فصل سوم: تابع:

مفهوم زوج مرتب: به هر دو شیء یا دو عدد که با ترتیب خاصی کنار هم قرار گیرند زوج مرتب می گوییم که آن را به صورت (a,b) نمایش می دهیم و به a مؤلفه ی اول و به b مؤلفه ی دوم می گوییم

(a,b)
b ← مؤلفه ی دوم
a ← مؤلفه ی اول

فیروز محمودی @Love_Graph

نکته: در حالت کلی $(a,b) \neq (b,a)$

نکته: دو زوج مرتب (a,b), (c,d) هنگامی با هم مساوی هستند که: $a=c$, $b=d$

مثال: اگر زوج مرتب های $(m-1,3)$ و $(5,n+2)$ با هم مساوی باشند مقدارهای m,n را بدست آورید.

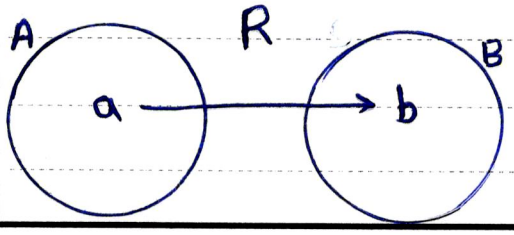
جواب: چون این دو زوج مرتب با هم مساویند پس باید مؤلفه های اول آنها با هم و مؤلفه های دوم آنها نیز با هم مساوی باشند یعنی:

$m-1=5 \Rightarrow m=5+1 \Rightarrow m=6$

$n+2=3 \Rightarrow n=3-2 \Rightarrow n=1$

سوال امتحانی: اگر زوج مرتب های $(3,x+3y)$ و $(x-y,1)$ با هم مساوی باشند، مقدارهای x و y را بدست آورید.

مفهوم رابطه: یک رابطه مثل R عضوهای یک مجموعه مثل A را به عضوهای یک مجموعه ی دیگر مثل B مربوط می کند، یعنی اگر عضوهای رابطه را به صورت زوج مرتب های (a,b) نمایش دهیم آنگاه $a \in A$, $b \in B$ خواهد بود.



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

همه‌ی مثال‌های زیر یک رابطه را مشخص می‌کنند.

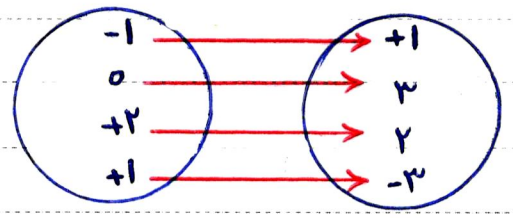
الف) نمایش جدولی

x	-1	0	$+2$	$+1$
y	$+1$	3	2	-3

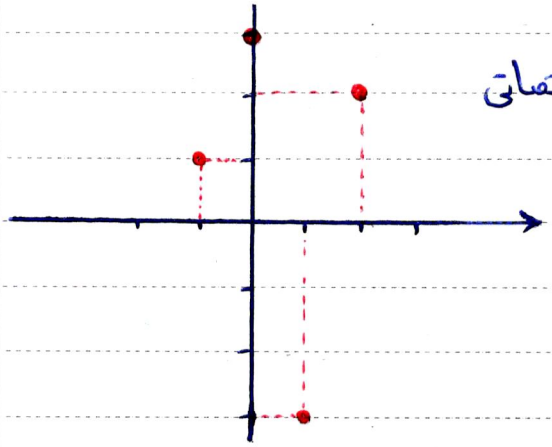
ب) نمایش زوج مرتبی

$R=\{(-1,+1),(0,3),(+2,2),(+1,-3)\}$

ج) نمودار ون (پیکانی)

