به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس اول: هندسه تحلیلی

جلسه اول و دوم: صفحات ۲ تا ۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱) فاصله دو نقطه (طول پاره خط)

اگر دو نقطه A و B روی محور اعداد x_A و x_B باشند آنگاه فاصله بین دو نقطه $|AB| = |x_B - x_A|$ می‌شود.

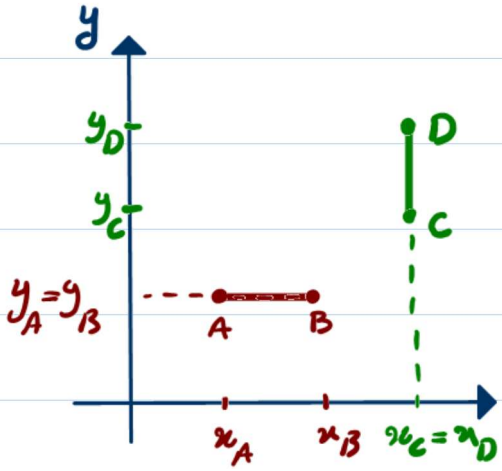


مانند:



$$|AB| = |۳ - (-۲)| = |۳ + ۲| = ۵$$

تذکر: در دستگاه مختصات دو نقطه A و B که عرض برابر دارند هم عرض و دو نقطه C و D که طول مساوی دارند هم طول گفته می‌شود و داریم:



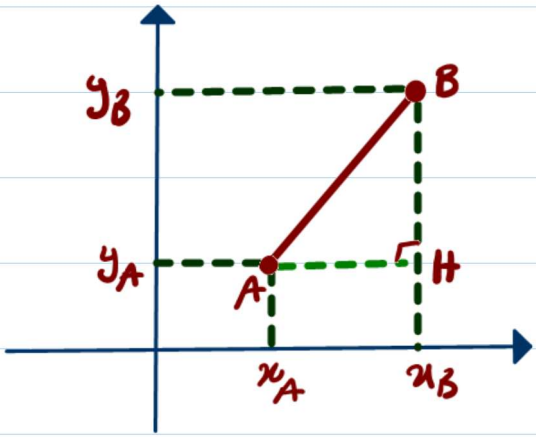
$$|AB| = |x_B - x_A|$$

$$|CD| = |y_D - y_C|$$

فرمول شماره (۱) : اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در دستگاه مختصات باشند، طول پاره خط AB یا فاصله دو نقطه A و B برابر است با :

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

اثبات :



اگر از نقطه A بر خط تقریر B روی محور xها، x_B، عمود کنیم و پای عمود را H بنامیم،

مثلث ABH قائم‌الزاویه خواهد بود و طبق قضیه فیثاغورس داریم :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \qquad (1)$$

ولی B و H هم طول هستند پس : $|BH| = |y_B - y_A|$

همچنین H و A هم عرض هستند پس : $|AH| = |x_B - x_A|$

با جایگذاری روابط بالا در (۱) داریم :

$$AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

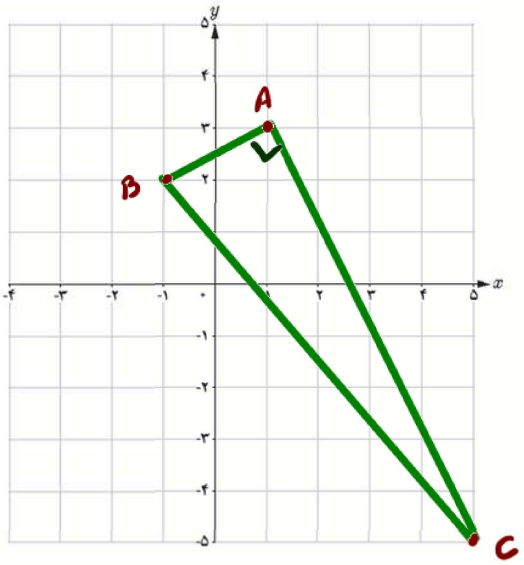
با گرفتن رادیکال از طرفین و این خاصیت قدرمطلق ($|a|^2 = a^2$) و توجه به این نکته که طول را همواره مثبت در نظر می‌گیریم خواهیم داشت :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

یادآوری: شیب خط گذرا از دو نقطه $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ برابر: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

و معادله خط گذرنده از نقطه A با شیب m برابر: $y - y_A = m(x - x_A)$ است.

کار در کلاس



سه نقطهٔ $A(1,3)$، $B(-1,2)$ و $C(5,-5)$ سه رأس مثلث ABC، در صفحهٔ مختصات روبه‌رو، هستند.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) طول اضلاع مثلث را به‌دست آورید.

پ) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ت) شیب دو خط AB و AC را به‌دست آورید.
چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟

ب) $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$

$BC = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$

پ) $(\sqrt{85})^2 = (\sqrt{80})^2 + (\sqrt{5})^2 \rightarrow 85 = 85 \rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2$

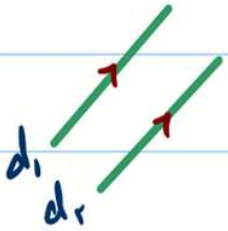
قضیه دو عکس یکدیگر هستند و هر دو برقرار است.

ت) $m_{AB} = \frac{2-3}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

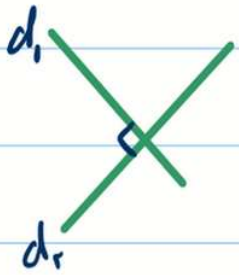
$m_{AC} = \frac{-5-3}{5-1} = \frac{-8}{4} = -2$

حاصل ضرب شیب‌ها منفی یک می‌شود.

تذکر: شیب دو خط موازی با هم برابر و شیب دو خط عمود بر هم قرینه و معکوس یکدیگرند.



$m_1 = m_2$



$m_1 \times m_2 = -1$

مثال: وضعیت خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$d_1: y = 4x - 1$ $\quad d_2: 8y + 2x = 3$ $\quad d_3: 12x - 3y + 1 = 0$

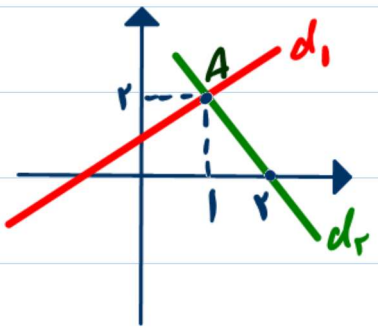
نکته: ضریب x در صورت استاندارد خط ($y = mx + h$) شیب خط است.

نکته: شیب خط $ax + by + c = 0$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

$m_1 = 4$ $\quad m_2 = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$ $\quad m_3 = \frac{-12}{-3} = 4$

$m_1 = m_3 \rightarrow d_1 \parallel d_3$, $m_1 \times m_2 = m_2 \times m_3 = -1 \rightarrow d_2 \perp d_1, d_3$

مثال: معادله خط d_1 عمود بر d_2 را در شکل مقابل بیابید.



$d_1 \perp d_2 \Rightarrow m_1 \times m_2 = -1$

$(2,0), (1,2) \rightarrow m_2 = \frac{2-0}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$

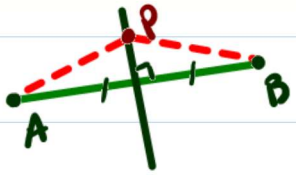
$m_1 = \frac{1}{2}$

$d_1: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$

نکته: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است و برعکس.

کاردرکلاس

نشان دهید نقطه $P(-۱۲,۱۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه $A(۰,-۳)$ و $B(۶,۱۵)$ قرار دارد.



کافی است ثابت کنیم $AP=PB$.

$$AP=\sqrt{(-۱۲-۰)^۲+(۱۱+۳)^۲}=\sqrt{۱۴۴+۱۹۶}=\sqrt{۳۴۰}$$

$$BP=\sqrt{(-۱۲-۶)^۲+(۱۱-۱۵)^۲}=\sqrt{۳۲۴+۱۶}=\sqrt{۳۴۰}$$

$\rightarrow AP=BP$

۲) مختصات نقطه وسط یک پاره خط:

اگر M وسط پاره خط AB روی محور طول‌ها باشد:



$$AM=MB \Rightarrow x_M-x_A=x_B-x_M \Rightarrow ۲x_M=x_A+x_B \xrightarrow{\div ۲} x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

به همین ترتیب اگر M وسط پاره خط AB روی محور عرض‌ها باشد: $y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$

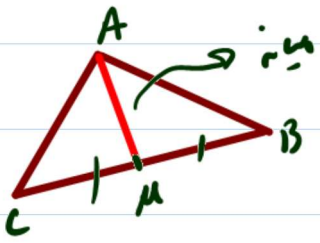
و در حالت کلی اگر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند با

تصویر کردن این نقاط بدی مجدد مختصات و ها به فرمول شماره (۲) می رسیم .

