ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل سوم: تابع

درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع

قسمت اول: یادآوری و معرفی برخی توابع خاص

جلسه اول: صفحات ۴۸ تا ۵۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

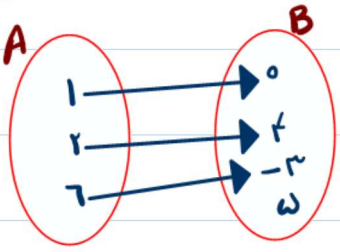
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری مفهوم تابع :

هر تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. A را دامنه و B را هم‌دامنه این تابع می‌نامیم.

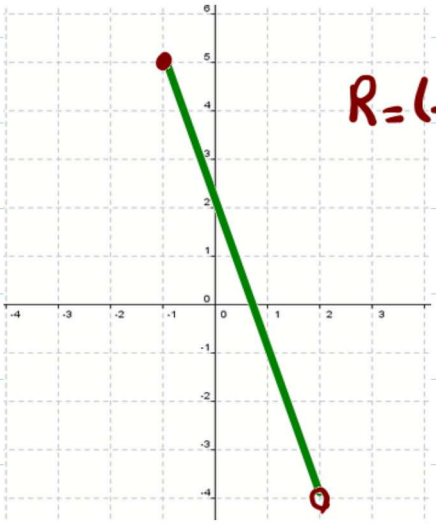


هم‌دامنه $= B = \{0, 4, -3, 5\}$

برد $= R = \{0, 4, -3\}$

مجموعه عضوهایی از B را که به عضوی از A نسبت داده شده‌اند برد این تابع می‌نامیم. بنابراین برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه تابع است.

مثال : برای تابع $\begin{cases} f:[-1,2) \to \mathbb{R} \\ f(x) = -3x + 2 \end{cases}$ (هم‌دامنه: دامنه) کدام‌یک از شناسه‌های زیر قابل قبول است؟



$R = (-4, 5]$

الف) $\begin{cases} f:[-1,2) \to (-2,5) \\ f(x) = -3x + 2 \end{cases}$ ✗ $(-4,5] \not\subset (-2,5)$

ب) $\begin{cases} f:[-1,2) \to [1,+\infty) \\ f(x) = -3x + 2 \end{cases}$ ✗ $(-4,5] \not\subset [1,+\infty)$

پ) $\begin{cases} f:[-1,2) \to (-4,5] \\ f(x) = -3x + 2 \end{cases}$ ✓

x	y
-1	5
2	-4

مثال :

برای تابع $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to[0,\frac{1}{9}] \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ کدام‌یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟

(ت) $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

(پ) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to[0,\frac{1}{9}] \\ f(x)=x \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to[0,\infty) \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

(الف) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

الف) قابل قبول نیست زیرا دامنه تغییر کرده است .

ب) قابل قبول است زیرا $[0,\frac{1}{9}] \subseteq [0,\frac{1}{3}]$.

پ) قابل قبول نیست زیرا ضابطه تابع تغییر کرده است .

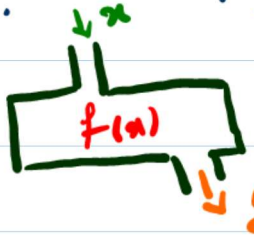
ت) قابل قبول است زیرا $[0,\frac{1}{9}] \subseteq \mathbb{R}$.

تابع به عنوان ماشین

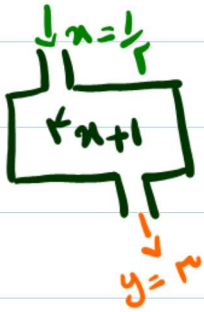
می‌توان تابع را ماشینی در نظر گرفت که به ازای هر ورودی یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه تابع داده می‌شوند و خروجی‌ها در برد هستند . در ضمن به ازای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد . البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسان داشته باشند

اگر x عضوی از دامنه تابع f و y خروجی این تابع به ازای x باشد، می‌نویسیم $y=f(x)$

به عملیاتی که ماشین تابع روی ورودی انجام می‌دهد تا خروجی را تحویل دهد، ضابطه تابع می‌گویند.



مثال: اگر خروجی ماشین تابع $f(x)=4x+1$ عدد 3 باشد، ورودی آن چه عددی بوده است؟



$$4x+1=3 \Rightarrow 4x=3-1$$

$$\Rightarrow 4x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

جمع‌بندی:

- برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه هم دامنه و ضابطه تابع داده شده باشد

- اگر هم دامنه داده نشده باشد و فقط ضابطه و دامنه را داشته باشیم، می‌توانیم هم دامنه را هر مجموعه‌ای که شامل برد باشد در نظر بگیریم.

- اگر دامنه داده نشده باشد، بزرگترین مجموعه‌ای که اعضای آن را بتوانیم به جای x قرار دهیم و خروجی‌ی تحویل بگیریم، دامنه در نظر می‌گیریم.

تساوی دو تابع :

دو تابع f و g با هم برابرند هرگاه :

الف) $D_f = D_g$

ب) برای هر x از دامنه یکسان داشته باشیم $f(x) = g(x)$.

به عبارت دیگر برای هر x ورودی یکسان، خروجی ها هم یکی باشد .

مثال : در هر قسمت تساوی دو تابع را بررسی کنید .

الف) $f = \{(-2,7), (3,7), (4,0)\}$

$g = \{(-2,7), (4,0), (3,7)\}$

$D_f = D_g = D = \{-2, 3, 4\}$

ولی $f(3) \neq g(3)$ (۷ و ۶) $\rightarrow f \neq g$

ب) $f(x) = 4x - 1$ ، $g(x) = \frac{8x-2}{2} = \frac{2(4x-1)}{2} = 4x - 1$

$f = g$

ج) $\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \end{cases}$

زیرا ضابطه‌های یکسان نیست : $f \neq g$

ب) $\begin{cases} f: [0,2] \to \mathbb{R} \\ f(x) = 4x^2 - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} g: (0,2) \to \mathbb{R} \\ g(x) = 4x^2 - 1 \end{cases}$

$D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$: دامنه‌ها برابر نیست

ت) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to [0, +\infty) \\ f(x) = x + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{3x+3}{3} = \frac{3(x+1)}{3} = x+1 \end{cases}$

$f = g$

ج) $f(x) = \frac{x}{x}$ $\quad g(x) = 1$

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

$\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$

برخی توابع خاص :

۱) توابع گویا :

اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $q(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر نباشد

به تابع با ضابطه $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ و دامنه $D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid q(x)\neq 0\}$ تابع گویا می‌گوییم.

به عبارت دیگر دامنه توابع گویا = اعداد حقیقی منهای ریشه‌های مخرج

یا

$D_f = \mathbb{R} - \{$ اعدادی که مخرج را صفر می‌کنند $\}$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{2x-1}{3x+3}$

$3x+3=0 \rightarrow 3x=-3 \rightarrow x=-\frac{3}{3}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{3}\}$

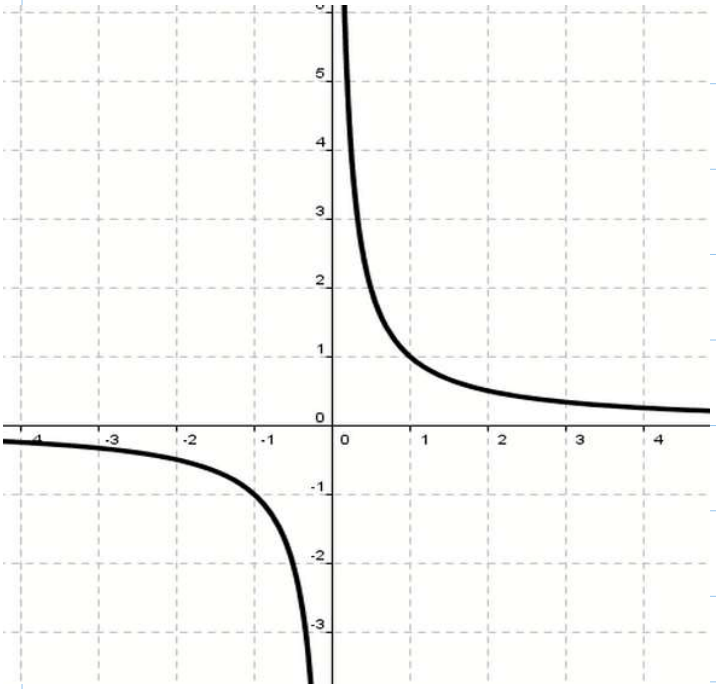
ب) $g(x)=\frac{4}{2x^2-3x+1}$

$2x^2-3x+1=0$

$2-3+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \end{cases}$

$D_g = \mathbb{R} - \{1, \frac{1}{2}\}$

نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$



۲) تابع ریشه nام :

الف) اگر n عدد طبیعی و زوج باشد به تابعی که به هر عدد نامنفی، ریشه nام نامنفی آن

را نسبت می دهد تابع ریشه nام می گوییم.

ب) اگر n عدد طبیعی و فرد و مخالف یک باشد، به تابعی که به هر عدد حقیقی ریشه nام

آن را نسبت می دهد تابع ریشه nام می گوییم.

فرد n : $g(x)=\sqrt[n]{f(x)} \rightarrow D_g=D_f$

زوج n : $g(x)=\sqrt[n]{f(x)} \rightarrow D_g=\{x\in D_f \mid f(x)\geq 0\}$

به عبارت دیگر دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد همان دامنه تابع زیر رادیکال است و

برای یافتن دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر

قرار می‌دهیم و نامعادله حاصل را حل می‌کنیم.

