ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل چهارم: مثلثات

درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه

جلسه اول: صفحات ۷۲ تا ۷۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

زاویه و موقعیت استاندارد :

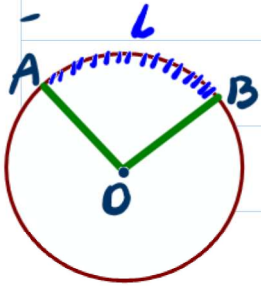
زاویه از یک رأس و دو ضلع تشکیل شده است. اگر رأس زاویه روی مبدأ مختصات و ضلع ابتدایی آن روی قسمت مثبت محور ها باشد می گوئیم زاویه در موقعیت استاندارد مشخص شده است. اگر زاویه مثبت باشه پاد ساعتگرد و اگر منفی باشه ساعتگرد می چرخیم.



چند تعریف در دایره :

۱) زاویه مرکزی : زاویه ای است که رأس آن روی مرکز دایره است و اضلاع آن شعاع دایره اند.

۲) کمان : هر دو نقطه روی دایره آن را به دو قسمت تقسیم می کند که به آن ها کمان می گوئیم.



و به اندازه ای از محیط دایره که جدا کرده اند، طول کمان می گوئیم.

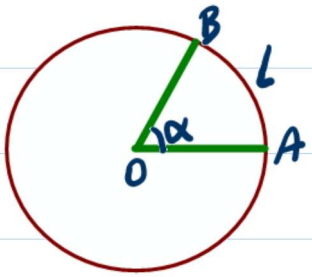
$\overset{\frown}{AB} = L$

۳) اندازه کمان : اندازه کمان هر زاویه مرکزی مقابل به آن است : $\hat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$

واحدهای اندازه گیری زاویه :

الف) درجه : اگر محیط دایره را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، زاویه مرکزی مقابل به هر کمان ۱° است.

اگر در دایره $C(O,r)$ داشته باشیم $\hat{AOB} = \alpha$ و طول کمان AB را L بگیریم آنگاه :

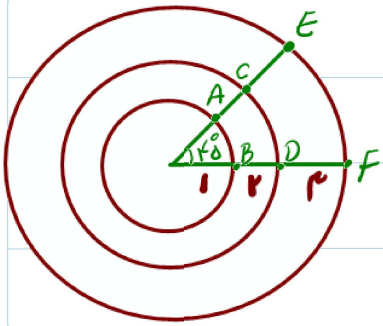


$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{۳۶۰^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

$$\frac{\alpha}{۳۶۰} = \frac{L}{۲\pi r}$$

$$L = \frac{\alpha}{۳۶۰}(۲\pi r) = \frac{\alpha}{۱۸۰}\pi r$$

مثال : طول کمان مقابل به زاویه ۴۵° در دایره‌هایی به شعاع ۱، ۲ و ۳ را حساب کنید.



$$\overset{\frown}{AB} = \frac{۴۵}{۱۸۰}\pi \times ۱ = \frac{\pi}{۴}$$

$$\overset{\frown}{CD} = \frac{۴۵}{۱۸۰}\pi \times ۲ = \frac{\pi}{۲}$$

$$\overset{\frown}{EF} = \frac{۴۵}{۱۸۰}\pi \times ۴ = \frac{۳\pi}{۴}$$

مثال: در مثال قبل نسبت طول کمان به شعاع را در هر حالت بیابید.

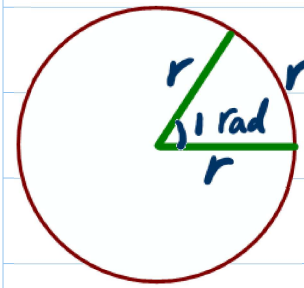
$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\frac{\pi}{۴}}{۱} = \frac{\pi}{۴}$$

$$\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\frac{\pi}{۲}}{۲} = \frac{\pi}{۴}$$

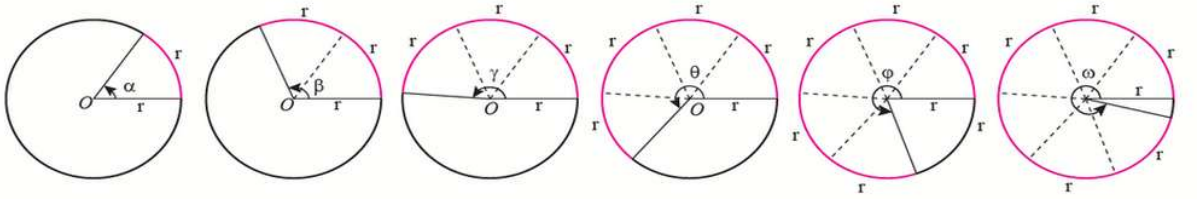
$$\frac{\overset{\frown}{EF}}{۲} = \frac{\frac{۳\pi}{۴}}{۳} = \frac{\pi}{۴}$$

نتیجه: نسبت طول کمان روبه‌رو به یک زاویه خاص به شعاع دایره در هر دایره‌ای همواره مقدار ثابتی است. از این مقدار ثابت برای بیان زاویه به واحدی خیلی دقیق استفاده می‌کنیم.

ب) رادیان: یک رادیان، اندازه زاویه مرکزی مقابل کمانی است که طول آن برابر



شعاع دایره است. یک رادیان تقریباً ۵۷٫۲۹° است.



$\alpha = \frac{r}{r} = 1\ rad$ $\quad \beta = \frac{2r}{r} = 2\ rad$ $\quad \gamma = \frac{3r}{r} = 3\ rad$ $\quad \theta = \frac{4r}{r} = 4\ rad$ $\quad \varphi = \frac{5r}{r} = 5\ rad$ $\quad \omega = \frac{6r}{r} = 6\ rad$

تبدیل واحدهای زاویه:

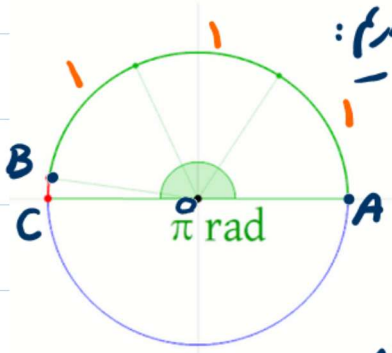
طول کمان روبه‌رو به زاویه ۱۸۰°، نصف محیط دایره است پس:

محیط دایره

$$\alpha = \frac{2\pi r}{2} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

پس ۱۸۰°، π رادیان است.

به صورت ریگی نیز می‌توانیم به این نتیجه برسیم. دایره‌ای به شعاع واحد داریم:



با توجه به شکل: $A\hat{O}B = 3\ rad$

زاویه $A\hat{O}C$ یک زاویه نیم‌صفحه است پس $A\hat{O}C = 180°$.

جالب است بدانید از B تا C، قدر دایره‌ای عدد تقریبی π است پس:

$\hat{AOC} = \pi \text{ rad}$

پس نتیجه می‌گیریم π رادیان 180° است.

نتیجه: اگر D اندازه زاویه برحسب درجه و R اندازه زاویه برحسب رادیان باشد داریم:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

با استفاده از تناسب بالا:

الف) تبدیل رادیان به درجه:

$$D = R \times \frac{180}{\pi}$$

ب) تبدیل درجه به رادیان

$$R = D \times \frac{\pi}{180}$$

مثال: زاویه‌های زیر را به رادیان تبدیل کنید.

۱) 30° $\quad R = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$

۲) 45° $\quad R = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$

۳) 60° $\quad R = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

۴) ۲۷۰° $\quad R = ۲۷۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۳\pi}{۲}$

۵) ۴۶۰° $\quad R = ۶۴۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۲\pi$

۶) ۱۲۵° $\quad R = ۱۲۵ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۳\pi}{۴}$ ← ۴۵

۷) ۲۱۰° $\quad R = ۲۱۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۷\pi}{۶}$ ← ۳۰

۸) ۳۴۰° $\quad R = ۳۴۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۱۱\pi}{۶}$ ← ۶۰

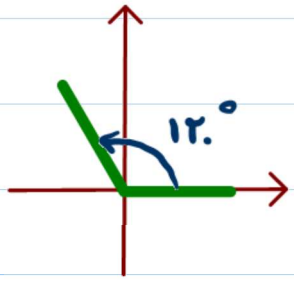
۹) ۷۲° $\quad R = ۷۲ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۵}$

۱۰) ۹۰° $\quad R = ۹۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۲}$

مثال: زوایای زیر را به درجه تبدیل کنید و مشخص کنید انتهای کمان در کدام ناحیه قرار می‌گیرد.

