ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل دوم: هندسه

درس اول: ترسیم‌های هندسی

جلسه اول: صفحات ۲۶ تا ۲۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

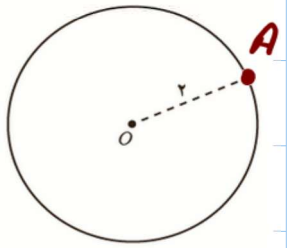
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در ترسیم‌های هندسی فقط از خط‌کش دیدار (لبه‌ی دار) استفاده می‌کنیم.

فعالیت

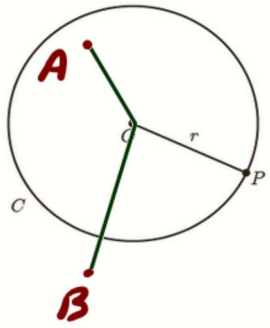


۱ یک نقطهٔ ثابت در صفحه، مانند O را درنظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ثابت ۲ سانتی‌متر از آن هستند درنظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

دایره

۲ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر بکشید و یک نقطهٔ دلخواه روی آن درنظر بگیرید. فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

$OA=۲$

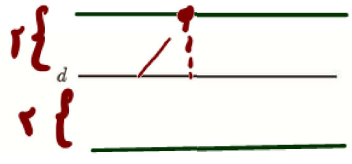


نتیجه: دایرهٔ $C(O,r)$ (بخوانید دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع r) را درنظر بگیرید. هر نقطه که از نقطهٔ O به فاصلهٔ r باشد، روی دایره قرار دارد و هر نقطه که روی دایره قرار دارد از نقطهٔ O به فاصلهٔ r است.

۳ مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک‌بار برای نقاط داخل دایره و یک‌بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به‌دست آورید.

نتیجه: A درون دایره است $\iff OA<۲$

B بیرون دایره است $\iff OB>۲$



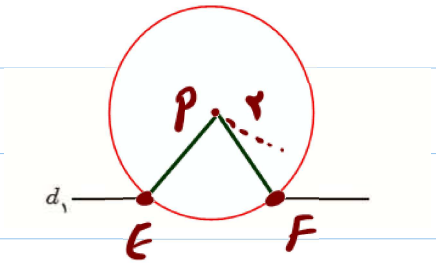
۴ خطی مانند d درنظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d هستند مشخص کنید. این نقاط چه شکلی یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟

دو خط موازی با فاصله ۲cm از خط d

۵ نقطهٔ P به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d_1 قرار دارد.

الف) تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص کنید.

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص کنید.



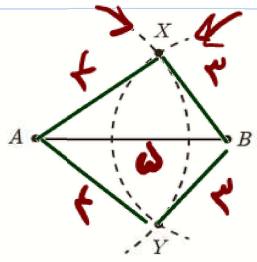
۶ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی‌متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی‌متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.

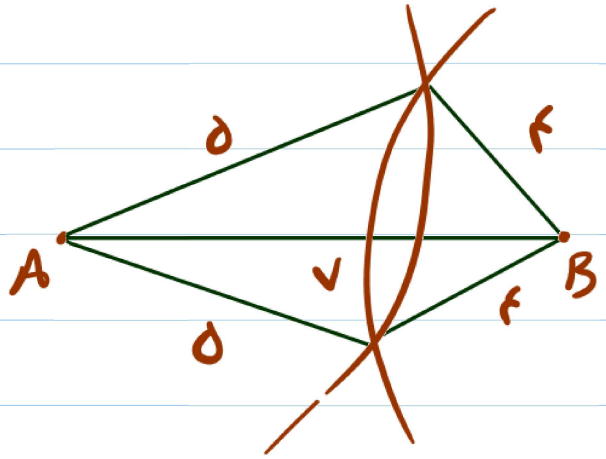
الف) اندازهٔ اضلاع مثلث‌های AXB و AYB را مشخص کنید.

ب) توضیح دهید که چگونه می‌توانید مثلثی به طول ضلع‌های داده شدهٔ ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.

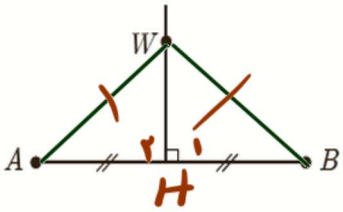
نکته: در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است.

$۵ < ۴+۷$ ، $۷ < ۵+۴$ ، $۴ < ۷+۵$





قضیه ۱: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد از دو سر پاره خط به یک فاصله است و برعکس یعنی هر نقطه که از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.



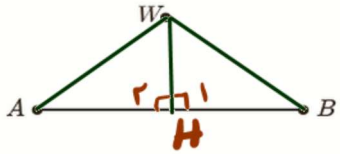
اثبات رفت:

فرض $\begin{cases} AH=BH \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2 \end{cases}$

حکم $AW=BW$

$$\begin{cases} AH=BH \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2 \\ WH=WH \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\hat{W}H \cong B\hat{W}H \Rightarrow AW=BW$$

اثبات برگشت:



از W به A و B وسط AB وصل می‌کنیم

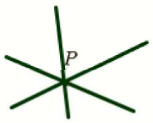
حال ثابت می‌کنیم $(WH \perp AB)$ $\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ$

$$\begin{cases} WH=WH \\ AW=BW \\ AH=BH \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} A\hat{W}H \cong B\hat{W}H \Rightarrow \hat{H}_1=\hat{H}_2$$

زاویه نیم‌صفحه $\rightarrow \hat{H}_1+\hat{H}_2=180^\circ \rightarrow 2\hat{H}_1=180^\circ$

$$\rightarrow \hat{H}_1=90^\circ=\hat{H}_2$$

فعالیت



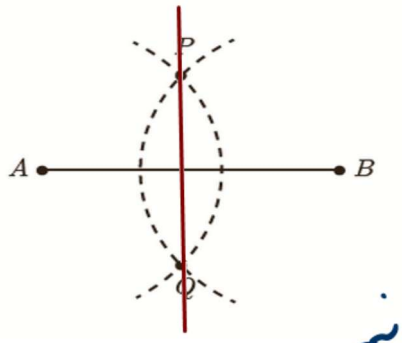
۱ نقطهٔ P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید رسم کنید که از نقطهٔ P عبور نمایند؟ بی‌شمار



۲ دو نقطهٔ A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ A و B عبور نمایند؟ تک خط

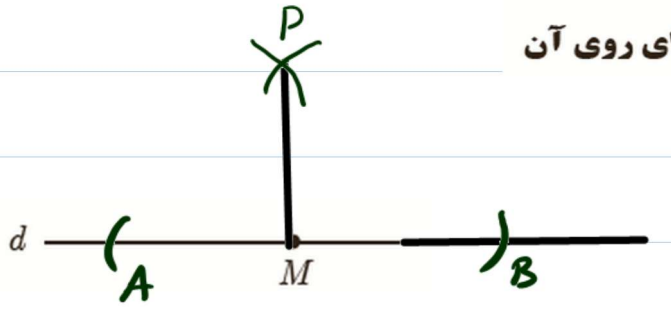
۳ به‌نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟ ۲

رسم عمود منصف یک پاره خط



دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز می‌کنیم و یکبار به مرکز A و بار دیگر به همان شعاع به مرکز B کمان می‌زنیم تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند. خطی که از P و Q می‌گذرد عمود منصف AB است.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

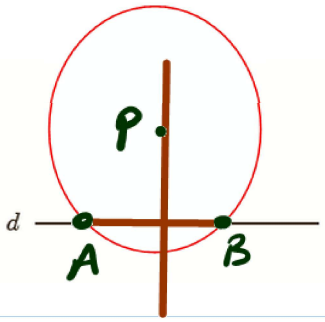


به مرکز M و شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم و محل برخورد کمان با خط d را A و B می‌نامیم.

در این صورت AM = MB. حال کافی است عمود منصف پاره خط

AB را رسم کنیم. این خط بر d عمود است و از نقطه M می‌گذرد.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



دهانه پرگار را کمی بیش از فاصله P تا خط باز می‌کنیم و کمانی می‌زنیم تا دهانه برخورد با

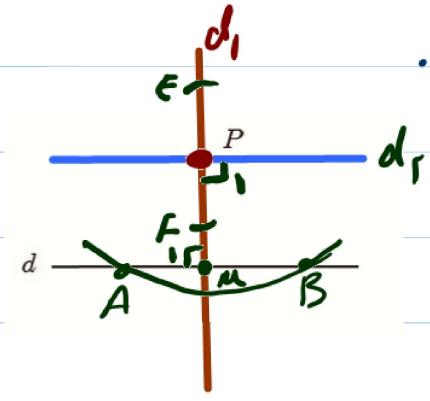
با خط d را A و B می‌نامیم. در این صورت $AP=PB$.

حال کافی است عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم نقطه‌ای روی این عمود منصف

واقع است زیرا $AP=PB$. پس خط عمود منصف جواب مسأله است.

رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

از نقطه P عمودی بر خط d رسم می‌کنیم و آن را d_1 می‌نامیم.

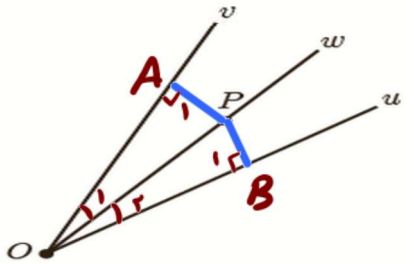


حال از نقطه P خطی عمود بر d_1 رسم می‌کنیم و آن را d_2 می‌نامیم.

خط d_2 موازی d_1 است زیرا طبق قضیه عکس خطوط موازی دو جز جفن

$\hat{P}_1 = \hat{A}_1$ پس دو خط d_1 و d_2 موازیند.

قضیه ۲: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و برعکس هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز زاویه قرار دارد.

