ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل هفتم: آمار و احتمال

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

یادآوری نکات و مفاهیم پایه در شمارش:

۱- **اصل ضرب:** فرض کنید انجام کاری k مرحله دارد. اگر مرحله اول را بتوان به m_1 طریق

یا

تکیه بر «و» انجام داد، مرحله دوم را به m_2 طریق و ... مرحله k ام را به m_k طریق

انجام داد، کل کار مورد نظر را می‌توان به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق انجام داد.

۲- **اصل جمع:** فرض کنید بتوان کاری را از k روش انجام داد. اگر روش اول به m_1 طریق،

یا

تکیه بر «یا» روش دوم به m_2 طریق و ... و روش k ام به m_k طریق ممکن باشد و بخواهیم

فقط یکی از این k روش را انتخاب کنیم، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$

یا از روش اول یا از روش دوم یا ...

طریق وجود دارد.

مثال کنکور ریاضی ۹۹:

تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟

۱) ۹۴۸ ✓ ۲) ۹۵۲ ۳) ۹۶۸ ۴) ۹۷۲

گزینه ۲

$\boxed{۸} \times \boxed{۸} \times \boxed{۷} \times \boxed{۱}_{۵} = ۴۴۸$ ← چیزه‌دو

$\boxed{۹} \times \boxed{۸} \times \boxed{۷} \times \boxed{۱}_{۰} = ۵۰۴$

$\Rightarrow ۵۰۴ + ۴۴۸ = ۹۵۲$

۳ـ جایگشت :

فرض کنید n شیء متمایز داریم. به هر حالت از قرار گرفتن این اشیاء در کنار هم یک جایگشت می‌گوییم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

$$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad , \quad n! = n(n-1)(n-2)\cdots \times 1$$

مثال: a,b,c

abc bca
acb cab
bac cba

$3! = 3\times 2\times 1 = 6$

۴ـ تبدیل (ترتیب):

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارت دیگر تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن اهمیت داشته باشد را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و به آن تبدیل r شیء از n شیء متمایز گفته می‌شود و از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: a,b,c $\xrightarrow{\text{جایگشت‌های ۲تایی}}$ ab, ba, ac, ca, bc, cb

$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۵- ترکیب :

به هر انتخاب r تایی از n شیء متمایز که در آن ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می گوییم و تعداد آن ها را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می دهیم که از رابطه زیر بدست می آید:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال a,b,c $\xrightarrow[\text{۲ تایی}]{\text{ترکیب های}}$ $\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$ $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

حالات خاص در رابطه ترکیب :

۱) $\binom{n}{0} = 1$ مثال $\binom{10}{0} = 1$

۲) $\binom{n}{n} = 1$ مثال $\binom{0}{0} = 1$

۳) $\binom{n}{1} = n$ مثال $\binom{7}{1} = 7$

۴) $\binom{n}{n-1} = n$ مثال $\binom{6}{5} = 6$

۵) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ مثال $\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$

۶) $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ مثال $\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3!} = 35$

۷) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ مثال $\binom{۷}{۳}=\binom{۷}{۴}$ و $\binom{۱۰}{۸}=\binom{۱۰}{۲}$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی از یک مجموعه nعضوی برابر $\binom{n}{r}$ است و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه nعضوی برابر ۲^n است پس:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n$$

مثال کنکور تجربی ۹۹:

به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری‌که دو نفر انان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۷ ۳) ۹۱ ✓ ۴) ۹۵

دو نفر را کنار بگذاریم $\binom{۷}{۵}=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$

یکی از دو نفر را انتخاب شود $\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۴}=۲\times\binom{۷}{۳}=۲\times\frac{۷\times۶\times۵}{۳!}=۲\times۳۵=۷۰$

$۲۱+۷۰=۹۱$ گزینه ۳

مثال کنکور تجربی ۹۸:

گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری‌که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۵۴ ✓ ۴) ۱۶۸

$\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}=\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۲}=۷۰+\frac{۸\times۷\times۶}{۶}+\frac{۸\times۷}{۲}$

$\frac{۸!}{۴!\times۴!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴\times۳\times۲\times۴!}=۷۰$

$=۷۰+۵۶+۲۸=۱۵۴$ گزینه ۳

یادآوری نکات و مفاهیم پایه در احتمال :

۱- پدیده یا آزمایش تصادفی : پدیده ای است که نتیجه آن را نتوان قبل از رخ دادن ، به طور قطعی پیش بینی کرد .

۲- فضای نمونه ای : مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای می نامیم و آن را با S نمایش می دهیم . به هر عضو فضای نمونه یک برآمد می گوئیم .