فرمول شماره (۲) : مختصات نقطه M وسط پاره خط AB :

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

مثال : اگر $A(1,9)$ ، $B(3,1)$ ، $C(7,11)$ سه رأس یک مثلث باشند ، معادله میانه AM را به دست آورید .



$$M=\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{3+7}{2}, \frac{1+11}{2}\right)=(5,6)$$

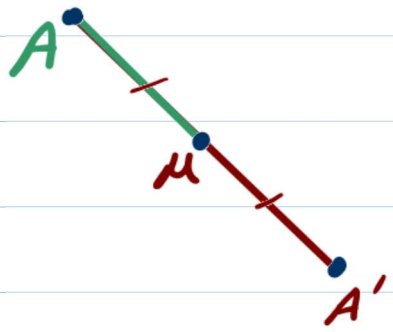
$$M, A \longrightarrow m=\text{شب}=\frac{9-6}{1-5}=\frac{3}{-4}$$

$$y-9=-\frac{3}{4}(x-1)$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+9$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{39}{4}$$

نکته: قرینه نقطه $A(x_A, y_A)$ نسبت به نقطه $M(x_M, y_M)$:



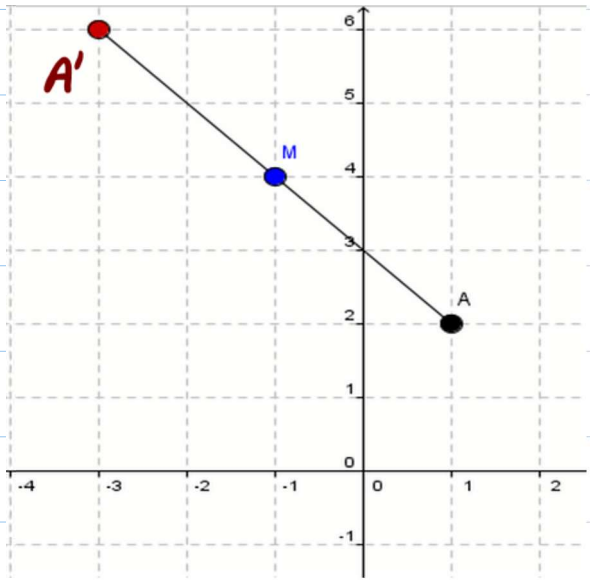
اگر A' را نقطه مورد نظر بگیریم. چون M وسط AA' است

واقع در شکل پس خودمان داشت :

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \rightarrow 2x_M = x_A + x_{A'} \rightarrow x_{A'} = 2x_M - x_A$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \rightarrow 2y_M = y_A + y_{A'} \rightarrow y_{A'} = 2y_M - y_A$$

مثال: قرینه نقطه $A(1,2)$ را نسبت به نقطه $M(-1,4)$ بیابید.



$$x_{A'} = 2 \times (-1) - 1 = -3$$

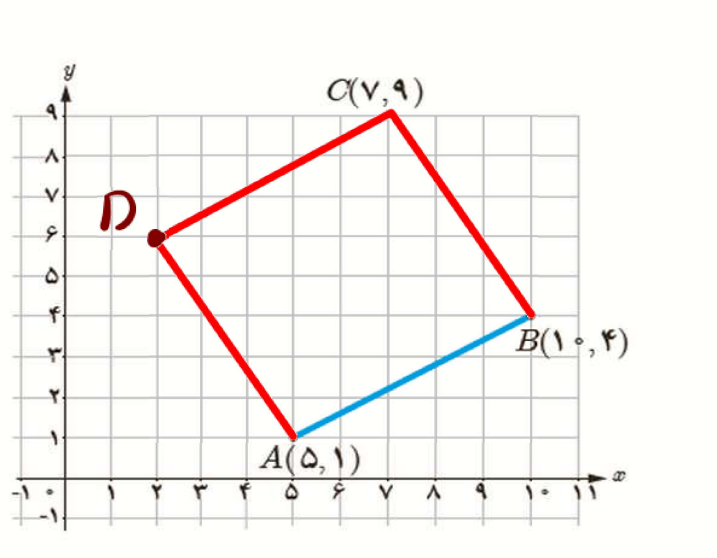
$$y_{A'} = 2 \times 4 - 2 = 6$$

$$A'(-3, 6)$$

نکته : در هر چهارضلعی که قطرها همدیگر را نصف می‌کنند (مانند مربع، مستطیل، لوزی و متوازی الاضلاع) مجموع طول‌ها و مجموع عرض‌های دو رأس روبه‌رو با هم برابرند.

(اثبات جزو آن تمرین)

مثال : مربع $ABCD$ را با رأس‌های : $A(5,1)$ ، $B(10,4)$ ، $C(7,9)$ در نظر بگیرید. مختصات رأس D را بیابید.

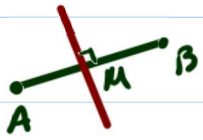


$$x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow 5+7 = 10 + x_D \rightarrow x_D = 2$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow 1+9 = 4 + y_D \rightarrow y_D = 6$$

$$D(2,6)$$

مثال : معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خطی را بنویسید که دو نقطهٔ $A(-۲,۱)$ و $B(۳,۴)$ را به هم وصل کرده است.



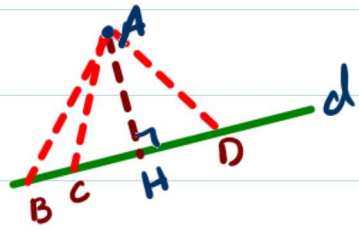
$$M=\left(\frac{-۲+۳}{۲},\frac{۱+۴}{۲}\right)=\left(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲}\right) \qquad m_{AB}=\frac{۴-۱}{۳+۲}=\frac{۳}{۵} \xrightarrow[\text{عمودمنصف}]{} m=-\frac{۵}{۳}$$

$$y-\frac{۵}{۲}=-\frac{۵}{۳}\left(x-\frac{۱}{۲}\right) \xrightarrow{\times ۶} ۶y-۱۵=-۱۰x+۵ \rightarrow ۶y+۱۰x=۲۰$$

$$\div ۲ \rightarrow \quad ۳y+۵x=۱۰$$

۳) فاصلهٔ نقطه از خط :

می‌دانیم فاصلهٔ یک نقطه از یک خط، کوتاه‌ترین فاصله یعنی فاصله‌ای عمودی در نظر می‌گیریم.



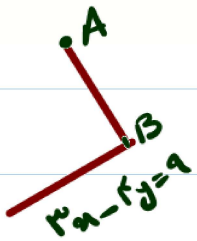
فرمول شماره ۳ : (بدون اثبات می‌پذیریم)

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر :

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

کار در کلاس

۱ اگر نقطهٔ $A(۲,۳)$ رأس یک مربع و معادلهٔ یک ضلع مربع $۳x-۴y=۹$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟



$A(۲,۳) \xrightarrow{\text{در خط}}$ $۳\times۲-۴\times۳=۹$ روی خط قرار ندارد

$۶-۱۲=-۶\neq۹$

صورت کلی خط: $۳x-۴y-۹=۰$

$$AB=\frac{|۳\times۲-۴\times۳-۹|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$$\Rightarrow S=۳\times۳=۹$$

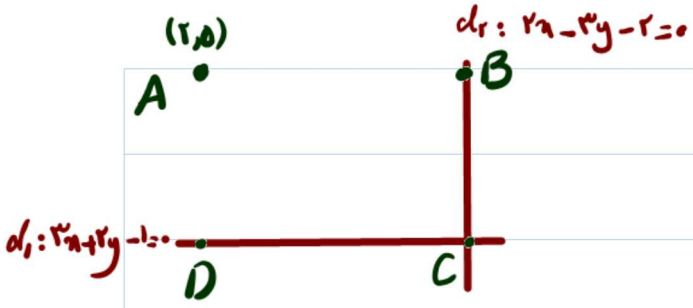
۲ دو خط $۳x+۲y=۱$ و $۲x-۳y=۲$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل‌اند و نقطهٔ $A(۲,۵)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

$d_۱: ۳x+۲y=۱ \rightarrow m=-\frac{۳}{۲}$ ، $d_۲: ۲x-۳y=۲ \rightarrow m=-\frac{۲}{-۳}=\frac{۲}{۳}$

$d_۱ \perp d_۲ \rightarrow$ $d_۱$ و $d_۲$ در وضع عمود

$(۲,۵) \xrightarrow{d_۱}$ $۳\times۲+۲\times۵\neq۱$ ، $(۲,۵) \xrightarrow{d_۲}$ $۲\times۲-۳\times۵\neq۲$

$(۲,۵)$ روی اضلاع قرار ندارد پس A رأس مستطیلی است که مقابل در وضع قرار دارد.