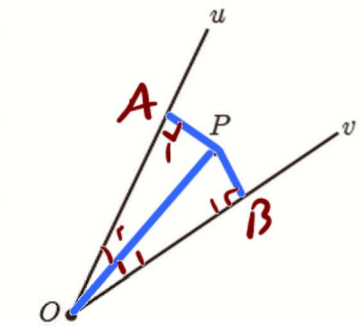


اثبات رفت:

از P بر A و B دو عمود رسم می‌کنیم.

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 90^\circ \\ PO = PO \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} A\hat{O}P \equiv B\hat{P}O \Rightarrow AP = PB$$

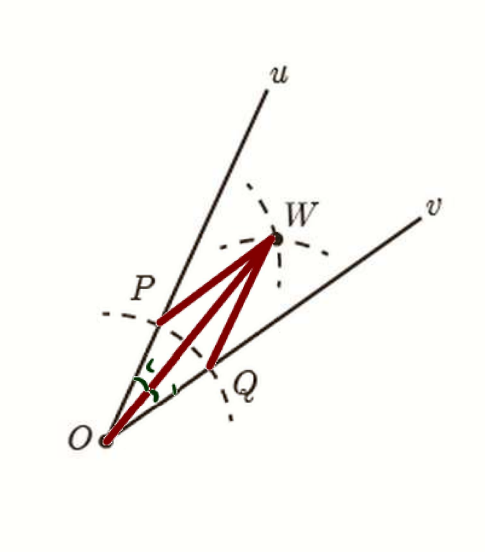
اثبات برگشت:



از P بر دو ضلع عمود می‌کنیم و از P به O وصل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 90^\circ \\ PO = PO \\ AP = PB \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک حاد}} B\hat{P}O \equiv A\hat{P}O \rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

رسم نیمساز یک زاویه :



به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در P و Q قطع کند ($PO = QO$)

دهانه پرگار را کمی بیش از نصف PQ باز می‌کنیم و یک بار به مرکز P و یک بار به مرکز Q کمان رسم

می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند ($PW = QW$)

پاره خط‌های OW و PW و QW را رسم می‌کنیم :

$$\begin{cases} OW = OW \\ PO = QO \\ PW = WQ \end{cases} \xrightarrow{\text{ضضض}} OPW \equiv OQW \rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل دوم: هندسه

درس دوم: استدلال و قضیه تالس

قسمت اول: تناسب و استدلال

جلسه دوم: صفحات ۳۱ تا ۴۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

الف) نسبت و تناسب

نسبت عدد a به b برابر $\frac{a}{b}$ است. ($b \neq 0$)

تساوی دو نسبت را یک تناسب می‌گوییم مانند $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

دقت کنید مثلاً وقتی می‌گوییم اعداد a و b با اعداد 2 و 5 متناسب هستند یعنی $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$

به عبارت دیگر : $a = 2k \quad , \quad b = 5k$

ویژگی‌های تناسب :

با شرط غیرصفر بودن همه مخرج‌ها داریم :

طرفین وسطین ویژگی

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$

کناری-طرفین
$(a/b = c/d)$
وسطین
میانی

اثبات رفت :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\times bd} \frac{a}{b} bd = \frac{c}{d} bd \Rightarrow ad = bc \quad \blacksquare$$

اثبات برگشت:

$$ad=bc \xrightarrow{\div bd} \frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \blacksquare$$

۲) معکوس کردن تناسب

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

اثبات:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\times \frac{bd}{ac}} \frac{a}{b}\times\frac{bd}{ac}=\frac{c}{d}\times\frac{bd}{ac}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{c}=\frac{b}{a} \quad \blacksquare$$

۳) تعویض جای طرفین و وسطین

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c}=\frac{b}{d} & ① \text{ تعویض جای وسطین} \\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a} & ② \text{ تعویض جای طرفین} \end{cases}$$

اثبات ①

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\times \frac{d}{a}} \frac{a}{b}\times\frac{d}{a}=\frac{c}{d}\times\frac{d}{a} \rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad \blacksquare$$

اثبات ②

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\times \frac{d}{a}} \frac{a}{b}\times\frac{d}{a}=\frac{c}{d}\times\frac{d}{a} \rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \quad \blacksquare$$

۴) ترکیب نسبت در صورت یا مخرج

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} & ① \\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} & ② \end{cases}$$

اثبات ①

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{+1} \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$ ☑

اثبات ②

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \xrightarrow{+1} \frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1 \rightarrow \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$ ☑

تفضیل نسبت در صورت یا مخرج

۵) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow$ ① $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ ② $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

اثبات ①

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{-1} \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$ ☑

اثبات ②

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \xrightarrow{-1} \frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1 \rightarrow \frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$$ ☑

ترکیب کسرها با هم

۶) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$

مثال: جاهای خالی را پر کنید.

۱) $15\times 16=20\times 12$ (۲۴۰) $\Rightarrow \frac{15}{12}=\frac{20}{16}$

۲) $\frac{۷}{۱۱}=\frac{۱۴}{۲۲} \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۱}=\frac{\cdots^{۴۶}}{\cdots_{۲۲}}$

$\frac{۷}{۱۱}=\frac{۱۴}{۲۲} \xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{ترکیب نسبت}} \frac{۷+۱۱}{۱۱}=\frac{۱۴+۲۲}{۲۲} \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۱}=\frac{۳۶}{۲۲}$

۳) $\frac{۶}{۱۷}=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{۶}{۱۱}=\frac{\cdots^{x}}{\cdots_{y-x}}$

$\frac{۶}{۱۷}=\frac{x}{y} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{تفضیل نسبت}} \frac{۶}{۱۷-۶}=\frac{x}{y-x} \Rightarrow \frac{۶}{۱۱}=\frac{x}{y-x}$

مثال: بدون مخرج مشترک دو طرف در تناسب $\frac{a+۱۰}{۲a+۱۰}=\frac{b+۲۱}{۲b+۱۴}$، نسبت $\frac{a}{b}$ را بیابید.

$\xrightarrow{\times ۲} \frac{a+۱۰}{۲(a+۵)}=\frac{b+۲۱}{۲(b+۷)} \Rightarrow \frac{a+۱۰}{a+۵}=\frac{b+۲۱}{b+۷}$

$\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{تفضیل نسبت}} \frac{a+۱۰}{(a+۱۰)-(a+۵)}=\frac{b+۲۱}{(b+۲۱)-(b+۷)}$

$\rightarrow \frac{a+۱۰}{۱۰}=\frac{b+۲۱}{۱۴} \xrightarrow{\times \frac{۲}{۳}} \frac{۲}{۳}\frac{a+۱۰}{۱۰}=\frac{۲}{۳}\frac{b+۲۱}{۱۴}$

$\rightarrow \frac{a+۱۰}{۱۰}=\frac{b+۲۱}{۲۱}$

تفصیل بستن در صورت $\xrightarrow{}$ $\frac{a+10-10}{10} = \frac{b+21-21}{b} \rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{21}$

تقریق جین وسطین $\xrightarrow{}$ $\frac{a}{b} \div \frac{10}{21} = \frac{5}{7}$

مثال: اگر $\frac{2x-1}{3} = \frac{3y+1}{2} = \frac{12+z}{2}$ و $2x+4y+z=32$ باشد، x, y, z را بیابید.

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{2(3y+1)}{2\times 2} = \frac{12+z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{6x-1}{3} = \frac{4y+2}{4} = \frac{12+z}{2} = \frac{6x-1+4y+2+12+z}{3+4+2}$$

$$= \frac{\overbrace{6x+4y+z}^{32}-1+2+12}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

$$\frac{2x-1}{3} = 5 \rightarrow 6x = 15+1 \rightarrow x = 4$$

$$\frac{4y+2}{4} = 5 \rightarrow 4y+2 = 20 \rightarrow 4y = 18 \rightarrow y = 4$$

$$\frac{12+z}{2} = 5 \rightarrow 12+z = 10 \rightarrow z = -2$$

ب) استدلال

استدلال یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

هر مسئله از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت اول معروضات و داده‌های مسئله و قسمت دوم، هدف یا حکم مسئله است.

منظور از حل یک مسئله آن است که با استفاده از یک سلسله از قوانین و اصول و با تکیه بر معروضات مسئله به هدف مورد نظر برسیم.

به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، **برهان** یا **اثبات** می‌گوییم.

انواع استدلال‌ها:

۱- استدلال استقرایی:

روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است.

ایراد چنین استدلالی این است که همیشه این احتمال وجود دارد که شواهد بیشتری کشف شوند تا نادرستی نتیجه‌گیری کلی را نشان دهند.

مثلاً با دیدن چندین حکم کلی می‌دهیم که هر عدد زوج، اول نیست ولی ۲ زوج و اول است.

۲ـ استدلال استنتاجی :

روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

در استدلال استنتاجی با فرض درست بودن چند گزاره به درستی گزاره دیگری که نتیجه استنتاج است می‌رسیم.

پس تا اینجا می‌توان گفت ما به کمک استدلال استقرایی ایده می‌گیریم و این ایده را (در صورت درست بودن) با استدلال استنتاجی اثبات می‌کنیم.

مثال : رابطه بین دو زاویه متقابل به رأس را پیدا کنید.

استدلال استقرایی : با رسم چند خط متقاطع و اندازه‌گیری زاویه‌ها به این نتیجه می‌رسیم

که زاویه‌های متقابل به رأس با هم برابرند.



استدلال استنتاجی :

$\hat{o}_1 + \hat{o}_2 = 180^\circ$

$\hat{o}_2 + \hat{o}_3 = 180^\circ$

$\Rightarrow \hat{o}_1 + \hat{o}_2 = \hat{o}_2 + \hat{o}_3$

$\Rightarrow \hat{o}_1 = \hat{o}_3$ ☑

توجه : به نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی بدست می‌آیند، **قضیه** می‌گوییم.

هر قضیه را می‌توانیم به صورت p آنگاه q بیان کنیم که به p فرض و به q حکم می‌گوییم و آن را به صورت $p \Rightarrow q$ نمایش می‌دهیم.

عکس قضیه : اگر جای قسمت اصلی فرض و حکم را در یک قضیه عوض کنیم، عکس قضیه بدست می‌آید. یعنی اگر حکم قضیه $p \Rightarrow q$ باشد عکس آن $q \Rightarrow p$ خواهد بود.