۳- پیشامد تصادفی : هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد تصادفی در آن فضای نمونه ای می گویند. و آن را A ، B ، C ، ... نشان می دهیم .

۴- اعمال روی پیشامدها : اگر A و B پیشامدهای تصادفی در فضای نمونه ای S باشند :

الف) اجتماع A و B : پیشامد $A \cup B$ را می گوئیم که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد :

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \overset{\text{یا}}{\vee} x \in B\}$$

ب) اشتراک A و B : پیشامد $A \cap B$ را می گوئیم که هر دو پیشامد A و B رخ دهند :

$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

پ) تفاضل A و B : پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد :

$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(از A اشتراک A و B را حذف می‌کنیم.)

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد :

$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

$$(A' = S - A)$$

۵- **احتمال رخ دادن یک پیشامد** : احتمال وقوع پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}}$$

(تعداد)

دقت کنید برای یافتن $n(A)$ و $n(S)$ در صورت امکان با نوشتن پیشامد و فضای نمونه‌ای، تعداد اعضای آن‌ها را حساب کنید در غیر این صورت از اصل ضرب و جمع، جایگشت و ترکیب استفاده می‌کنیم.

۶- چند پیشامد خاص :

الف) اگر A تهی باشد آنگاه $P(A)=0$ است و پیشامد A غیرممکن می‌گویند.

ب) اگر $A=S$ باشد آنگاه $P(A)=1$ است و پیشامد A حتمی می‌گویند.

ج) اگر $A\cap B=\emptyset$ آنگاه A و B را پیشامدهای ناسازگار می‌گویند.

۷- اصول احتمال

۱) احتمال هیچ‌کدام بین ۰ و ۱ است یعنی $0 \le P(A) \le 1$.

۲) $P(S)=1$

۳) اگر A و B ناسازگار باشند: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

تذکر: اصل سوم قابل تعمیم برای هر تعداد پیشامد است.

۸- چند قانون در احتمال :

۱) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$A\cap B'$

۲) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

۳) $P(A')=1-P(A)$

۴) $P(\emptyset)=0$

مثال: اگر $B \subseteq A$ ثابت کنید: الف) $P(A-B)=P(A)-P(B)$ ب) $P(B) \leq P(A)$

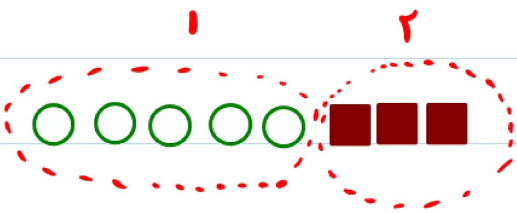
الف) $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \xrightarrow{\text{جایگزین}} P(A-B)=P(A)-P(\overbrace{A \cap B}^{B})=P(A)-P(B)$

ب) طبق الف $\rightarrow$ $P(A)=\overbrace{P(A-B)}^{\geq 0}+P(B) \Rightarrow P(A) \geq P(B)$

مثال کنکور تجربی ۹۹:

پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{1}{14}$ ۲) $\frac{1}{21}$ ۳) $\frac{1}{28}$ ✓ ۴) $\frac{1}{56}$



$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5! \times 3! \times 2!}{8!}=\frac{\cancel{5!} \times \cancel{6} \times 2}{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!}}=\frac{2}{56}=\frac{1}{28}$ گزینه ۳

مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹:

یک تاس سالم را سه بار به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم، احتمال روشدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

۱) $\frac{13}{36}$ ۲) $\frac{41}{108}$ ۳) $\frac{91}{216}$ ۴) $\frac{31}{72}$

A: آمدن حداقل یک ۶

A': اصلاً ۶ ظاهر نشود $\quad n(A')=5 \times 5 \times 5 = 125$

$P(A')=\frac{125}{6^3}=\frac{125}{216} \rightarrow P(A)=1-\frac{125}{216}=\frac{216-125}{216}=\frac{91}{216}$

گزینه ۳

مثال کنکور تجربی (خارج) ۹۹ :

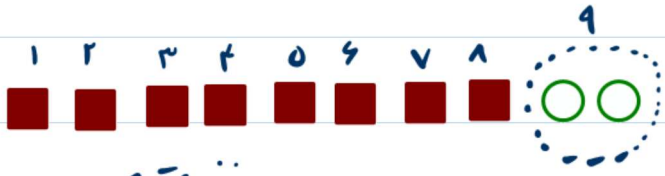
۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ✓ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