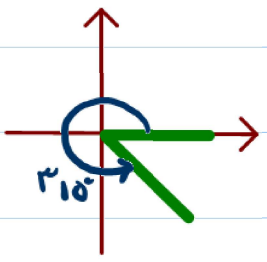
۱۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ $\quad D = \frac{۲\pi}{۳} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۱۲۰^\circ$

ناحیه دوم



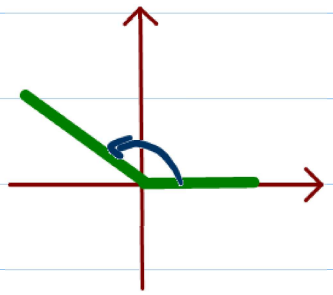
۱۲) $\frac{۷\pi}{۴}$ $\quad D = \frac{۷\pi}{۴} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۳۱۵^\circ$

ناحیه چهارم



۳) $\frac{۴\pi}{۵}$ $\quad D = \frac{۴\pi}{۵} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۱۴۴^\circ$

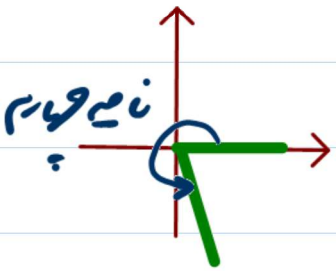
ناحیه دوم



۴) $۵\ rad$ $\quad D = ۵ \times \frac{۱۸۰}{\pi} = \frac{۹۰۰}{\pi}$

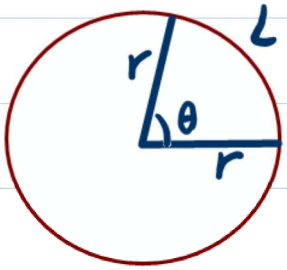
$D = \frac{۹۰۰}{\pi} \simeq ۲۸۶,۴۷^\circ$

ناحیه چهارم

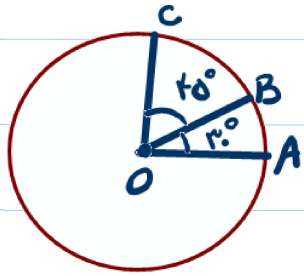


نکته: اگر در دایره‌ای به شعاع r اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی برحسب رادیان θ باشد طول کمان روبه‌رو به آن زاویه‌ی طول l از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow l = r\theta$$ (θ: رادیان)



مثال: در شکل زیر طول کمان AB برابر ۴π است. طول کمان BC را بیابید.



$\overset{\frown}{AB} = ۴\pi$

$\theta_۱ = AB$ اندازه کمان $= ۳۰^\circ \xrightarrow{\text{رادیان}} \frac{\pi}{۶}$

$\theta_۲ = BC$ اندازه کمان $= ۴۵^\circ \xrightarrow{\text{رادیان}} \frac{\pi}{۴}$

$\overset{\frown}{BC} = ?$

$\overset{\frown}{AB} = r\theta_1 \rightarrow 4\pi = r \times \frac{\pi}{9} \xrightarrow{\times \frac{9}{\pi}} r = 36\pi \times \frac{9}{\pi} = 324$

$\overset{\frown}{BC} = r\theta_2 \rightarrow \overset{\frown}{BC} = 324 \times \frac{\pi}{324} = 9\pi$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

قسمت اول

جلسه دوم: صفحات ۷۷ تا ۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

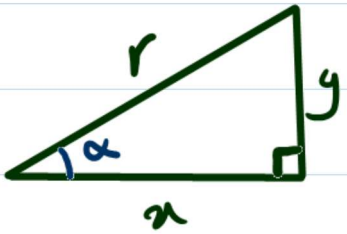
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری :

نسبت های مثلثاتی :



۱) $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}}$

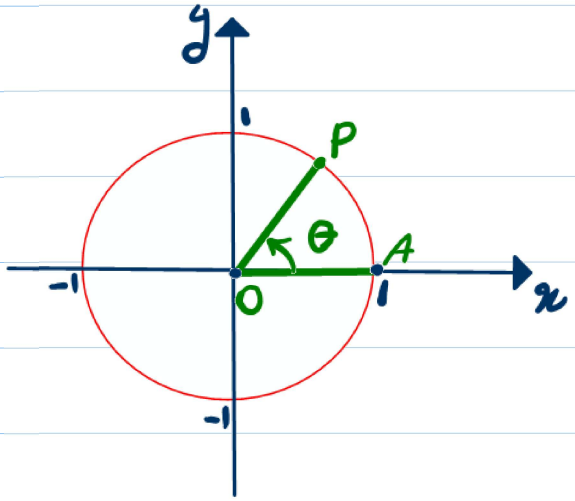
۲) $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$

۳) $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha}$

۴) $\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha}$

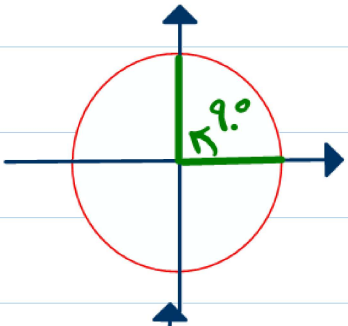
تعریف دایره مثلثاتی : دایره‌ای به شعاع یک واحد که مرکز آن مبدأ مختصات است.

زاویه در دایره مثلثاتی : ضلع ابتدای هر زاویه روی قسمت مثبت محور x ها واقع است و ضلع دوم حرکت می‌کند (این ضلع محیط دایره را قطع می‌کند) اگر ضلع دوم در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کند زاویه مثبت می سازد و اگر در جهت عقربه های ساعت حرکت کند زاویه منفی می سازد.

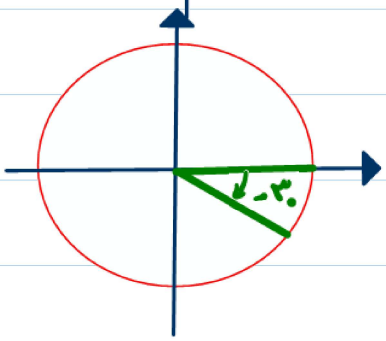


مثال: زوایای زیر را در دایره مثلثاتی مشخص کنید.

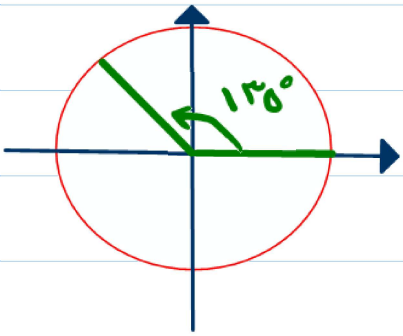
الف) 90°



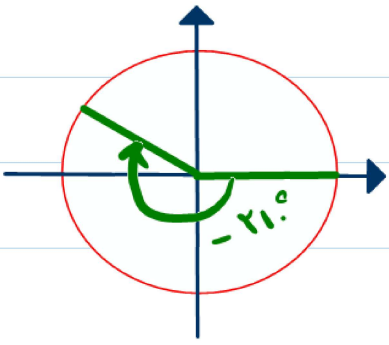
ب) -30°



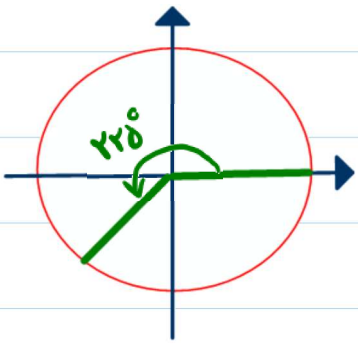
پ) 135°



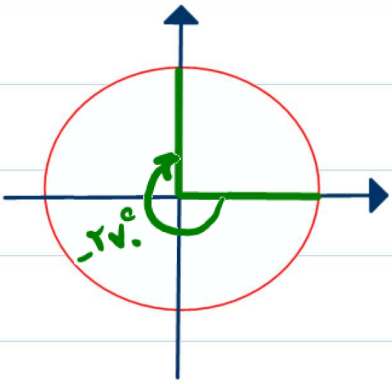
ت) -210°



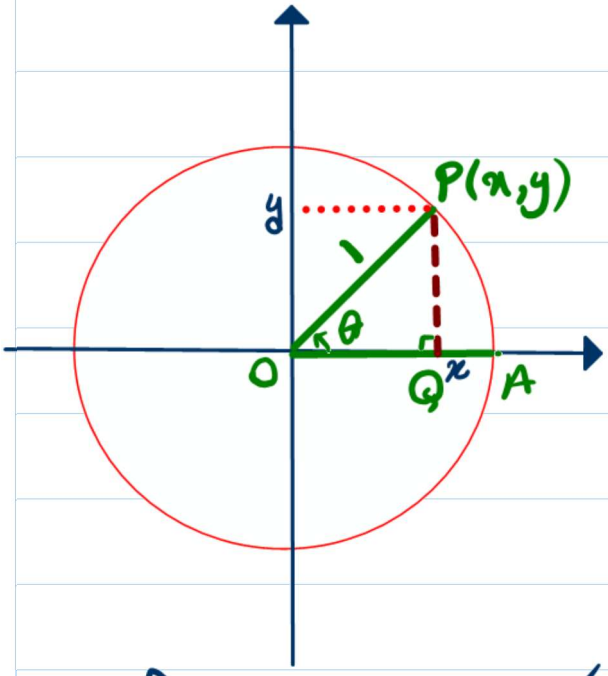
ث) 225°



ج) -270°



نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی :



زاویه θ را در دایره مثلثاتی در نظر بگیرید.

اگر ضلع دوم این زاویه محیط دایره را

در نقطه $P(x,y)$ قطع کند و از این نقطه

بر محور xها عمود کنیم تا این محور را در Q قطع کند، مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OPQ}$ بدست

می‌آید. حال داریم :

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin\theta$$

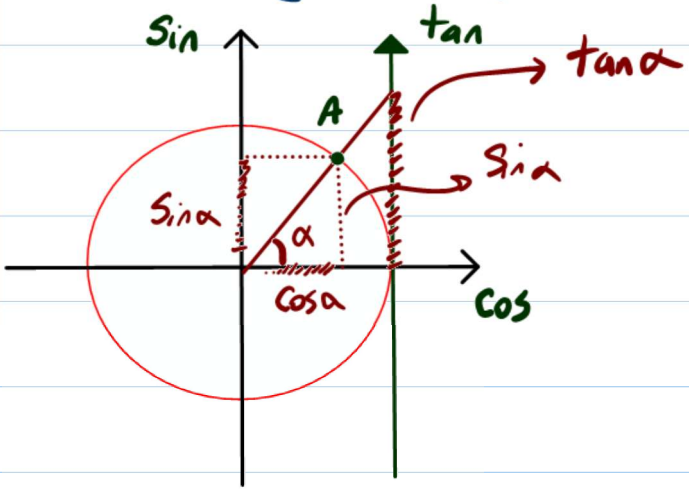
$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos\theta$$

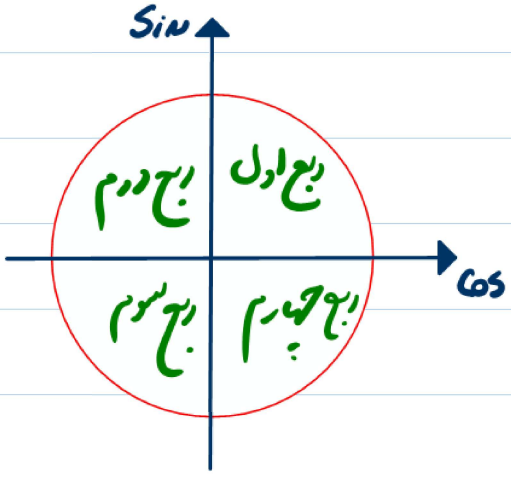
$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\theta$$

$$\cot\theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \cot\theta$$

قرارداد : در دایره مثلثاتی محور xها را محور $\cos$ها و محور yها را محور $\sin$ها می‌نامیم.

این دو محور مختصات، دایره مثلثاتی را به چهار ناحیه یا ربع مثلثاتی تقسیم می‌کنند.



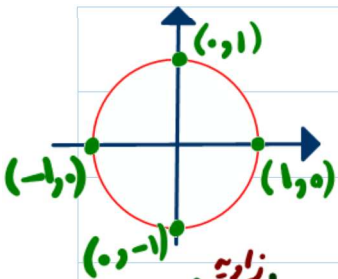


θ در ربع اول : $0^\circ < \theta < 90^\circ$

θ در ربع دوم : $90^\circ < \theta < 180^\circ$

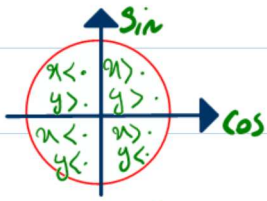
θ در ربع سوم : $180^\circ < \theta < 270^\circ$

θ در ربع چهارم : $270^\circ < \theta < 360^\circ$



جدول نسبت های مثلثاتی زوایای مرزی ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰°، ۳۶۰°

نسبت \ زاویه θ	۰	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos\theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده



* جدول علامت های نسبت های مثلثاتی در نواحی چهارگانه

نسبت \ ناحیه	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
Sin	+	+	−	−
Cos	+	−	−	+
Tan	+	−	+	−
Cot	+	−	+	−

نکته: Sin و Cos برای هر زاویه دلخواه همواره عددی بین ۱ و ۱- هستند یعنی:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-1 \le \cos\theta \le 1$$

* جدول نسبت های مثلثاتی زوایای ۳۰، ۴۵ و ۶۰

زاویه / نسبت	30 ($\frac{\pi}{6}$)	45 ($\frac{\pi}{4}$)	60 ($\frac{\pi}{3}$)
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

کمان های هم خانواده :

زاویه حاده $0 < \alpha < 90^\circ$

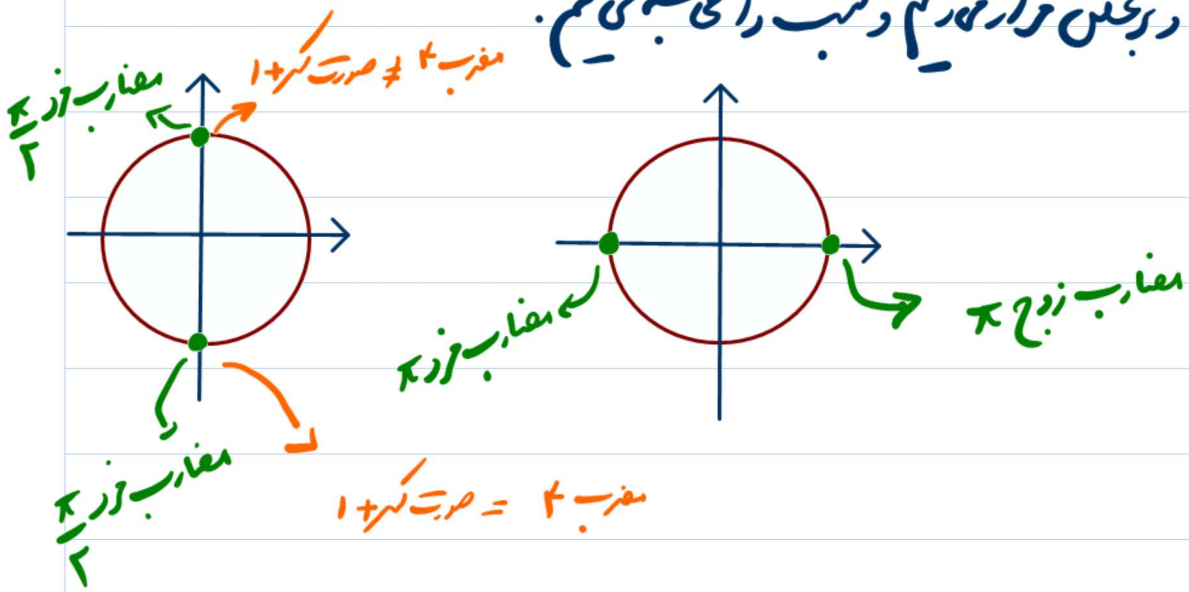
نوع اول : برای بدست آوردن نسبت های مثلثاتی زوایایی به صورت $k\pi \pm \alpha$

اگر k زوج باشد کل $k\pi$ را حذف می کنیم و اگر k فرد باشد، k را حذف می کنیم (یعنی $\pi \pm \alpha$). حال ناحیه مربوط به زاویه را یافته و نسبت را می یابیم.