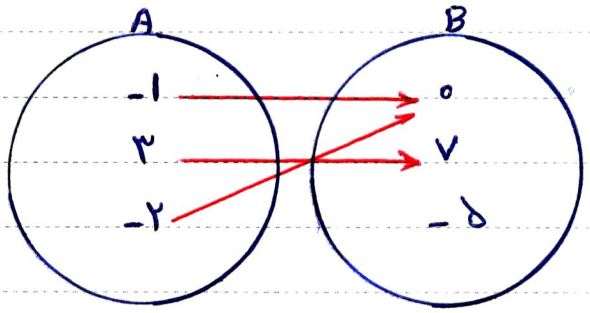


د) نمودار مختصاتی

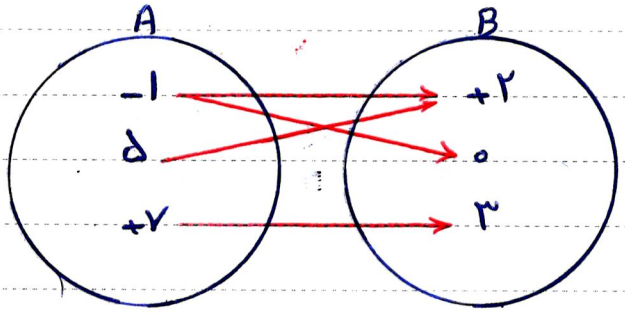


مفهوم تابع: رابطه‌ای از مجموعه‌ی A با مجموعه‌ی B است که با هر عضو A دقیقا یک عضو از B را نسبت دهد.

درواقع یک رابطه که به صورت نمودار ون (پیکانی) داده شده است. وقتی تابع است که: از هر عضو A فقط یک فلش خارج شده باشد (اگر از عضوی از A هیچ فلشی خارج نشود یا بیش از یک فلش خارج شود تابع نیست.



تابع است



تابع نیست

زیرا از عدد ۱- دو فلش خارج شده است

نکته: نمایش زوج مرتبی مربوط با یک رابطه هنگامی نشان دهنده‌ی یک تابع است که، مؤلفه‌های اول هیچ کدام از زوج مرتب‌ها مثل هم نباشند. (ولی اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب با هم برابر بودند، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند)

$f=\{(1,7),(3,4),(2,5)\}$ تابع است. زیرا تمام مؤلفه‌های اول مختلف هستند

$g=\{(2,5),(-1,4),(2,3)\}$ تابع نیست. زیرا در دو تا از زوج مرتب‌ها مؤلفه‌های اول مساویند

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره‌ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: اگر مجموعه‌ی $\{(-3, a-5), (2, -1), (7, 5), (-1, 2b-4)\} = f$ یک تابع باشد، مقدار a, b چقدر است؟

$(-1, 2b-4) = (-1, 2) \Rightarrow 2b-4 = 2$

$2b = 2+4 = 6$

$b = \frac{6}{2} = 3$

$(5, a-3) = (5, 7) \Rightarrow a-3 = 7$

$a = 7+3 = 2$



مثال: مقدار a, b را چنان تعیین کنید که رابطه‌ی مقابل نشان دهنده‌ی یک تابع باشد.

$f = \{(2,3), (-3, a+b), (2, a-b), (-3, 5)\}$

$\begin{cases} a-b=3 \\ a+b=5 \end{cases}$

$2a = 8$

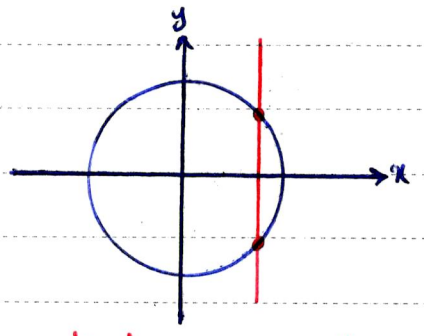
$a = \frac{8}{2} = 4$

$a+b=5$

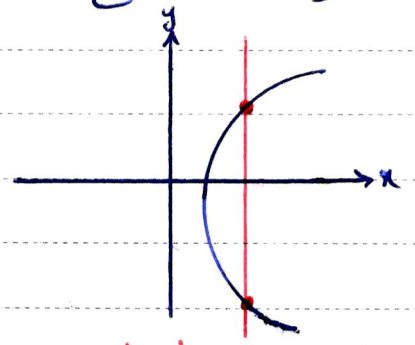
$4+b=5$

$b = 5-4 = 1$

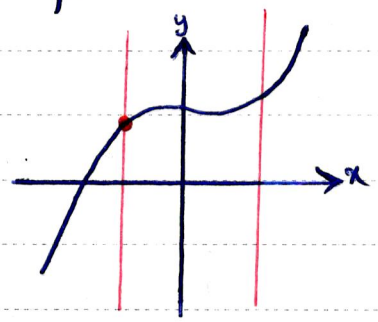
نمودار مختصاتی یک رابطه، درصورتی تابع است، که اگر هر خط عمودی دلخواه (موازی محور y ها) رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند



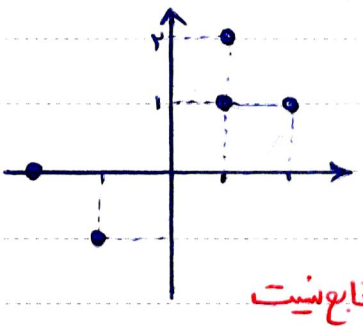
تابع است، زیرا هر خط عمودی (موازی محور y ها) آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



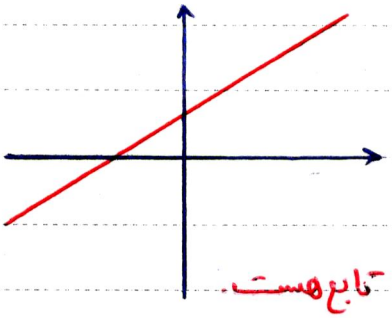
تابع نیست، زیرا خط عمودی (موازی محور y ها) آن را در دو نقطه قطع کرده است.



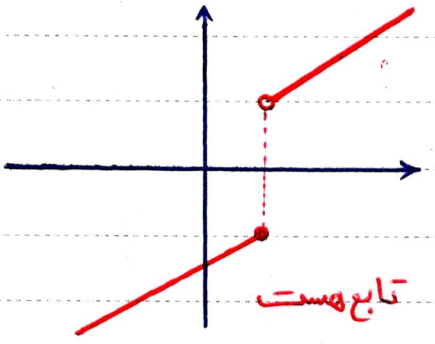
تابع نیست زیرا خط عمودی (موازی محور y ها) آن را در دو نقطه قطع کرده است.



تابع نیست



تابع هست



تابع هست

مثال: تابع بودن یا نبودن هرکدام از مجموعه های زیر را مشخص کنید.



$f=\{(2,3),(3,3),(4,3),(5,3)\}$

$g=\{(4,1),(2,-1),(1,-1),(4,2)\}$

$h=\{(2,3)\}$

$j=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,4)\}$

$I=\{(2,3),(3,2)\}$

$m=\{(5,5)\}$

مثال: کدام یک از روابط زیر نشان دهنده ی یک تابع است.

الف) رابطه ای که به هر شخص، طول قد او را نسبت می دهد.

ب) رابطه ای که به هر شخص، برادرهای او را نسبت می دهد.

ج) رابطه ای که به هر شخص کتابهای مورد علاقه ی او را نسبت می دهد.

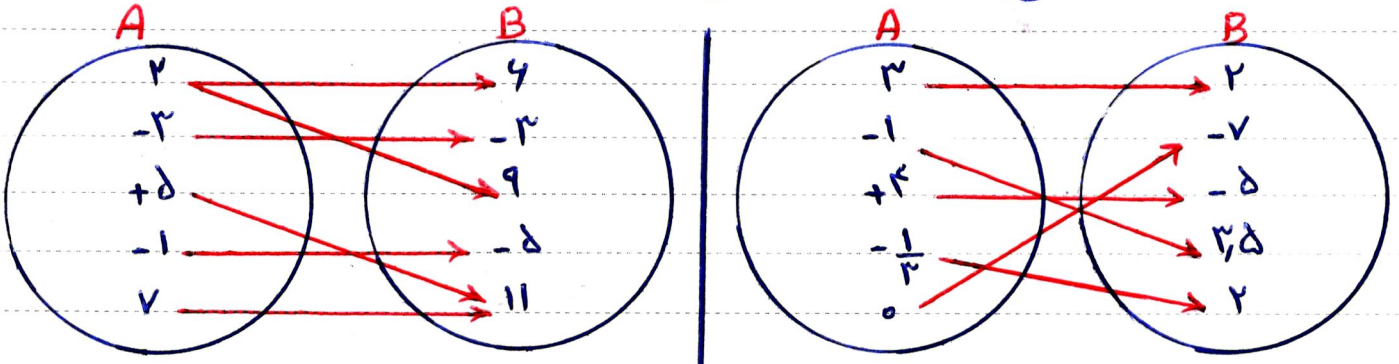
د) رابطه ای که به هر شخص گروه خونی او را نسبت می دهد.