روش اول : استفاده از پیشامد متمم

A : دو نفر مورد نظر کنار هم نباشند

A' : دو نفر مورد نظر کنار هم باشند

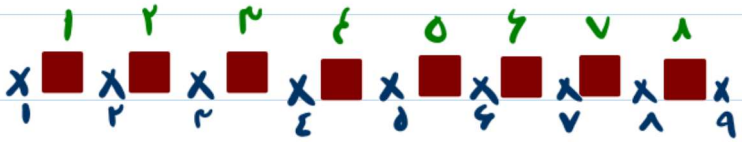


جابجایی دو نفر در بین ۹ جا

$$P(A') = \frac{۹! \times ۲!}{۱۰!} = \frac{۹! \times ۲}{۱۰ \times ۹!} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵} \rightarrow P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵}$$

گزینه ۳

روش دوم : محاسبه مستقیم



۲ جا بین ۹ جا

$$P(A) = \frac{P(۹,۲) \times ۸!}{۱۰!} = \frac{\frac{۹!}{(۹-۲)!} \times ۸!}{۱۰!} = \frac{\frac{۹!}{۷!} \times ۸!}{۱۰!}$$

$$= \frac{۹! \times ۸!}{۷! \times ۱۰!} = \frac{۹! \times ۸ \times ۷!}{۷! \times ۱۰ \times ۹!} = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$$

گزینه ۳

احتمال شرطی

احتمال وقوع پیشامد A به شرطی که قبلاً B اتفاق افتاده باشد را به صورت $P(A|B)$ نشان می‌دهیم.

چون احتمال برابر با حاصل تقسیم حالت‌های مطلوب بر کل حالت‌ها است، پس در $P(A|B)$ با توجه به اینکه B قبلاً رخ داده است، فضای نمونه‌ای همان B خواهد بود و تعداد اعضای فضای نمونه از $n(S)$ به $n(B)$ کاهش می‌یابد. پیشامد مطلوب شامل اعضایی از پیشامد B است که خاصیت A را هم دارند پس پیشامد مطلوب شامل اعضایی است که خاصیت $A\cap B$ را دارند پس داریم: $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$

و با تقسیم صورت و مخرج بر $n(S)$ هردو به احتمال تبدیل می‌شوند:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B)\neq 0$$

مثال: اگر در پرتاب تاس، فردی وزن ظاهر شده است احتمال اینکه عدد روی مهره اول باشد چقدر است؟

$S=\{1,\dots,6\}$

$A=\{2,4,5\}$ $\quad B=\{1,4,5\}$ $\quad A\cap B=\{4,5\}$:روش اول

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{3}$$

روش دوم:

$$P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

مثال: در پرتاب دو تاس سالم و دارای جسم، عدد روشده کمتر از ۴ است. احتمال آن را بیابید که هر دو عدد روشده برابر باشند.

فضای نمونه‌ای: B

$B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$

$A\cap B=\{(1,1),(2,2)\}$ $\quad P(A|B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

مثال: در خانواده‌ای ۴ فرزندی می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان پسر است. احتمال اینکه این خانواده دقیقاً ۲ پسر داشته باشد چقدر است؟

تعداد پیشامدهای خبر

$n(B)=2^4-1=16$

$n(A\cap B)=\binom{4}{2}=6$ $\quad P(A|B)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

مثال: کیسه‌ای حاوی ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. ۵ مهره به تصادف خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که سفید است. احتمال اینکه مهره دوم که خارج می‌کنیم نیز سفید باشد، چقدر است؟

روش اول:

B: مهره اول سفید $\quad P(B)=\frac{\binom{5}{1}}{\binom{11}{1}}=\frac{5}{11}$

A: مهره دوم سفید

$P(A\cap B)=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{11}{1}\binom{10}{1}}=\frac{2\times 4}{11\times 2}=\frac{2}{11}$

$P(A|B)=\frac{\frac{2}{11}}{\frac{5}{11}}=\frac{2}{5}$

روش دوم: چون مهره خروجی اول سفید است پس فضای جدید شامل ۴ مهره سفید و ۶ سیاه است.

احتمال اینکه مهره خروجی دوم سفید باشد $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ است.