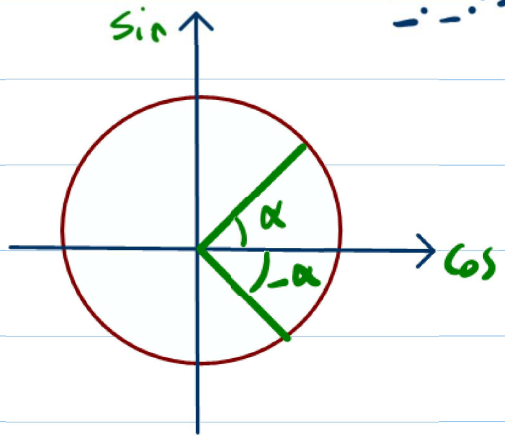
نوع دوم : برای بدست آوردن نسبت های مثلثاتی زوایایی به صورت $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$

یعنی مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$، ابتدا ناحیه و علامت نسبت را مشخص می کنیم. در آخر اسم نسبت را عوض می کنیم یعنی به جای $\sin$، $\cos$ و برعکس و به جای $\tan$،

+ و − در یک قرار می‌دهیم و نسبت را بررسی می‌کنیم.



مثال: نسبت مثلثاتی زاویه $-\alpha$ (قرینه زاویه) را بیابید.



$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

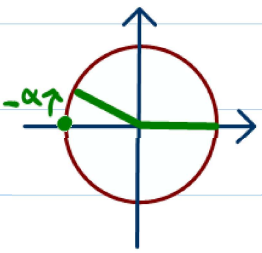
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

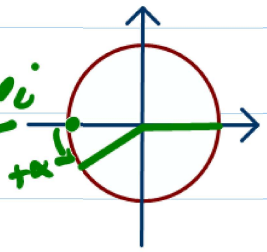
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زیر را برحسب α بنویسید.

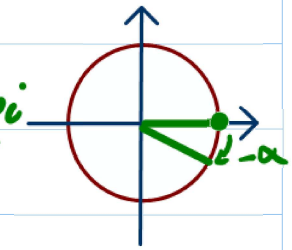
1) $\sin(2805\pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ (از 2805π) — ناحیه ۱



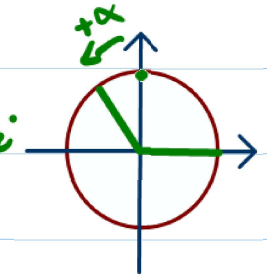
2) $\cos(3333\pi + \alpha) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ (از 3333π) — ناحیه ۳



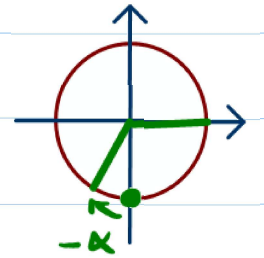
3) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (از 2π) — ناحیه ۴



4) $\sin\left(\frac{25\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ ($25+1=26 \neq 4k$) — ناحیه ۱



5) $\tan\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$ ($11+1=12=4k$) — ناحیه ۳

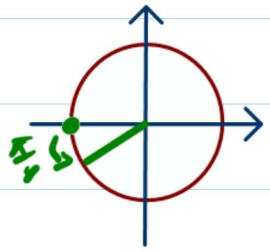


نکته: اگر زوایا به صورت مضرب یا تفاضل با $k\pi$ یا $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ داده نشوند باید با شکستن زاویه آن‌ها را به یکی از دو نوع گفته شده در آوردیم.

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را بیابید.

۱) $\sin 210^\circ = \sin(180+30) = \sin(\pi+\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6}$

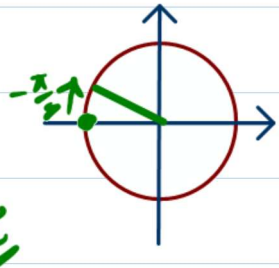
$= -\frac{1}{2}$



۲) $\tan(-10^\circ) = -\tan 10^\circ = -\tan(180-30)$

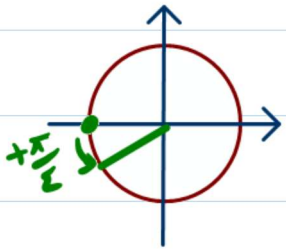
$= -\tan(\pi-\frac{\pi}{6})$

$= -(-\tan\frac{\pi}{6}) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



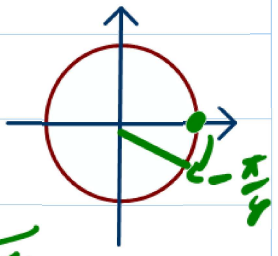
۳) $\cos 225^\circ = \cos(180+45) = \cos(\pi+\frac{\pi}{4})$

$= -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

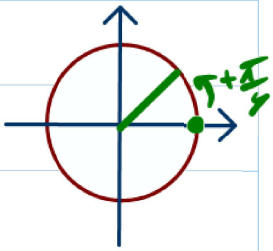


۴) $\cot 330^\circ = \cot(360-30) = \cot(2\pi-\frac{\pi}{6})$

$= \cot(-\frac{\pi}{6}) = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

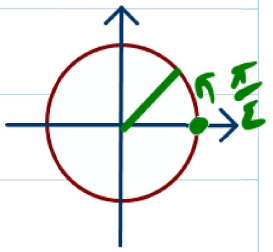


۵) $\sin \frac{۱۲\pi}{۴} = \sin\left(\frac{۱۲\pi+\pi}{۴}\right) = \sin\left(۳\pi+\frac{\pi}{۴}\right)$



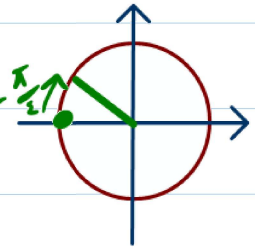
$= \sin \frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{۲}$

۶) $\cos\left(-\frac{۱۷\pi}{۴}\right) = \cos \frac{۱۷\pi}{۴} = \cos \frac{۱۶\pi+\pi}{۴}$



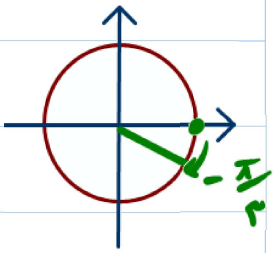
$= \cos\left(۴\pi+\frac{\pi}{۴}\right) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۷) $\tan \frac{۳\pi}{۴} = \tan \frac{۴\pi-\pi}{۴} = \tan\left(\pi-\frac{\pi}{۴}\right)$



$= -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$

۸) $\sin \frac{۲۳\pi}{۳} = \sin \frac{۲۴\pi-\pi}{۳} = \sin\left(۸\pi-\frac{\pi}{۳}\right)$

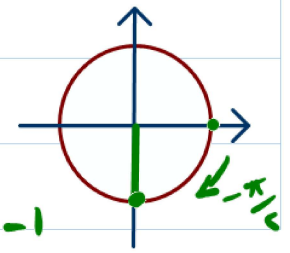


$= \sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

مثال: حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید :

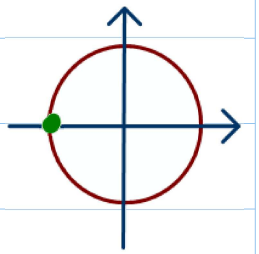
۱) $\sin ۶۳^\circ + \tan(-۵۴^\circ) =$

$\sin ۶۳^\circ = \sin(۷۲۰ - ۹۰) = \sin\left(۴\pi-\frac{\pi}{۲}\right)$ (۲×۳۶۰)



$= \sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = -\sin\frac{\pi}{۲} = -۱$

$\tan(-540^\circ) = -\tan(540^\circ) = -\tan(3\times180^\circ) = -\tan(3\pi) = 0$



عبارت $= -1 + 0 = -1$

۲) $\cos(-720^\circ) + \cot(-600^\circ) + \tan 720^\circ - \tan(-600^\circ) =$

$\cos(-720^\circ) = \cos 720^\circ = \cos(2\times360^\circ) = \cos 4\pi = 1$ (۲×۲π)

$\cot(-600^\circ) = -\cot 600^\circ = -\cot(3\times180^\circ + 60^\circ) = -\cot(3\pi + \frac{\pi}{3})$ (۳×۱۸۰)

$= -\cot(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan 720^\circ = \tan 4\pi = 0$

$\tan(-600^\circ) = -\tan 600^\circ = -\tan(3\pi + \frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