ه) رابطه ای که به هر شخص، درسهای مورد علاقه ی او را نسبت می دهد.

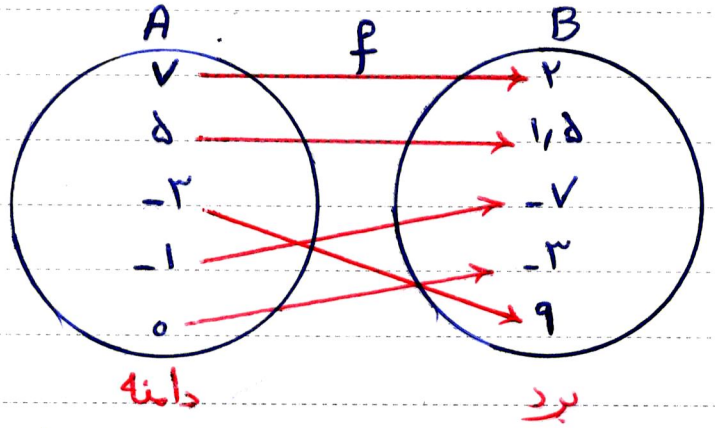
و) رابطه ای که به هر شخص کد ملّی او را نسبت می دهد.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: کدام یک از رابطه‌های زیر نشان دهنده‌ی یک تابع نیست؟ چرا؟



مثال: در رابطه‌ی مقابل که نشان دهنده‌ی یک تابع است، دامنه و برد آن را مشخص کنید و سپس نمودار زوج مرتبی آن را بنویسید.

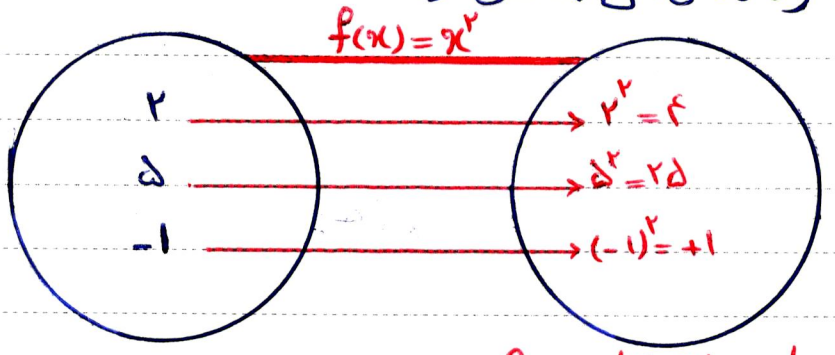


$D_f = \{۷, ۵, -۳, -۱, ۰\}$

$R_f = \{۲, ۱,۵, -۷, -۳,۹\}$

$f = \{(۷,۲), (۵,۱,۵), (-۳,۹), (-۱,-۷), (۰,۳)\}$

مثال: برد تابع مقابل را با توجه به ضابطه و دامنه‌ی آن مشخص کنید.





بنابراین برد تابع f عبارتست از $R_f = \{۴, ۲۵, +۱\}$

مثال: اگر $f(x) = -۳x + ۴$ و $D_f = \{-۲, +۱, ۰\}$ باشد، R_f را مشخص کنید.

-۲
+۱
۰

$f(x) = -۳x + ۴$

$-۳ \times (-۲) + ۴ = +۶ + ۴ = +۱۰$
$-۳ \times (+۱) + ۴ = -۳ + ۴ = +۱$
$-۳ \times (۰) + ۴ = ۰ + ۴ = +۴$

$R_f = \{+۱۰, +۱, +۴\}$

مثال: برد هرکدام از توابع زیر را با توجه به دامنه و ضابطه‌ی آن مشخص کنید.