مثال: سه دسته‌ی ۱۰ تایی کارت بازی‌های آبی، قرمز و سبز را با هم مخلوط کرده‌ایم. کارت‌های از جورند شماره‌های ۱ تا ۱۰ نوشته شده است. ۵ کارت به تصادف بیرون می‌کشیم. اگر حداقل ۲ تا از این کارت‌ها قرمز باشد به چه احتمالی دو کارت قرمز آبی است؟

B: قرمز بودن ۲ کارت

A: آبی بودن ۲ کارت

$$p(B) = \frac{\binom{20}{2}\binom{10}{3}}{\binom{40}{5}} \qquad p(A \cap B) = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{2}}{\binom{20}{5}}$$

$$p(A|B) = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{2}}{\binom{20}{2}\binom{10}{3}}$$

برای محاسبه $p(B)$ سه حالت داریم ۲ یا ۳ یا ۵ کارت قرمز باشند پس:

$$p(A|B) = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{3}}{\binom{10}{5} + \binom{10}{4}\binom{20}{1} + \binom{10}{3}\binom{20}{2}}$$

نکته:

۱) $p(A'|C) = 1 - p(A|C)$

۲) $p(A \cup B|C) = p(A|C) + p(B|C) - p(A \cap B|C)$

۳) $p(A - B|C) = p(A|C) - p(A \cap B|C)$

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A) = ۰/۴$ ، $P(B \mid A) = ۰/۲۵$ و $P(B) = ۰/۳$ باشد، $P(B \mid A')$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B-A)}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A')}$$

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - ٪۴ = ٪۶$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow ٪۲۵ = \frac{P(A \cap B)}{٪۴} \rightarrow P(A \cap B) = ٪۴ \times ٪۲۵ = ٪۱$$

$$\Rightarrow P(B|A') = \frac{٪۱۳ - ٪۱}{٪۶} = \frac{٪۱۲}{٪۶} = \frac{۱}{۲}$$ گزینه ۲

مثال کنکور تجربی ۹۸ :

احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

۱) ۰/۷۴ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

$$\begin{cases} P(A) = ٪۷ & P(B|A) = ٪۸ \\ P(B) = ٪۶ & P(A \cup B) = ? \end{cases}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow ٪۸ = \frac{P(A \cap B)}{٪۷} \rightarrow P(A \cap B) = ٪۷ \times ٪۸ = ٪۵۶$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ٪۷ + ٪۶ - ٪۵۶ = ۱۳٪ - ٪۵۶ = ٪۷۴$$ گزینه ۱

مثال: کنکور ریاضی ری ۱۴۰۱

پیشامدهای ناسازگار A و B از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر $P(A)=\frac{1}{6}$ و $P(B)=\frac{1}{4}$ باشد، مقدار $P(B' \mid A')$ کدام است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۵۵ ۴) ۰/۷۵

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} \qquad P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$A' \cap B' = (A \cup B)' \Rightarrow P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

ناسازگار $\Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{12-2-3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$P(B'|A') = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{7 \times 6}{12 \times 5} = \frac{7}{10} = \%70$$

مثال: کنکور ریاضی ۱۴۰۱

در یک کیسه ۱۶ گوی به شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. دو گوی به‌طور متوالی و بدون جایگذاری، به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم شماره گوی دوم از شماره گوی اول کمتر است، با کدام احتمال شماره گوی اول ۱۶ است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ✓ ۴) $\frac{1}{4}$

$$B = \{\underbrace{(2,1)}_{1}, \underbrace{(3,1),(3,2)}_{2}, \underbrace{(4,1),(4,2),(4,3)}_{3}, \dots, \underbrace{(16,1),(16,2),\dots,(16,15)}_{15}\}$$

$$n(B) = \frac{15 \times 16}{2} = 120 \quad , \quad A \cap B = \{(16,1), \dots, (16,15)\} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

پیشامدهای مستقل و وابسته

می‌گوییم دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، به شرطی که وقوع هریک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه:

$$P(A|B)=P(A) \quad , \quad P(B|A)=P(B)$$

در نتیجه: دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند اگر و فقط اگر $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

دقت داشته باشید اگر A و B مستقل باشند آنگاه A و B'، A' و B، A' و B' هم مستقل‌اند.

نکته مهم: اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار باشند آنگاه A و B مستقل نیستند.

مثال: در ظرفی ۴ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۱ مهره سبز موجود است و در ظرف دیگر ۶ مهره سفید و ۲ مهره سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره متفاوت است؟

$$P=\underbrace{\frac{4}{10}\times\frac{2}{8}}_{\text{اول سفید دوم سبز}}+\underbrace{\frac{5}{10}\times\frac{2}{8}}_{\text{اول سیاه دوم سبز}}+\underbrace{\frac{1}{10}\times\frac{6}{8}}_{\text{اول سبز دوم سفید}}=\frac{54}{80}=\frac{27}{40}$$

مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹:

در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = ۰/۱$، $P(A \cup B) = ۰/۶$ و با فرض $P(B') > P(B)$، احتمال وقوع پیشامد B، کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

مستقل $\rightarrow P(A)\times P(B)$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

