 \\ -2t_1-10d=-72 \end{cases}$$

$$-7d=-35 \Rightarrow d=\frac{-35}{-7} \Rightarrow d=5$$

$$2t_1+3d=37 \Rightarrow 2t_1+3\times5=37 \Rightarrow 2t_1=22 \Rightarrow t_1=11$$

پس جملات عبارتند از: 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41

Scanned with CamScanner

مثال: چندمین جمله‌ی دنباله‌ی داده شده برابر ۱۵۱ می‌باشد: $-9, -5, -1, 3, 7, \ldots$

حل: در دنباله‌ی داده شده داریم: $t_1=-9$ و $d=-5-(-9)=4$ پس

$$t_n=151 \Rightarrow t_1+(n-1)d=151 \Rightarrow -9+(n-1)\times 4=151 \Rightarrow -9+4n-4=151$$

$$\Rightarrow 4n=151+9+4 \Rightarrow 4n=164 \Rightarrow n=\frac{164}{4} \Rightarrow \boxed{n=41} \Rightarrow t_{41}=151$$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات سوم و سیزدهم برابر ۶۲ می‌باشد جمله‌ی هشتم این دنباله را بیابید.

حل: با توجه به جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی داریم:

$$62=t_3+t_{13}=t_1+2d+t_1+12d=2t_1+14d \Rightarrow 2t_1+14d=62 \xrightarrow{\div 2} t_1+7d=31 \Rightarrow \boxed{t_8=31}$$

روش دیگر: چون t_3 و t_{13} نسبت به t_8 هم فاصله‌اند (هرکدام با t_8 چهار جمله فاصله دارند) پس t_8 واسطه‌ی حسابی بین این دو جمله است یعنی $t_8=\frac{t_3+t_{13}}{2}=\frac{62}{2}=31$.

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی داریم: $t_9+t_{11}+t_{13}+t_{15}=108$.

الف - مجموع جملات دهم و چهاردهم را بیابید ب - مجموع جملات یازدهم و سیزدهم را بیابید.

حل: اگر به جای جملات داده شده از فرمول جمله‌ی عمومی قرار دهیم داریم:

الف -

$$t_1+8d+t_1+10d+t_1+12d+t_1+14d=108 \Rightarrow 2t_1+18d+2t_1+26d=108 \xrightarrow{\div 2}$$

$$t_1+9d+t_1+13d=108 \Rightarrow t_{10}+t_{14}=54$$

ب -

$$t_1+8d+t_1+10d+t_1+12d+t_1+14d=108 \Rightarrow 2t_1+20d+2t_1+24d=108 \xrightarrow{\div 2}$$

$$t_1+10d+t_1+13d=108 \Rightarrow t_{11}+t_{13}=54$$

تذکر برای قسمت ب" می‌توانیم از فرمول $m+n=p+k \Rightarrow t_m+t_n=t_p+t_k$ استفاده کنیم یعنی چون $10+14=11+13$ پس $t_{11}+t_{13}=t_{10}+t_{14}=54$.

مسئله: ثابت کنید اگر a و b و c تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند آنگاه $a-3$ و $b-3$ و $c-3$ نیز تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند.

حل: چون a و b و c دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌دهند پس $2b=a+c$.

برای اینکه $a-3$ و $b-3$ و $c-3$ تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند باید: $2(b-3)=a-3+c-3$

$$\Rightarrow 2(b-3)=a+c-6 \rightarrow 2(b-3)=2b-6$$ که این رابطه همواره درست است.

از طرفی: $a+c=2b$

دنباله‌ی هندسی: دنباله‌ای است که در آن هر جمله به جز جمله‌ی اول، از ضرب جمله‌ی قبل از خودش در یک مقدار ثابت بدست می‌آید. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می‌گوییم و با r نشان می‌دهیم.

به بیان دیگر دنباله‌ای است که در آن حاصل تقسیم هر دو جمله‌ی متوالی، برابر مقدار ثابتی باشد. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم و با r نشان می‌دهیم. پس $r=\frac{t_n}{t_{n-1}}$.