$f: A \longrightarrow B$,
$f(x) = x^2 + 1$
$A = \{-3, +5, 0\}$

$\Rightarrow R_f = \{(-3)^2+1 , (+5)^2+1 , 0^2+1\} = \{+10, +26, +1\}$



$f: A \longrightarrow B$
$f(x) = \sqrt{x+1}$
$A = \{8, 3, 0\}$

$\Rightarrow R_f = \{\sqrt{8+1}, \sqrt{3+1}, \sqrt{0+1}\} = \{3, 2, 1\}$

نکته: فرم کلی هر تابع خطی به صورت $f(x) = mx + h$ می باشد

مثال: توابع زیر خطی هستند.

$f(x) = 2x + 5$ $\quad f(x) = -3x + 1$

$f(x) = -7x$ $\quad f(x) = -2$

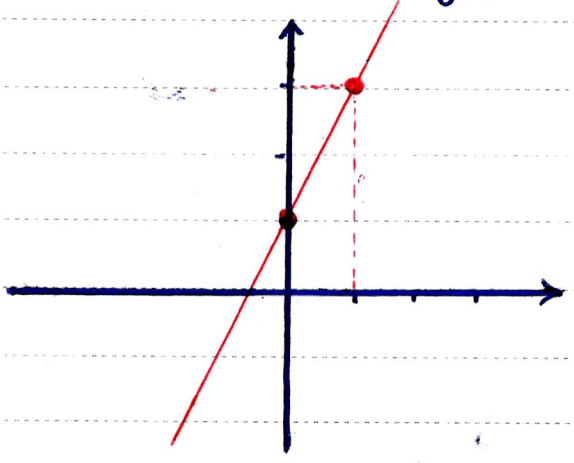
نکته: برای رسم هر تابع خطی، ابتدا دو نقطه از تابع را در صفحه‌ی مختصات مشخص می کنیم و سپس آن دو نقطه را با خط کش به هم وصل می کنیم.

مثال: خطوط زیر را رسم کنید.

$y = 2x + 1$

$x = 0 \Rightarrow y = 2\times 0 + 1 = +1$
$x = 1 \Rightarrow y = 2\times 1 + 1 = 3$

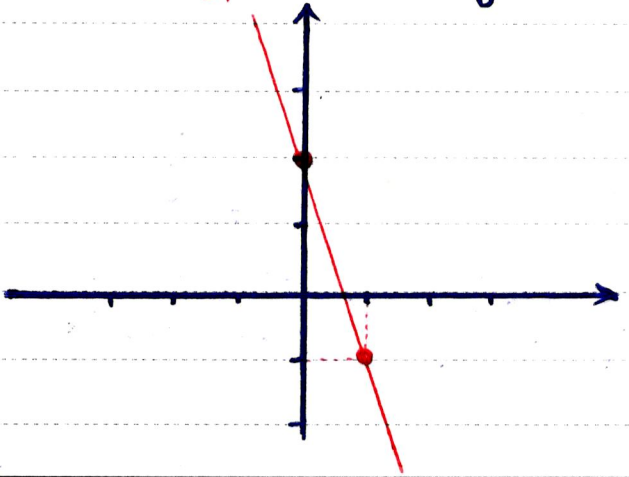
x	0	1
y	1	3



$y = -3x + 2$

$x = 0 \Rightarrow y = -3\times 0 + 2 = +2$
$x = 1 \Rightarrow y = -3\times 1 + 2 = -1$

x	0	1
y	+2	-1



مثال مهم: یک تابع خطی از نقاط $(1,5)$ و $(-1,+1)$ عبور می‌کند. ضابطه‌ی این تابع را مشخص کنید.

$f(x)=mx+h$ $\quad (1,5)$

$\Rightarrow 5=m\times 1+h$ (۱)

$f(x)=mx+h$ $\quad (-1,+1)$

$\Rightarrow +1=m\times(-1)+h$ (۲)

اکنون با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} m+h=5 \\ -m+h=1 \end{cases} \Rightarrow 2h=4 \Rightarrow h=\frac{4}{2}=2$$

$$m+h=5 \Rightarrow m+2=5 \Rightarrow m=5-2=3$$

$$f(x)=3x+2$$



مثال مهم: در یک تابع خطی $f(1)=-1$ و $f(4)=8$ می‌باشد.

الف) ضابطه‌ی این تابع را مشخص کنید.

ب) $f(-3)$ را مشخص کنید.

جواب: وقتی $f(1)=-1$ می‌باشد. یعنی اگر به جای x عدد ۱ را قرار دهیم، عدد -1 بدست می‌آید.