مثال: عکس قضیه‌های زیر را بنویسید

(الف) اگر عددی مضرب ۴ باشد، مربع آن مضرب ۹ است.

(فرض: مضرب ۴ باشد؛ حکم: مربع آن مضرب ۹ است)

عکس قضیه : اگر مربع عددی مضرب ۹ باشد آنگاه آن عدد مضرب ۴ است.

ب) اگر دو زاویه متقابل به رأس باشند آنگاه با هم برابرند.

(فرض — حکم)

عکس قضیه : اگر دو زاویه با هم برابر باشند آنگاه آن دو زاویه متقابل به رأس هستند.

تذکر: عکس یک قضیه می‌تواند درست باشد و خودش یک قضیه باشد، می‌تواند نادرست باشد و قضیه نباشد.

قضیه دوشرطی :

اگر عکس یک قضیه، خودش قضیه باشد به آن قضیه دوشرطی می‌گوییم.

قضیه دوشرطی به صورت $p \Leftrightarrow q$ بیان می‌شود و آن را به صورت p اگر و تنها اگر q می‌خوانیم.

۳ـ مثال نقض :

برای نشان دادن نادرستی یک حدس، مثالی می‌آوریم که فرض آن را برقرار کند اما حکم درست نباشد.

مثال: برای رد احکام زیر مثال نقض بیاورید.

الف) حاصل ضرب دو عدد گنگ همواره گنگ است. $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$

ب) مربع هر عدد حقیقی از خودش بزرگتر است. $\frac{1}{2}>\frac{1}{4}=(\frac{1}{2})^2$

پ) به ازای هر عدد طبیعی n^2+n+41 اول است. $n=41: 41^2+41+41$

$=41^2+2\times41=41(41+2)=41\times43$

ت) هر چهارضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است. لوزی

ث) چهارضلعی که دو ضلع برابر و دو ضلع موازی داشته باشد، متوازی الاضلاع است.

ذوزنقه متساوی الساقین

تذکر: مثال نقض برای اثبات نیست و فقط برای رد کردن یک حکم کلی است.

۴- برهان خلف (اثبات غیر مستقیم)

در برهان خلف به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم،

فرض می کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا نتیجه غیرممکن می رسیم.

به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

مثال: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید، جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

فرض: $x \in \mathbb{Q}$ ، $y \in \mathbb{Q}'$

حکم: $x+y \in \mathbb{Q}'$

فرض خلف: $x+y \in \mathbb{Q}$

اثبات: از آنجایی که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا می‌شود پس:

$$(x+y) - x = y \quad \therefore$$

گویا گویا گویا

پس فرض خلف باطل و حکم مسئله ثابت می‌شود.

مثال: ثابت کنید اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 فرد باشد، آنگاه n هم فرد است.

فرض: n^2 فرد

حکم: n فرد

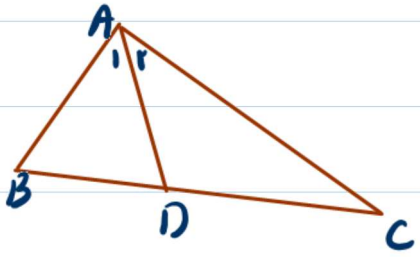
فرض خلف: n فرد نباشد.

اثبات : $n=2k \xrightarrow[2]{\text{به توان}} n^2=4k^2 \rightarrow n^2=2(2k^2)$

$\rightarrow n^2=2k' \quad \because$ n^2 زوج شد فرض باطل

پس فرض خلف باطل رحکم ثابت میشود.

مثال: فرض کنید AD نیمساز زاویه A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ ثابت کنید $AB \neq AC$.



فرض : AD نیمساز زاویه $(\hat{A}_1=\hat{A}_2)$ ، $BD \neq DC$

حکم : $AB \neq AC$

فرض خلف : $AB = AC$

اثبات : $A\hat{B}D \equiv A\hat{D}C \begin{cases} \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ AD=AD \\ AB=AC \end{cases} \xrightarrow{\text{خلاف شرط}} BD=DC \quad \because$

پس فرض خلف باطل رحکم ثابت میشود.

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل دوم: هندسه

درس دوم: استدلال و قضیه تالس

قسمت دوم: قضیه تالس

جلسه سوم: صفحات ۳۱ تا ۴۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

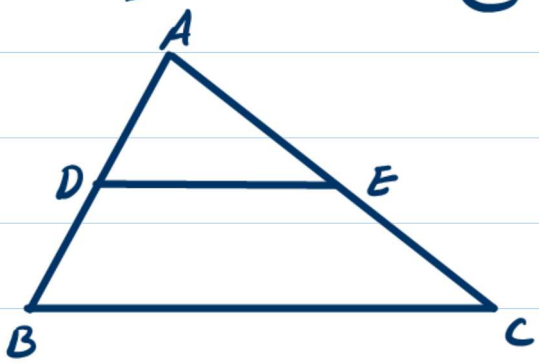
گروه ریاضی استان همدان

قضیه تالس :

قضیه تالس در مورد تناسب پاره خط‌هایی است که دو یا چند خط موازی روی دو خط متقاطع پدید می‌آورند.

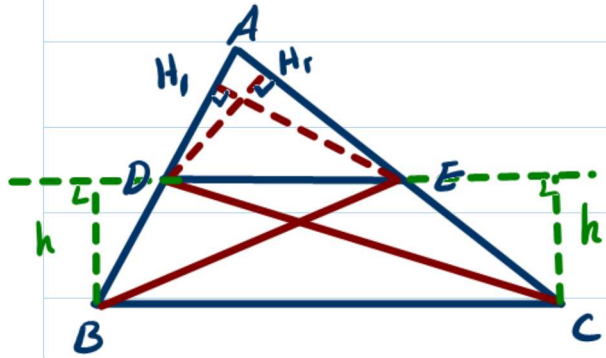
قضیه تالس در مثلث :

اگر در مثلث ABC، نقاط D و E روی اضلاع AB و AC باشند بطوریکه $BC \parallel DE$،



آنگاه $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$.

اثبات: پاره خط DC و BE را رسم می‌کنیم و از نقطه E پاره خط EH_1 را بر AB و از نقطه D پاره خط DH_2 را بر AC عمود می‌کنیم.



مساحت دو مثلث DEB و DEC با هم

برابر است زیرا فاصله هر دو D و ارتفاع

ارتفاع (h) فاصله دو خط موازی DE و BC است. پس

$$S_{\hat{DEC}} = S_{\hat{DEB}} \quad (1)$$

نسبت مساحت دو مثلث $\hat{ADE}$ و $\hat{DEB}$ برابر است با:

$$\frac{S_{\hat{ADE}}}{S_{\hat{DEB}}} = \frac{\frac{1}{2} EH_1 \times AD}{\frac{1}{2} EH_1 \times DB} = \frac{AD}{DB} \quad (2)$$

نسبت مساحت دو مثلث $\hat{ADE}$ و $\hat{DEC}$ برابر است با:

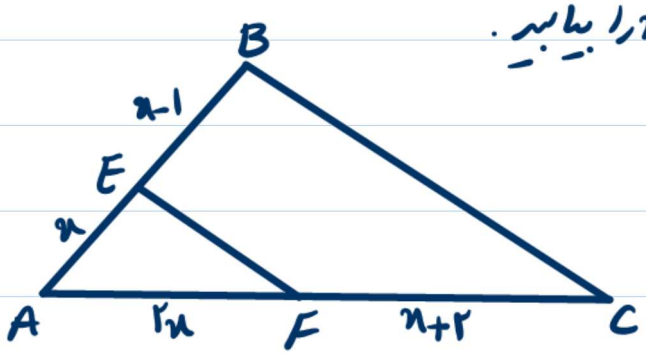
$$\frac{S_{\hat{ADE}}}{S_{\hat{DEC}}} = \frac{\frac{1}{2} DH_2 \times AE}{\frac{1}{2} DH_2 \times EC} = \frac{AE}{EC} \quad (3)$$

طبق (1) داریم: $S_{\hat{DEC}} = S_{\hat{DEB}}$ پس سمت چپ تساوی های 2 و 3 با هم برابرند،

در نتیجه سمت راست ها هم باید با هم برابر باشند یعنی:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{AC} \quad \blacksquare$$

مثال: در شکل زیر $EF \parallel BC$ است. x را بیابید.



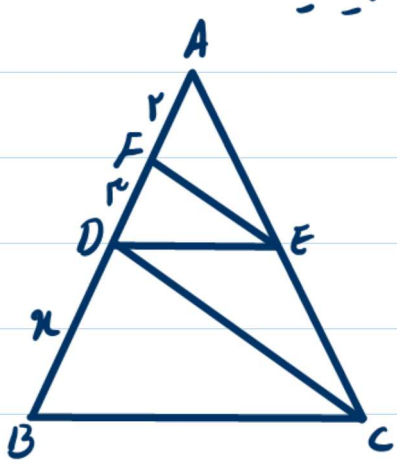
$\frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x+2}$ طبق قضیه تالس

$\Rightarrow x(x+2) = 2x(x-1) \Rightarrow x^2+2x = 2x^2-2x$

$\Rightarrow 2x^2-x^2-2x-2x=0 \Rightarrow x^2-4x=0 \rightarrow x(x-4)=0$

$\Rightarrow x=0$ غ ق ق ، $x-4=0 \rightarrow x=4$

مثال: در شکل زیر $EF \parallel CD$ ، $DE \parallel BC$. x را بیابید.