عبارت $= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + \sqrt{3} = \frac{3 - \sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$

۳) $\sin(\frac{25\pi}{3}) - \cos(\frac{23\pi}{4}) =$

$\sin(\frac{25\pi}{3}) = \sin\frac{24\pi + \pi}{3} = \sin(8\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{۲۲\pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۲۴\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(۶\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{۴}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

عبارت $= \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۲}$

۴) $\dfrac{\sin\frac{۳\pi}{۴} - \cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin\left(\frac{-۳\pi}{۴}\right) + \tan\left(\frac{-۴\pi}{۳}\right)} =$

$\sin\frac{۳\pi}{۴} = \sin\frac{۴\pi - \pi}{۴} = \sin\pi - \frac{\pi}{۴} = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\cos\frac{۵\pi}{۶} = \cos\frac{۶\pi - \pi}{۶} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\sin\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right) = -\sin\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\tan\left(-\frac{۴\pi}{۳}\right) = -\tan\frac{۴\pi}{۳} = -\tan\frac{۳\pi + \pi}{۳} = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{۳}\right)$

$= -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$

عبارت $= \dfrac{\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۳}} = \dfrac{\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}}{۲}} = \dfrac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{-\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}}$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

قسمت دوم

جلسه سوم: صفحات ۷۷ تا ۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

با توجه به آنچه جلسه قبل درباره کمان های هم خانواده گفتیم، نتایج زیر را برای زوایای متمم و مکمل داریم :

(الف) دو زاویه متمم :

می دانیم هرگاه مجموع دو زاویه 90° یا $\frac{\pi}{2}$ شود می گوییم آن دو متمم یکدیگرند.

پس α و $\frac{\pi}{2}-\alpha$ متمم اند زیرا : $\frac{\pi}{2}-\alpha+\alpha=\frac{\pi}{2}$

حال با توجه به زوایای نوع دوم خود هم داشت:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$$

ب) دو زاویه مکمل :

می دانیم هرگاه جمع دو زاویه 180° یا π رادیان باشد، مکمل یکدیگر خواهند بود.

پس α و $\pi-\alpha$ مکمل هم اند زیرا : $(\pi-\alpha)+\alpha=\pi$

حال با توجه به زوایای نوع اول داریم :

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

مثال : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 20^\circ=\cos 70^\circ$ ✓ $\quad 20^\circ+70^\circ=90^\circ$ متمم

ب) $\tan 40^\circ=\cot 50^\circ$ ✗ $\quad 40^\circ+50^\circ=80^\circ\neq 90^\circ$

ب) $\sin 140^\circ = \sin 40^\circ$ ✓ — $140^\circ + 40^\circ = 180^\circ$ مکمل

ت) $\cos 125^\circ = -\cos 55^\circ$ ✗ — $125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ مکمل

ث) $\tan 140^\circ = -\tan 50^\circ$ ✓ — $140^\circ + 50^\circ = 180^\circ$ مکمل

ج) $\cot 110^\circ = -\cot 80^\circ$ ✗ — $110^\circ + 80^\circ = 190^\circ \neq 180^\circ$

مثال: کدام دو زاویه مکمل هم هستند؟

۱) $\frac{4\pi}{3}$ ، -30° — ۲) 144° ، $\frac{\pi}{5}$ ✓ — ۳) 225° ، $\frac{-3\pi}{8}$ — ۴) 15° ، $\frac{7\pi}{12}$

۱) $\frac{4\pi}{3} = 4 \times 60^\circ = 240^\circ \rightarrow 240^\circ + (-30^\circ) = 210^\circ \neq 180^\circ$ ✗

۲) $\frac{\pi}{5} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 36^\circ \rightarrow 144^\circ + 36^\circ = 180^\circ$ ✓

۳) $-\frac{3\pi}{8} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -67.5^\circ \rightarrow 225^\circ - 67.5^\circ = 157.5^\circ \neq 180^\circ$ ✗

۴) $\frac{7\pi}{12} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 105^\circ \rightarrow 105^\circ + 15^\circ = 120^\circ \neq 180^\circ$ ✗

مثال: اگر $\sin\theta = 0/6$ ، θ زاویه‌ای حاده باشد، حاصل $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ را بیابید.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

یادآوری: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - (0/6)^2 = 1 - 0/36 = 0/64$

$$\rightarrow \cos^2\theta = 0/64 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \cos\theta = \pm 0/8 \xrightarrow{0<\theta<90^\circ} \cos\theta = 0/8$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = 0/8$$

مثال: حاصل عبارت $A = \sin 140^\circ + \sin 160^\circ + \sin 170^\circ + \cos 100^\circ + \cos 110^\circ + \cos 120^\circ$ را بدست آورید.

$\sin 140^\circ = \sin 40^\circ$ ، $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ$ ، $\sin 170^\circ = \sin 10^\circ$

$\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ$ ، $\cos 110^\circ = -\cos 70^\circ$ ، $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$

$$A = \sin 40^\circ + \sin 20^\circ + \sin 10^\circ - \cos 80^\circ - \cos 70^\circ - \cos 60^\circ$$

$\cos 80^\circ = \sin 10^\circ$ ، $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$ ، $\cos 60^\circ = \sin 40^\circ$

$$A = \sin 40^\circ + \sin 20^\circ + \sin 10^\circ - \sin 10^\circ - \sin 20^\circ - \sin 40^\circ = 0$$

مثال: مقدار عبارت $A=\dfrac{-\sin^2 40^\circ-\sin^2 50^\circ+1-\sin 70^\circ}{\tan 40^\circ\tan 50^\circ-1-2\cos 20^\circ}$ را بدست آورید.

$-\sin^2 40^\circ-\sin^2 50^\circ=-(\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ)=-(\cos^2 50^\circ+\sin^2 50^\circ)=-1$

(متمم)

$\tan 40^\circ\times\tan 50^\circ=\cot 50^\circ\times\tan 50^\circ=1$

(متمم)

یادآوری: $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}\rightarrow\tan\theta\times\cot\theta=1$

$A=\dfrac{-1+1-\sin 70^\circ}{1-1-2\cos 20^\circ}=\dfrac{-\sin 70^\circ}{-2\cos 20^\circ}=\dfrac{\sin 70^\circ}{2\sin 70^\circ}=\dfrac{1}{2}$

(متمم)

مثال: اگر $\tan 10^\circ=a$ حاصل عبارت $B=\dfrac{\sin 70^\circ+2\sin 100^\circ}{2\sin 140^\circ-\sin 190^\circ}$ را بدست آورید.

متمم: $\sin 70^\circ=\cos 10^\circ$, $\sin 100^\circ=\cos(-10^\circ)=\cos 10^\circ$ مکمل

$90+10$ ربع دوم $\quad$ $90+10$ ربع دوم

مکمل: $\sin 140^\circ=\sin 10^\circ$, $\sin 190^\circ=\sin(-10^\circ)=-\sin 10^\circ$ مکمل

$180+10$ ربع سوم $\quad$ $180+10$ ربع سوم

$B=\dfrac{\cos 10^\circ+2\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ+\sin 10^\circ}=\dfrac{3\cos 10^\circ}{3\sin 10^\circ}=\cot 10^\circ=\dfrac{1}{\tan 10^\circ}=\dfrac{1}{a}$

یادآوری: $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

مثال: کنکور ۹۹ (تجربی)

حاصل عبارت $\sin(840)+\tan(480)\cos(210)+\tan(300)$، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

$\tan 300 = \tan(360-60) = \tan(2\pi-\frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\tan 60^\circ$

$\cos 210 = \cos(180+30) = -\cos 30^\circ$

$\tan 840 = \tan(720-60) = \tan(180-60) = -\tan 60^\circ$ (720 = 4π)

$\sin 840 = \sin(900-60) = \sin(180-60) = \sin 60^\circ$ (900 = 5π)

عبارت $= (-\tan 60)(-\cos 30)+(-\tan 60)(\sin 60)$

$= -\tan 60\,(-\cos 60+\sin 60) = -\tan 60\,(-\sin 30+\sin 60)$ (متمم)

$= -\tan 60 \times 0 = 0$ گزینه ۲

مثال: کنکور ۹۹ (تجربی خارج)

حاصل عبارت $\sin(1095)\cos(255)-\tan(285)\tan(-165)$، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