$f(x)=mx+h \Longrightarrow -1=m\times 1+h \Rightarrow m+h=-1$ (۱)

وقتی $f(4)=8$ می‌باشد. یعنی اگر به جای x عدد ۴ قرار دهیم، عدد ۸ بدست می‌آید.

$f(x)=mx+h \Longrightarrow 8=m\times 4+h \Rightarrow 4m+h=8$ (۲)

اکنون با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} m+h=-1 \\ 4m+h=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+h=-1 \\ -4m-h=-8 \end{cases} \Rightarrow -3m=-9 \Rightarrow m=\frac{-9}{-3}=+3$$

$$m+h=-1 \Rightarrow +3+h=-1 \Rightarrow h=-1-3=-4$$

بنابراین تابع $f(x)=mx+h$ به صورت $f(x)=+3x-4$ می‌باشد که:

$$f(-3)=+3\times(-3)-4=-9-4=-13$$

نکته ی مهم : فرم کلی یک تابع درجه ی دوم به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ می باشد که در آن $a\neq 0$ می باشد.

نمودار هر تابع درجه ی دوم به صورت ∪ یا ∩ می باشد که به آن سهمی می گوییم.

نکته ی مهم : اگر در معادله ی سهمی $a>0$ باشد، شکل آن به صورت ∪ می باشد.

نکته ی مهم : اگر در معادله ی سهمی $a<0$ باشد، شکل آن به صورت ∩ می باشد.

برای رسم هر معادله ی درجه دوم، با این صورت عمل می کنیم.

الف) ابتدا نقطه ی $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ را که به آن راس سهمی گفته می شود مشخص می کنیم.

ب) اگر $a>0$ باشد نمودار را به صورت ∩ (راس سهمی) و اگر $a<0$ باشد، نمودار را به صورت ∪ (راس سهمی) رسم می کنیم.

مثال : نمودار تابع درجه ی دوم $y=x^2-2x-3$ را رسم کنید.

$y=1x^2-2x-3$

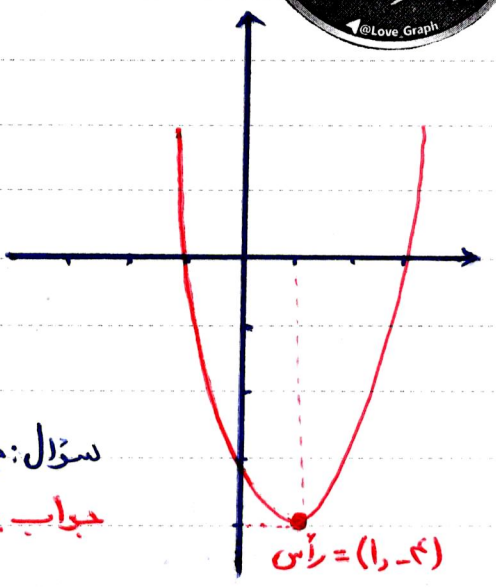
$\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(-3)=$

$=+4+12=+16$

راس سهمی $=\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)=(1,-4)$

$\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2\times 1}=\frac{2}{2}=1$

$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(+16)}{4\times 1}=\frac{-16}{4}=-4$



سوال : چرا نمودار رو به بالا و به شکل ∪ رسم شد؟

جواب : زیرا $a>0$ می باشد.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: نمودار سهمی $y=-x^2+2x-2$ را رسم کنید.

$y=-x^2+2x-2$

$\begin{cases} a=-1 \\ b=+2 \\ c=-2 \end{cases} \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(+2)^2-4(-1)(-2)$

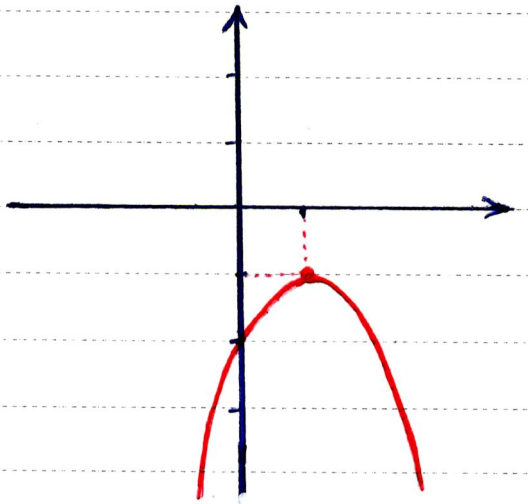
$=+4-8=-4$

رأس سهمی $=\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)=(+1,-1)$

$\frac{-b}{2a}=\frac{-(+2)}{2\times(-1)}=\frac{-2}{-2}=+1$

$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(-4)}{4\times(-1)}=\frac{+4}{-4}=-1$