مثال: کدام یک از دنباله‌های زیر یک دنباله‌ی هندسی می‌باشد؟

الف) $2, 4, 6, \dots$

$\frac{4}{2}=2$

$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

پس دنباله‌ی هندسی نیست

ب) $2, 4, 8, \dots$

$\frac{4}{2}=2$

$\frac{8}{4}=2$

پس دنباله‌ی هندسی هست $\Rightarrow r=2$

پ) $\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, 25, \dots$

$\frac{5}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$

$\frac{5\sqrt{5}}{5}=5$

پس دنباله‌ی هندسی است و $r=\sqrt{5}$

ت) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \dots$

$\frac{\frac{2}{9}}{\frac{-1}{3}}=\frac{-2}{3}$, $\frac{\frac{-4}{27}}{\frac{2}{9}}=\frac{-2}{3}$ $\Rightarrow$ پس دنباله‌ی هندسی هست

$\Rightarrow r=\frac{-2}{3}$

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی: اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی هندسی برابر t_1 و قدرنسبت آن برابر r باشد آنگاه طبق تعریف داریم:

$$t_2=t_1r$$
$$t_3=t_2r=t_1r\cdot r=t_1r^2$$
$$t_4=t_3r=t_1r^2\cdot r=t_1r^3$$
$$t_5=t_4r=t_1r^3\cdot r=t_1r^4$$

ملاحظه می‌شود که در همه‌ی جملات t_1 وجود دارد و توان r یکی کمتر از شماره‌ی جمله می‌باشد با ادامه‌ی این روند داریم: $\boxed{t_n=t_1r^{n-1}}$ این جمله را جمله‌ی nام یا جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی می‌گوییم.

واسطه‌ی هندسی (میانگین هندسی): اگر a و b و c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند آنگاه داریم: $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ بنابراین $b^2=a\cdot c$.

هرگاه a و b و c سه عدد باشند که $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ یا $b^2=a\cdot c$ آنگاه گوییم b واسطه‌ی هندسی بین a و c می‌باشد. مثلاً 6 واسطه‌ی هندسی بین 2 و 18 می‌باشد زیرا $6^2=2\times18$

یا مثلاً 6 واسطه‌ی هندسی بین 4 و 9 می‌باشد زیرا $6^2=4\times9$.

Scanned with CamScanner

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی داریم $t_1=۳$ و $r=-۲$ جمله‌ی عمومی و جمله‌ی دهم این دنباله را بیابید.

حل: $t_n=t_1r^{n-1} \Rightarrow \boxed{t_n=۳(-۲)^{n-1}} \Rightarrow t_{۱۰}=۳(-۲)^{۱۰-۱} \Rightarrow t_{۱۰}=۳(-۲)^{۹} \Rightarrow t_{۱۰}=۳(-۵۱۲) \Rightarrow \boxed{t_{۱۰}=-۱۵۳۶}$

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی داریم $t_۴=-۲۰$ و $r=۲$ جمله‌ی عمومی و جمله‌ی هفتم این دنباله را بیابید.

حل: ابتدا باید t_1 را محاسبه کنیم بدین منظور داریم:

$t_۴=t_1r^{۳} \Rightarrow -۲۰=t_1\times ۲^{۳}$

$\Rightarrow -۲۰=۸t_1 \Rightarrow t_1=\frac{-۲۰}{۸}=\boxed{-۵}$

$t_n=t_1r^{n-1} \Rightarrow \boxed{t_n=-۵\times ۲^{n-1}} \Rightarrow t_۷=-۵\times ۲^{۷-1} \Rightarrow t_۷=-۵\times ۲^{۶} \Rightarrow t_۷=-۵\times ۶۴=-۳۲۰$

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی داریم $t_1=-۲$ و $t_۴=۵۴$ جمله‌ی عمومی و جمله‌ی بیستم آن را بیابید.

حل: ابتدا باید r را بیابیم بدین منظور داریم:

$t_۴=t_1r^{۳} \Rightarrow ۵۴=-۲\times r^{۳} \Rightarrow r^{۳}=\frac{۵۴}{-۲}$

$\Rightarrow r^{۳}=-۲۷ \Rightarrow \boxed{r=-۳}$

$t_n=t_1r^{n-1} \Rightarrow \boxed{t_n=-۲(-۳)^{n-1}} \Rightarrow t_{۲۰}=-۲(-۳)^{۲۰-۱} \Rightarrow t_{۲۰}=-۲(-۳)^{۱۹} \Rightarrow \boxed{t_{۲۰}=۲\times ۳^{۱۹}}$

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی داریم: $t_۳=۵۰$ و $t_۶=۶۲۵۰$ جمله‌ی عمومی این دنباله را بیابید.