۱) $\sin^2(15)$ ۲) $\cos^2(15)$ ۳) $-\sin^2(15)$ ۴) $-\cos^2(15)$

$\tan 215 = \tan(270 + 10) = -\cot 10$

$\tan(-148) = -\tan 148 = -\tan(180 - 10) = -(-\tan 10) = \tan 10$

$\sin(1090) = \sin(1080 + 10) = \sin 10$

$\cos(260) = \cos(270 - 10) = -\sin 10$

عبارت $= (-\cot 10)(\tan 10) - \sin 10(-\sin 10)$

$= -1 + \sin^2 10 = -(1 - \sin^2 10) = -\cos^2 10$: گزینه ۴

مثال: کنکور ۹۸ (ریاضی)

حاصل عبارت $\tan\frac{11\pi}{4} + \sin\frac{15\pi}{4}\cos\frac{13\pi}{4}$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$\tan\frac{11\pi}{4} = \tan\frac{12\pi - \pi}{4} = \tan(3\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

$\sin\frac{10\pi}{4} = \sin\frac{14\pi - \pi}{4} = \sin(4\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{12\pi}{4} = \cos\frac{12\pi + \pi}{4} = \cos(3\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

عبارت $= -1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + \frac{2}{4} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ گزینه ۲

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل چهارم: مثلثات

درس سوم: توابع مثلثاتی

جلسه چهارم: صفحات ۸۸ تا ۹۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

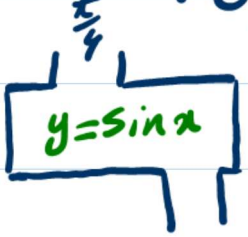
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

نسبت های مثلثاتی را می توان بعنوان تابع نیز در نظر گرفت زیرا برای هر زاویه بعنوان ورودی

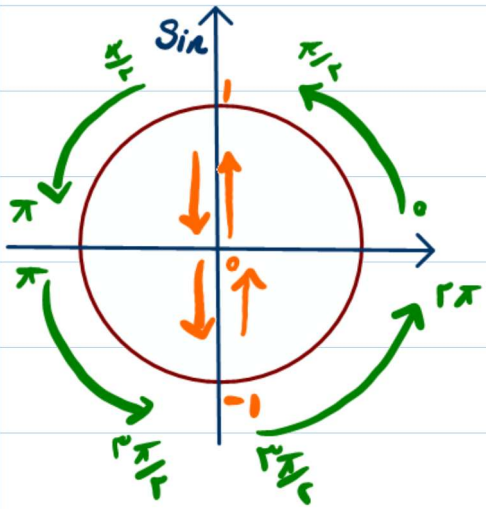
فقط یک مقدار نسبت مثلثاتی بعنوان خروجی داده می شود مثلاً برای سینوس :

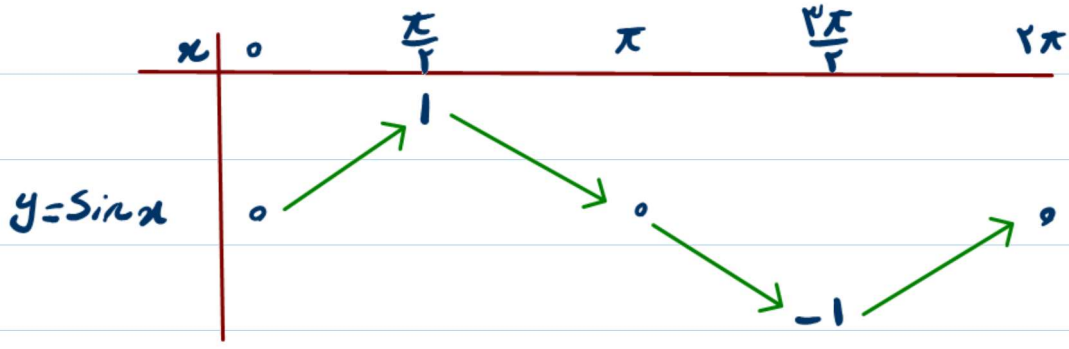


$y=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

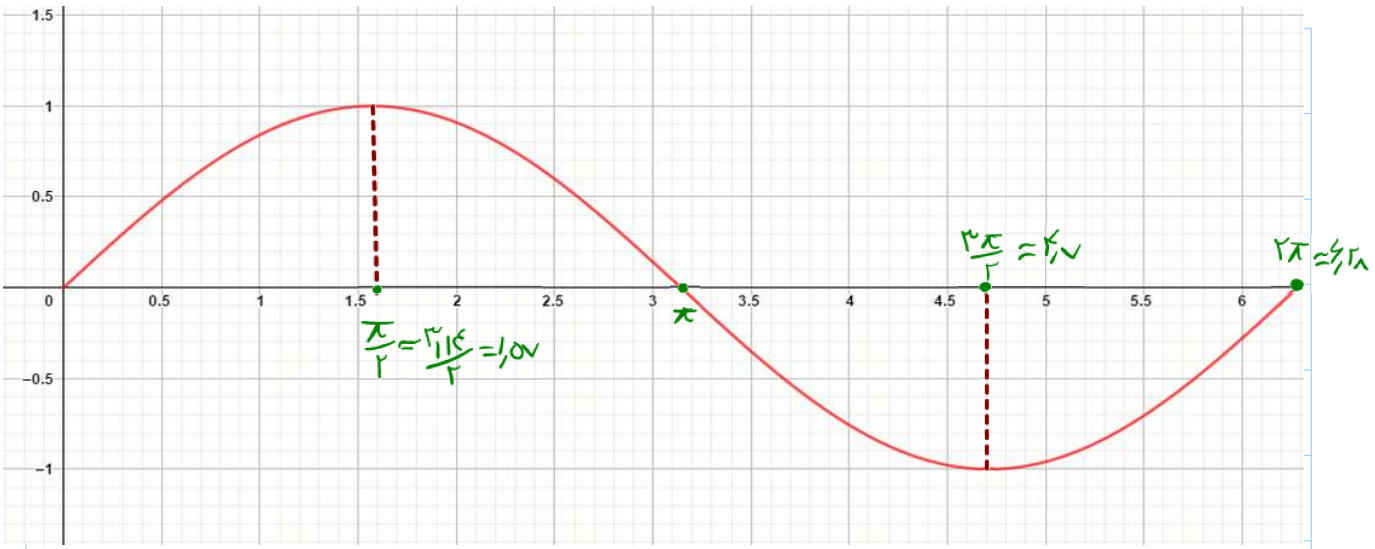
(الف) رسم نمودار تابع $y=\sin x$

اگر x برحسب رادیان باشد با استفاده از دایره مثلثاتی جدول زیر را تشکیل می دهیم :



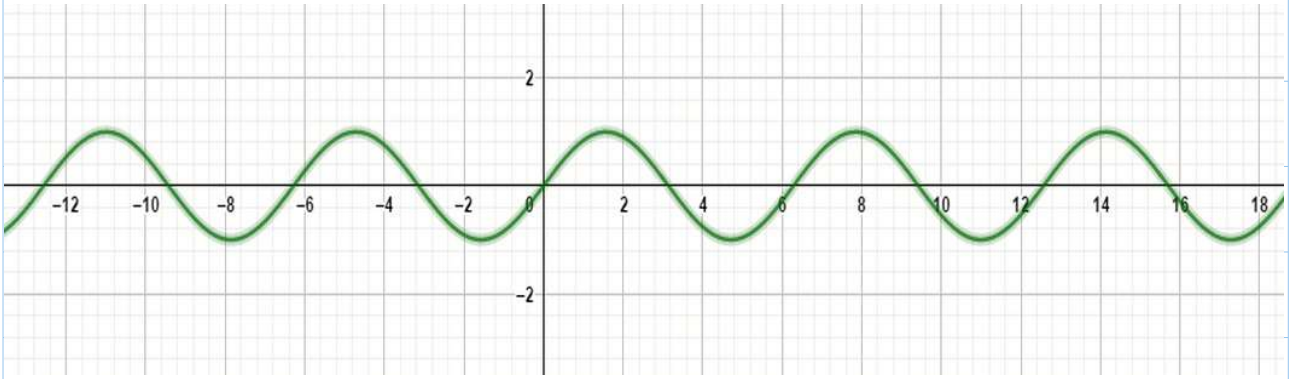


حال با داشتن چند زاویه دیگر به تقریب نمودار زیر را می توانیم رسم کنیم :



از نمودار $y=\sin x$ به نتایج زیر می‌رسیم:

۱) نمودار تابع سینوس در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود زیرا داریم: $\sin(x+2\pi)=\sin x$



۲) $D_f = \mathbb{R}$ ، $R_f = [-1,1]$

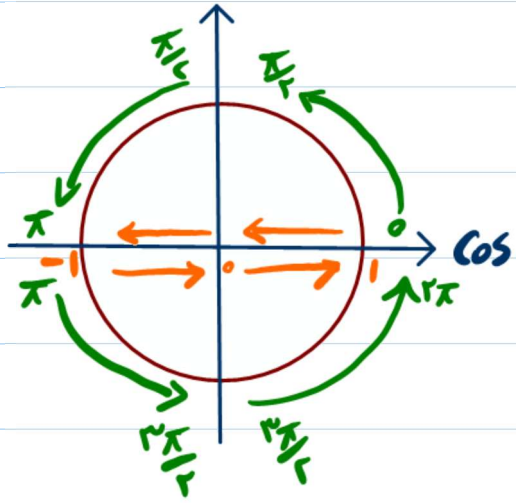
۳) نمودار این تابع در $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) محور xها را قطع می‌کند.