مجموع ریشه‌ها

$٪۶ = P(A)+P(B) - ٪۱ \rightarrow P(A)+P(B) = ٪۷$

$P(A\cap B) = P(A)\times P(B) = ٪۱$

ضرب ریشه‌ها (P)

یادآوری: $x^2 - Sx + P = 0$

$x^2 - ٪۷x + ٪۱ = 0 \rightarrow (x - ٪۵)(x - ٪۲) = 0$

$\begin{cases} x = ٪۲ \\ x = ٪۵ \end{cases}$ $\xrightarrow{P(B')>P(B)}$ $P(B) = ٪۲$ ، $P(A) = ٪۵$

مثال کنکور ریاضی خارج ۱۴۰۱

فرض کنید علی و حسن دو کماندار باشند که با احتمال‌های ۰/۶ و ۰/۴ به هدف می‌زنند. اگر هر کدام از آنها یک بار تیراندازی کنند و بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده است، با کدام احتمال علی به هدف زده است؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۹}$ ✓ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲۵}$

$P(A\cup B) = ٪۶ + ٪۴ - (٪۶ \times ٪۴) = ۱ - ٪۲۴ = ٪۷۶$

$P(A \mid A\cup B) = \frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P(A)}{P(A\cup B)} = \frac{٪۶}{٪۷۶} = \frac{۱۵}{۱۹}$

تذکر: سه پیشامد A، B و C را مستقل گوییم هرگاه:

۱) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

۲) $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$

۳) $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$

۴) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

نکته: انتخاب‌های با جایگذاری مستقل و بدون جایگذاری وابسته‌اند.

مثال: در کدام یک A و B مستقل از هم هستند؟

الف) از درون جعبه به تواتی و بدون جایگذاری از جعبه‌ای شامل ۶ مهره سفید و ۴ سیاه خارج کنیم. $\begin{cases} A: \text{سفید برداشتن} \\ B: \text{سیاه برداشتن} \end{cases}$

ب) از درون جعبه به تواتی و با جایگذاری از جعبه‌ای شامل ۶ مهره سفید و ۴ سیاه خارج کنیم $\begin{cases} A: \text{سفید برداشتن} \\ B: \text{سیاه برداشتن} \end{cases}$

الف) $P(A) = \frac{6 \times 9}{10 \times 9} = \frac{6}{10}$ $\quad P(B) = \frac{4 \times 9}{10 \times 9} = \frac{4}{10}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{6 \times 4}{10 \times 9} = \frac{24}{90}$

$P(A) \times P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \neq \frac{24}{90}$ مستقل نیستند

ب) $P(A) = \frac{6 \times 10}{10 \times 10} = \frac{6}{10}$ $\quad P(B) = \frac{10 \times 4}{10 \times 10} = \frac{4}{10}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{6 \times 4}{10 \times 10} = \frac{24}{100}$

$P(A) \times P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$ مستقل‌اند.

درس دوم: آمار توصیفی

یادآوری:

آمار: مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: مجموعه روش هایی است شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده ها و در آخر نتیجه گیری، قضاوت و پیش بینی، در مورد آزمایش های تصادفی است.

جامعه آماری: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آن ها تحقیق صورت می گیرد.

نمونه: بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گوئیم.

به تعداد اعضای جامعه، اندازه جامعه یا حجم جامعه و به تعداد اعضای نمونه، اندازه نمونه یا حجم نمونه می گوئیم.

متغیر: هر ویژگی از جامعه آماری که در اعضای جامعه یک سان نیست و از عضوی به عضو دیگر تغییر می کند را متغیر می گوئیم و به خود یا عباراتی که به متغیر نسبت داده می شود مقدار متغیر می گوئیم.

انواع متغیر: دو نوع متغیر داریم: الف) کمی ب) کیفی

الف) متغیر کمی: متغیرهایی که قابل اندازه گیری بوده و مقادیر عددی به خود می گیرند. مانند قد، وزن، تعداد و ...

متغیرهای کمی به دو نوع پیوسته و گسسته تقسیم می‌شوند:

۱) متغیر کمی پیوسته: اگر دو متغیر a و b را بگیرید هر مقداری بین آن‌ها را هم می‌توانند اختیار کنند. مانند قد، سن، وزن و...

۲) متغیر کمی گسسته: متغیر کمی‌ای که پیوسته نباشد مانند تعداد فرزندان، تعداد مکالمات تلفنی در شرکت و...

ب) متغیر کیفی: متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند و صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیاء در گروه‌ها به کار می‌روند و لزوماً مقدار عددی ندارند مانند: جنسیت، گروه خونی و رنگ خودرو و...