$ADC: \frac{AF}{FD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AE}{EC}$ (1)

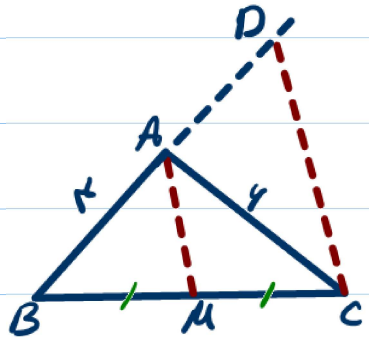
$ABC: \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{AE}{EC}$ (2)

(2) ، (1) $\Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{2} = 7,5$

مثال: کنکور خارج از کشور ۹۸

اضلاع مثلث ABC ، برابر $AB=4$ ، $AC=6$ ، $BC=7$ هستند. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطه D قطع کرده است. اندازه BD کدام است؟

۱) ۷٫۵ ۲) ۸ ۳) ۱۰٫۵ ۴) ۹



$\overset{\Delta}{BDC}$: $AM \parallel DC$

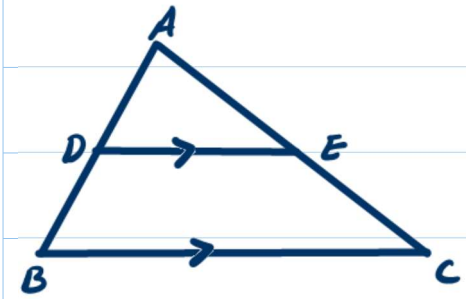
M وسط BC

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MC} = \frac{BM}{BM} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{AD} = 1 \rightarrow AD = ۴$$

$$BD = AB + AD = ۴ + ۴ = ۸$$ گزینه ۲

صورت های دیگر قضیه تالس :



۱) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (جزء به کل)

اثبات :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow[\text{نسبت در جمع}]{\text{ترکیب}} \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$ ☐

۲) $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$ (جزء به کل)

اثبات : طبق (۱) $\rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \xrightarrow[\text{نسبت در صورت}]{\text{تفضیل}} \frac{AB-AD}{AB} = \frac{AC-AE}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$$ ☑

۳) $$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{EC}$$

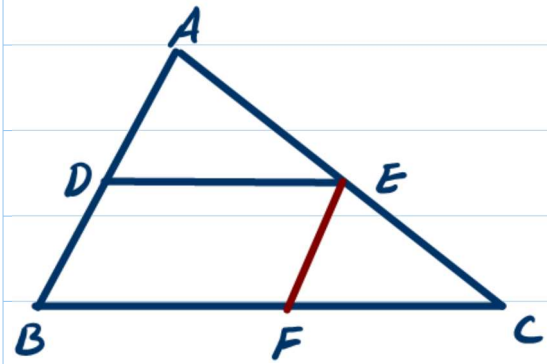
اثبات: با عکس گرفتن از رابطه ۲ $\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{EC}$ ☑

۴) $$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

اثبات: با عکس گرفتن از رابطه ۱ $\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ ☑

قضیه تالس:

اگر در مثلث ABC خطی موازی BC رسم کنیم که اضلاع AB و AC را در نقاط D و E قطع کند، اضلاع مثلث ADE و ABC متناسب اند. یعنی: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$



اثبات:

از نقطه E پاره خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم.

چون $DE \parallel BC$ بین ضلع‌های مثلث داریم (حالت ۱ تالس):

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (1)$$

از طرفی چون $EF \parallel AB$ بین ضلع‌های مثلث داریم (حالت ۲ تالس):

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} \quad (2)$$

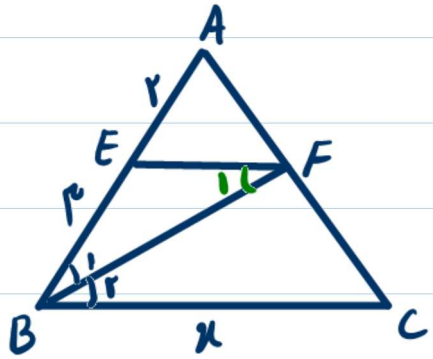
چون در هر دو تناسب بالا $\frac{AE}{AC}$ مشترک است پس:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} \quad (3)$$

از طرفی چون $DEFB$ متوازی‌الاضلاع است ($DE \parallel BF, BD \parallel EF$) پس: $BF = DE$. در نتیجه از (۳) داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

مثال: در شکل زیر $EF \parallel BC$. مقدار x چقدر است؟ ($\hat{B}_1 = \hat{B}_2$)



چون $EF \parallel BC$ با مورب BF پس داریم:

$$\hat{B}_2 = \hat{F}_1$$

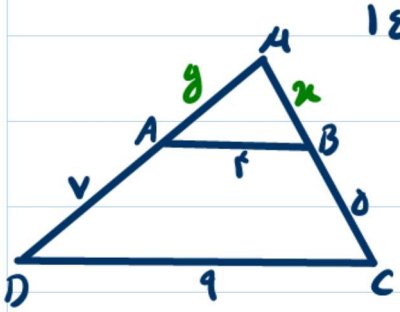
طبق فرض مساله $\hat{B}_1 = \hat{F}_1$ و $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ در نتیجه مثلث BEF متساوی‌الساقین است و $BF = EF = 4$. طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{4}{x} \rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2}$$

مثال: کنکور سراسری ۹۹

اندازه اضلاع ذوزنقه $ABCD$ مطابق شکل داده شده است. محیط مثلث MAB کدام است؟

۱) ۱۳٫۲ ۲) ۱۳٫۶ ۳) ۱۴٫۴ ۴) ۱۴٫۸



چون $ABCD$ ذوزنقه است پس $AB \parallel DC$ از تعمیم قضیه تالس بر روی مثلث MDC داریم:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{y}{y+7} = \frac{x}{x+5} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{y}{y+7} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4(y+7) \Rightarrow 9y - 4y = 28 \Rightarrow 5y = 28 \Rightarrow y = \frac{28}{5} = 5{,}6$$

$$\frac{x}{x+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4(x+5) \Rightarrow 9x - 4x = 20 \Rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$$

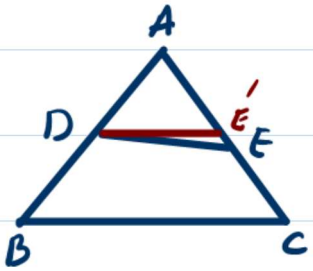
$$P_{MAB} = 5{,}6 + 4 + 4 = 13{,}6$$

گزینه ۲

عکس قضیه تالس :

اگر خطی روی دو ضلع مثلث، چهار پاره خط با اندازه‌های متناسب ایجاد کند، آنگاه

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$ یعنی با ضلع سوم مثلث موازی است.



اثبات : (با استفاده از برهان خلف)

فرض خلف : $DE' \nparallel BC$.

چون $DE' \nparallel BC$ پس خط DE' را موازی BC رسم می‌کنیم. بنابراین طبق قضیه تالس :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$$

از طرفی طبق فرض $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. پس نتیجه می‌گیریم :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$$

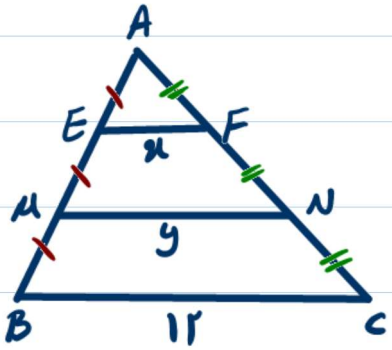
با استفاده از ویژگی ترکیب نسبت در سطر داریم :

$$\frac{AE}{AE+EC} = \frac{AE'}{AE'+E'C} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AE'}{AC} \Rightarrow AE = AE' \quad \therefore$$

یعنی E و E' بر هم منطبق اند و این تناقض است زیرا DE' را موازی BC رسم کرده بودیم و فرض خلف این بود که $DE \parallel BC$. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تذکر: عکس قضیه تالس یک قضیه درستی است.

مثال: در شکل زیر x و y را بدست آورید.



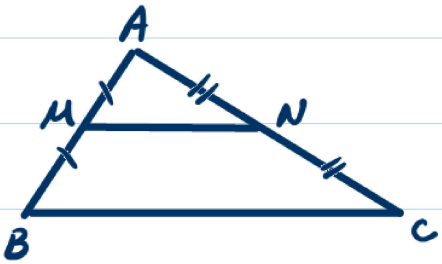
$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} = \frac{۱}{۲} \overset{\text{عکس تالس}}{\Rightarrow} EF \parallel BC \overset{\text{تالس}}{\Rightarrow} \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{x}{۱۲}$$

$$\Rightarrow ۳x = ۱۲ \Rightarrow x = ۴$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{۲}{۱} \overset{\text{عکس تالس}}{\Rightarrow} MN \parallel BC \overset{\text{تالس}}{\Rightarrow} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{y}{۱۲}$$

$$\Rightarrow ۳y = ۲۴ \Rightarrow y = ۸$$

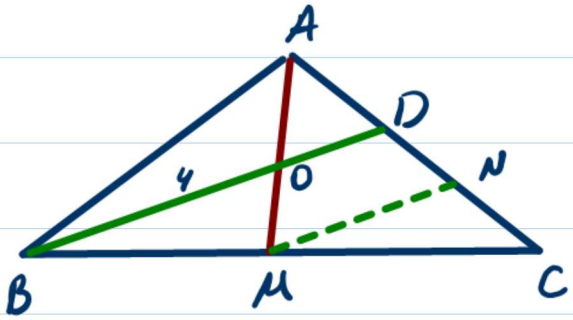
نکته: اگر وسط دو ضلع یک مثلث را به هم وصل کنیم، پاره خط حاصل موازی ضلع سوم و نصف آن ضلع خواهد بود که به آن میان خط می گوییم.