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{4-2x}$ $\quad 4-2x\geq 0 \rightarrow -2x\geq -4 \xrightarrow{\div(-2)} x\leq 2$

$D_f=(-\infty,2]$

ب) $g(x)=\sqrt[3]{\frac{2x}{x-4}}$ $\quad D_g=D_{\frac{2x}{x-4}}$ ← چون $D=\mathbb{R}-\{4\}$

$D_g=\mathbb{R}-\{4\}$

ج) $h(x)=\sqrt{\frac{1-x}{2x+4}}$

$\frac{1-x}{2x+4}\geq 0$

$1-x=0 \rightarrow x=1$

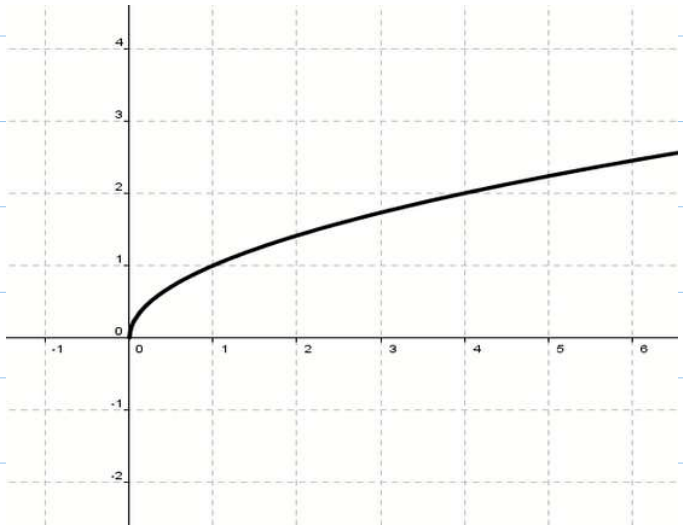
$2x+4=0 \rightarrow x=-2$

x		-2		1	
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-x}{2x+4}$	$-$	ت ن	$+$	0	$-$

$D_h=(-2,1]$

نمودار توابع رادیکالی (ریشه دوم مثبت)

نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به صورت زیر است :



در ریاضی ۱ با قوانین انتقال برای رسم نمودارها آشنا شدید. این قوانین را برای تابع رادیکالی به کار می بریم :

الف) $y=\sqrt{x}+k$: انتقال عمودی

- $k>0$: نمودار k واحد سمت بالا
- $k<0$: نمودار k واحد سمت پائین

ب) $y=\sqrt{x+k}$: انتقال افقی

- $k>0$: نمودار k واحد سمت چپ
- $k<0$: نمودار k واحد سمت راست

ج) $y=-\sqrt{x}$: نمودار نسبت به محور x ها قرینه می شود. انعکاس

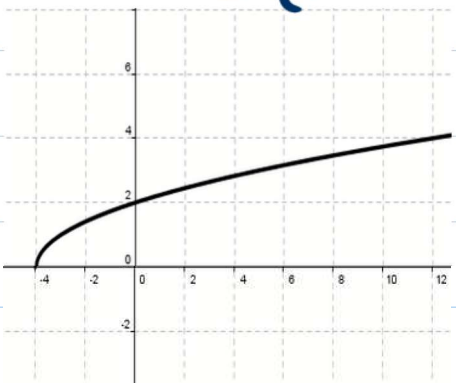
د) $y=\sqrt{-x}$: نمودار نسبت به محور y ها قرینه می شود. انعکاس

نکته: برای رسم توابعی به صورت $y = a\sqrt{bx+c} + d$ از دامنه و نقطه‌ی کمک می‌گیریم (در ریاضی ۳ با ذکر قاعده‌های کلی این نوع تبدیل‌ها بیشتر بررسی می‌شود در ریاضی ۲ به ذکر همین نکته اکتفا می‌کنیم.)

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

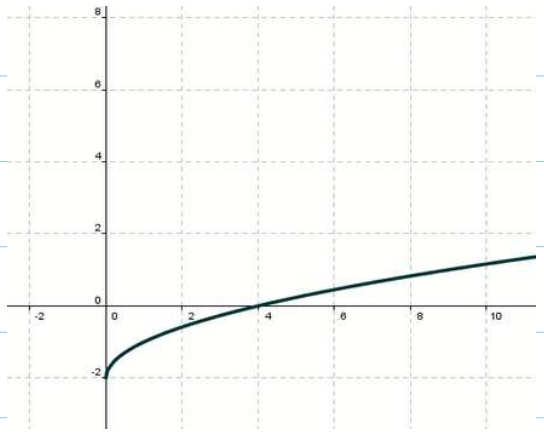
الف) $y = \sqrt{x+4}$

انتقال افقی ۴ واحد به چپ



ب) $y = \sqrt{x} - 2$

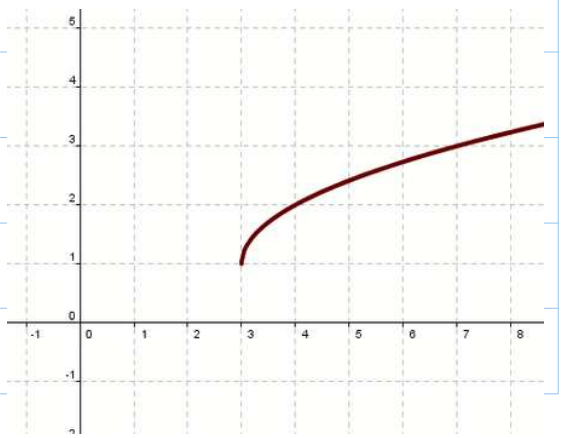
انتقال عمودی ۲ واحد به پایین



پ) $y = 1 + \sqrt{x-3}$

انتقال عمودی ۱ واحد به بالا

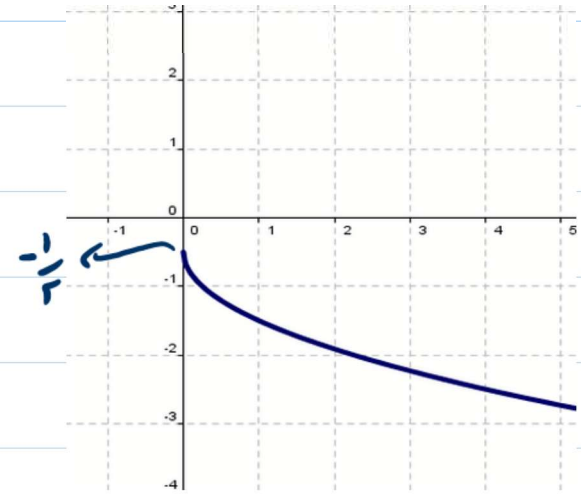
انتقال افقی ۳ واحد به راست



ت) $y = -\sqrt{x} - \frac{1}{2}$

انتقال عمودی $\frac{1}{2}$ به یک پایین

انعکاس نسبت به قرینه xها

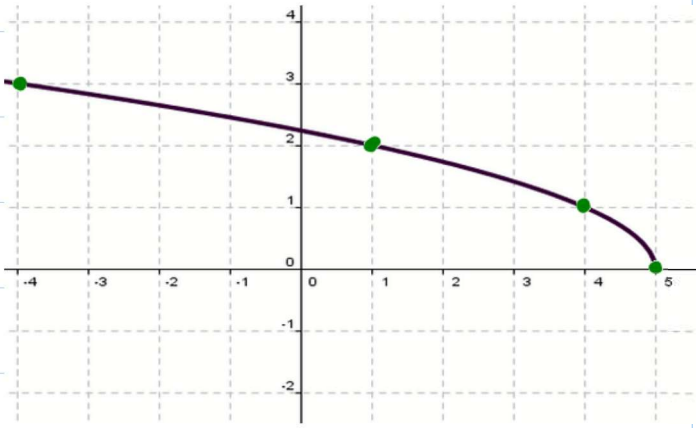


ث) $y = \sqrt{-x+5}$

$D: -x+5 \geq 0 \rightarrow -x \geq -5$

$\xrightarrow{\div(-1)} x \leq 5$

x	-4	1	4	5
y	3	2	1	0

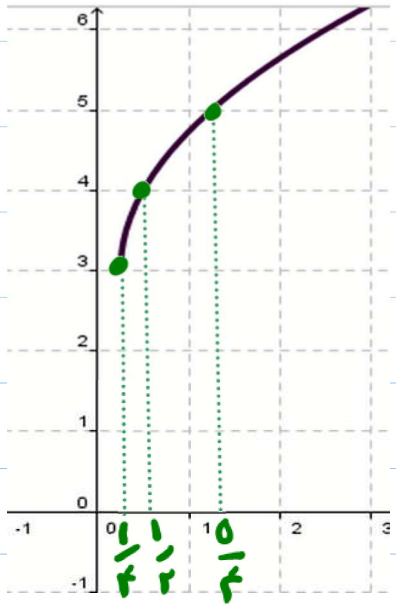


مثال: نمودار تابع $y = \sqrt{4x-1} + 3$ را رسم کنید.