پس داریم :

$$d_1 \text{ تا } A \text{ مینیمم} = AD = \frac{|3\times 2+2\times 5-1|}{\sqrt{9+4}} = \frac{15}{\sqrt{13}}$$

$$d_2 \text{ تا } A \text{ مینیمم} = AB = \frac{|2\times 2-3\times 5-2|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

$$S = \frac{15}{\sqrt{13}} \times \frac{13}{\sqrt{13}} = 15 \times \frac{13}{13} = 15$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه۲

قسمت اول: مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله درجه۲

جلسه سوم: صفحات ۱۱ تا ۱۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

معادله درجه دوم :

به معادله $ax^2+bx+c=0$ باشرط $a\neq 0$ یک معادله درجه دوم گفته می‌شود.

در سال گذشته با روش‌های حل معادله درجه دوم؛ روش تجزیه، روش مربع کامل و روش دلتا آشنا شدید.

یادآوری روش دلتا :

$$\Delta = b^2-4ac \begin{cases} \Delta>0 \rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta=0 \rightarrow x=\dfrac{-b}{2a} \\ \Delta<0 \rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \end{cases}$$

نکته : (روش ضرائب) برخی از معادلات درجه دوم شرایطی دارند که می‌توان به سرعت جواب‌های آن را یافت :

الف) اگر جمع ضرائب صفر باشد یعنی: $a+b+c=0$ باشد یکی از جواب‌ها 1 و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

ب) اگر ضریب x مساوی جمع دو تای دیگر باشد یعنی: $b=a+c$ باشد یکی از جواب‌ها -1 و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $5x^2-3x-2=0$ (a, b, c)

$5-3-2=5-5=0$

$\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=\frac{-2}{5} \end{cases}$

ب) $4x^2+7x+3=0$ (a, b, c)

$7=4+3$

$\begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{c}{a}=-\frac{3}{4} \end{cases}$

جمع و ضرب ریشه‌ها:

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta \geq 0$ باشد، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن برابر است با: (ریشه‌های معادله)

$S=$ جمع دو ریشه $=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

$P=$ ضرب دو ریشه $=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

اثبات: اگر $\Delta>0$ باشد داریم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$ صورت زیر رادیکال مزدوج

$$= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$ ■ به همین ترتیب برای حالت $\Delta=0$ اثبات می‌شود.

مثال: بدون حل معادله $2x^2-7x+3=0$ مجموع و ضرب ریشه‌ها را بیابید.

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-7)}{2}=\frac{7}{2} \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$$

مثال: در معادله $2x^2-mx+m-1=0$ یکی از جواب‌ها عکس و قرینه جواب دیگر است. ($a=2$, $b=-m$, $c=m-1$)

m را بیابید.

ریشه‌ها α , $\beta=-\frac{1}{\alpha}$

$$P=\alpha\beta=\alpha\left(-\frac{1}{\alpha}\right)=-1 \Rightarrow P=\frac{c}{a}=-1 \Rightarrow \frac{m-1}{2}=-1$$

$$\Rightarrow m-1=-2 \Rightarrow m=-1$$

مثال: در معادله $x^2-8x+m=0$ اگر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه دیگر 5 واحد بیشتر باشد ($a=1$, $b=-8$, $c=m$)

m را محاسبه کنید.

$$\alpha=\frac{\beta}{2}+5 \xrightarrow{\times 2} 2\alpha=\beta+10 \rightarrow 2\alpha-\beta=10$$

$$S = \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{1} = 8 \rightarrow \alpha+\beta = 8$$

$$+\begin{cases} 2\alpha-\beta = 10 \\ \alpha+\beta = 8 \end{cases}$$

$$3\alpha = 18 \rightarrow \alpha = 6 \rightarrow \beta = 2$$

$$P = \alpha\beta = 6\times 2 = 12 \rightarrow P = 12 = \frac{c}{a} = \frac{m}{1} \rightarrow m = 12$$

مثال: اگر α, β جواب‌های معادله $x^2-2x-4=0$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$ $\qquad S = \frac{2}{1} = 2,\ P = \frac{-4}{1} = -4$

$$= \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

ب) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

نکته: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Rightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = \alpha^2+\beta^2$

$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = S^2-2P$$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^2-2P}{P^2} = \frac{2^2-2(-4)}{(-4)^2} = \frac{4+8}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

ب) $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{\alpha+\beta+2}{1+(\alpha+\beta)1+\alpha\beta}=\frac{S+2}{1+S+P}$

$$=\frac{2+2}{1+2-4}=\frac{4}{-1}=-4$$

ت) $\alpha^3+\beta^3$

نکته: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=\alpha^3+\beta^3 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow \alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

$\alpha^3+\beta^3=2^3-3(-4)(2)=8+24=32$

مثال: کنکور ۹۹ تجربی

معادله درجه دوم $2x^2+(2m-1)x-m+2=0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

۱) $\frac{7}{2}$ ✓ ۲) ۴ ۳) -1 ۴) $-\frac{5}{2}$

$$\alpha+\beta=\frac{1}{\alpha\beta} \Rightarrow S=\frac{1}{P} \rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{c}{a}} \rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{a}{c}$$

$$\rightarrow a^2=-bc \rightarrow 4^2=-(2m-1)(2-m)$$

$$9=-(4m-2m^2-2+m) \Rightarrow -2m^2+5m-2+9=0$$

$$-2m^2+5m+7=0 \Rightarrow -2+7=5 \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=-\frac{7}{2}=\frac{7}{2} \end{cases}$$ غ ق ق ✓

$$m=-1 \Rightarrow 3x^2-4x+3=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-x+1=0 \rightarrow \Delta=1-4\times1\times1=-3<0$$

گزینه ۱

حالت ریشه‌ها :

الف) $P>0$ (دو ریشه هم‌علامت)
- $S>0$: دو ریشه مثبت
- $S<0$: دو ریشه منفی

ب) $P<0$ (دو ریشه مختلف‌العلامه)
- $S>0$: اندازه ریشه مثبت بزرگ‌تر
- $S<0$: اندازه ریشه منفی بزرگ‌تر
- $S=0$: دو ریشه قرینه هم

مثال کنکور ۹۶ رشته ریاضی :

به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $ax^2 - 2(a-2)x + 14-a = 0$ دو ریشه مثبت دارد؟

۱) $-2 < a < 2$ ۲) $2 < a < 5$ ۳) $2 < a < 14$ ۴) $5 < a < 14$ ✓

$\Delta > 0$ ، $P > 0$ ، $S > 0$

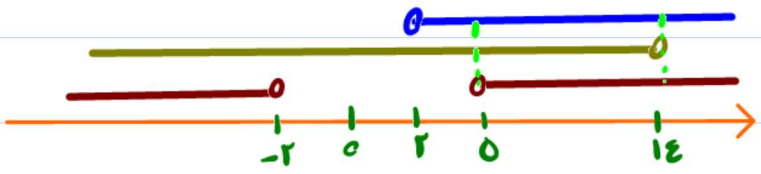
$\Delta > 0 \rightarrow (-2(a-2))^2 - 4 \times 1 \times (14-a) > 0 \rightarrow 4(a^2 - 4a + 4) - 56 + 4a > 0$

$4a^2 - 16a + 16 - 56 + 4a > 0 \rightarrow 4a^2 - 12a - 40 > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0$

$\rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a > 5$ یا $a < -2$ ①

$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{14-a}{1} > 0 \rightarrow a < 14$ ②

$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow \frac{2(a-2)}{1} > 0 \Rightarrow 2a - 4 > 0 \rightarrow a > 2$ ③



① ∩ ② ∩ ③ : $5 < a < 14$ گزینه ۴

ساخت معادله درجه دوم :

تا به حال معادله درجه دوم را داشتیم و ریشه‌ها یا ضرب و جمع ریشه‌ها را پیدا می‌کردیم.

حال می‌خواهیم ببینیم اگر اطلاعاتی درباره ریشه‌ها داشته باشیم، می‌توانیم معادله را بنویسیم؟

قضیه: اگر α و β دو عدد دلخواه باشند و $S=\alpha+\beta$ ، $P=\alpha\beta$ باشد آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^2-Sx+P=0$ است.