$MN \parallel BC$, $MN = \frac{BC}{2}$

میان خط

مثال: در مثلث ABC ، از رأس B خطی رسم کرده‌ایم که از نقطه O ، وسط میانه AM گذشته و ضلع AC را در نقطه D قطع کرده است. اگر $OB=6$ باشد، طول OD چقدر است؟



از M موازی BD رسم می‌کنیم تا خط MN

ثابت کنید. در مثلث AMN ، OD میان خط است پس : $OD = \frac{1}{2} MN$. (۱)

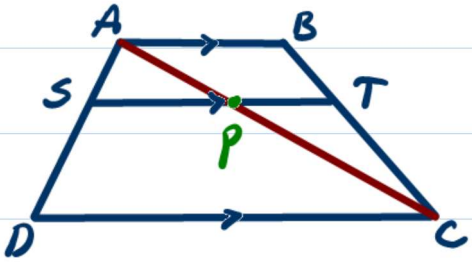
همچنین در مثلث BDC ، MN میان خط است پس $MN = \frac{1}{2} BD$. (۲)

پس از (۱) و (۲) داریم : $OD = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} BD\right) = \frac{1}{4} BD = \frac{1}{4}(BO+OD)$

$OI = \frac{1}{2}(4 + OD) \Rightarrow 4OI = 4 + OD \rightarrow 4OI = 6 \rightarrow OI = 2$

قضیه تالس در ذوزنقه :

اگر در ذوزنقه $ABCD$ ، $AB \parallel ST \parallel DC$ باشد آنگاه $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$.



اثبات :

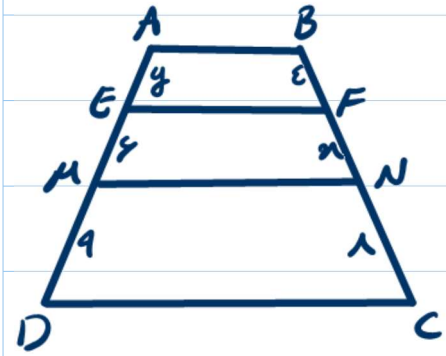
قطر AC را رسم می‌کنیم .

در $\triangle ADC$: $SP \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AS}{SD} = \frac{AP}{PC}$ (۱)

در $\triangle ABC$: $PT \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{PC} = \frac{BT}{TC}$ (۲)

(۱), (۲) $\Rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$ ■

مثال : در شکل زیر AB ، EF ، MN ، DC موازی‌اند . مقدار $\frac{x}{y}$ چقدر است ؟



در ذوزنقه $EFDC$: $\frac{EM}{MD} = \frac{FN}{NC} \rightarrow \frac{6}{9} = \frac{x}{8}$

$\Rightarrow 9x = 48 \rightarrow x = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$

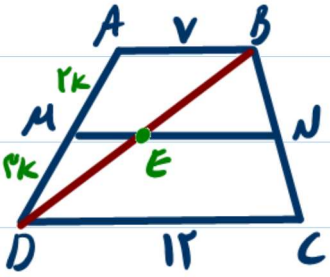
ذوزنقه $ABNM$: $\frac{AE}{EM} = \frac{BF}{FN} \Rightarrow \frac{y}{4} = \frac{\varepsilon}{\frac{14}{4}} = \frac{12}{14} = \frac{4}{\varepsilon}$

$4y = 18 \rightarrow y = \frac{18}{\varepsilon} = \frac{9}{2}$ $\qquad \frac{x}{y} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{9}{2}} = \frac{32}{27}$

مثال: کنکور خارج از کشور 99

در ذوزنقه $ABCD$، پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$ است.

اندازه MN کدام است؟ 1) 8 2) 8,70 3) 9 4) 9,05



فقط BD را رسم می‌کنیم. چون $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$

پس $MA = 2k$ ، $MD = 3k$.

ABD: تالس $\Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{ME}{AB} \Rightarrow \frac{3k}{5k} = \frac{ME}{7} \Rightarrow 5ME = 21 \Rightarrow ME = \frac{21}{5}$

BDC: تالس $\Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{EN}{CD}$ ، $ABDC$ ذوزنقه تالس $\Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{AM}{AD}$

$\Rightarrow \frac{EN}{CD} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow \frac{EN}{12} = \frac{2k}{5k} \Rightarrow 5EN = 24 \Rightarrow EN = \frac{24}{5}$

$MN = ME + EN = \frac{21}{5} + \frac{24}{5} = \frac{45}{5} = 9$ گزینه ۳

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل دوم: هندسه

درس سوم: تشابه مثلث‌ها

قسمت اول

جلسه چهارم: صفحات ۴۲و۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تعریف دو مثلث متشابه :

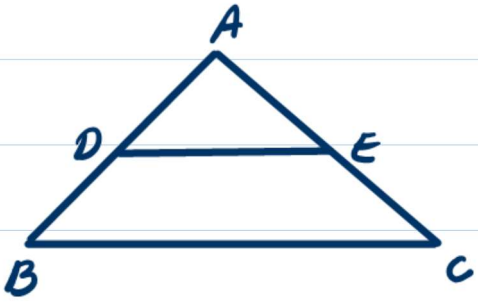
دو مثلث را متشابه گوییم هرگاه زاویه‌های آن‌ها دو به دو با هم برابر باشند و ضلع‌های روبه‌رو به زاویه‌های مساوی، متناسب باشند.

اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند می‌نویسیم : $\hat{ABC} \sim \hat{A'B'C'}$

تذکر: نسبت اضلاع متناظر دو مثلث متشابه را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم و معمولاً آن را با k نمایش می‌دهیم.

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها :

اگر خطی موازی یکی از ضلع‌های مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند، آنگاه مثلثی کوچک پدید می‌آید که با مثلث اصلی متشابه است.



اثبات: می‌خواهیم ثابت کنیم دو مثلث $\hat{ADE}$ و $\hat{ABC}$ متشابه‌اند :

(۱) $\begin{cases} \hat{A} & \text{زاویه مشترک} \\ \hat{D}=\hat{B} : DE \parallel BC & \text{مورب } AB \\ \hat{E}=\hat{C} : DE \parallel BC & \text{مورب } AC \end{cases}$

از طرفی طبق تعمیم تالس می‌توان نوشت :

$DE \parallel BC : \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ (۲) (۱), (۲) $\Rightarrow \hat{ADE} \sim \hat{ABC}$

حالت‌های تشابه مثلث‌ها

با استفاده از قضیه تالس تشابه می‌توان ثابت کرد :

۱) اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، این دو مثلث متشابه‌اند

حالت (ز ز)

۲) اگر اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه

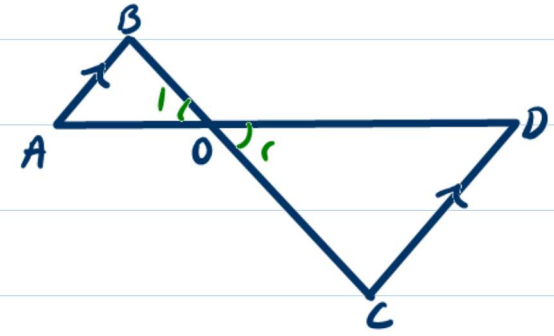
بین آن‌ها هم برابر باشند، این دو مثلث متشابه‌اند. حالت (ض ز ض)

۳) اگر اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند،

این دو مثلث متشابه‌اند. حالت (ض ض ض)

مثال: ثابت کنید در هر قسمت مثلث‌ها متشابه‌اند.

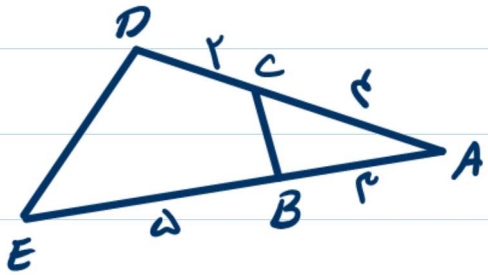
الف)



$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & \text{متقابل به رأس} \\ \hat{A} = \hat{D} & \text{خطوط موازی و مورب} \end{cases} \Rightarrow AOB \sim COD$

نکته: مثلث‌های معصر بین دو خط موازی متشابه‌اند.

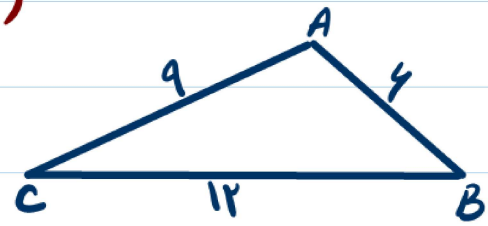
ب)

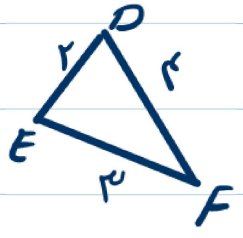


$\begin{cases} \hat{A}: & \text{مشترک} \\ \frac{AB}{AD} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AC}{AE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{1}{2} = k & \text{نسبت تشابه} \end{cases}$

$\Rightarrow ABC \overset{\text{ضزض}}{\sim} ADE$

پ)





$$\frac{BC}{DF}=\frac{12}{4}=3 \quad , \quad \frac{AC}{EF}=\frac{9}{3}=3 \quad , \quad \frac{AB}{DE}=\frac{6}{2}=3$$

$$\frac{BC}{DF}=\frac{AC}{EF}=\frac{AB}{DE}=3 \Rightarrow \hat{ABC} \overset{\text{ضرب}}{\sim} \hat{DEF}$$

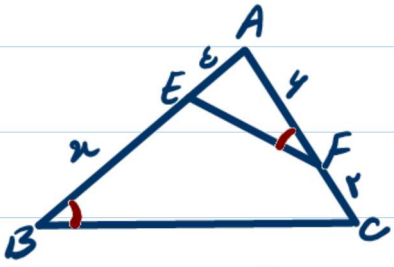
نحوه نوشتن نسبت اضلاع مثلث‌های متشابه :

نام دو مثلث را به ترتیب زاویه‌های برابر از چپ به راست می‌نویسیم .

در نسبت اضلاع رأس‌ها را دو تا دو تا انتخاب کرده و در صورت و مخرج می‌نویسیم .

فقط دقت کنید صورت هر سه کسر همگی اضلاع یک مثلث و مخرج سه کسر از مثلث دیگر است .

مثال: در شکل زیر x را بیابید.