$D: 4x-1 \geq 0 \rightarrow 4x \geq 1$

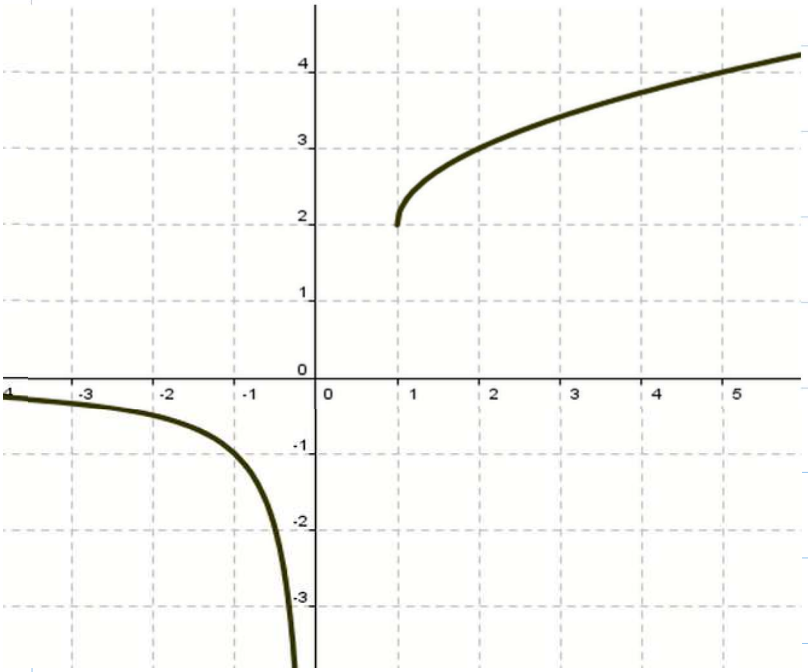
$\rightarrow x \geq \frac{1}{4}$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$
y	3	4	5



یادآوری: توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارند، توابع قطعه‌ای یا چندضابطه‌ای نامیده می‌شوند.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x<0\\ \sqrt{x-1}+2 & x\geq 1\end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

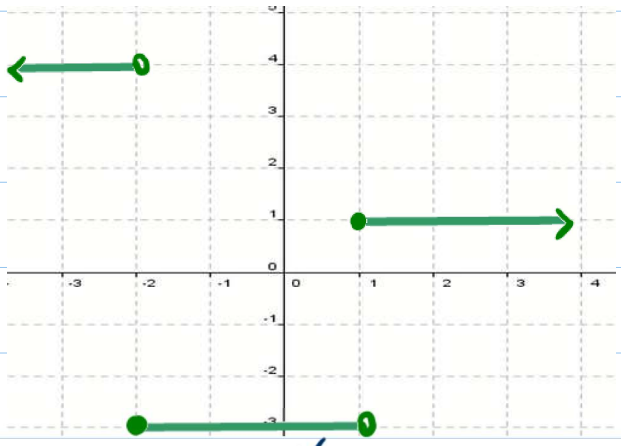


$D=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

$R=(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$

تذکر: اگر در توابع چندضابطه‌ای، همه ضابطه‌ها تابع ثابت باشد (یک عدد که نمودارش خط افقی می‌شود.) آن را **تابع پله‌ای** می‌نامند.

مثال: نمودار تابع $y=\begin{cases}4 & x<-2\\ -3 & -2\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$ را رسم کنید.



قبل از اینکه آخرین نوع توابع خیلی توابع جزء صحیح را بگوئیم به نکته‌ای درباره تشخیص تابع بودن یا نبودن یک رابطه از روی ضابطه اشاره کنیم.

نکته: رابطه یا تابع

فرض کنید رابطه‌ای بین x و y به صورت یک تساوی داریم. در این صورت y تابعی از x است اگر و فقط اگر به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد که در تساوی داده شده صدق کند.

برای تشخیص تابع بودن یا نبودن یک رابطه سعی می‌کنیم y را بر حسب x بدست آوریم و نشان دهیم که تابع هست یا خیر. روش دیگر استفاده از مثال نقض است.

مثال: کدام یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

الف) $y-\sqrt{y}=x-2$ (x^0)

مثال نقض $x=2 \to y=1, y=0$

تابع نیست

ب) $y^3-3y^2+3y=x$

$y-1=\sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{()^3} (y-1)^3=x-1 \to y^3-3y^2+3y-1=x-1 \xleftarrow{+(-1)}$

تابع است $y=\sqrt[3]{x-1}+1$

پ) $y^2+x=4$

$y^2=4-x \xrightarrow[\text{سمت}+]{\sqrt{\ }} |y|=\sqrt{4-x} \to y=\pm\sqrt{4-x}$

تابع نیست $x=1 \to y=\pm\sqrt{3}$

ت) $|x|+|y|=1$

مثال نقض: $x=0 \to |y|=1 \to y=\pm 1$ تابع نیست

ث) $y^2+4x^2=4xy$

$y^2-4xy+4x^2=0 \to (y-2x)^2=0 \to y-2x=0$

$y=2x$ تابع است

ج) $|x|+(y-1)^2=0$

جمع دو عبارت مثبت صفر شده است پس هر دو صفرند

$|x|=0 \to x=0$

$(y-1)^2=0 \to y=1$

این رابطه فقط شامل یک نقطه است پس تابع است $(0,1)$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل سوم: تابع

درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع

قسمت دوم: تابع جزءصحیح

جلسه دوم: صفحات ۵۴ و ۵۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

جزء صحیح

تعریف ۱) جزء صحیح هر عدد حقیقی بزرگترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچکتر یا با آن برابر باشد.

تعریف ۲) اگر عدد حقیقی x بین دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ باشد، جزء صحیح x را برابر k تعریف کرده و می‌نویسیم: $[x]=k$. جزء صحیح عدد صحیح با خودش برابر است.

تعریف ۳) برای هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

مثال:

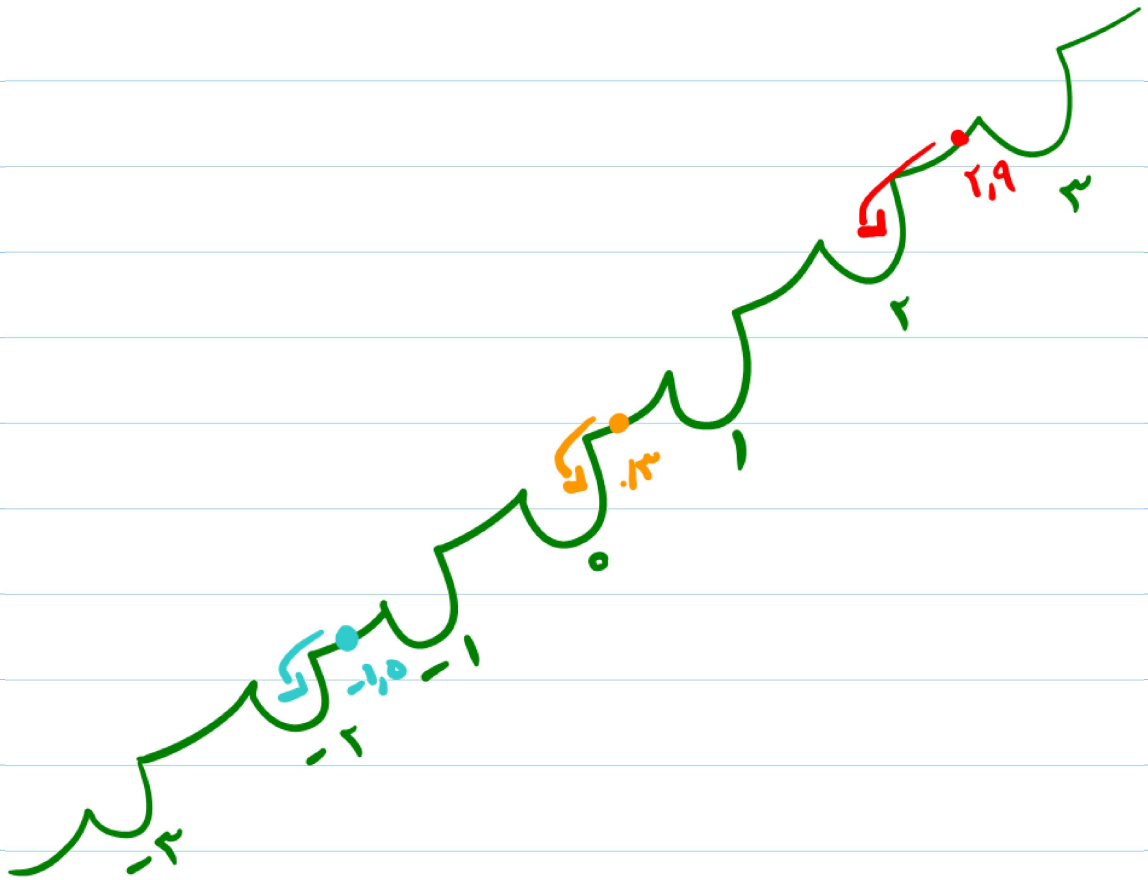
$[2,2] = 2$

$[-5] = -5$

$[-3,9] = -4$

نکته: برای یافتن جزء صحیح یک عدد حقیقی می‌توان از سطح شیب دار چاله دار زیر استفاده کنیم.

در این شکل اعداد صحیح چاله‌ها و اعداد غیر صحیح روی سطح شیب دار بین چاله‌ها قرار می‌گیرند. با توجه به شیب این سطح، واضح است اگر توپی را در هر موقعیت یکی در روی سطح قرار دهیم، توپ در این چاله می‌افتد. عدد صحیح مربوط به چاله همان جزء صحیح عدد است.



مثال: جزصحیح های زیر را بدست آورید.

الف) $[\frac{15}{4}] = [3,75] = 3$

ب) $[-1,4] = -2$

پ) $[\sqrt{2}] = 1$ ($\sqrt{2} \simeq 1,4$)

ت) $[\frac{1}{4}] = 0$

ث) $[-0/7] = -1$

ج) $-10 < x < -9 \rightarrow [x] = -10$

چ) $[\sqrt[3]{71}]$: $64 < 71 < 125 \rightarrow 4 < \sqrt[3]{71} < 5 \rightarrow [\sqrt[3]{71}] = 4$

برخی از ویژگی های جزءصحیح:

۱) اگر u عبارتی برحسب x باشد از رابطه $[u] = k$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$k \leq u < k+1$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\left[\frac{1-4x}{3}\right]=-2$

$-2 \le \frac{1-4x}{3} < -1 \xrightarrow{\times 3} -6 \le 1-4x < -3 \xrightarrow{-1} -7 \le -4x < -4 \xrightarrow{\div(-4)} 1 < x \le \frac{7}{4}$

$1 < x \le \frac{7}{4}$

ب) $[x^2+x]=-1$

$-1 \le x^2+x < 0 \rightarrow \begin{cases} -1 \le x^2+x \rightarrow x^2+x+1 \ge 0 & ① \\ x^2+x < 0 & ② \end{cases}$

① $x^2+x+1=0 \rightarrow \Delta = 1-4\times1\times1 = -3 \rightarrow x^2+x+1 > 0 \rightsquigarrow x \in \mathbb{R}$

② $x^2+x=0 \rightarrow x(x+1)=0 \rightarrow x=0,-1$ $\rightsquigarrow x \in (-1,0)$

① ∩ ② $\Rightarrow -1 < x < 0$

۲) حاصل یک جزء صحیح همواره عددی صحیح است یعنی $[x] \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2[x]-7=0 \rightarrow 2[x]=7 \rightarrow [x]=\frac{7}{2}$

معادله جواب ندارد

ب) $x = [x^2] - 6$ $[x^2]$ عدد صحیح است. ۶ هم از آن کم شود حاصل عدد صحیح می‌شود. چون این عبارت با x برابر است پس x هم صحیح می‌شود.