حل: ابتدا باید t_1 و r را بدست آوریم بدین منظور داریم:

$$\begin{cases} t_۶=۶۲۵۰ \\ t_۳=۵۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1r^{۵}=۶۲۵۰ \\ t_1r^{۲}=۵۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{t_1r^{۵}}{t_1r^{۲}}=\frac{۶۲۵۰}{۵۰} \Rightarrow r^{۳}=۱۲۵ \Rightarrow r^{۳}=۵^{۳} \Rightarrow \boxed{r=۵}$$

$t_1r^{۲}=۵۰ \Rightarrow t_1\times ۵^{۲}=۵۰ \Rightarrow t_1=\frac{۵۰}{۲۵} \Rightarrow \boxed{t_1=۲}$

$t_n=t_1r^{n-1} \Rightarrow \boxed{t_n=۲\times ۵^{n-1}}$

مثال: اگر t_n و t_m دو جمله‌ی متمایز از یک دنباله‌ی هندسی باشند قدر نسبت این دنباله را بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases} t_n=t_1r^{n-1} \\ t_m=t_1r^{m-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{t_n}{t_m}=\frac{t_1r^{n-1}}{t_1r^{m-1}} \Rightarrow \frac{t_n}{t_m}=r^{n-1-(m-1)} \Rightarrow \frac{t_n}{t_m}=r^{n-1-m+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{t_n}{t_m}=r^{n-m}} \Rightarrow \boxed{r=\sqrt[n-m]{\frac{t_n}{t_m}}}$$

Scanned with CamScanner

چند نکته در دنباله‌ی هندسی:

۱) در دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی عمومی a_n داریم: $m+n=p+k \Rightarrow a_m \times a_n = a_p \times a_k$

۲) اگر بخواهیم بین a و b تعداد k واسطه‌ی هندسی قرار دهیم آنگاه داریم: $r^{k+1} = \frac{b}{a}$

۳) اگر جملات n ام و m ام و k ام یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب سه جمله‌ی متوالی در یک دنباله‌ی هندسی باشند آنگاه $\boxed{r = \frac{k-m}{m-n}}$

۴) اگر t_n و t_m دو جمله‌ی متمایز از یک دنباله‌ی هندسی باشند آنگاه $r^{n-m} = \frac{t_n}{t_m}$.

مثال: بین ۲ و ۷۲ یک واسطه‌ی هندسی درج کنید.

حل: $b^2 = ac \Rightarrow b^2 = 2 \times 72 \Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow b = \pm 12$ ← ۲, ۱۲, ۷۲ / ۲, -۱۲, ۷۲

روش دیگر: از مزمول $r^{k+1} = \frac{b}{a}$ استفاده کنیم:

$r^{1+1} = \frac{72}{2} \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = \pm 6$

$\rightarrow \begin{cases} 2, -12, 72 \\ 2, 12, 72 \end{cases}$

مثال: بین ۶ و ۱۹۲ چهار واسطه‌ی هندسی قرار دهید.

(بین ۶ و ۱۹۲ چهار عدد چنان قرار دهید که شش عدد حاصل تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند)

حل: $r^{k+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow r^{4+1} = \frac{192}{6} \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r^5 = 2^5 \Rightarrow \boxed{r=2}$

$\Rightarrow 6, 12, 24, 48, 96, 192$ (×۲ بین هر دو)

روش دیگر: اگر چهار جمله بین این دو عدد در نظر بگیریم آنگاه: $t_1 = 6$ و $t_6 = 192$ بنابراین:

$t_1 r^5 = 192 \Rightarrow 6 \times r^5 = 192 \Rightarrow r^5 = \frac{192}{6}$

$\Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r^5 = 2^5 \Rightarrow \boxed{r=2}$

پس با ضرب ۶ در عدد ۲ جمله‌ی دوم و با ضرب جمله‌ی دوم در ۲ جمله‌ی سوم و ... بدست می‌آید.