متغیرهای کیفی به دو نوع ترتیبی و اسمی تقسیم می‌شوند:

۱) متغیر کیفی ترتیبی: متغیرهایی که نوعی ترتیب طبیعی در آن‌ها وجود دارد مانند سطح تحصیلات، کیفیت یک میوه (درجه ۱، درجه ۲ و...) و مراحل زندگی (کودکی، جوانی و...)

۲) متغیر کیفی اسمی: متغیرهایی که ترتیبی نداشته مانند گروه خونی، جنسیت افراد و...

شاخص های مرکزی و پراکندگی:

(الف) معیارهای گرایش به مرکز (شاخص های مرکزی)

معیارهایی که محل تمرکز داده ها را نشان می دهد. دو معیار گرایش به مرکز داریم: میانگین - میانه

۱) میانگین: فرض کنید داده ها $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشند، جمع داده ها تقسیم بر تعداد آن را میانگین آن را تعریف می شود که با $\bar{x}$ نمایش داده می شود. پس:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

حرف سیگما (Σ): برای خلاصه نویسی جمع از نماد Σ استفاده می کنیم به این صورت که:

$$\sum_{i=a}^{b} (\text{عبارت برحسب } i)$$

$i=a$ ← از این

مثلاً

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

پس فرمول میانگین را می توان به صورت $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ هم نوشت.

مثال: میانگین داده های $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ برابر ۲۴ است. میانگین داده های $x_1, x_2, \dots, x_{10}, 14, 20$ را بدست آورید.

$$24 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + 14 + 20}{12} \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i + 34 = 276 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i = 242$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + 19 + 10}{12} = \frac{242 + 29}{12} = \frac{271}{12} = 22{,}58$$

نکته: اگر میانگین n داده $\bar{x}$ و میانگین m داده $\bar{y}$ باشد میانگین همه‌ی داده‌ها $\frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}$ می‌شود.

نکته: فرض کنید a و b دو عدد ثابت و میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد و داده‌های جدید y_i به صورت $y_i = ax_i + b$ تعریف شوند. در این صورت میانگین $y_1, \ldots, y_n$ برابر $a\bar{x} + b$ می‌شود.

نکته: اگر داده‌ای بیشتر از میانگین به داده‌ها اضافه شود میانگین زیاد و اگر کمتر از میانگین اضافه کنیم، میانگین کم می‌شود و اگر داده‌ای مساوی میانگین حذف یا اضافه کنیم میانگین تغییر نمی‌کند.

انحراف از میانگین: $(x_i - \bar{x})$ را انحراف داده iام از میانگین می‌نامیم. می‌توان ثابت کرد

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

می‌شود.

تذکر: اگر داده‌ها تشکیل دنباله‌حسابی بدهند میانگین آن‌ها $\frac{\text{آخری} + \text{اولی}}{2}$ می‌شود.

مثال: میانگین n داده‌ی آماری برابر ۱۲ و میانگین ۱۲ داده‌ی دیگر برابر ۱۰ است. دو گروه را با هم ارزیابی کنیم میانگین کل داده‌ها ۱۱٫۵ می‌شود. n را بیابید.

$$\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}=11{,}5 \Rightarrow \frac{12n+12\times 10}{n+12}=11{,}5 \Rightarrow 11{,}5n+138=12n+120$$

$$\Rightarrow \%5n=18 \Rightarrow n=\frac{18}{\%5}=36$$

مثال: اگر میانگین داده‌های $2x_1+5$، $2x_2+5$، $2x_3+5$ برابر ۲۰ باشد میانگین $1+\frac{x_1}{3}$، $1+\frac{x_2}{3}$ و $1+\frac{x_3}{3}$ را بیابید.

$$2x_i+5 \xrightarrow{-5} 2x_i \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{x_i}{3} \xrightarrow{+1} \frac{x_i}{3}+1$$

$$\bar{X}=20 \xrightarrow{-5} \bar{X}=15 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \bar{X}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2} \xrightarrow{+1} \bar{X}=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}=3{,}5$$

نکته: برای محاسبه سریع میانگین اعداد بزرگ، از همه اعداد یکدرمیان یکی کم یا زیاد می‌کنیم تا به میانه داده‌ها نزدیک باشد، کم می‌کنیم. میانگین اعداد جدید را محاسبه و در آخر عددی را که کم کرده‌ایم به میانگین اضافه می‌کنیم.

مثال: میانگین اعداد ۹۰، ۹۲، ۹۷، ۱۰۰، ۱۰۵، ۱۱۰ و ۱۲۰ را بیابید.