می‌دانیم توان دوم یک عدد صحیح، عددی صحیح است پس $[x^2] = x^2$

$$x^2 - 6 = x \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \rightarrow x = 3, -2$$

۳) اگر عدد صحیح k در جزء صحیح جمع یا تفریق شده باشد می‌توان آن را از جزء صحیح خارج کرد یعنی:

$$[x + k] = [x] + k$$

۴)
$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: اگر x صحیح نباشد، حاصل $[x^2 - 4] + [7 - x^2]$ را به دست آورید.

$x = \frac{1}{3} \rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \notin \mathbb{Z}$

$x = \sqrt{5} \rightarrow x^2 = 5 \in \mathbb{Z}$

$$[x^2] - 7 + 4 + [-x^2] = [x^2] + [-x^2] - 3$$

$$[x^2] + [-x^2] = \begin{cases} 0 & x^2 \in \mathbb{Z} \\ -1 & x^2 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$[x^2] + [-x^2] - 3 = \begin{cases} -3 & x^2 \in \mathbb{Z} \\ -4 & x^2 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳) تابع جزء صحیح :

به توابعی که متغیرش داخل جزء صحیح باشد ، تابع جزء صحیح می گوییم .

ساده ترین تابع جزء صحیح که به هر عدد جزء صحیحش را نسبت می دهد تابع

$y=[x]$ است .

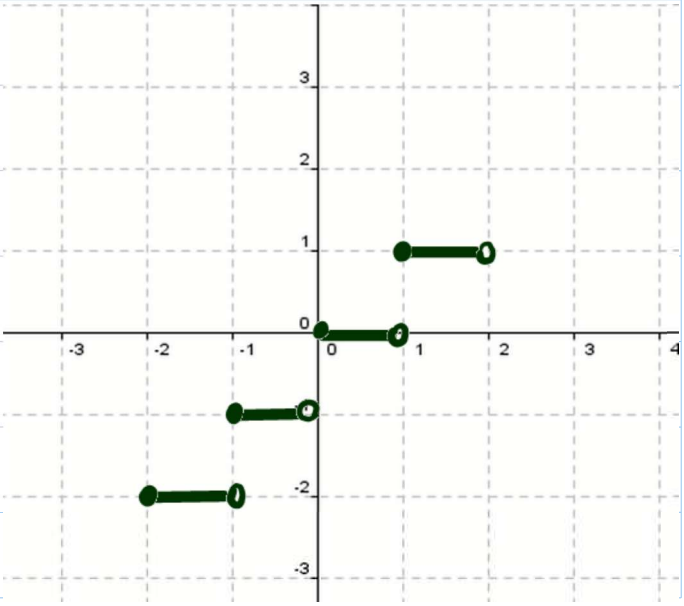
مثال : نمودار تابع $y=[x]$ را در بازه $(-2,2]$ رسم کنید .

پله اول : $-2 \leq x < -1 \Rightarrow y=[x]=-2$

پله دوم : $-1 \leq x < 0 \rightarrow y=-1$

پله سوم : $0 \leq x < 1 \rightarrow y=0$

پله چهارم : $1 \leq x < 2 \rightarrow y=1$



رسم نمودار توابع به صورت $f(x)=[ax]+k$ در یک بازه

ابتدا طول پله را از رابطه $\frac{1}{|a|}$ می‌یابیم. سپس از ابتدای بازه داده شده پله‌ها را تشکیل داده و برای هر پله مقدار y را حساب می‌کنیم.

مثال: نمودار توابع زیر را در بازه داده شده رسم کنید.

$[-1,1]$ در $f(x)=[2x]+1$

طول پله $=\frac{1}{2}$

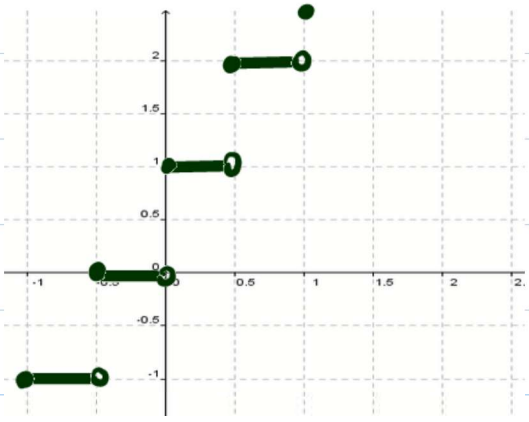
پله اول: $-1\le x<-\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} -2\le 2x<-1 \rightsquigarrow y=[2x]+1=-2+1=-1$

پله دوم: $-\frac{1}{2}\le x<0 \xrightarrow{\times 2} -1\le 2x<0 \rightsquigarrow y=-1+1=0$

پله سوم: $0\le x<\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 0\le 2x<1 \rightsquigarrow y=0+1=1$

پله چهارم: $\frac{1}{2}\le x<1 \xrightarrow{\times 2} 1\le 2x<2 \rightarrow y=1+1=2$

$x=1 \rightarrow y=[2\times 1]+1=2+1=3$

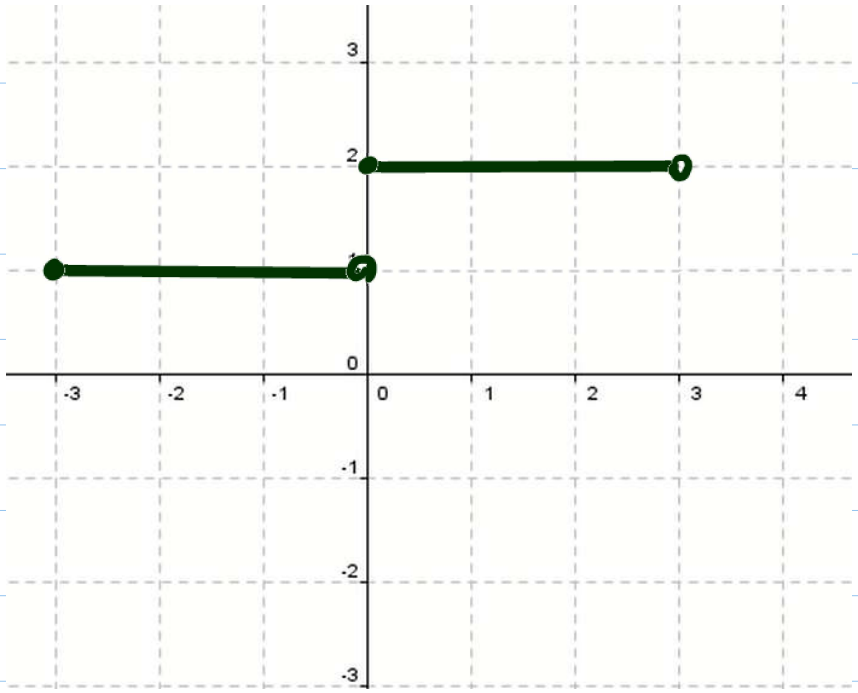


ب) $g(x)=\left[\frac{1}{3}x+2\right]=\left[\frac{1}{3}x\right]+2 \qquad [-3,3)$

طول بازه $=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$

بازه اول: $-3\le x<0 \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} -1\le\frac{1}{3}x<0 \rightarrow y=\left[\frac{1}{3}x\right]+2=-1+2=1$

بازه دوم: $0\le x<3 \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} 0\le\frac{1}{3}x<1 \rightarrow y=0+2=2$



ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل سوم: تابع

درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک

جلسه سوم: صفحات ۵۷ تا ۶۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تابع یک به یک :

تابع f را یک به یک می گوئیم به شرطی که دو عضو متمایز از دامنه به دو عضو متمایز در برد نظیر شوند. به عبارت دیگر f یک به یک است هرگاه به ازای هر دو عضو دلخواه از دامنه f مانند x_1 و x_2 داشته باشیم :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

بررسی یک به یک بودن تابع در نمایش های مختلف آن :

۱) نمایش زوج مرتبی : زمانی یک به یک است که مولفه دوم مساوی نداشته باشد. اگر مولفه های دوم مساوی داشت باید مولفه های اول هم برابر باشند.

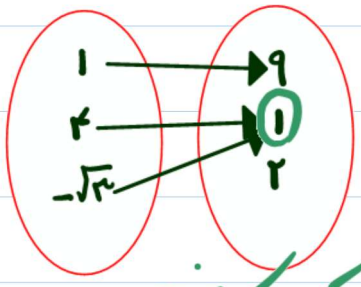
مثال :

$f = \{(2,5),(3,4),(0,\sqrt{2}),(1,5)\}$ — یک به یک نیست

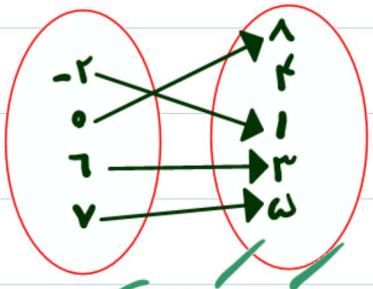
$g = \{(3,\frac{1}{2}),(9,0),(4,1),(5,2)\}$ — یک به یک است

۲) نمایش نمودار ون : زمانی یک به یک است که به هر عضو دایره دوم (سمت راست) بیشتر از یک خط وارد نشود.