"پیروز و سربلند باشید" خالقی

Scanned with CamScanner

تمرین ۱ : جمله‌ی عمومی هر یک از دنباله‌های حسابی با مشخصات داده شده را بدست آورید:

الف) $\begin{cases} t_1 = 7 \\ d = -4 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} t_1 = -3 \\ t_7 = 27 \end{cases}$ پ) $\begin{cases} d = 15 \\ t_4 = 55 \end{cases}$ ت) $\begin{cases} t_6 = 60 \\ t_{10} = 132 \end{cases}$

تمرین ۲ : جمله‌ی عمومی هر یک از دنباله‌های هندسی با مشخصات داده شده را بدست آورید:

الف) $\begin{cases} t_1 = 5 \\ r = -3 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} t_1 = 32 \\ t_5 = 2 \end{cases}$ پ) $\begin{cases} r = -4 \\ t_4 = -128 \end{cases}$ ت) $\begin{cases} t_7 = 7290 \\ t_4 = 270 \end{cases}$

تمرین ۳ : مشخص کنید کدام یک از دنباله‌های زیر یک دنباله‌ی حسابی است سپس قدرنسبت آن را بیابید

الف) $7, 10, 15, 22, \dots$

ب) $-7, -11, -15, -19, \dots$

پ) $3, 6, 12, 24, \dots$

ت) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \dots$

ث) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \dots$

ج) $3, 3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, \dots$

تمرین ۴ : مشخص کنید کدام یک از دنباله‌های زیر یک دنباله‌ی هندسی است سپس قدرنسبت آن را بنویسید.

الف) $125, -25, 5, -1, \dots$

ب) $4, 8, 12, 16, \dots$

پ) $7, 14, 28, 56, \dots$

ت) $-\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, 9, \dots$

ث) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

ت) $\frac{5}{4}, \frac{5}{2}, 5, 10, \dots$

تمرین ۵ : در یک مغازه بسته های چای با گونه‌ای چیده شده‌اند که در ردیف زیرین ۱۵ بسته و در ردیف بعدی ۲ تا کمتر و ... وجود دارد در ردیف پنجم چند بسته چای چیده شده است؟

تمرین ۶ : می دانیم که باکتری‌ها به روش دونیم شدن تکثیر می شوند اگر در مرحله‌ی اول سه باکتری داشته باشیم پس از چهار مرحله چند باکتری خواهیم داشت؟

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

** در ادامه تعدادی مسئله‌ی اضافی آورده شده که برخی از آنها پس از تدریس معادله‌ی درجه‌ی دوم قابل حل هستند

Scanned with CamScanner

۱) جمله ی عمومی دنباله های زیر را بنویسید:

الف) ۵، ۳، ۸، ۱۵، ۲۴، ... ب) ۴، ۷، ۱۲، ۱۹، ۲۸، ... پ) $\frac{1}{2}$، ۴، $\frac{27}{2}$، ۳۲، $\frac{125}{2}$، ...

۲) چندمین جمله ی دنباله ی $a_n = \frac{4n+1}{3}$ برابر 27 است؟

۳) در دنباله ی: ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ...

الف- جمله ی عمومی را بدست آورید. ب- کدام جمله برابر 227 است؟

۴) چند عدد دورقمی مضرب 3 در اعداد طبیعی وجود دارد؟

۵) چند عدد سه رقمی طبیعی مضرب 7 وجود دارد؟

۶) در یک دنباله ی حسابی صعودی مجموع سه جمله ی اول برابر 15 و حاصل ضرب آنها برابر 80 می باشد جمله ی عمومی و جمله ی بیستاویکم آن را بیابید.

۷) در یک دنباله ی حسابی نزولی حاصل ضرب جمله ی اول و چهارم $\frac{91}{9}$ و حاصل ضرب جمله ی دوم و سوم 11 است، قدر نسبت دنباله را بدست آورید.

۸) اگر $x+1$ و $3x$ و $3x-1$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند مقدار x و جمله ی عمومی دنباله را بدست آورید.