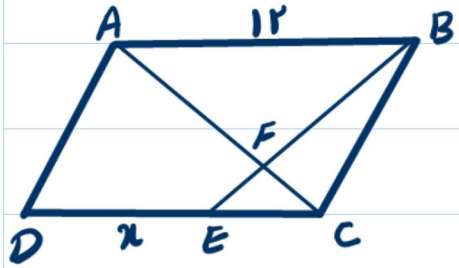


$$\begin{cases} \hat{A}: & \text{مشترک} \\ \hat{B}=\hat{F}: & \text{متناظر} \end{cases} \quad \hat{ABC} \sim \hat{AFE}$$

نسبت بین اضلاع $\Rightarrow \frac{AB}{AF}=\frac{BC}{FE}=\frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{4+x}{6}=\frac{8}{4}=2$

$$\Rightarrow 4+x=12 \Rightarrow x=12-4 \Rightarrow x=8$$

مثال: در شکل زیر $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است و $AF=۳FC$. مقدار x را بیابید.



چون دو مثلث AFB و EFC بین دو خط موازی

AB, DC محصور هستند پس با هم متشابه‌اند.

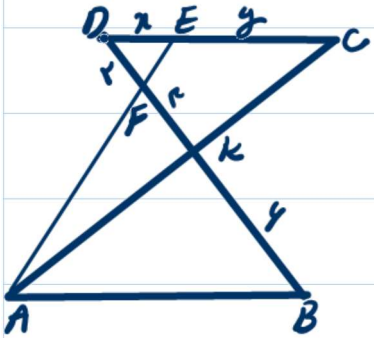
$AFB \sim CFE \Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{FB}{FE} = \frac{AB}{CE}$ نسبت بین اضلاع

$AF=۳FC \Longrightarrow \frac{۳FC}{FC} = \frac{۱۲}{CE} \Rightarrow ۳ = \frac{۱۲}{CE} \Rightarrow CE = ۴$

$AB = DC = ۱۲ = x + CE = x + ۴ \Rightarrow ۱۲ = x + ۴ \Rightarrow x = ۸$

مثال: در شکل زیر $DC \parallel AB$، مقدار $\frac{x}{x+y}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$



$DE \parallel AB$: $DEF \sim BAF$

مثلث‌های کمکی

$\frac{DE}{BA} = \frac{EF}{AF} = \frac{DF}{BF}$

$\Rightarrow \frac{x}{BA} = \frac{۲}{۹}$ (۱)

$DC \parallel AB$: DKC متشابه BKA $\Rightarrow \frac{DK}{BK} = \frac{KC}{KA} = \frac{DC}{BA}$

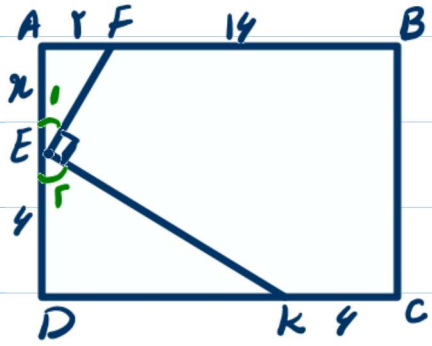
شباهت کمر

$\Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{x+y}{BA}$ (۲)

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{x}{BA}}{\frac{x+y}{BA}} \Rightarrow \frac{12}{20} = \frac{x}{x+y} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{x}{x+y}$ کنید

مثال: در شکل زیر $ABCD$ مستطیل است. مقدار x چقدر است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{11}{3}$ ۴) ۴



$\hat{E}_1 + 90^\circ + \hat{E}_2 = 180^\circ$ زاویه‌ی نیم‌صفحه

$\Rightarrow \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 90^\circ$ (۱)

$\hat{E}_2 + \hat{D} + \hat{k} = 180^\circ$: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث

$\Rightarrow \hat{E}_2 + 90^\circ + \hat{k} = 180^\circ \Rightarrow \hat{E}_2 + \hat{k} = 90^\circ$ (۲)

(۱) ,(۲) $\Rightarrow \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \hat{E}_2 + \hat{k} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{k}$

$\begin{cases} \hat{E}_1 = \hat{k} \\ \hat{D} = \hat{A} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow AFE$ متشابه DEk

$$\frac{AF}{DE}=\frac{FE}{Ek}=\frac{AE}{Dk} \Rightarrow \frac{2}{4}=\frac{x}{12} \qquad (Dk=DC-4=18-4=12)$$

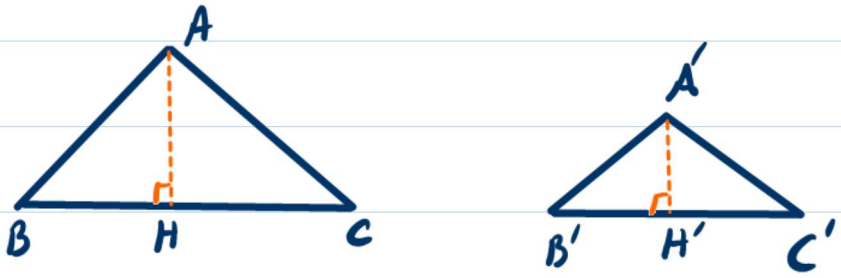
$$\Rightarrow 4x=24 \Rightarrow x=6$$ گزینه ۳ ✓

قضیه: فرض کنید دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند و نسبت تشابه آن‌ها برابر k باشد.

اگر AH و $A'H'$ ارتفاع‌های وارد بر BC و $B'C'$ باشند آنگاه:

الف) $\frac{AH}{A'H'}=k$ ب) $\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}=k$ پ) $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=k^2$

اثبات:



الف)

$\hat{H}=\hat{H'}=90^\circ$, $\hat{B}=\hat{B'}$ $\Rightarrow$ $\triangle ABH \sim \triangle A'B'H'$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BH}{B'H'}=\frac{AH}{A'H'}=k \Rightarrow k=\frac{AH}{A'H'} \quad \square$$

ب)

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$: $k=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$

$\Rightarrow AB=kA'B'$, $BC=kB'C'$, $AC=kA'C'$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = \frac{kA'B'+kA'C'+kB'C'}{A'B'+A'C'+B'C'}$$

$$= \frac{k(A'B'+A'C'+B'C')}{A'B'+A'C'+B'C'} = k \quad \blacksquare$$

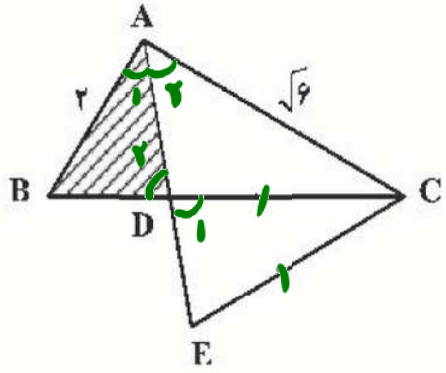
ب)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}BC \times AH}{\frac{1}{2}B'C' \times A'H'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{AH}{A'H'} = k \times k = k^2 \quad \blacksquare$$

تذکر: نسبت هر دو جزء متناظر از جنس پاره‌خط مثل ارتفاع، میانه، نیم‌ساز، محیط و... در دو مثلث متشابه برابر است با نسبت تشابه.

مثال: کنکور ۹۹ خارج از کشور

در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ A و CE = CD است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$: $\hat{A}$ نیم‌ساز AD

چون $CE = CD$ است پس مثلث CED متساوی‌الساقین است، $\hat{D}_1 = \hat{E}$ (۱)

از طرفی (۲) $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ زیرا متقابل به رأس‌اند.

(۱)، (۲) $\Rightarrow \hat{E} = \hat{D}_2$

در نتیجه : $A\hat{C}E$ و $A\hat{B}D$ دو زاویه‌ی ۲

نسبت تشابه $= k = \frac{AB}{AC} = \frac{۲}{\sqrt{۶}}$

$\Rightarrow \frac{S_{A\hat{B}D}}{S_{A\hat{C}E}} = (\frac{۲}{\sqrt{۶}})^۲ = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$

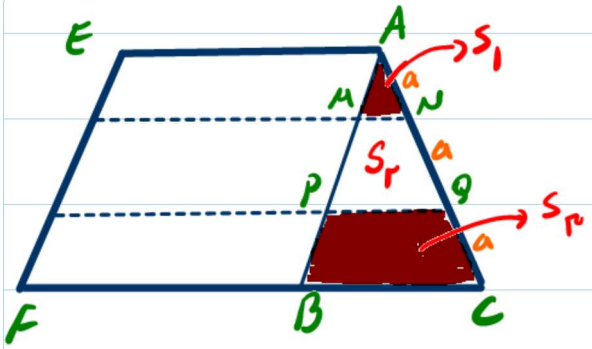
مثال : نسبت‌های مساحت‌های دو مثلث متشابه، $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است. اگر یک میانه مثلث کوچکتر ۲۱ واحد باشد، میانه متناظر با این ضلع در مثلث بزرگتر چند واحد است؟

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{۴۹}{۱۲۸} = k^۲ \Rightarrow k = \frac{۷}{\sqrt{۱۲۸}} = \frac{۷}{\sqrt{۶۴ \times ۲}} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}}$

$\frac{a_1}{a_2} = k = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{۲۱}{a_2} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow a_2 = \frac{۲۱ \times ۸\sqrt{۲}}{۷} = ۲۴\sqrt{۲}$

مثال: کنکور خارج ۹۸:

یک ساق ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره خط موازی یکدیگرند



نسبت مساحت دو ناحیه رنگی کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{1}{4}$

$\triangle AMN \sim \triangle APQ$: $\frac{S_1}{S_1+S_2} = (\frac{a}{2a})^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 4S_1 = S_1 + S_2 \rightarrow 3S_1 = S_2$

$\triangle APQ \sim \triangle ABC$: $\frac{S_1+S_2}{S_1+S_2+S_3} = (\frac{2a}{3a})^2 = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow 9S_1 + 9S_2 = 4S_1 + 4S_2 + 4S_3$