اثبات: فرض کنید می‌خواهیم معادله بنویسیم که ریشه‌هایش α و β است در این صورت

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

پس:

$$x^2+(-\alpha-\beta)x+(-\alpha)(-\beta)=0$$ از یک جمله مشترک

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Rightarrow x^2-Sx+P=0 \quad \square$$

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $2\pm\sqrt{3}$ باشد.

$$S=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4 \quad , \quad P=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$$

$$x^2-Sx+P=0 \longrightarrow x^2-4x+1=0$$

مثال کنکور ۹۴ :

ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2-3x-1=0$ یک واحد کمتر است؟

۱) $x^2-3x+1=0$ ۲) $x^2+3x+1=0$ ۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$ ✓

اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2-3x-1=0$ باشند آنگاه ریشه‌های معادله جدید :

$\frac{1}{\alpha}-1$ و $\frac{1}{\beta}-1$ است.

$S_{قدیم}=\frac{3}{2}$ و $P_{قدیم}=-\frac{1}{2}$

$$S_{جدید}=\frac{1}{\alpha}-1+\frac{1}{\beta}-1=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=\frac{S_{قدیم}}{P_{قدیم}}-2=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}-2$$

$$=\frac{6}{-2}-2=-3-2=-5$$

$$P_{جدید}=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=(-1)^2+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)(-1)+\frac{1}{\alpha\beta}=1-3(-1)+\frac{1}{-\frac{1}{2}}$$

($\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=S_{قدیم}$, $\alpha\beta=P_{قدیم}$)

$$=1+3-2=2$$

معادله جدید: $x^2-S_{جدید}x+P_{جدید}=0\rightarrow x^2+5x+2=0$ گزینه ۴

مثال: ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2+ax+b=0$ یک واحد از ریشه‌های معادله $3x^2+7x+1=0$ بیشتر است. b کدام است؟

۱) -2 ✓ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2+7x+1=0$ آنگاه ریشه‌های معادله $x^2+ax+b=0$ برابر $\alpha+1$ و $\beta+1$ است. $\left(P_{\text{قدیم}}=\frac{1}{3},\ S_{\text{قدیم}}=-\frac{7}{3}\right)$

پس: $b=P_{\text{جدید}}=(\alpha+1)(\beta+1)=1+(\alpha+\beta)+1+\alpha\beta=1+S_{\text{قدیم}}+P_{\text{قدیم}}$

$$=1-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}=1+\frac{-6}{3}=1-2=-1$$

گزینه ۲

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم (معادلات دو جمله‌ای)

برخی از معادلات در نگاه اول درجه دوم نیستند ولی با تغییر متغیری می‌توان آن‌ها را به معادله درجه دوم تبدیل کرد. به این صورت که عبارت تکرار شونده را u در نظر بگیریم بطوریکه معادله درجه دوم شود. معادله را حل کرده u را جایگذاری می‌کنیم، x را می‌یابیم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ $\quad u = x^2$ ($x^4 = (x^2)^2$)

$$u^2 - 3u + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ u = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

ب) $(x^2+x)^2 - 18(x^2+x) + 72 = 0$

$$u = x^2 + x \Rightarrow u^2 - 18u + 72 = 0 \Rightarrow (u-12)(u-6) = 0$$

$$u = 12 \rightarrow x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow (x+4)(x-3) = 0 \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$u = 6 \rightarrow x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه۲

قسمت دوم: صفرهای تابع درجه۲

جلسه چهارم: صفحات ۱۴ تا ۱۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

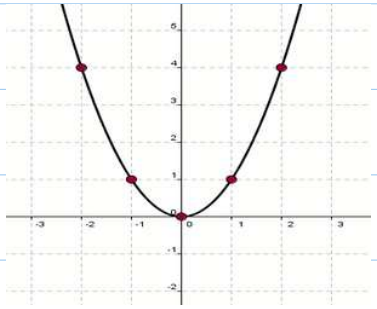
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری:

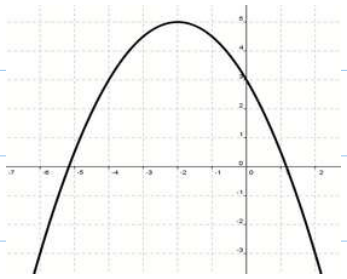
به نمودار $y=ax^2+bx+c$ که در آن $a,b,c\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$ سهمی می‌گویند.

اگر $a>0$ باشد سهمی رو به بالا و اگر $a<0$ باشد سهمی رو به پائین است.



$a>0$

$\downarrow$ min دارد



$a<0$

$\downarrow$ max دارد

در هر دو حالت نقطه $S(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$ (x_S) را رأس سهمی می‌گوئیم.

همچنین اگر $S(x_S,y_S)$ رأس سهمی باشد می‌توانیم ضابطه سهمی را به صورت:

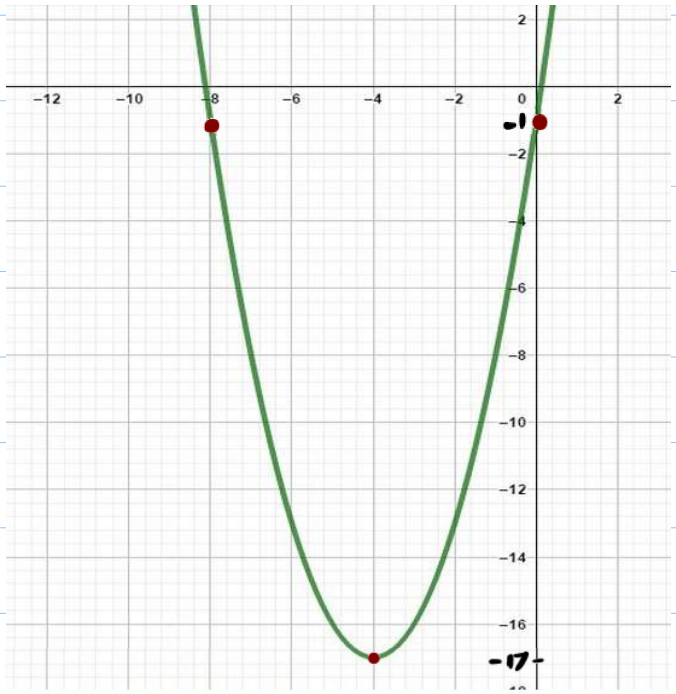
$y=a(x-x_S)^2+y_S$ هم نوشت.

مثال: سهمی $y=x^2+8x-1$ ($a=1,b=8,c=-1$) را رسم کنید.

x	-8	-4	0
y	-1	-17	-1

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-8}{2}=-4$

$y=(-4)^2+8(-4)-1=16-32-1=-17$



مثال : فرض کنید $A(-1,9)$ رأس سهمی باشد و سهمی از نقطه $(3,1)$ هم بگذرد .

ضابطه سهمی را بنویسید .

$$y = a(x-x_A)^2 + y_A$$

$$y = a(x+1)^2 + 9 \xrightarrow[\text{در سهمی}]{(3,1)} 1 = a(3+1)^2 + 9 \rightarrow 1 = 16a + 9 \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 9$$

صفرهای تابع :

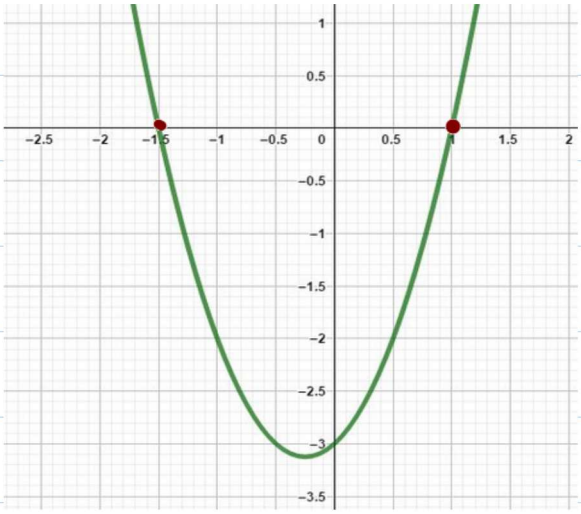
اگر f تابع باشد، جواب‌های معادله $f(x)=0$ را صفرهای تابع می‌گوئیم. در واقع صفرهای تابع، xهایی از تابع هستند که y آن‌ها صفر است. پس می‌توان گفت :

صفرهای تابع، طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور x هستند.

مثال : صفرهای توابع زیر را با رسم نمودار بدست آورید.