بنابراین ابتدا نقطه‌ی $(+1,-1)$ را که رأس سهمی است مشخص می‌کنیم، سپس با توجه با این که $a=-1<0$ می‌باشد، شکل آن را به صورت $\cap$ رسم می‌کنیم.



مثال: نمودار تابع $y=-x^2+1$ را رسم کنید.

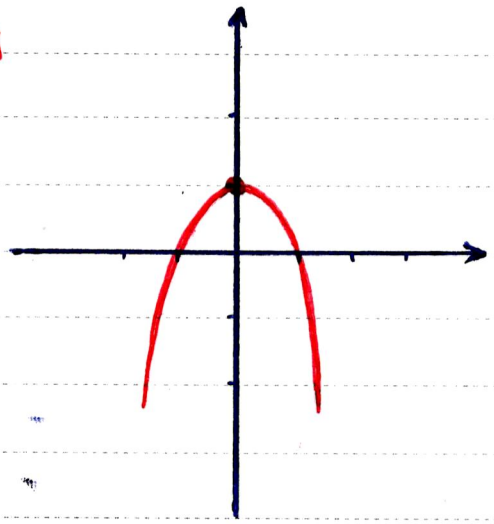
$y=-x^2+1$

$a=-1, b=0, c=+1 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=0^2-4(-1)(+1)=0+4=+4$

رأس سهمی $=\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)=(0,+1)$

$\frac{-0}{2\times(-1)}=\frac{0}{-2}=0$

$\frac{-(+4)}{4\times(-1)}=\frac{-4}{-4}=+1$



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

نمونه‌ای سؤالات امتحانی

۱ اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g=\{(0,-1),(3,4),(-1,5),(2,8)\}$ باشد، حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

$D_g=$

$R_g=$

$f(15)=$

$g(3)\times f(8)=$

$f(g(2))=$

$g(f(8))=$



۲ مقدار a,b را چنان تعیین کنید که رابطه‌ی مقابل یک تابع باشد

$f=\{(2,-3),(-4,a+b),(2,a-b),(-4,7)\}$

۳ نمودار سهمی $y=x^2+2x$ را رسم کنید.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره‌ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

۴ الف) مقدار m را چنان بیابید که حاصلجمع ریشه‌های معادله‌ی مقابل ۳ باشد. $mx^2 - 6x + 1 = 0$

$a = m$
$b = -6$
$c = +1$

حاصلجمع ریشه‌ها $= 3$

$-\frac{b}{a} = 3 \Rightarrow \frac{-(-6)}{m} = 3 \Rightarrow \frac{6}{m} = 3 \Rightarrow m = 2$

ب) مقدار k چقدر باشد، تا حاصلضرب ریشه‌های $4x^2 - 12x + (k+1) = 0$ برابر ۲ باشد.

$a = 4$
$b = -7$
$c = k+1$

حاصلضرب ریشه‌ها $= 2$

$\frac{c}{a} = 2 \Rightarrow \frac{k+1}{4} = \frac{2}{1} \Rightarrow k+1 = 8$

$\Rightarrow k = 8 - 1 = 7$

---

۵ مقدار m و n را چنان تعیین کنید که رابطه‌ی مقابل بیانگر یک تابع باشد.

$f = \{(4, 2m-1), (m, 6), (4, 9), (5, 4n+2)\}$

جواب: می دانیم که مجموعه‌ای از زوج مرتب ها، هنگامی نشان دهنده‌ی یک تابع هستند که مؤلفه‌های اول هیچ کدام از آنها مثل هم نباشند ولی اگر مؤلفه‌های اول آنها با هم برابر بودند، مؤلفه‌های دوم نیز با هم برابر باشند.