$9S_1 = 3S_1$, $4S_2 = 3S_1$

$\Rightarrow 9S_1 + 27S_1 = 4S_1 + 12S_1 + 4S_3$

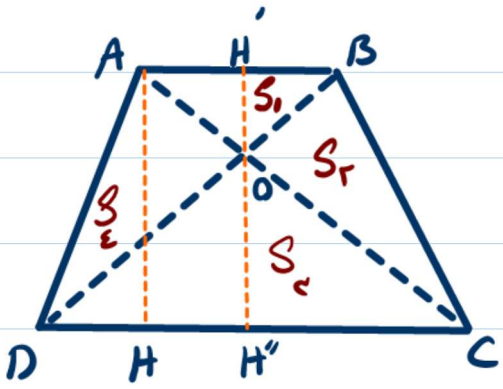
$\Rightarrow 20S_1 = 4S_3 \Rightarrow 5S_1 = S_3$

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_1}{5S_1} = \frac{1}{5}$ گزینه ۲

مثال: کنکور ۹۵

در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق کدام، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸



نکته: در ذوزنقه همواره مساحت مثلث‌های محدود به یک ساق و قطرها، با هم برابرند. ($S_2 = S_4$)

$\triangle AOB \sim \triangle COD$: $k = \frac{AB}{DC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = \frac{OH'}{OH''} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{OH'}{OH''}$

$H'H'' = 10 \rightarrow OH' + OH'' = 10 \Rightarrow OH' = 4, OH'' = 6$

$S_1 = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$, $S_3 = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = 36$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(8+12)10 = 100 \Rightarrow S_2 + S_4 = S_{ABCD} - (S_1 + S_3)$

$S_2 = S_4 \Rightarrow 2S_2 = 100 - (16+36) = 100 - 52 = 48 \Rightarrow S_2 = 24$ گزینه ۳

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل دوم: هندسه

درس سوم: تشابه مثلث‌ها

قسمت دوم: روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

جلسه پنجم: صفحات ۴۴و۴۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه :

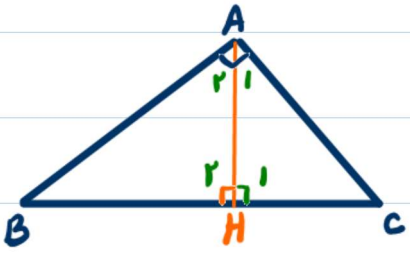
قضیه: اگر سه مثلث ABC ، $A'B'C'$ ، $A''B''C''$ به گونه‌ای باشند که $ABC \sim A'B'C'$ و $A'B'C' \sim A''B''C''$ آنگاه $ABC \sim A''B''C''$.

اثبات : $ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \hat{A}=\hat{A'}$ (۱) ، $\hat{B}=\hat{B'}$ (۳) ، $\hat{C}=\hat{C'}$

$A'B'C' \sim A''B''C'' \Rightarrow \hat{A'}=\hat{A''}$ (۲) ، $\hat{B'}=\hat{B''}$ (۴) ، $\hat{C'}=\hat{C''}$

(۱)،(۲) $\Rightarrow \hat{A}=\hat{A''}$ ، (۳)،(۴) $\Rightarrow \hat{B}=\hat{B''} \Rightarrow ABC \sim A''B''C''$ ▣

قضیه: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.



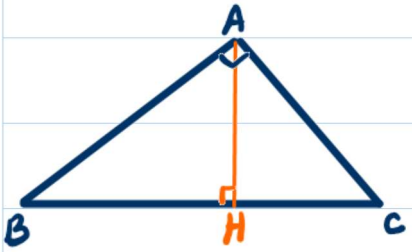
اثبات :

$\begin{cases} \hat{B}= \text{مشترک} \\ \hat{H}_2=\hat{A}=90^\circ \end{cases} \Rightarrow ABC \sim HBA$ (۱)

$\begin{cases} \hat{C}= \text{مشترک} \\ \hat{H}_1=\hat{A}=90^\circ \end{cases} \Rightarrow ABC \sim HAC$ (۲)

از (۱) و (۲) و قضیه با $\Rightarrow HBA \sim HAC$ ▣

نتیجه: اگر در مثلث قائم‌الزاویه ABC، AH ارتفاع وارد بر وتر باشد ($\hat{A}=90^\circ$) رابطه‌های:



۱) $AH^2 = HB \times HC$

۲) $AB^2 = BH \times BC$

۳) $AC^2 = CH \times BC$

۴) $AH \times BC = AB \times AC$

اثبات ۱) $\triangle HAC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HA} = \frac{AC}{BA} \Rightarrow AH^2 = HB \times HC$ ■

اثبات ۲) $\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{AC}{HA} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow AB^2 = BH \times BC$ ■

اثبات ۳) $\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = CH \times BC$ ■

اثبات ۴)

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$ (۱)

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC$ (۲)

(۱) = (۲) $\Rightarrow AH \times BC = AB \times AC$ ■

تذکر: به چهار رابطه بالا، رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌گویند.

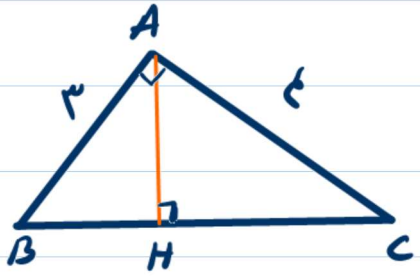
مثال: با استفاده از رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه، قضیه فیثاغورس را ثابت کنید.

با جمع روابط طولی (۲) و (۳) داریم:

$$AB^2 + AC^2 = HB \times BC + HC \times BC = BC(HB + HC) = BC \times BC$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \blacksquare$$

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $AB = 3$، $AC = 4$ است. طول قطعه بزرگتری که ارتفاع وارد بر وتر، بر روی وتر ایجاد می‌کند، چقدر است؟



$$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

$$AC^2 = HC \times BC \Rightarrow 4^2 = HC \times 5$$

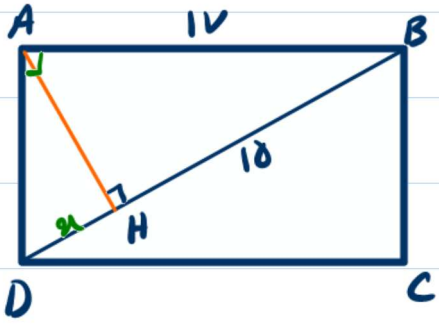
$$\Rightarrow 16 = HC \times 5 \Rightarrow HC = \frac{16}{5}$$

مثال: کنکور خارج ۹۸ :

در مستطیل ABCD به طول $AB=17$، از نقطه A عمود AH بر قطر BD رسم شده است.

اگر $BH=15$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{4}{15}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{7}{15}$ ۴) $\frac{3}{5}$



$A\hat{D}B$: $AB^2 = BC \times BH$

$17^2 = (15+x) \times 15$

$\Rightarrow 289 = 225 + 15x \Rightarrow 289 - 225 = 15x$

$\Rightarrow 64 = 15x \Rightarrow x = DH = \frac{64}{15} \Rightarrow BD = BH + DH$

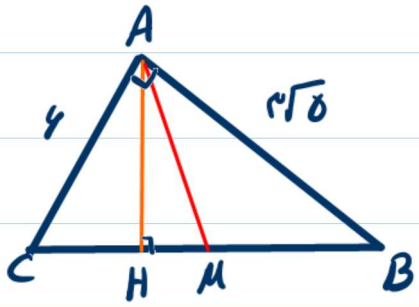
$\Rightarrow BD = 15 + \frac{64}{15} = \frac{225+64}{15} = \frac{289}{15}$

$\frac{289}{15} - \frac{19}{1} = \frac{289-285}{15} = \frac{4}{15}$ گزینه ۱

مثال: کنکور ۹۸ :

در مثلث قائم‌الزاویه ABC، اضلاع قائم $AB=4\sqrt{5}$ و $AC=6$، ارتفاع AH و میانه AM رسم شده‌است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 6^2 + (4\sqrt{5})^2$$

$$= 36 + 80 = 116 \Rightarrow BC = 9$$

$$AC^2 = BC \times CH \Rightarrow 6^2 = CH \times 9 \rightarrow 36 = CH \times 9 \Rightarrow CH = 4$$

از طرفی چون AM میانه است پس M وسط BC است در نتیجه: $CM = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2}$

$$HM = CM - CH = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$

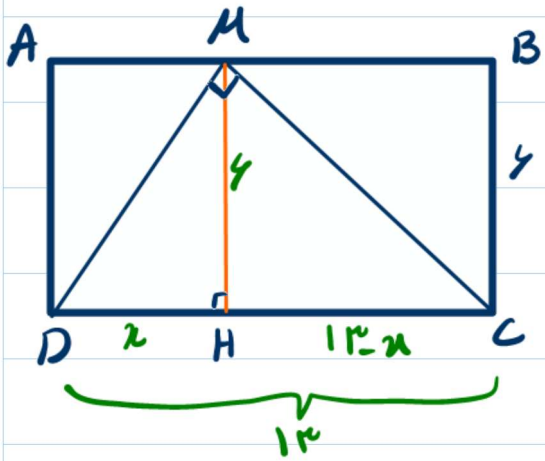
چون AH ارتفاع مشترک در مثلث است پس نسبت مساحت‌ها با نسبت قاعده‌ها برابر است:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{BC}{HM} = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 18$$

گزینه ۴

مثال: در مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۶ واحد، نقطه M بر روی ضلع بزرگتر قرار دارد و خطوط واصل از M به دو رأس دیگر مستطیل بر هم عمودند. فاصله نزدیکترین رأس مستطیل از M کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴٫۵ ۳) ۴٫۸ ۴) ۵٫۱



$MH^2 = DH \times HC$

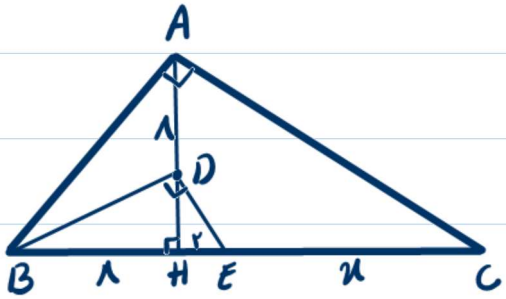
$6^2 = x \times (12-x)$

$\Rightarrow 36 = 12x - x^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = 0 \rightarrow (x-9)(x-6) = 0$