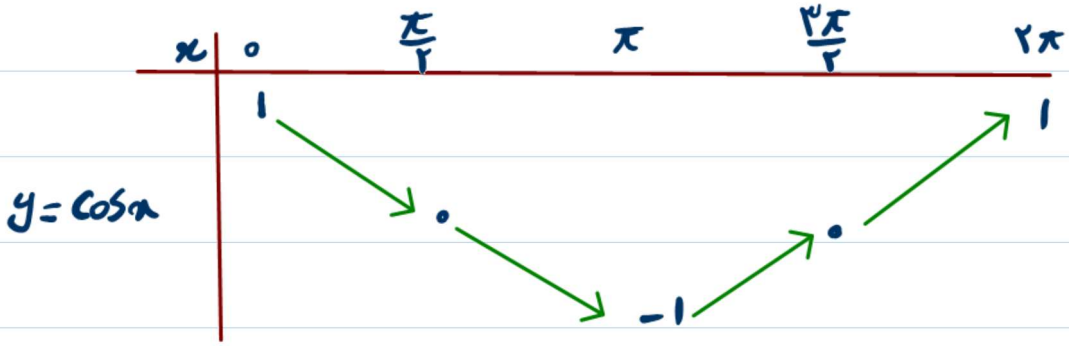
۴) بیشترین مقدار تابع $y=\sin x$ برابر یک است که در $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد.

۵) کمترین مقدار تابع $y=\sin x$ برابر -1 است که در $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد.

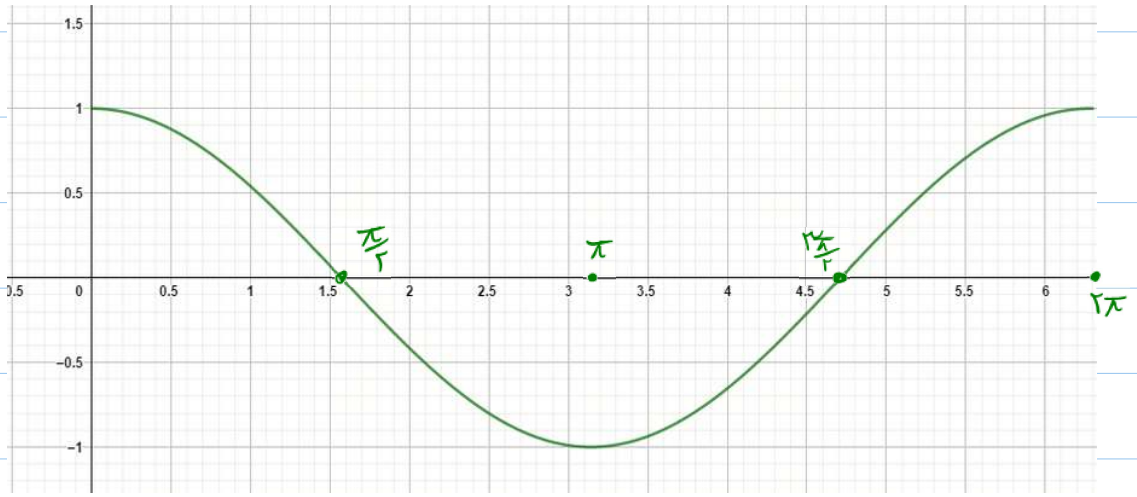
ب) رسم نمودار تابع $y=\cos x$

اگر x برحسب رادیان باشد از دایره مثلثاتی جدول زیر را نتیجه می‌گیریم :



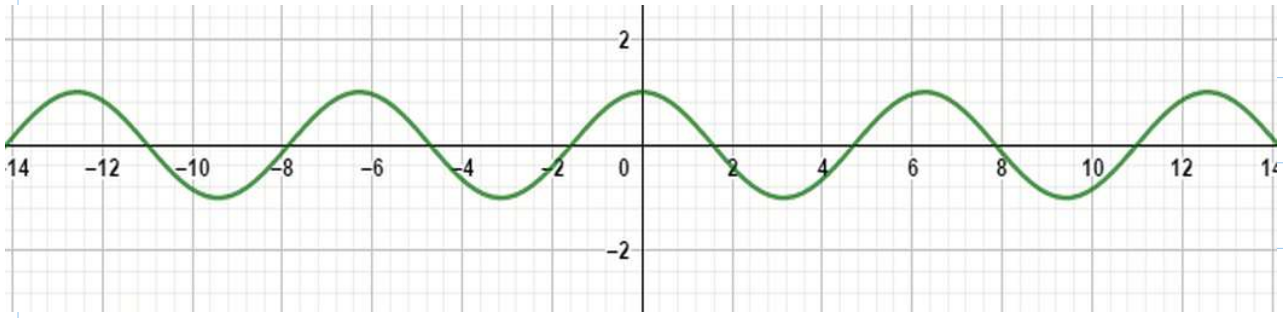


حال با داشتن چند زاویه دیگر به کشیدن نمودار زیر را می‌توانیم رسم کنیم :



از نمودار $y=\cos x$ به نتایج زیر می‌رسیم:

۱) نمودار تابع کسینوس در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود زیرا دیدیم: $\cos(x+2\pi)=\cos x$



۲) $D_f=\mathbb{R}$ ، $R_f=[-1,1]$

۳) نمودار این تابع در $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ محور x را قطع می‌کند.

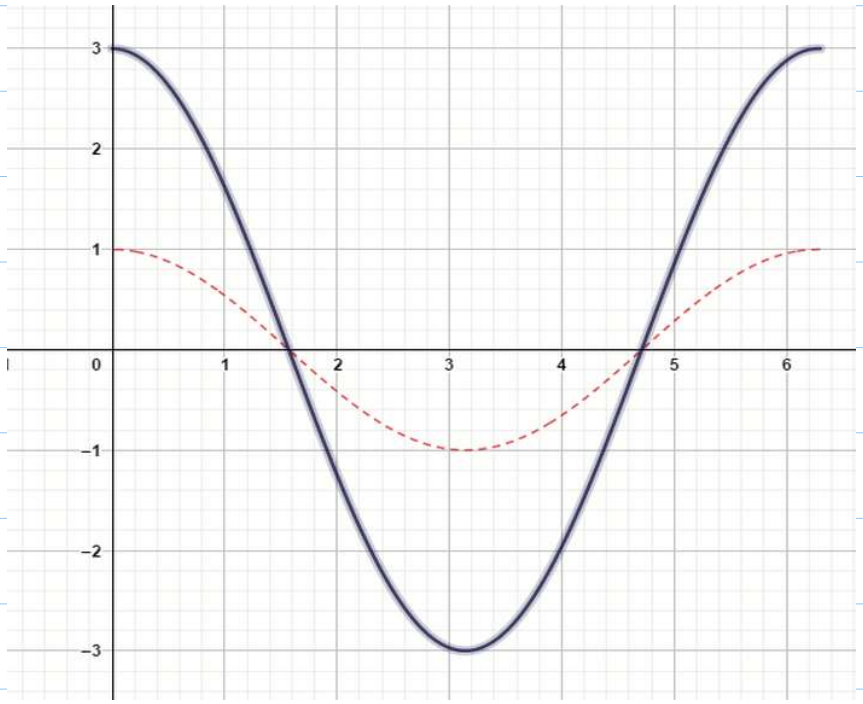
۴) بیشترین مقدار تابع $y=\cos x$ برابر یک است که در $x=2k\pi$ رخ می‌دهد. (مضارب زوج π)

۵) کمترین مقدار تابع $y=\cos x$ برابر -1 است که در $x=(2k+1)\pi$ رخ می‌دهد. (مضارب فرد π)

نکته: از قوانین انتقال برای رسم نمودار توابع مثلثاتی کمک می‌گیریم.