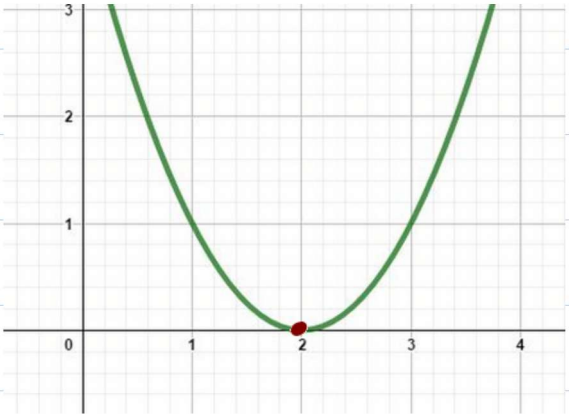
الف) $y = 2x^2 + x - 3$

$2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -1,5$



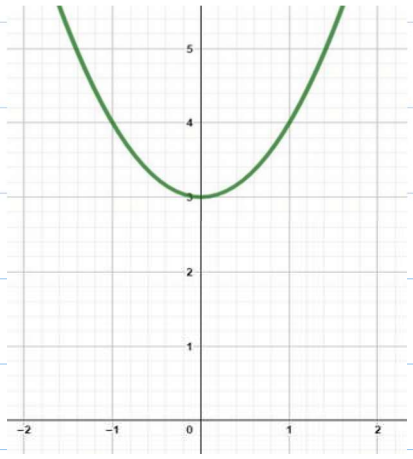
ب) $y = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$



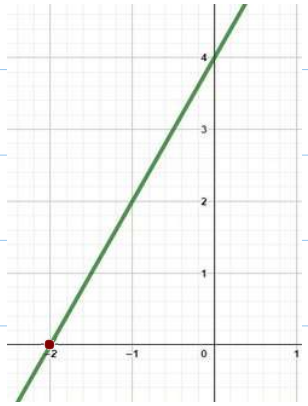
ج) $y = x^2 + 3$

$x^2 + 3 = 0$ صفر ندارد



ت) $y = 2x + 4$

x	y
0	4
-2	0



$2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$

نتیجه :

- اگر Δ مثبت باشد یعنی در دو نقطه که همان جواب های معادله هستند محور x ها را

قطع می کند .

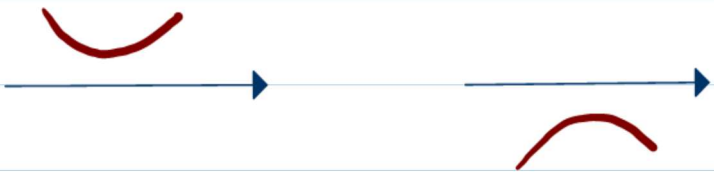


- اگر Δ صفر باشد یعنی فقط در یک نقطه که همان رأس سهمی است محور x ها را

قطع می کند .



- اگر Δ منفی باشد یعنی محور x ها را قطع نمی کند زیرا معادله جواب ندارد .



مثال : به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$ ، محور x ها

(a b c)

را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند ؟

۱) $a<-9$ ✓ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

$f(x)=0 \rightarrow ax^2+(a+3)x-1=0$ دو ریشه منفی دارد

$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = (a+3)^2 - 4a(-1) = a^2 + 6a + 9 + 4a = a^2 + 10a + 9 > 0$

$(a+9)(a+1)$

a	-9	-1
Δ	$+$ 0 $-$	0 $+$

$\text{حالت ۲}: a < -9 \quad \text{یا} \quad a > -1 \quad ①$

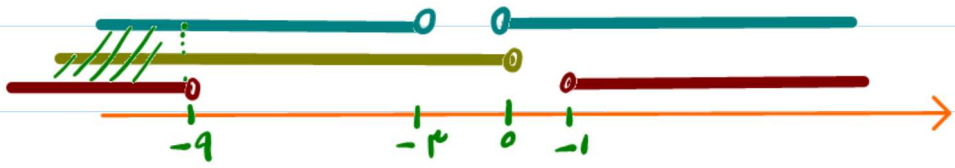
$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{-1}{a} > 0 \rightarrow a < 0 \quad ②$

$S < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \rightarrow -\frac{(a+3)}{a} < 0 \rightarrow \frac{a+3}{a} > 0$

a	-3	0
$\frac{a+3}{a}$	$+$ 0 $-$	$\not\exists$ $+$

$\text{حالت ۲}: a < -3 \quad \text{یا} \quad a > 0 \quad ③$

$① \cap ② \cap ③:$



$a < -9$ گزینه ۱

قضیه‌ی هم: اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ باشد آنگاه می‌توانیم ضابطه‌ی آن را به صورت $y = a(x - x')(x - x'')$ هم بنویسیم.

اثبات: چون x' و x'' صفرهای تابع $y = ax^2 + bx + c$ هستند پس جواب‌های معادله

$ax^2+bx+c=0$ است. کافی است ثابت کنیم: $a(x-x')(x-x'')=ax^2+bx+c$

$$a(x-x')(x-x'') = a(x^2-\underbrace{(x'+x'')}_{S}x+\underbrace{x'x''}_{P})$$

$$= a(x^2-Sx+P)$$

$$= a(x^2-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a})$$

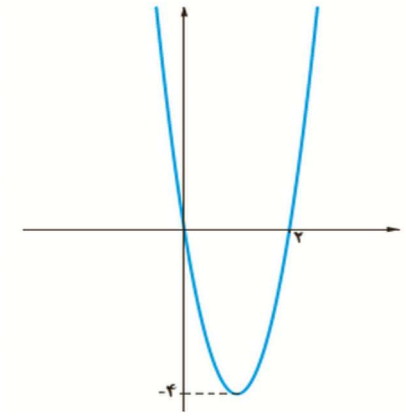
$$= ax^2+bx+c$$ ▣

تذکر: طول رأس سهمی با ضابطه $y=a(x-x')(x-x'')$ دقیقاً وسط دو ریشه است،

یعنی: $x_S=\frac{x'+x''}{2}$.

مثال: ضابطه سهمی‌های زیر را بنویسید.

۱)



$x'=0$, $x''=2$

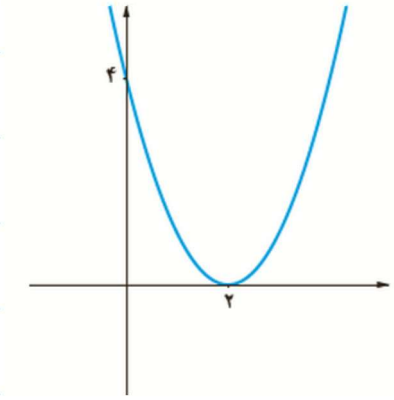
$y=a(x-0)(x-2)=ax(x-2)$

$x_S=\frac{0+2}{2}=1 \Rightarrow S(1,-4)$

S را در ضابطه قرار می‌دهیم: $-۴ = a(۱)(۱-۲) \Rightarrow -۴ = -a \Rightarrow a = ۴$

$y = ۴x(x-۲) \Rightarrow y = ۴x^۲ - ۸x$

۲)



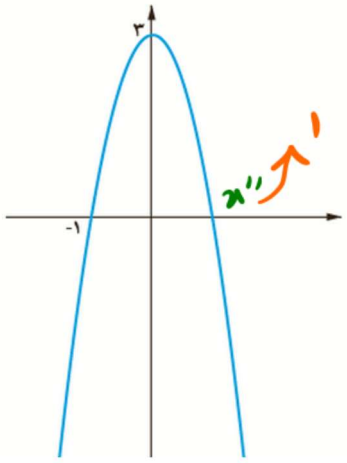
$x' = x'' = ۲$

$y = a(x-۲)(x-۲) = a(x-۲)^۲$

$(۰,۴) \xrightarrow{\text{ضابطه}} ۴ = a(۰-۲)^۲ \Rightarrow ۴ = ۴a \Rightarrow a = ۱$

$y = (x-۲)^۲ \Rightarrow y = x^۲ - ۴x + ۴$

۳)



$x_S = \frac{x' + x''}{۲} \Rightarrow ۰ = \frac{-۱ + x''}{۲} \Rightarrow x'' - ۱ = ۰$

$\Rightarrow x'' = ۱$

$y = a(x-(-۱))(x-۱)$

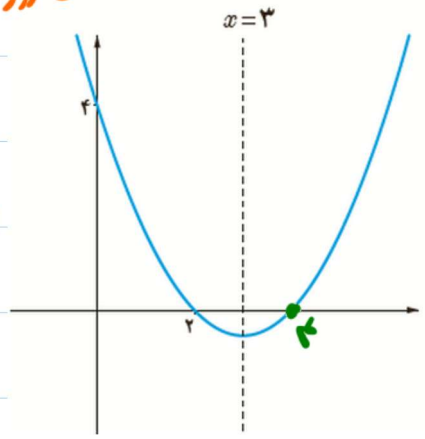
$y = a(x+۱)(x-۱) = a(x^۲ - ۱)$

$S(۰,۳) \xrightarrow{\text{ضابطه}} ۳ = a(۰^۲ - ۱) \Rightarrow ۳ = -a \Rightarrow a = -۳$