۹۰، ۹۲، ۹۷، ۱۰۰، ۱۰۵، ۱۱۰، ۱۲۰

۱۰۵ را از همه کم می‌کنیم:

-۱۵، -۱۳، -۸، -۵، ۰، ۵، ۱۵

$$\bar{X}_{\text{جدید}}=\frac{-15+\cdots+15}{7}=-3 \rightarrow \bar{X}_{\text{قدیم}}=-3+105=102$$

۲) میانه : عددی که بعد از مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ در وسط قرار می‌گیرد.

اگر n داده داشته باشیم دو حالت رخ می‌دهد :

الف) n فرد باشد : فقط یک عدد در وسط قرار می‌گیرد که همان میانه خواهد بود. شماره این داده $\frac{n+1}{2}$ است.

ب) n زوج باشد : دو داده در وسط قرار می‌گیرند که میانگین این دو داده میانه است. شماره این دو داده $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$ است.

مثال : میانه داده‌های زیر را بیابید.

۱) ۱, ۴, ۸, ۱۵, ۱۰, ۱۱, ۶, ۱۲, ۱۰, ۴, ۱۷, ۲, ۱۹

$n=14$: داده $\frac{14+1}{2}=7.5$ یعنی ۸ میانه است. ۱, ۱, ۲, ۴, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۵, ۱۷, ۱۹ (میانه)

۲) ۱۲, ۵, ۱۵, ۴, ۶, ۹, ۱۶, ۲۰

$n=8$: میانگین دو داده وسطی داده چهارم و پنجم میانه است. $\frac{8}{2}$ و $\frac{8}{2}+1$

۳, ۵, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۶, ۲۰

میانه $= \frac{9+12}{2} = 10.5$

مثال : به ازای کدام مقدار a میانه داده‌های ۴, ۱۵, ۴, ۵, ۱۱, ۲۱ برابر ۸.۵ است؟

۱) ۵ ✓ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

چون تعداد داده‌ها ۶ تاست پس میانگین داده‌های سوم و چهارم میانه خواهد بود.

$\frac{a+11}{2} = 8.5 \rightarrow a+11 = 17 \rightarrow a=6$

۳, ۴, ۵, ۱۱, ۱۵, ۲۱

چارک اول و سوم : میانه داده‌های قبل از میانه را چارک اول Q_1 و میانه داده‌های بعد از میانه را چارک سوم Q_3 می‌نامیم. به عبارت دیگر به میانه $\left[\frac{n}{4}\right]$ داده‌ای از چارک اول و به میانه $\left[\frac{3n}{4}\right]$ داده‌ای از چارک سوم می‌گوییم.

مثال: چارک اول و سوم را برای داده‌های زیر بیابید.

۱) $1,2,\dots,9$: $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ $\quad n=9$

$Q_1=\frac{2+4}{2}=3$ $\quad Q_3=\frac{7+8}{2}=7.5$

Q_2 یا میانه

۲) $5,6,4,2,7,8,10,9$ $\quad n=8$

$2,3,4,5,6,7,8,9,10$

$Q_1=4$ $\quad Q_3=8.5$ $\quad Q_2=6.5$

ب) معیارهای پراکندگی :

معیارهایی که دوری یا نزدیکی داده‌ها از میانگین را بررسی می‌کنند. سه معیار مهم برای سنجش میزان پراکندگی از میانگین عبارتند از : انحراف معیار - واریانس - ضریب تغییرات

۱) انحراف معیار و واریانس :

اگر مجموع مربعات انحراف از میانگین را بر تعداد داده‌ها تقسیم کنیم واریانس بدست می‌آید که آن را با σ^2 نمایش می‌دهیم یعنی :

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

جذر واریانس را انحراف معیار می نامیم و با σ نشان می دهیم یعنی:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

نکته: اگر واریانس و انحراف معیار داده‌ها کوچک باشد به این معناست که پراکندگی حول میانگین کم و در نتیجه داده‌ها به هم نزدیک‌ترند و اگر واریانس و انحراف معیار داده‌ها عددی بزرگ باشد یعنی پراکندگی داده‌ها حول میانگین شان زیاد و در نتیجه داده‌ها از هم دورند.

مثال: واریانس و انحراف معیار داده‌های زیر را بدست آورید.

۱۰, ۱۵, ۱۸, ۱۴, ۱۴, ۲۰

$$\bar{x} = \frac{10+15+18+14+14+20}{6} = \frac{90}{6} = 15$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - 15)^2}{6} = \frac{(10-15)^2 + (15-15)^2 + (18-15)^2 + (14-15)^2 + (14-15)^2 + (20-15)^2}{6}$$

$$= \frac{25+0+9+1+1+25}{6} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

چند نکته :

۱) اگر داده‌ها تشکیل دنباله‌حسابی با قدرنسبت d بدهند واریانس آن‌ها $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}d^2$ می‌شود.