مؤلفه‌های اول برابرند

$(4, 2m-1), (4, 9) \Rightarrow 2m - 1 = 9$

باید مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند

$2m = 9 + 1 = 10$

$m = \frac{10}{2} = 5$



اکنون اگر در رابطه‌ی f به جای m عدد ۵ قرار دهیم، به صورت تبدیل می شود:

مؤلفه‌های اول برابرند

$f = \{(4, 9), (5, 6), (4, 9), (5, 4n+2)\} \Rightarrow 4n + 2 = 6$

باید مؤلفه‌های دوم برابر باشند

$4n = 6 - 2 = 4$

$n = \frac{4}{4} = 1$

---

۶ برد تابع مقابل را با توجه به ضابطه و دامنه‌ی آن مشخص کنید.

$f: A \longrightarrow B$
$f(x) = \sqrt{x+1}$
$A = \{0, -1, 15\}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1 \\ f(-1) = \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0 \\ f(15) = \sqrt{15+1} = \sqrt{16} = 4 \end{cases} \Rightarrow B = \{1, 0, 4\}$

در واقع مجموعه‌ی A دامنه و مجموعه‌ی B برد تابع f می باشد.

۷ سهمی $y=-x^2+4x$ را رسم کنید.

$y=-x^2+4x+0$

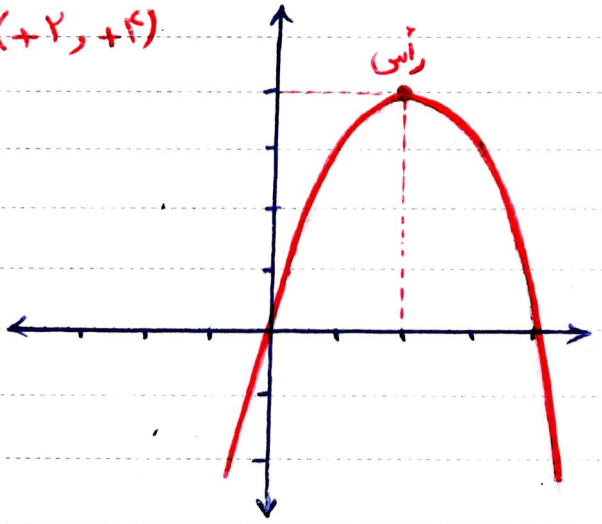
$\begin{cases} a=-1 \\ b=+4 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow$ رأس سهمی $=\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)=(+2,+4)$

$\frac{-b}{2a}=\frac{-(+4)}{2\times(-1)}=\frac{-4}{-2}=+2$

$\Delta=b^2-4ac=(+4)^2-4(-1)\times 0$

$=+16-0=+16$

$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(+16)}{4\times(-1)}=\frac{-16}{-4}=+4$



نکته : $a=-1<0$ می باشد، پس نمودار رو به پایین رسم شد.

۸ اگر مجموعه‌ی $f=\{(1,a-4b),(3,b-a),(5,1),(3,4)\}$ یک تابع باشد، حاصل $a.b$ را بدست آورید.

$(1,a-4b)=(1,5) \Rightarrow a-4b=5$

$(3,4)=(3,b-a) \Rightarrow b-a=4$

$-3b=9$

$b=\frac{9}{-3}=-3$

$a-4b=5$

$a-4(-3)=5$

$a+12=5$

$a=5-12=-7$

$a.b=-7\times(-3)=+21$

فیروز محمودی @Love Graph

مثال : اگر $f(x)=|x-11|$ و $g(x)=\sqrt{x^2+3x}$ باشد، حاصل $f(0)+5g(1)$ چقدر است؟

الف) ۱۰

ب) ۱۱

ج) ۷-

د) ۱۰-

$f(0)=|0-11|=|-11|=+11$

$f(0)+5g(1)=+11+\overset{10}{5\times 2}=+11+10=+21$

$g(1)=\sqrt{1^2+3\times 1}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

مثال : در جای خالی کدام عدد را قرار دهیم تا رابطه‌ی f یک تابع تبدیل شود؟

$f=\{(-3,7),(4,\ldots),(+2,-4),(-3,0)\}$

الف) ۲+

ب) ۰

ج) ۳-

د) ۴-