مثال: با توجه به نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

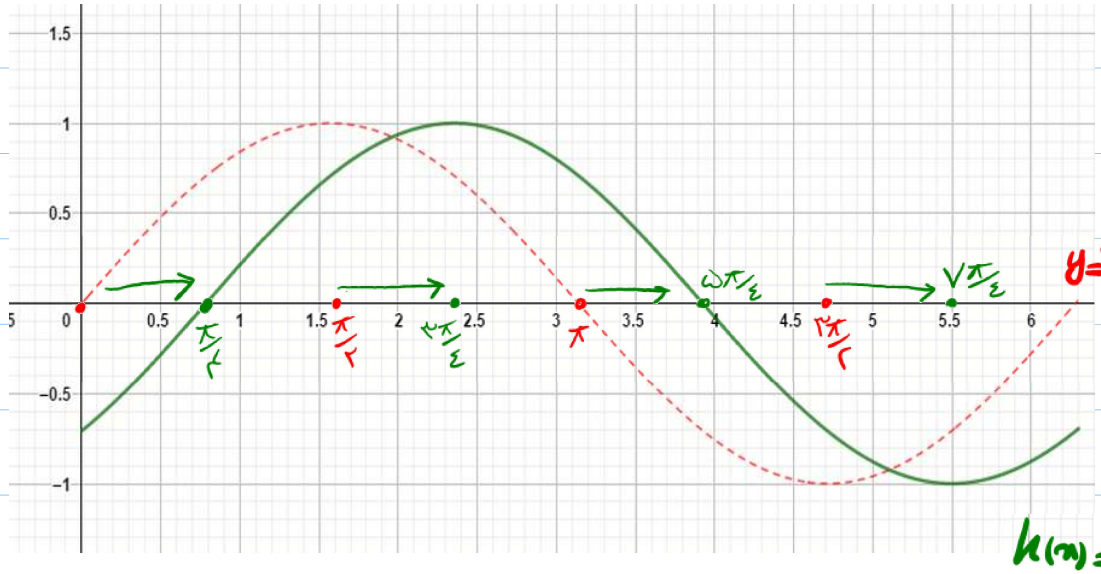
الف) $f(x)=3\cos x$



$f(x) = 2\cos x$

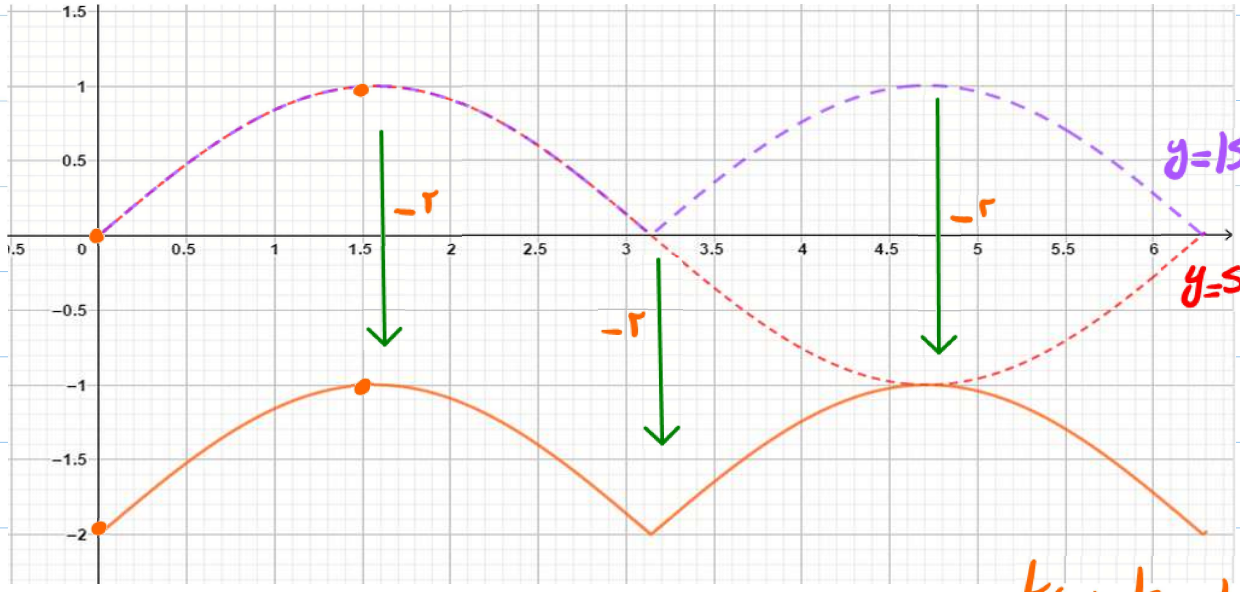
$y = \cos x$

ب) $h(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$



$h(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

ب) $k(x) = |\sin x| - 2$



مثال:

آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y = \sin x \ , \quad y = \cos(x - \frac{\pi}{۲})$

۲) $y = \cos x \ , \quad y = \sin(\frac{\pi}{۲} + x)$

۳) $y = \cos x \ , \quad y = \cos(۲\pi - x)$

۴) $y = \sin x \ , \quad y = \sin(۵\pi - x)$

۱) $y = \cos(x - \frac{\pi}{۲}) = \cos(-(\frac{\pi}{۲} - x)) = \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = \sin x$ بله

۲) $y = \sin(\frac{\pi}{۲} + x) = \cos x$ (تبدیل ۳) بله

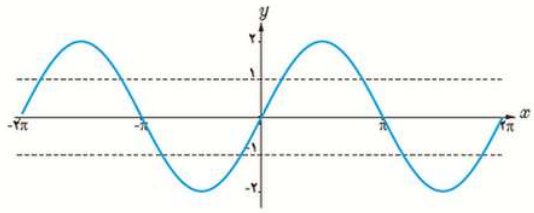
۳) $y = \cos(۲\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$ بله

۴) $y = \sin(۵\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$ بله

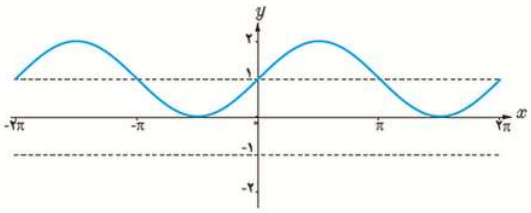
مثال:

هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

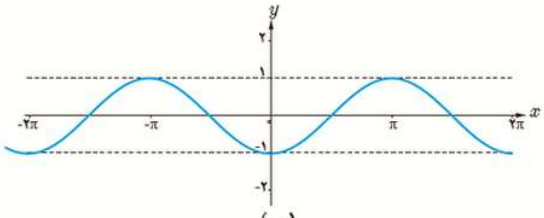
۱) $y=۲\sin x$ ۲) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ ۳) $y=\sin x+۱$ ۴) $y=-\sin x+۱$



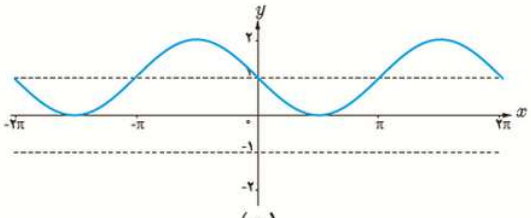
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

۱) $y=۲\sin x$ نمودار (الف)

۲) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})=\sin(-(\frac{\pi}{۲}-x))=-\sin(\frac{\pi}{۲}-x)=-\cos x$ نمودار (پ)

۳) $y=\sin x+۱$ نمودار (ب)

۴) $y=-\sin x+۱$ نمودار (ت)

مثال:

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد. نادرست $x\in\mathbb{R}$

ب) $\sin\sqrt{۵}$ یک عدد حقیقی است. درست

پ) $\cos ۳^\circ=\cos ۳$. نادرست

ت) اگر $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ آنگاه $-۱<\cos x<۰$ است. نادرست

ث) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر ۲- باشد نادرست

ج) $x=\pi$ صفر تابع $f(x)=\cos x$ است. نادرست