مثال :



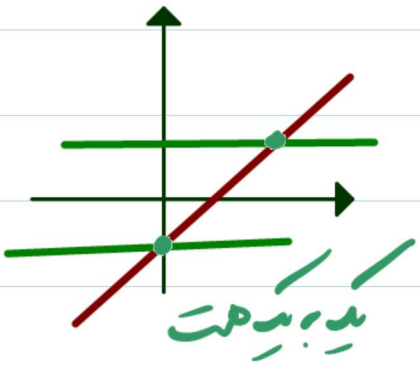
یک به یک نیست



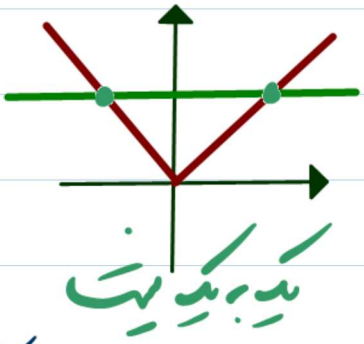
یک به یک هست

۳) نمایش نموداری : زمانی یک به یک است که هر خط موازی محور xها حداکثر در یک نقطه نمودار تابع را قطع کند.

مثال :



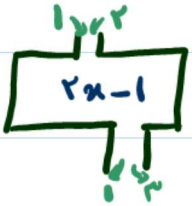
یک به یک هست



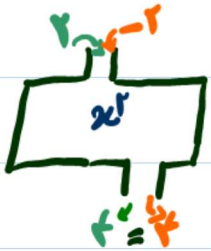
یک به یک نیست

۴) نمایش ماشینی : زمانی یک به یک است که هر خروجی فقط مربوط به یک ورودی باشد به عبارت دیگر خروجی تکراری نداشته باشیم.

مثال:



یک به یک هست



یک به یک نیست

۵) نمایش جبری (ضابطه‌ای) : زمانی یک به یک است که برای هر دو عضو دلخواه از دامنه f مانند x_1 و x_2 :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

به عبارت دیگر یک بار به جای x_1 در ضابطه تابع x_1 و یک بار x_2 گذاشته و با یکدیگر مساوی قرار می‌دهیم. اگر به تساوی $x_1 = x_2$ رسیدیم آنگاه تابع یک به یک خواهد بود.

مثال:

الف) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1^3 + 1} = \sqrt{x_2^3 + 1} \xrightarrow{\text{توان } 2} x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$$

$$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} x_1 = x_2$$

یک به یک هست

ب) $f(x) = x^2 - 4$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{}} |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

یک به یک نیست

مثال: اگر تابع $f = \{(a^2, 1), (4, 1), (2a + b, 2), (7, 2), (a, b)\}$ یک به یک باشد a, b را بیابید.

$$a^2 = 4 \longrightarrow a = \pm 2$$

$$2a+b=7 \begin{cases} a=2 \rightarrow 4+b=7 \rightarrow b=3 \\ a=-2 \rightarrow -4+b=7 \rightarrow b=10 \end{cases}$$

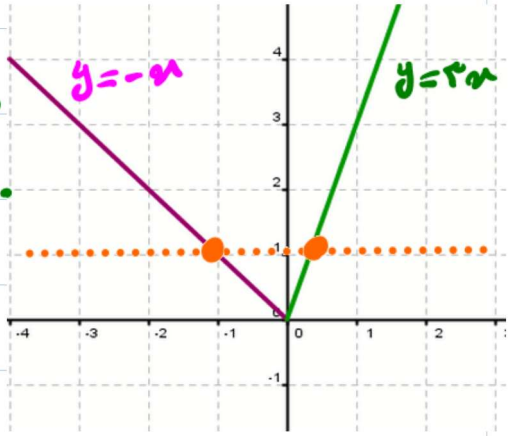
$a=2, b=3 \rightarrow f=\{(4,1),(6,2),(2,3)\}$ تابع یک به یک نیست

$a=-2, b=10 \rightarrow f=\{(4,1),(6,2),(-2,10)\}$ تابع یک به یک هست

مثال: کدام یک از توابع زیر یک به یک است و چرا؟

الف) $f(x)=x+2|x|$

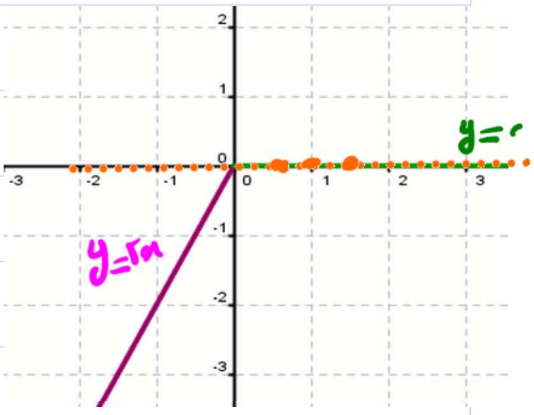
$$f(x)=\begin{cases} x-2x & x<0 \\ x+2x & x\geq 0 \end{cases}=\begin{cases} -x & x<0 \\ 3x & x\geq 0 \end{cases}$$



یک به یک نیست

ب) $f(x)=x-|x|$

$$f(x)=\begin{cases} x-(-x) & x<0 \\ x-x & x\geq 0 \end{cases}=\begin{cases} 2x & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases}$$



یک به یک نیست

ب) $f(x)=x^3-2x^2$

$x=0 \rightarrow y=0$

$x=2 \rightarrow y=2^3-2(2)^2=8-8=0$

تابع یک به یک است

ج) $f(x)=x^2+2x$

$x=0 \rightarrow y=0$

$x=-2 \rightarrow y=4+2(-2)=0$

تابع یک به یک است

د) $f(x)=\dfrac{[x]+[-x]}{x}$

$x \neq 0,\ x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=0 \rightarrow y=0$

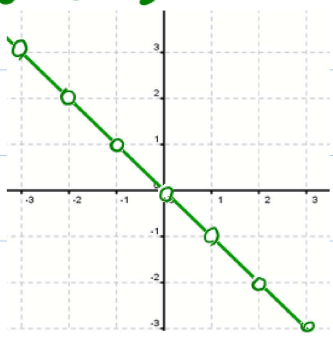
تابع یک به یک است.

ه) $f(x)=\dfrac{x}{[x]+[-x]}$

$D=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

$[x]+[-x]=0 \rightarrow x \in \mathbb{Z}$

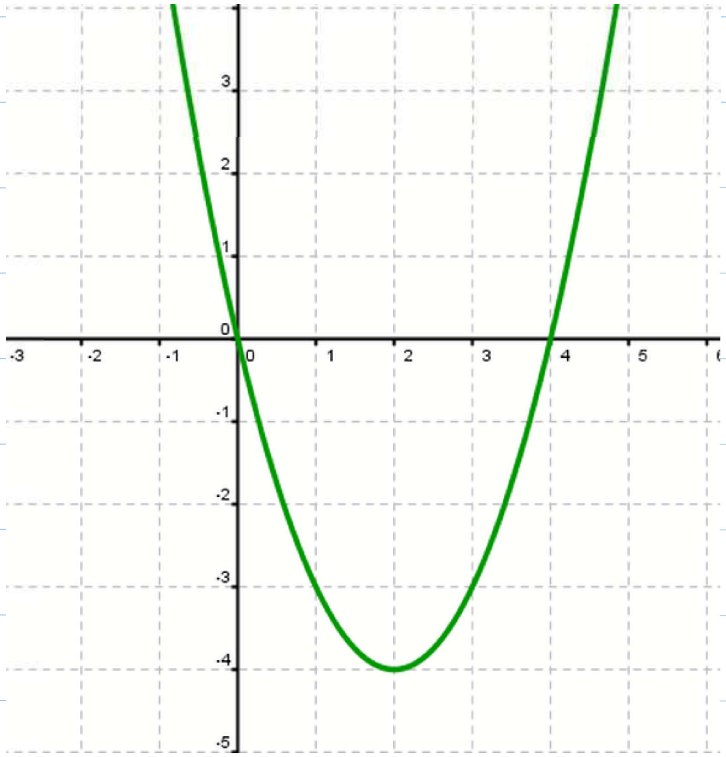
$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=-1 \rightarrow f(x)=\dfrac{x}{-1} \Rightarrow f(x)=-x$



تابع یک به یک است.

نکته: می‌توانیم با محدود کردن دامنه، از یک تابع غیر یک به یک تابعی یک به یک بسازیم.

مثال: ابتدا ثابت کنید تابع $f(x)=x^2-4x$ یک به یک نیست. سپس با محدود کردن دامنه آن را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید.



خط‌های موازی محور xها وضعیت دارند که تابع را در دو نقطه قطع می‌کنند پس تابع یک به یک نیست.

بزرگترین بازه‌ها

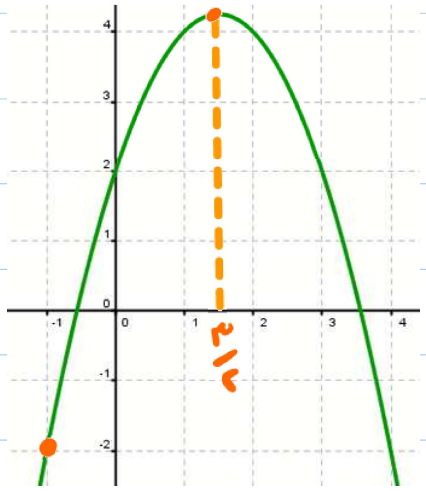
$[0,2]$ یا $[2,+\infty)$ یا $(-\infty,2]$ یا $[2,+\infty)$

نکته: تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ با دامنه $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ یا $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ یک به یک است.