*۹) اگر $x+6$ و $\frac{x^2}{2}$ و $4x$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند مقدار x و جمله ی عمومی دنباله را بدست آورید. مسئله دارای چند جواب است؟

۱۰) بین ۱۲ و ۵۴ شش واسطه ی حسابی درج کنید.

۱۱) واسطه ی حسابی دو عدد برابر 11 است اگر بین آن دو عدد، پنج واسطه ی حسابی قرار دهیم قدر نسبت برابر 4 خواهد شد این دو عدد را بدست آورید.

۱۲) در یک دنباله ی حسابی داریم: $a_2+a_4+a_6+a_8=80$ مجموع جمله ی سوم و هفتم این دنباله را بیابید.

۱۳) دو دنباله ی ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ... و ۱-، ۴، ۹، ...، ۶- چند جمله ی مشترک کوچکتر از ۱۰۰۰ دارند؟

۱۴) اگر x و y و z تشکیل دنباله ی حسابی دهند ثابت کنید $2x$ و $2y$ و $2z$ نیز تشکیل دنباله ی حسابی می دهند.

۱۵) اگر x و y و z تشکیل دنباله ی حسابی دهند ثابت کنید $x+2$ و $y+2$ و $z+2$ نیز تشکیل دنباله ی حسابی می دهند.

۱۶) اگر x و y و z تشکیل دنباله ی حسابی دهند ثابت کنید kx و ky و kz نیز تشکیل دنباله ی حسابی می دهند.

Scanned with CamScanner

۱۷) در دنباله‌ی هندسی روبه‌رو ... و ۴۰، ۲۰ و ۱۰ و ۵
الف- جمله‌ی یازدهم را بیابید ب- جمله‌ی چندم آن برابر $\frac{1}{32}$ است؟

۱۸) در یک دنباله‌ی هندسی داریم: $t_3=18$ و $t_4=48$ جمله‌ی عمومی و جمله‌ی دهم این دنباله را بیابید.

۱۹) در یک دنباله‌ی هندسی حاصل ضرب جملات دوم و چهارم برابر ۱۴۴ و حاصل ضرب جملات سوم و پنجم برابر ۵۷۶ می‌باشد جمله‌ی عمومی این دنباله را بدست آورید. مسئله دارای چند جواب است؟

۲۰) در یک دنباله‌ی هندسی حاصل جمع جملات اول و سوم برابر ۲۰ و حاصل جمع جملات دوم و چهارم برابر ۶۰ می‌باشد جمله‌ی عمومی این دنباله را بیابید.

۲۱) در یک دنباله‌ی هندسی حاصل جمع سه جمله‌ی اول برابر ۳۵ و حاصل ضرب آنها برابر ۱۰۰۰ می‌باشد اگر این دنباله نزولی باشد جمله‌ی اول دنباله را مشخص کنید.

۲۲) در یک دنباله‌ی هندسی صعودی جمله‌ی سوم ۱۰ و جمله‌ی هفتم ۴۰ است جمله‌ی یازدهم این دنباله را بیابید.

۲۳) اگر $x-1$ و $x+3$ و $3x+1$ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی صعودی باشند مقدار x و قدرنسبت دنباله را بیابید.

۲۴) بین $\frac{9}{6}$ و $\frac{3}{1}$ چهار واسطه‌ی هندسی درج کنید.

۲۵) در دنباله‌ی هندسی ... و $\frac{1}{2}x^2+16$ و $x+4$ و 2 جمله‌ی دهم چند برابر جمله‌ی ششم است؟

۲۶) جملات پنجم و یازدهم و چهاردهم یک دنباله‌ی حسابی، سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی هستند قدرنسبت دنباله‌ی هندسی را بدست آورید.

۲۷) در یک دنباله‌ی هندسی حاصل ضرب جملات هفتم و یازدهم برابر ۱۰۰ می‌باشد حاصل ضرب جملات سوم و پانزدهم را بیابید.

۲۸) اگر x و y و z تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند نشان دهید x^2 و y^2 و z^2 نیز تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند.

۲۹) اگر x و y و z تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند نشان دهید $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{1}{z}$ نیز تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند.

۳۰) اگر x و y و z تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند نشان دهید x^n و y^n و z^n نیز تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند.

خالقی
"پیروز و سربلند باشید"

Scanned with CamScanner