$y = -۳(x^۲ - ۱) \Rightarrow y = -۳x^۲ + ۳$

خورتقارب از راس سهمی میگذرد

۴)



$x_s = 3 = \frac{2+x''}{2} \Rightarrow 6 = 2 + x'' \rightarrow x'' = 4$

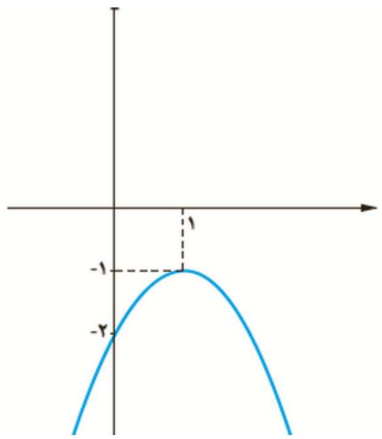
$y = a(x-2)(x-4)$

از ضابطه $(0,4)$ $\quad 4 = a(0-2)(0-4)$

$\Rightarrow 4 = a(8) \Rightarrow a = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 8)$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

۵)



$y = a(x-x_s)^2 + y_s \rightarrow y = a(x-1)^2 - 1$

از ضابطه $(0,-2)$ $\quad -2 = a(0-1)^2 - 1 \Rightarrow -2 = a - 1$

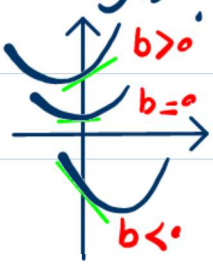
$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -1(x-1)^2 - 1$

$y = -1(x^2 - 2x + 1) - 1 = -x^2 + 2x - 1 - 1 \Rightarrow y = -x^2 + 2x - 2$

علامت a، b، c از روی نمودار سهمی:

۱- a : سهمی رو به بالا : $a > 0$ - سهمی رو به پایین : $a < 0$

۲- b : علامت b، همان علامت شیب خط مماس بر نمودار در محل برخورد سهمی با محور yها است.

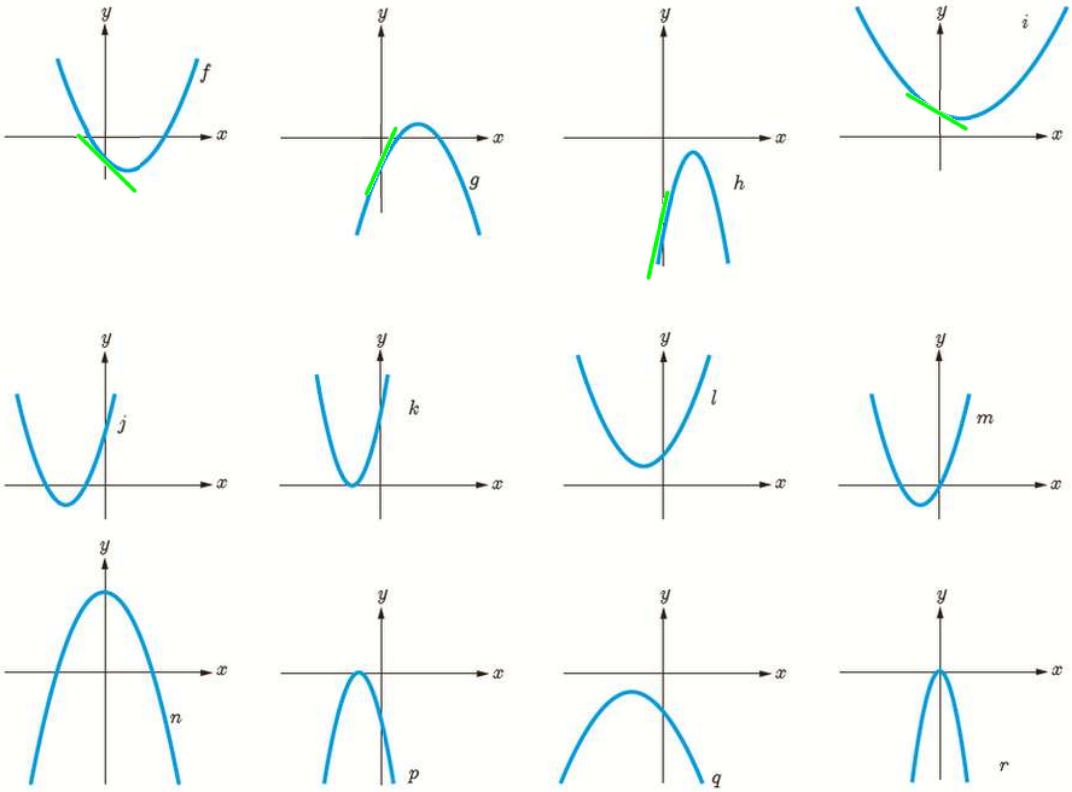


۳ـ c : در سهمی‌ها، c عرض نقطهٔ تلاقی سهمی با محور yهاست. (عرض از مبدأ)

پس اگر محور yها را بالای مبدأ قطع کند، $c>0$ است. اگر در مبدأ قطع کند، $c=0$

و اگر محور yها را پایین مبدأ قطع کند، $c<0$ خواهد بود.

مثال : با توجه به نمودارهای زیر، جدول را تکمیل کنید.



ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−
علامت b	−	+	+	−	+	+	+	+	۰	−	−	۰
علامت c	−	−	−	+	+	+	+	۰	+	−	−	۰
تعداد ریشه‌های متمایز	دو	دو	ندارد	ندارد	دو	یک	ندارد	دو	دو	یک	صفر	یک
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت	هر دو مثبت	ندارد	ندارد	هر دو منفی	منفی	ندارد	یکی منفی یکی صفر	یکی + یکی −	منفی	ریشه ندارد	صفر

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس سوم: معادلات گویا و معادلات رایکالی

قسمت اول: حل معادلات گویا

جلسه پنجم: صفحات ۱۹ تا ۲۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

عبارات شامل چند جمله‌ای

عبارت گویا: عبارتی است که از تقسیم دو چند جمله‌ای به دست می‌آید.

عبارت گویا: عبارتی است که درآن متغیرها با عملیات عبارات گویا درگیر باشند.

حل عبارات گویا: ابتدا کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها را پیدا می‌کنیم.

پس با ضرب طرفین عبارت در ک.م.م مخرج‌ها، عبارت را از حالت گویا خارج می‌کنیم و عبارت حاصل را حل می‌کنیم. جوابی مورد قبول است که هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نکند.

ک.م.م عبارت‌های جبری: ابتدا عبارات را تجزیه می‌کنیم. حاصل ضرب عوامل مشترک و غیرمشترک با توان بزرگتر ک.م.م عبارات است.

مثال: ک.م.م $(x-2)^2$ و $2x^2$ و x^2-4 را بیابید.

$x^2-4 \rightarrow (x+2)(x-2)$

ک.م.م $= 2x^2(x-2)(x+2)$

مثال: معادله گویای $\frac{1}{x^2+x}+\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{3x-1}{x^3-x}$ را حل کنید

$x^2+x=x(x+1)$ ، $x^2-1=(x-1)(x+1)$ ، $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$

ک.م.م $=x(x+1)(x-1)$

$$x(x+1)(x-1)\frac{1}{x(x+1)}+x(x+1)(x-1)\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=x(x+1)(x-1)\frac{3x-1}{x(x-1)(x+1)}$$

$$x-1+x(x^2)=3x-1$$

$$x^3+x-5x=0 \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0$$

$$\begin{cases} x=0 \quad \text{ق ق ق} \\ x^2-4=0 \longrightarrow x^2=4 \longrightarrow \boxed{x=\pm 2} \end{cases}$$

مثال:

معادلات زیر را حل کنید.