مثال: تابع $f(x)=-x^2+3x+2$ روی بازه $[-1,a]$ یک به یک است. حداکثر مقدار a چقدر است؟

راس سهمی را

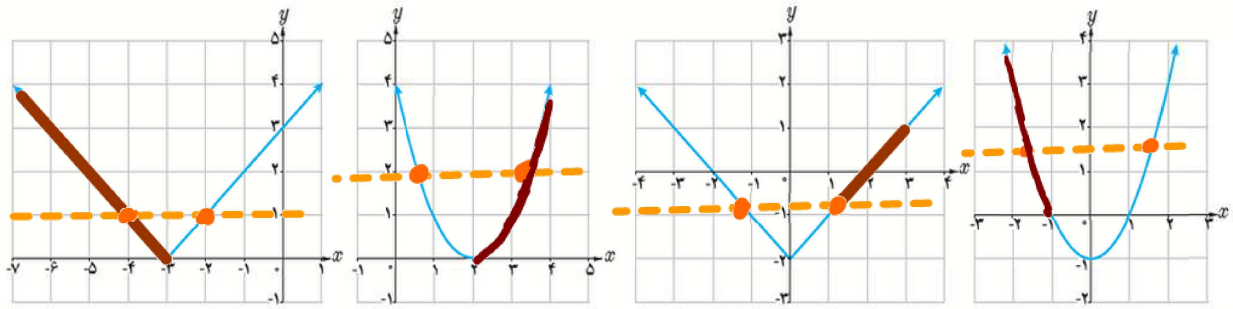
$$a=\frac{-3}{2(-1)}=\frac{3}{2}$$



مثال:

تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y=|x+3|$ ب) $y=(x-2)^2$ پ) $y=|x|-2$ ت) $y=x^2-1$

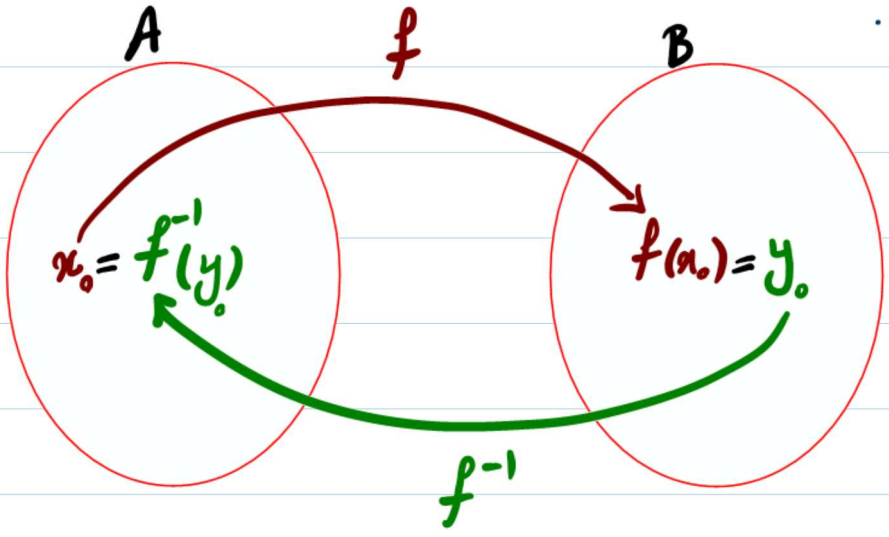


$D=(-\infty,-1)$ $D=[1,+\infty)$ $D=[1,3]$ $D=(-\infty,-3]$

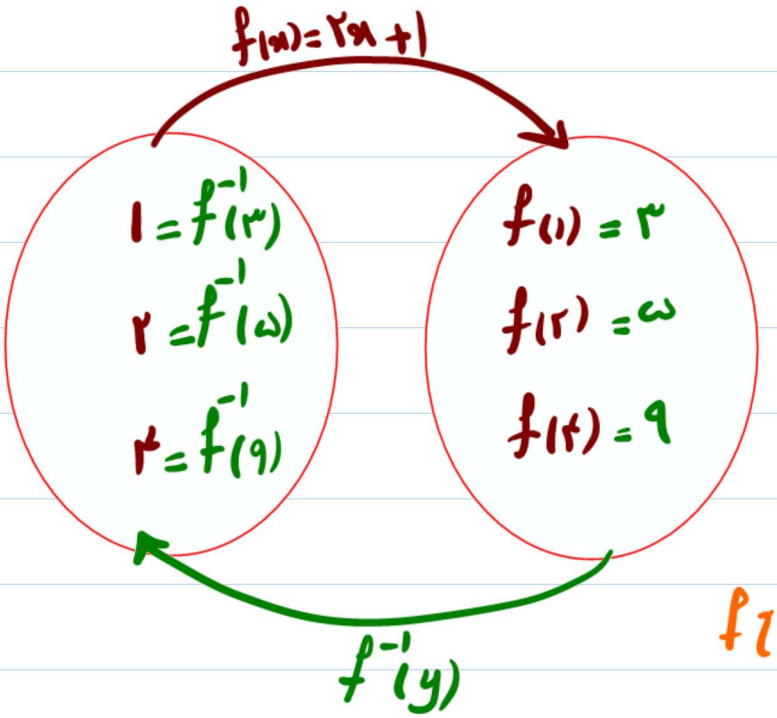
وارون تابع :

برای برخی توابع ، تابعی دیگر وجود دارد که عکس تابع اصلی عمل کرده و خروجی را به ورودی تبدیل می‌کند . به چنین تابعی ، تابع معکوس یا تابع وارون می‌گوییم.

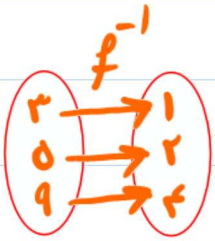
تعریف : وارون تابع f رابطه‌ای است که در آن به ازای هر خروجی f ، به ورودی مربوطه می‌رسیم . مثلاً اگر تابع f ، x_0 از دامنه را به y_0 از برد ببرد ، وارون تابع f که آن را با f^{-1} نشان می‌دهند عضو y_0 را به عنوان عضوی از دامنه خودش به x_0 از مجموعه برد می‌برد .



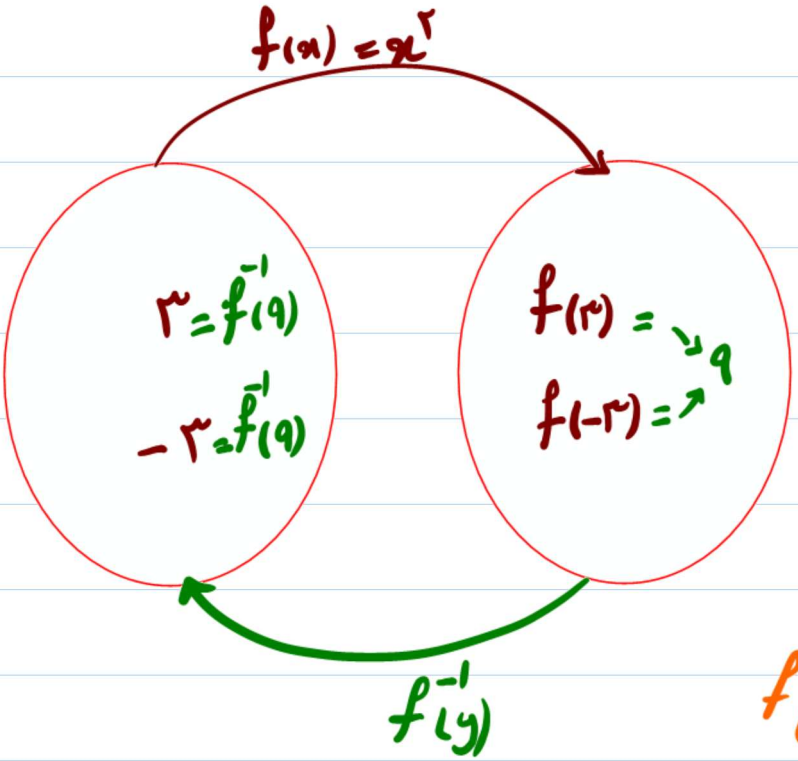
مثال :



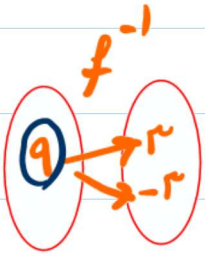
خلاصه وارون تابع f :



وارون تابع خود تابع است :



خلاصه وارون تابع f



تابع وارون پذیر : اگر وارون تابع f ، تابع باشد ، f را وارون پذیر می‌گوییم.

نکته : تابع f وارون پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد

۱) محاسبه وارون تابع از روی نمایش زوج مرتبی :

کافی است جای مولفه اول و دوم را عوض کنیم : $f^{-1}=\{(y,x)\mid (x,y)\in f\}$

مثال: وارون پذیر است $f=\{(1,6),(-1,5),(2,4)\}$ الف)

$f^{-1}=\{(6,1),(5,-1),(4,2)\}$

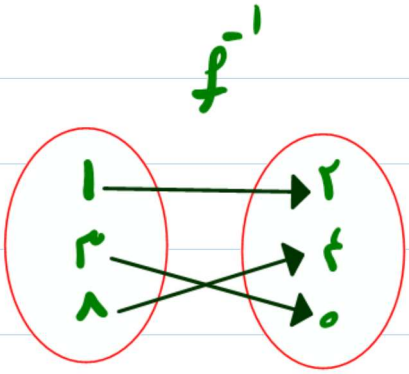
وارون پذیر نیست $g=\{(1,3),(2,4),(5,2),(7,3)\}$ ب)

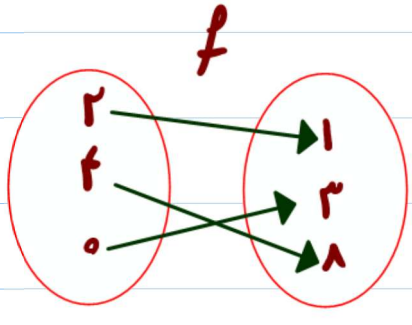
تابع نیست : $g^{-1}=\{(3,7),(5,2),(4,-1),(3,1)\}$ رابطه

۲) محاسبه وارون تابع از روی نمایش نمودار ون :

کافی است جهت فلش‌ها یا جای دایره‌ها را عوض کنیم .