۲) اگر به همه داده‌ها عدد ثابتی اضافه یا کم کنیم واریانس و انحراف معیار تغییر نمی‌کند. از این نکته وقتی داده‌ها بزرگ باشند می‌توان استفاده کرد.

۳) اگر واریانس یا انحراف معیار صفر باشد آنگاه همه داده‌ها مساوی با میانگین (و در نتیجه مساوی با هم) هستند و برعکس.

۴) اگر داده‌ها را در k ضرب کنیم انحراف معیار $|k|$ برابر و واریانس k^2 برابر می‌شود.

۵) فرمول واریانس را می‌توان به صورت : $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$ هم نوشت.

۶) واحد اندازه‌گیری واریانس، مربع واحد داده‌های اولیه است و واحد اندازه‌گیری انحراف معیار همان واحد اندازه‌گیری داده‌های اولیه است.

مثال : مجموع مربعات ده داده برابر ۲۲۵۰ و میانگین آن‌ها ۱۰/۲ است. انحراف معیار کدام است.

۱) ۴ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \bar{x}^2 = \frac{2250}{10} - (10.2)^2 = 225 - 200 = 25 \Rightarrow \sigma = 5$

۲) ضریب تغییرات (CV)

ی مفهوم بعدی برای سنجش پراکندگی داده‌ها تعریف کنیم که در آن هم پراکندگی داده‌ها و هم میانگین تعیین دخیل باشه. مثلاً در یک تیم والیبال هرچقدر میانگین قد بازیکنان بلندتر و پراکندگی قدشون کمتر باشه، از نظر طول قد متعادل‌تره.

این معیار ضریب تغییرات نامیده می‌شود که میزان پراکندگی داده‌ها را برای یک واحد از میانگین نشان می‌دهد.

تعریف: تقسیم انحراف معیار بر میانگین را ضریب تغییرات می‌گوییم و: $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

چند نکته:

۱) ضریب تغییرات به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد. (مثلاً اگر داده‌ها بر حسب cm اندازه‌گیری شده باشند و قرار کنیم که قدها را به m تبدیل و بعد CV را حساب کنیم.) بنابراین برای مقایسه پراکندگی داده‌های دو واحد متفاوت بهترین شاخص پراکندگی CV است که بدون واحد است. (مثلاً مقایسه پراکندگی قد با وزن دانش‌آموزان)

۲) هرچقدر ضریب تغییرات داده‌ها کمتر باشد، میزان پراکندگی داده‌ها کمتر است.

۳) اگر داده‌ها را k برابر کنیم، CV تغییر نمی‌کند.

۴) اگر به همه داده‌ها عدد k ($k > 0$) را اضافه کنیم، ضریب تغییرات به صورت $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}+k}$ تغییر می‌کند و مقدار CV کم می‌شود.

مثال: اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ به ترتیب ۴ و ۱ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $3+x_1, 3+x_2, \dots, 3+x_{10}$ کدام است؟ ۱) ۵٪ ۲) ۱۲۵٪ ۳) ۱۲۵٪ ۴) ۱

$$(CV)_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8} = 0.125$$

مثال: اگر انحراف معیار داده‌های $x_1, \dots, x_n$ برابر ۲ و ضریب تغییرات آنها برابر ۵ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $2+5x_1, \dots, 2+5x_n$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{5+5}$ ۲) $\frac{5}{5+5}$ ۳) $\frac{5}{5+25}$ ۴) $\frac{5+25}{5}$

$$(CV)_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sigma_x}{(CV)_x} = \frac{2}{5} \qquad \bar{y} = 5\bar{x} + 2 = 5\times\frac{2}{5} + 2 = \frac{10+25}{5}$$

$$\sigma_y = 2\times 5 = 10 \Rightarrow (CV)_y = \frac{10}{\frac{10+25}{5}} = \frac{10\times 5}{10+25} \Rightarrow (CV)_y = \frac{5}{5+5}$$

مثال: اگر میانگین و CV اندازه اضلاع مربع‌های یک مجموعه به ترتیب ۱۵ و ۱۲٪ باشد، میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

۱) ۲۴۲ ۲) ۲۲۹ ۳) ۲۲۷ ۴) ۲۲۴

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0.12 = \frac{\sigma}{15} \Rightarrow \sigma = 4 \Rightarrow \sigma^2 = 9$$

اگر ضلع iام باشد مساحت x_i^2 می‌شود. میانگین مساحت‌ها همان میانگین مربعات داده‌ها، از فرمول واریانس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 9 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (15)^2 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{n} = 234$$