۱ $\frac{۶}{x}=۲+\frac{x-۳}{x+۱}$ ۲ $\frac{P}{۲-P}+\frac{۲}{P}=\frac{-۳}{۲}$ ۳ $\frac{۳y+۵}{y^۲+۵y}+\frac{y+۴}{y+۵}=\frac{y+۱}{y}$

حل ۱: $ک.م.م = x(x+۱)$

$$\frac{۶}{x}x(x+۱) = ۲x(x+۱) + x(x+۱)\frac{(x-۳)}{x+۱}$$

$$۶(x+۱) = ۲x^۲+۲x+x(x-۳)$$

$$۶x+۶ = ۲x^۲+۲x+x^۲-۳x$$

$$۳x^۲-۷x-۶=۰$$

$$\Delta = ۴۹-۴\times۳\times(-۶) = ۴۹+۷۲ = ۱۲۱$$

$$x=\frac{۷\pm۱۱}{۶} \Rightarrow x=\frac{۷+۱۱}{۶}=\frac{۱۸}{۶}=۳ \checkmark \quad , \quad x=\frac{۷-۱۱}{۶}=\frac{-۴}{۶}=\frac{-۲}{۳} \checkmark$$

حل ۲: $ک.م.م = ۲p(۲-p)$

$$۲p(۲-p)\frac{p}{۲-p}+۲p(۲-p)\frac{۲}{p}=۲p(۲-p)(\frac{-۳}{۲})$$

$$۲p^۲+۴(۲-p)=-۳p(۲-p)$$

$$۲p^۲+۸-۴p=-۶p+۳p^۲$$

$$p^۲-۲p-۸=۰ \rightarrow (p-۴)(p+۲)=۰ \begin{cases} p=۴ \checkmark \\ p=-۲ \checkmark \end{cases}$$

حل ۳

$$\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

$$y^2+5y = y(y+5)$$

ک.م.م $= y(y+5)$

$$\frac{y(y+5)(3y+5)}{y(y+5)} + \frac{y(y+5)(y+4)}{y+5} = \frac{y(y+5)(y+1)}{y}$$

$$3y+5 + y(y+4) = (y+5)(y+1)$$

$$3y+5 + y^2+4y = y^2+6y+5$$

$$7y+5 = 6y+5 \longrightarrow y = 0$$

مورد قبول نیست

لذا جواب ندارد.

مثال ۱ معادله $\frac{۳}{۲}=\frac{۲}{x-۲}+\frac{۱}{(x-۲)^۲}$ را حل کنید.

$$م.م.ک = (x-۲)^۲$$

$$(x-۲)^۲\frac{۱}{(x-۲)^۲}+(x-۲)^۲\frac{۲}{x-۲}=۳(x-۲)^۲$$

$$۱+۲(x-۲)=۳(x-۲)^۲$$

$$۱+۲x-۴=۳(x^۲-۴x+۴)$$

$$۱+۲x-۴=۳x^۲-۱۲x+۱۲$$

$$۳x^۲-۱۴x+۱۵=۰$$

$$\Delta=(۱۴)^۲-۴\times۳\times۱۵=۱۹۶-۱۸۰=۱۶$$

$$x=\frac{۱۴\pm۴}{۶}\rightarrow x=\frac{۱۴+۴}{۶}=\frac{۱۸}{۶}=۳\ \checkmark$$

$$x=\frac{۱۴-۴}{۶}=\frac{۱۰}{۶}=\frac{۵}{۳}\ \checkmark$$

مثال ۲ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم : $\frac{L}{w}=\frac{w+L}{L}$ آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل‌شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

مستطیل طلایی : مستطیلی است که نسبت بعد طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد.



$$p=2(L+w)=144 \longrightarrow L+w=72 \longrightarrow w=72-L$$

$$\frac{w+L}{L}=\frac{L}{w} \Rightarrow \frac{72-L+L}{L}=\frac{L}{72-L}$$

$$\frac{72}{L}=\frac{L}{72-L} \qquad \text{مساحت} = L(72-L)$$

$$L(72-L)\frac{72}{L}=L(72-L)\frac{L}{72-L}$$

$$(72-L)72=L^2 \longrightarrow L^2+72L-5184=0$$

$$\Delta=(72)^2-4(1)(-5184)=72^2+4(72)^2=5(72)^2$$

$$l = \frac{-۷۲ \pm \sqrt{۵(۷۲)^۲}}{۲} = \begin{cases} \frac{-۷۲ + ۷۲\sqrt{۵}}{۲} = ۳۶(-۱+\sqrt{۵}) \checkmark \\ \frac{-۷۲ - ۷۲\sqrt{۵}}{۲} = ۳۶(-۱-\sqrt{۵}) \times \end{cases}$$

$+$ $-$

$$l = ۳۶(-۱+\sqrt{۵})$$

$$\omega = ۷۲ - l = ۷۲ - (۳۶(-۱+\sqrt{۵}))$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس سوم: معادلات گویا و معادلات رایکالی

قسمت دوم: مدلسازی مسائل به صورت یک معادله گویا

جلسه ششم: صفحات ۱۹ تا ۲۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

در حل برخی مسائل بعد از مدل سازی آن، به یک معادله درجه دو می رسیم. برای راحت شدن حل آنلاین به

مسائل کنکور را به صورت زیر دسته بندی می کنیم.

نوع اول: مسائل سرعت ـ زمان

فعالیت صفحه ۲۰ ریاضی ۲

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام‌خمینی(قُدِّسَ سِرُّهُ) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت قطار $10\ km/h$ کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب‌است محاسبهٔ طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

در این نوع مسائل از رابطه متحرک ایستاده می کنیم: $x = vt$

$$t = \frac{x}{v} \qquad t_{\text{رفت}} = \frac{60}{v}$$

$$t_{\text{برگشت}} = t_{\text{رفت}} + \frac{1}{2}$$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{60}{v-10}$$

معادله گویا

$$\Rightarrow \frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{2v(v-10)} 120v = 120(v-10) + v(v-10)$$

$$v^2 - 10v + 120v - 120v - 1200 = 0$$

$$v^2 - 10v - 1200 = 0 \rightarrow (v-40)(v+30) = 0$$

$$\begin{cases} v = 40 \rightarrow t_{\text{رفت}} = \frac{60}{40} = 1{,}5 \text{ ساعت} \\ v = -30 \times \end{cases}$$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{60}{40-10} = \frac{60}{30} = 2 \text{ ساعت}$$

تمرین صفحه ۲۲ حسابان ۱

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. درصورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

رفت $\xrightarrow{v}$

برگشت $\xleftarrow{v-8}$

$t_{\text{رفت}} = \frac{144}{v}$

$t_{\text{برگشت}} = \frac{144}{v-8}$

$\rightarrow t_{\text{رفت}} + t_{\text{برگشت}} = 17 - 2$ (زمان)

$\frac{144}{v} + \frac{144}{v-8} = 15 \xrightarrow{\div 3} \frac{48}{v} + \frac{48}{v-8} = 5$

$\times v(v-8) \rightarrow 48(v-8) + 48v = 5v(v-8)$

$\rightarrow 5v^2 - 40v - 48v - 48v + 384 = 0$

$\rightarrow 5v^2 - 136v + 384 = 0$

$\Delta = (-136)^2 - (4 \times 5 \times 384) = 18496 - 7680 = 10816$

$\sqrt{10816} = 104$

$v = \frac{136 \pm 104}{10} \begin{cases} v = \frac{136+104}{10} = 24 \\ v = 3{,}2 \times \end{cases}$

نوع دوم: مسائل تقسیم کار

تمرین صفحه ۲۴ ریاضی ۲

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کنند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

در حل این نوع مسائل می‌گوییم اگر کاری در n ساعت (دقیقه و ...) انجام می‌پذیرد، در یک ساعت (یک دقیقه و ...) $\frac{1}{n}$ از کار انجام شده است.

n: زمان تنهایی رضا

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{1\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{3}{4}$$

$\times 4n$ $\quad 2n + 4 = 3n \longrightarrow n = 4$

تمرین صفحه ۲۲ حسابان ۱

۹ ماشین A کاری را به‌تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

$A: x$

$B: x+15$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18}$$

$\xrightarrow{18x(x+15)}$ $18(x+15) + 18x = x(x+15)$

$$x^2 + 15x - 18x - 270 - 18x = 0$$

$$x^2 - 21x - 270 = 0$$

$$(x-30)(x+9) = 0 \quad \begin{cases} x = 30 \longrightarrow A \\ x = -9 \text{ ق} \end{cases}$$

B در ۴۵ ساعت

مثال: زمانی که طول می‌کشد تا شیر A به تنهایی حوضی را پر کند، از روی زمان که شیر B همان حوض را پر کند، یک ساعت بیشتر است. اگر هر دو شیر را هم‌زمان باز کنیم، حوض در ۲ ساعت ۶ دقیقه پر می‌شود. شیر A به تنهایی در چند ساعت حوض را پر می‌کند؟

t: زمان شیر B به تنهایی

$2t+1$: A

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2,1} = \frac{1}{\frac{21}{10}} = \frac{10}{21}$$

$21t(2t+1)$ ←

$$\rightarrow 21(2t+1) + 21t = 10t(2t+1)$$
$$\rightarrow 42t + 21 + 21t = 20t^2 + 10t$$
$$\rightarrow 20t^2 + 10t - 63t - 21 = 0$$
$$\rightarrow 20t^2 - 53t - 21 = 0$$
$$\Delta = (-53)^2 - (4 \times 20 \times (-21)) = 2809 + 1680 = 4489$$
$$\sqrt{4489} = 67$$

$$t = \frac{53 \pm 67}{40} \begin{cases} \frac{53+67}{40} = 3 \rightarrow \text{شیر } B \\ \frac{53-67}{40} = \frac{-14}{40} = -\frac{7}{20} \times \end{cases}$$

شیر A به تنهایی: $2 \times 3 + 1 = 7$ ساعت

نوع سوم : مسائل غلظت

ص ۱۷ و ۱۸ حل مثال ۱

در یک مغازهٔ ماهی‌های تزیینی، ماهی‌های آب‌شور در محلول‌های آب‌نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟

حالت اول : فرض کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد.