مثال :





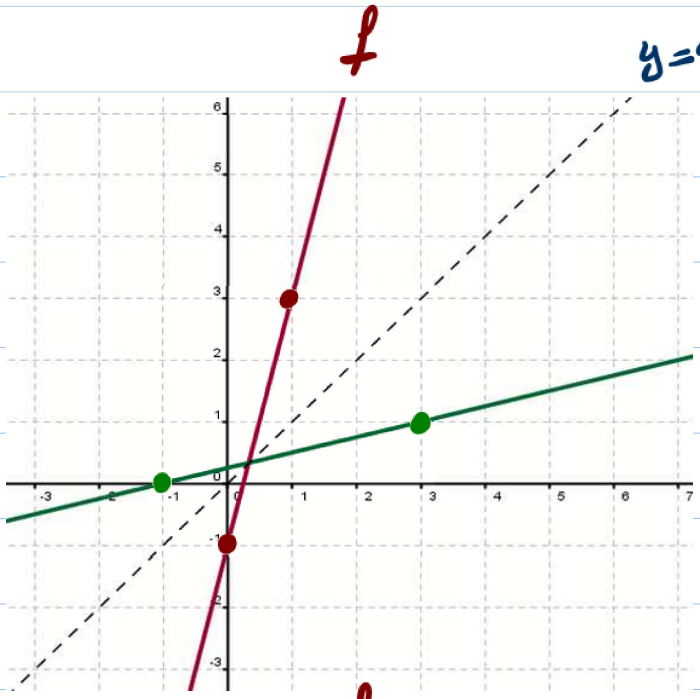
وارون پذیر

۱۳ محاسبه وارون تابع از روی نمایش دستگاه مختصات :

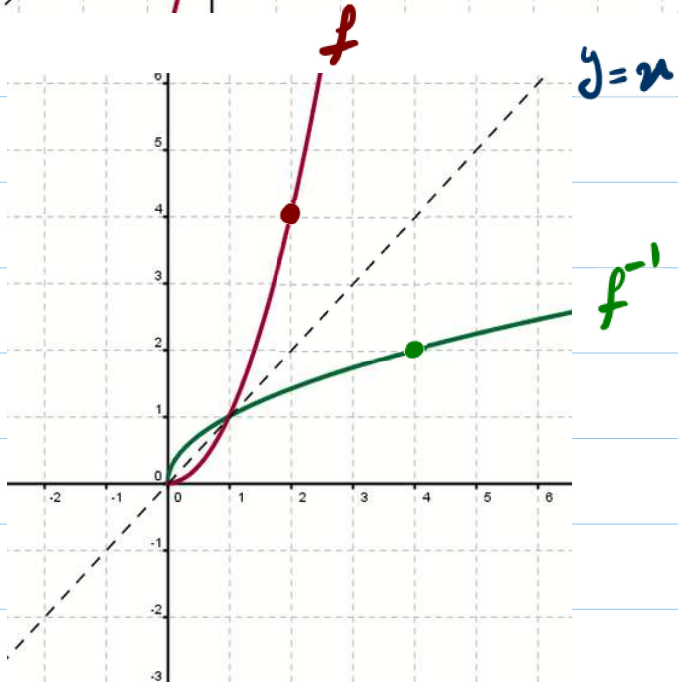
کافی است قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) بیابیم

زیرا دو نقطه (x,y) و (y,x) نسبت به خط $y=x$ قرینه اند.

مثال:



تذکر: بهتر است برای دقیق‌تر شدن نمودار f^{-1} چند نقطه روی f پیدا کنیم و جای x و y را عوض کنیم تا نقطه‌ای روی f^{-1} به دست آید.



چند نکته: اگر f وارون پذیر باشد آنگاه

۱- اگر $f(a)=b$ آنگاه $f^{-1}(b)=a$. به عبارت دیگر اگر نقطه (a,b) روی نمودار تابع f باشد آنگاه نقطه (b,a) روی نمودار f^{-1} است.

۲- $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$

۳- $D_{f^{-1}}=R_f$ ، $D_f=R_{f^{-1}}$

۴- اگر f و f^{-1} در نقطه (a,b) متقاطع باشند آنگاه $f(a)=b$ ، $f(b)=a$.

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{18-x}+\sqrt[3]{18+x}$ باشد مقدار $f(9)+f^{-1}(6)$ را بیابید.

$$f(9)=\sqrt{18-9}+\sqrt[3]{18+9}=3+3=6$$

$$f^{-1}(6)=9$$

$$f(9)+f^{-1}(6)=6+9=15$$

مثال: اگر $g=\{(2,4),(3,2),(1,5),(5,-1)\}$ و $f=\{(3,2),(2,3),(4,-1),(5,6)\}$

و $f^{-1}(a)+g^{-1}(2)=6$ ، مقدار $g(a)$ را بدست آورید.

$g(3)=2 \rightarrow g^{-1}(2)=3$

$f^{-1}(a)+3=6 \rightarrow f^{-1}(a)=3 \rightarrow f(3)=a=2$

$g(a)=g(2)=4$

مثال: نمودار تابع $f(x)=-x^3+mx+n$ در نقطه $(\frac{1}{3},-1)$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند.

مقدار m,n را بیابید.

$f(-1)=\frac{1}{3} \rightarrow \underbrace{-(-1)^3}_{+1}-m+n=\frac{1}{3} \rightarrow -m+n=-\frac{2}{3}$ ①

$f(\frac{1}{3})=-1 \rightarrow -\frac{1}{27}+\frac{1}{3}m+n=-1 \rightarrow \frac{1}{3}m+n=-1+\frac{1}{27}$

$\frac{1}{3}m+n=\frac{-26}{27} \xrightarrow{\times 3} m+3n=-\frac{26}{9}$ ②

$$\begin{cases} -m+n=-\frac{2}{3} \\ m+3n=-\frac{26}{9} \end{cases}$$

$4n=\frac{-32}{9}$

$\rightarrow n=\frac{-32}{9\times 4}=-\frac{8}{9} \rightarrow -m-\frac{8}{9}=-\frac{2}{3}$

$m=\frac{2}{3}-\frac{8}{9}=\frac{-2}{9}$

۴) یافتن ضابطه تابع وارون :

اگر تابع به صورت ضابطه بیانی داده شده باشد، مراحل زیر را برای آن انجام می‌دهیم :

۱- به جای $f(x)$ ، y قرار می‌دهیم .

۲- مانند یک معادله به آن نگاه می‌کنیم که می‌خواهیم x را بیابیم یعنی x را برحسب y می‌یابیم .

۳- به جای x ، $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x قرار می‌دهیم .

مثال: وارون توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=4x-7$

$$y=4x-7 \rightarrow y+7=4x \xrightarrow{\div 4} \frac{y+7}{4}=x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+7}{4}$$

۲) $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$

$$\frac{y}{1}=\frac{3x+2}{x-1} \rightarrow yx-y=3x+2 \rightarrow yx-3x=2+y$$

$x(y-3)=2+y \rightarrow x=\frac{2+y}{y-3} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-3}$

۳) $y=3-\sqrt{x+1}$

$\sqrt{x+1}=3-y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+1=(3-y)^2 \rightarrow x=(3-y)^2-1$

$f^{-1}(x)=(3-x)^2-1$

روش دوم

$x+1=9-6y+y^2 \rightarrow x=y^2-6y+8$

$f^{-1}(x)=x^2-6x+8$

تذکر: اگر تابعی یک به یک نباشد پس وارون پذیر نیست ولی می‌توانیم با محدود کردن دامنه تابع آن را یک به یک کنیم و وارونش را به دست آوریم.

مثال: با محدود کردن دامنه تابع $f(x)=x^2+4x+5$، ضابطه تابع وارون را بیابید.

$D=(-\infty,-\frac{b}{2a}]=(-\infty,-\frac{4}{2}]=(-\infty,-2]$

با این دامنه تابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می‌شود.

$f(x) = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1$

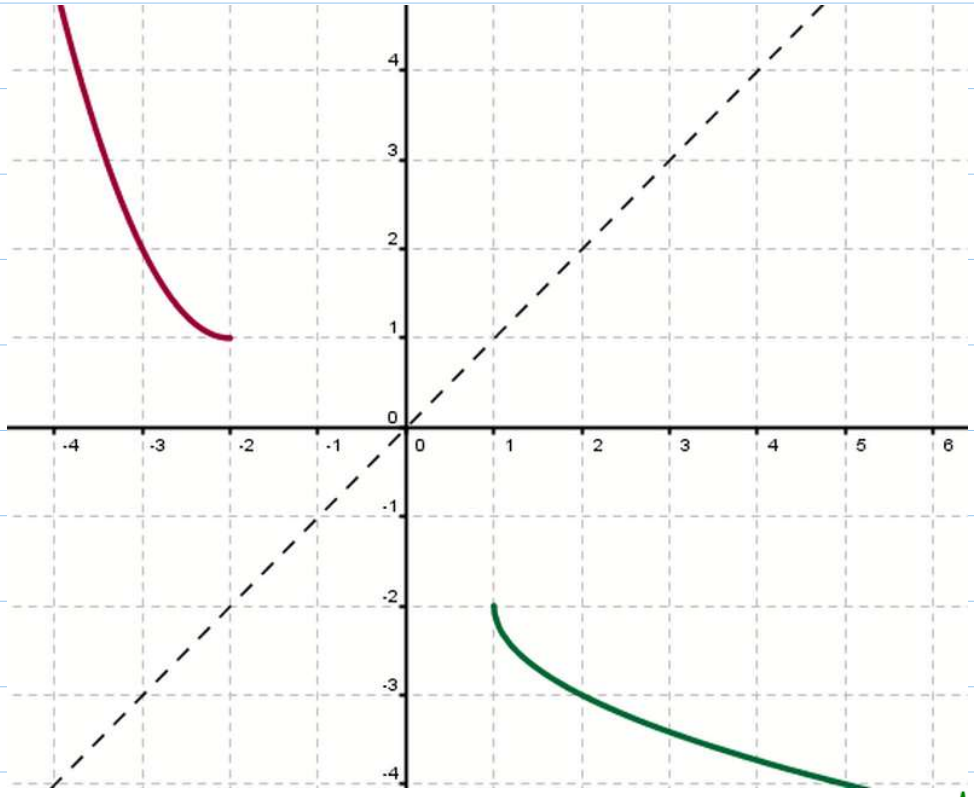
$x+2 \mid x \quad -2$

$y = (x+2)^2 + 1 \longrightarrow y-1 = (x+2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y-1} = |x+2|$

$\sqrt{y-1} = -(x+2) \longrightarrow \sqrt{y-1} = -x-2$

$x = -2 - \sqrt{y-1} \longrightarrow f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x-1}$

f: $x \leq -2$



f^{-1}

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}7x+2 & x<1\\ 5x+4 & x\geq 1\end{cases}$ ، نوع دارد f را بیابید.