$\begin{cases} x=9 & \times \\ x=6 & \checkmark \end{cases}$ چون DH وتر کوچکتر است $\Rightarrow DH = AM = 6$ گزینه ۴ ✓

مثال: در شکل مقابل مقدار x کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۱۶ ۵) ۱۸



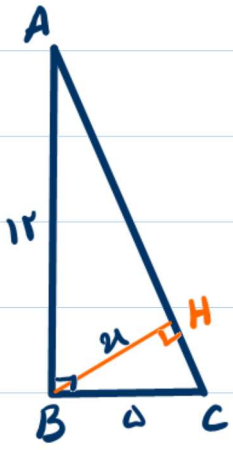
BDE : $DH^2 = BH \times HE = 8 \times 2 = 16 \rightarrow DH = 4$

$AH = AD + DH = 8 + 4 = 12$

$ABC : \quad AH^2 = BH \times HC \Rightarrow 12^2 = 8(2+x)$

$\div 8 \Rightarrow 18 = x + 2 \Rightarrow x = 16$ گزینه ۴

مثال : در شکل زیر مقدار x کدام است؟



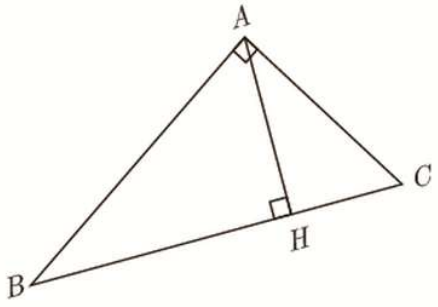
۱) $\frac{60}{11}$ ۲) $\frac{72}{11}$ ۳) $\frac{60}{13}$ ۴) $\frac{72}{13}$

$AC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow AC = 13$

$BH \times AC = AB \times BC \Rightarrow x \times 13 = 12 \times 5 \Rightarrow x = \frac{60}{13}$ گزینه ۳

تمرین ۲ صفحه ۴۵ کتاب درسی

در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به‌دست آورید.



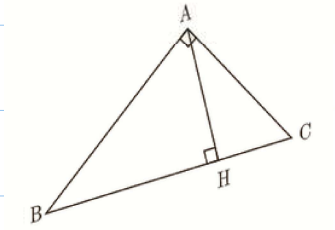
الف) $BC=۱۰$ و $BH=۹$ و $AH=?$ و $AB=?$ و $AC=?$

$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow AB^۲ = ۹ \times ۱۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۹۰} = ۳\sqrt{۱۰}$

$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow ۱۰۰ = ۹۰ + AC^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۱۰}$

$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow ۳\sqrt{۱۰} \times \sqrt{۱۰} = AH \times ۱۰ \Rightarrow ۳۰ = AH \times ۱۰ \Rightarrow AH = ۳$

ب) $AC=۵$ و $CH=۲$ و $BC=?$ و $AH=?$ و $AB=?$



$AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow ۲۵ = ۲ \times BC$

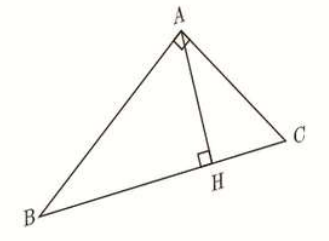
$\Rightarrow BC = \frac{۲۵}{۲}$

$BH = BC - CH = \frac{۲۵}{۲} - ۲ = \frac{۲۵-۴}{۲} = \frac{۲۱}{۲}$

$AH^۲ = BH \times CH \Rightarrow AH^۲ = \frac{۲۱}{۲} \times ۲ = ۲۱ \Rightarrow AH = \sqrt{۲۱}$

$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow AB^۲ = \frac{۲۱}{۲} \times \frac{۲۵}{۲} = \frac{۵۲۵}{۴} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{۵۲۵}}{۲}$

پ) $AB=۸$ و $AC=۶$ و $BC=?$ و $AH=?$

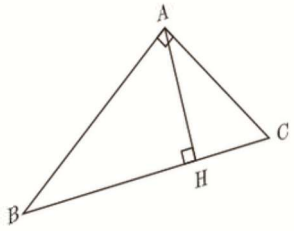


$BC^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰$

$\Rightarrow BC = ۱۰$

$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۱۰ = ۸ \times ۶ \longrightarrow AH = \frac{۴۸}{۱۰} = ۴,۸$

ت) $AB=۱۲$ و $AH=۶$ و $BH=?$ و $BC=?$ و $AC=?$



$\hat{ABH}: AB^۲ = AH^۲ + BH^۲$

$\Rightarrow ۱۲^۲ = ۶^۲ + BH^۲ \Rightarrow BH = \sqrt{۱۰۸} = ۶\sqrt{۳}$

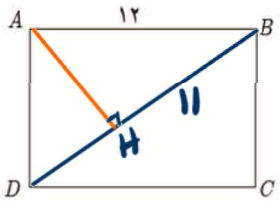
$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۱۲^۲ = ۶\sqrt{۳} \times BC \Rightarrow BC = \frac{۱۴۴}{۶\sqrt{۳}} = \frac{۲۴}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$

$BC = \frac{۲۴\sqrt{۳}}{۳} = ۸\sqrt{۳}$

$CH = BC - BH = ۸\sqrt{۳} - ۶\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$

$AC^۲ = CH \times BC = ۲\sqrt{۳} \times ۸\sqrt{۳} = ۱۶ \times ۳ = ۴۸ \Rightarrow AC = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$

تمرین ۴ صفحه ۴۵ کتاب درسی



شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطهٔ A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازهٔ عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازهٔ عرض مستطیل را محاسبه کنید.

$AB\hat{H}$: $۱۲^۲ = AH^۲ + ۱۱^۲ \Rightarrow AH^۲ = ۱۴۴ - ۱۲۱ = ۲۳ \Rightarrow AH = \sqrt{۲۳}$

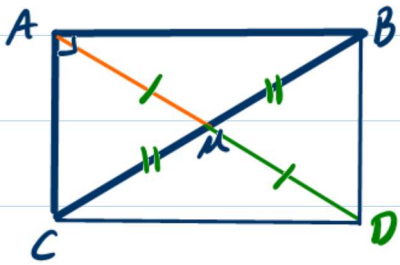
$AH^۲ = DH \times BH \Rightarrow ۲۳ = DH \times ۱۱ \rightarrow DH = \frac{۲۳}{۱۱}$

$BD = DH + BH = \frac{۲۳}{۱۱} + ۱۱ = \frac{۲۳ + ۱۲۱}{۱۱} = \frac{۱۴۴}{۱۱}$

$AD^۲ = DH \times BD = \frac{۲۳}{۱۱} \times \frac{۱۴۴}{۱۱} \Rightarrow AD^۲ = \frac{۱۴۴ \times ۲۳}{۱۲۱} \Rightarrow AD = \frac{۱۲}{۱۱}\sqrt{۲۳}$

قضیه: در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

اثبات:



AM را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم.

از D به B و C وصل می‌کنیم.

$\begin{cases} AM = MD \\ MB = MC \end{cases} \Rightarrow$ در چهارضلعی $ABCD$ قطرها همدیگر را نصف کرده‌اند $\Rightarrow ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

ABCD متوازی الاضلاعی است که زاویه $\hat{A}=90^\circ$ است پس ABCD مستطیل است.

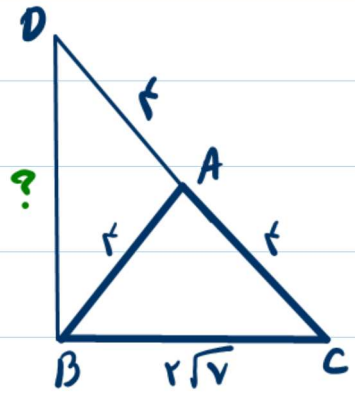
پس $AD=BC$ از طرفی $AM=\frac{1}{2}AD$ پس $AM=\frac{1}{2}BC$ ☑

تذکر: عکس قضیه بالا در ربط است. یعنی اگر در مثلثی اندازه میانه وارد بر یک ضلع نصف اندازه آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

مثال: در مثلث متساوی الساقین ABC، $AB=AC=4$ و $BC=2\sqrt{7}$ است.

ضلع AC را به اندازه خود تا نقطه D امتداد می دهیم ($AD=AC$). اندازه BD کدام است؟

۱) $2\sqrt{10}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) ۶ ۴) ۷



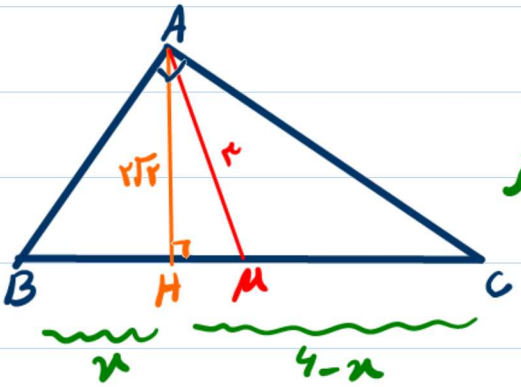
در مثلث $B\hat{D}C$، AB میانه است و اندازه آن نصف ضلع DC است پس طبق تذکر بالا مثلث $B\hat{D}C$ در رأس B قائم الزاویه است.

$DC^2=BD^2+BC^2$

$\Rightarrow 8^2=BD^2+(2\sqrt{7})^2 \Rightarrow BD^2=64-28=36 \Rightarrow BD=6$ گزینه ۳

مثال: کوچکترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اندازه ارتفاع و میانه وارد بر وتر آن به ترتیب $2\sqrt{2}$ و 3 است کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{4}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) $4\sqrt{2}$



در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است. پس:

$$AM = BM = CM = 4 \Rightarrow BC = 6$$

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 = x(6-x) \Rightarrow 8 = 6x - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

چون $AH > BH$ پس $BH = 2$ و در نتیجه $CH = 4$.

$$AB^2 = BH \times BC = 2 \times 6 \Rightarrow AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \checkmark$$

گزینه ۲

$$AC^2 = CH \times BC = 4 \times 6 \Rightarrow AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$