دامنه f^{-1} :

$$D_{f^{-1}} = R_f$$

$$x<1 \xrightarrow{\times 7} 7x<7 \xrightarrow{+2} 7x+2<9$$

$$x\geq 1 \xrightarrow{\times 5} 5x\geq 5 \xrightarrow{+4} 5x+4\geq 9$$

ضابطه f^{-1} :

$$y=7x+2 \rightarrow y-2=7x \rightarrow x=\frac{y-2}{7} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-2}{7}$$

$$y=5x+4 \rightarrow y-4=5x \rightarrow x=\frac{y-4}{5} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-4}{5}$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{7} & x<9\\ \frac{x-4}{5} & x\geq 9\end{cases}$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل سوم: تابع

درس سوم: اعمال جبری روی توابع

جلسه چهارم: صفحات ۶۵ تا ۶۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

اعمال روی توابع :

فرض کنید f و g دو تابع باشند، در این صورت :

۱- جمع f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از این دامنه مشترک داریم: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

حاصل جمع دو تابع f و g را با $f+g$ نمایش می‌دهیم.

۲- تفاضل f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از این دامنه مشترک داریم: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

تفاضل دو تابع f و g را با $f-g$ نمایش می‌دهیم.

۳- ضرب f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از این دامنه مشترک داریم: $(f \times g)(x)=f(x) \times g(x)$

حاصل ضرب دو تابع f و g را با $f \times g$ نمایش می‌دهیم.

۴- تقسیم f بر g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=0\}$

است و برای هر x از دامنه این تابع داریم: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

تقسیم تابع f بر تابع g را با $\frac{f}{g}$ نمایش می‌دهیم.

مثال (زوج مرتب) :

اگر داشته باشیم : $f = \{(-2,1), (3,0), (1,4), (6,0)\}$

مطلوب است: $g = \{(1,9), (5,0), (3,7), (-2,2), (6,\sqrt{2})\}$

$$D_f \cap D_g = \{1,3,-2,6\}$$

الف) $f+g = \{(1,13), (3,12), (-2,3), (6,\sqrt{2})\}$

ب) $f \times g = \{(1,36), (3,35), (-2,2), (6,0)\}$

ج) $\frac{f}{g} = \{(1,\frac{4}{9}), (3,\frac{0}{7}), (-2,\frac{1}{2}), (6,0)\}$

د) $\frac{g}{f} = \{(1,\frac{9}{4}), (3,\frac{7}{0}), (-2,2), (6,\frac{\sqrt{2}}{0})\}$

در عوامل بسط می‌شوند

ه) $2f-3g$

$2f=\{(-2,2),(3,10),(1,8),(6,0)\}$

$3g=\{(1,27),(0,0),(3,21),(-2,6),(\frac{1}{2},\frac{3}{4})\}$

$2f-3g=\{(-2,-4),(3,-11),(1,-19),(6,-\frac{3}{4})\}$

مثال (ضابطه جبری)

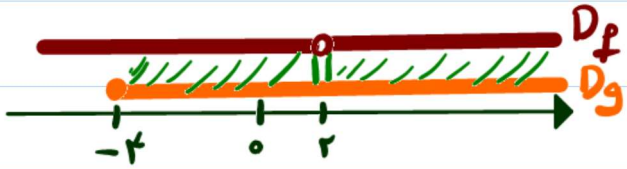
دو تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ ، $g(x)=\sqrt{x+4}$ را در نظر بگیرید. مطلوب است:

الف) دامنه و ضابطه توابع $f-g$ و $\frac{f}{g}$.

ب) محاسبه مقادیر $(f+g)(0)$ ، $(\frac{f}{g})(-4)$ و $(\frac{1}{2}g-f)(3)$.

الف) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+1}{x-2}-\sqrt{x+4}$

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ $\quad D_g: x+4\geq 0 \rightarrow x\geq -4 \rightarrow D_g=[-4,+\infty)$



$D_f\cap D_g=[-4,2)\cup(2,+\infty)$ $\quad D_{f-g}=[-4,2)\cup(2,+\infty)$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\frac{x+1}{x-2}}{\sqrt{x+4}}=\frac{x+1}{(x-2)(\sqrt{x+4})}$

$g(x)=0 \rightarrow \sqrt{x+4}=0 \rightarrow x=-4$ ← از ریشه مشترک خارج می‌کنیم

$D_{\frac{f}{g}} = (-4,2) \cup (2,+\infty)$ *

ب) $(f+g)(0)=f(0)+g(0)=\frac{0+1}{0-2}+\sqrt{0+4}=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

$(\frac{g}{f})(-3)=\frac{g(-3)}{f(-3)}=\frac{\sqrt{-3+4}}{\frac{-3+1}{-3-2}}=\frac{1}{\frac{-2}{-5}}=\frac{5}{2}$

$(4f-\frac{1}{2}g)(0)=4f(0)-\frac{1}{2}g(0)=4\times\frac{0+1}{0-2}-\frac{1}{2}\sqrt{0+4}$

$=4\times 2-\frac{1}{2}\times 2=8-\frac{2}{2}=\frac{16-2}{2}=\frac{14}{2}$

مثال: (زوج مرتب و ضابطه جبری)

اگر $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ و $g=\{(3,1),(1,7),(-4,2),(0,6)\}$ باشند،

توابع $f+g$ و $\frac{g}{f}$ را بیابید.

$D_g=\{3,1,-4,0\}$

$D_f: x^2-2x \geq 0$ ← حل می‌کنیم $x=0, x=2$

x		0		2	
x^2-2x	$+$	0	$-$	0	$+$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$D_f \cap D_g = \{2, -4, 0\}$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = \sqrt{9-5} + 1 = \sqrt{4} + 1$$

$$(f+g)(-4) = f(-4) + g(-4) = \sqrt{16+8} + 4 = \sqrt{24} + 4$$

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 2 = 2$$

$$f+g = \{(2, 1+\sqrt{2}), (-4, 4+\sqrt{24}), (0, 2)\}$$

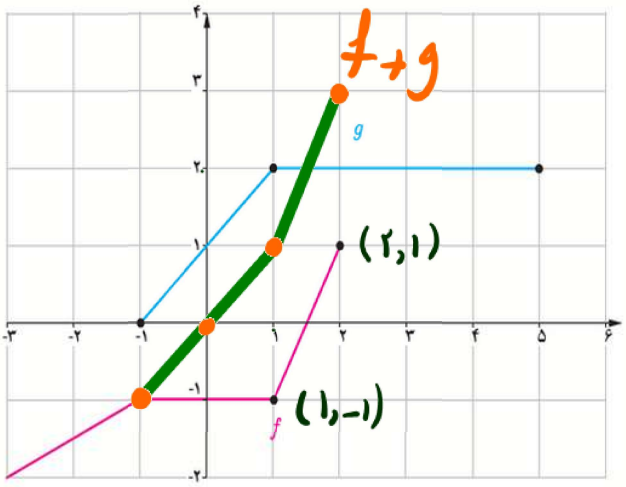
$$\left(\frac{g}{f}\right)(2) = \frac{g(2)}{f(2)} = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(-4) = \frac{g(-4)}{f(-4)} = \frac{4}{\sqrt{24}} = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{2}{0}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{\left(2, \frac{1}{\sqrt{4}}\right), \left(-4, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

مثال: (سنرداری)



نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع $f+g$ و f ، g را به‌دست آورید.

ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.

الف) $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = -1+2 = 1$

$(f+g)(-1) = f(-1)+g(-1) = -1+0 = -1$

ب) $D_f = [-1,5]$ $D_g = (-\infty, 2]$

$D_f \cap D_g = [-1,2]$ با توجه به آن می‌توان چند نقطه از این دامنه تابع را رسم کرد.

$(f+g)(-1) = -1$, $(f+g)(0) = f(0)+g(0) = -1+1 = 0$

$(f+g)(1) = 1$, $(f+g)(2) = f(2)+g(2) = 1+2 = 3$

این نقاط روی $f+g$ هستند: $(-1,-1), (0,0), (2,3), (1,1)$

ب)

$$m=\frac{1+1}{-1-1}=-1$$

$$y-1=-1(x-1)$$

$$y-1=-x+1$$

$$y=-x+2$$

کمترین

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x\le 1\\ -x+2 & 1<x\le 2\end{cases}$$

کمترین

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & -1\le x\le 1\\ 2 & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}x+1-1 & -1\le x\le 1\\ -x+2+2 & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}x & -1\le x\le 1\\ -x+4 & 1<x\le 2\end{cases}$$

ت) نمودار هر دو تابع است ولی رسم نمودار به کمک ضابطه دقیق‌تر است.