مقدار نمک در محلول ۴ درصدی $200 \times \frac{4}{100} = 8\ kg$

x کیلوگرم نمک اضافه کنیم

$$\frac{8+x}{200+x} = \frac{7}{100}$$

$$\longrightarrow 100(8+x) = 7(200+x) \longrightarrow 800+100x = 1400+7x$$

$$\longrightarrow 93x = 600 \longrightarrow x = \frac{600}{93}\ kg$$

حالت دوم : اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

y کیلوگرم از آب تبخیر کنیم.

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100}$$

$$800 = 7(200-y) \longrightarrow 7y = -800 + 1400$$

$$7y = 600 \longrightarrow y = \frac{600}{7}\ kg$$

در مسئله ماهی‌های تزیینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازهٔ کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

y: کیلوگرم تبخیر آب

$$\frac{۸+۵}{۲۰۰+۵-y} = \frac{۷}{۱۰۰}$$

$$\rightarrow \frac{۱۳}{۲۰۵-y} = \frac{۷}{۱۰۰}$$

$$\rightarrow ۱۳۰۰ = ۷\times ۲۰۵ - ۷y$$

$$\rightarrow ۷y = ۱۴۳۵ - ۱۳۰۰$$

$$\rightarrow ۷y = ۱۳۵ \rightarrow y = \frac{۱۳۵}{۷} \approx ۱۹,۲۸ \ kg$$

۱۹,۲۸kg از آب تبخیر

مسائل متفرقه مانند :

تمرین صفحه ۲۲ حسابان ۱

۸ پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

x : قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف

تعداد قبل از تخفیف: x | تعداد بعد از تخفیف: $x+4$

$$\frac{120000}{x} + 4 = \frac{120000}{x-1000}$$

$\times x(x-1000)$ →

$$120 \times 10^4 (x-1000) + 4x(x-1000) = 120 \times 10^4 x$$

$$4x^2 - 4000x + 120 \times 10^4 x - 120 \times 10^7 - 120 \times 10^4 x = 0$$

$$4x^2 - 4000x - 120 \times 10^7 = 0$$

$\div 4$ →

$$x^2 - 1000x - 30 \times 10^6 = 0 \rightarrow \Delta = 121 \times 10^6$$

$$x = \begin{cases} \frac{1000 + 11000}{2} = \frac{12000}{2} = 6000 \checkmark \\ \frac{1000 - 11000}{2} = -5000 \end{cases}$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس سوم: معادلات گویا و معادلات رایکالی

قسمت سوم: معادلات رادیکالی

جلسه هفتم: صفحات ۲۲و۲۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

معادلات گنگ (اصم)

معادلاتی که در آن ها مجهول زیر رادیکال است را معادله گنگ می گوییم.

روش حل معادلات اصم با فرجه دو :

یک رادیکال را یک طرف و بقیه عبارت ها را سمت دیگر منتقل می کنیم.

طرفین را به توان ۲ می رسانیم تا رادیکال از بین برود. اگر باز هم رادیکال داشتیم این عمل را تکرار می کنیم تا همه رادیکال ها از بین بروند و معادله بدست آمده را حل می کنیم.

جواب های به دست آمده به شرطی قابل قبول هستند که در معادله اولیه صدق کنند.

تذکر: گاهی اوقات برای سرعت عمل در تشخیص مردود یا قبول بودن جواب می توان از نکات زیر استفاده کرد :

- عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.
- هر عبارت که با یک رادیکال برابر است باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

تذکر: در معادلاتی که رادیکال‌ها در مخرج قرار می‌گیرند ابتدا مانند معادلات گویا حل کرده، با ضرب طرفین معادله در ک.م.م مخرج‌ها، معادله را از حالت کسری خارج می‌کنیم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

ج) $x+\sqrt{x}=6$

ث) $k=\sqrt{6k-8}$

ح) $\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$

چ) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$

ث) $k^2=6k-8 \rightarrow k^2-6k+8=0$

$(k-4)(k-2)=0$

$k=4 \rightarrow 4=\sqrt{24-8}=\sqrt{16}=4$ ✓

$k=2 \rightarrow 2=\sqrt{12-8}=\sqrt{4}=2$ ✓

ج) $\sqrt{x}=6-x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x=(6-x)^2 \rightarrow$ با استفاده از اتحاد دوجمله‌ای

$x=36-12x+x^2$

$\rightarrow x^2-13x+36=0 \rightarrow (x-9)(x-4)=0$

$x=9$ ✗

$x=4$ ✓

$\sqrt{9}=6-9 \rightarrow 3=-3$ ✗

$\sqrt{4}=6-4 \rightarrow 2=2$ ✓

ج) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$

$\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{2x-5}$

به توان ۲ $\longrightarrow (\sqrt{x+1}-1)^2 = 2x-5$

$\longrightarrow x+1-2\sqrt{x+1}+1 = 2x-5$

$\longrightarrow x+2-2x+5 = 2\sqrt{x+1}$

$\longrightarrow -x+7 = 2\sqrt{x+1}$

به توان ۲ $\longrightarrow x^2-14x+49 = 4(x+1)$

$\longrightarrow x^2-14x+49-4x-4=0$

$\longrightarrow x^2-18x+45=0$

$\longrightarrow (x-3)(x-15)=0$ $\begin{cases} x=3 \rightarrow \sqrt{4}-\sqrt{1}=1 \checkmark \\ x=15 \rightarrow 4-3=1 \times \end{cases}$

د) $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$

$\times\sqrt{m}$ $\longrightarrow m+1 = 2\sqrt{m}$ به توان ۲ $\longrightarrow m^2+2m+1 = 4m$

$\longrightarrow m^2-2m+1=0 \longrightarrow (m-1)^2=0 \longrightarrow m=1 \checkmark$

$2 = \frac{1}{1}+1$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

$\xrightarrow{\times(1+\sqrt{x})}$ $1-\sqrt{x} = (1-x)(1+\sqrt{x})$

$\rightarrow 1-\sqrt{x} = 1-x+\sqrt{x}-x\sqrt{x}$

$\rightarrow x = \sqrt{x}+\sqrt{x}-x\sqrt{x}$

$\rightarrow x = 2\sqrt{x}-x\sqrt{x}$

$\rightarrow x = \sqrt{x}(2-x)$

$\xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{هر دو}}$ $x^2 = x(4-4x+x^2)$

$x^2 = 4x-4x^2+x^3$

$\rightarrow x^3-5x^2+4x=0 \rightarrow x(x^2-5x+4)=0$

$x=0$ ✓ $\frac{1-0}{1+0}=1-0$

$x^2-5x+4=0$ $\begin{cases} x=1 \rightarrow \frac{1-1}{1+1}=1-0 \rightarrow 0=0 & \checkmark \\ x=4 \rightarrow \frac{1-2}{1+4}=1-4 \rightarrow -\frac{1}{5}=-3 & \times \end{cases}$

۲) $\frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2-\frac{1}{\sqrt{x}-2}$ $\xrightarrow{\times(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$ $5(\sqrt{x}-2) = 2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)-(\sqrt{x}+2)$

$\rightarrow 5\sqrt{x}-10 = 2(x-4)-\sqrt{x}-2$

$\rightarrow 5\sqrt{x}-10-2x+8+\sqrt{x}+2=0$

$\rightarrow 6\sqrt{x}=2x \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{هر دو}} 36x=4x^2 \rightarrow 4x^2-36x=0$

$\rightarrow 4x(x-9)=0$ $\begin{cases} x=0 & 5/2 = 2+\frac{1}{2} \quad \checkmark \\ x=9 & \frac{5}{5}=2-\frac{1}{1} \quad \checkmark \end{cases}$

۳) $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+7=x+2\sqrt{x}+1$

$\rightarrow 6=2\sqrt{x} \rightarrow 3=\sqrt{x} \rightarrow x=9$ ✓ $4=3+1$

۴) $\frac{1}{\sqrt{u-3}}-\frac{2}{\sqrt{u}}=0 \rightarrow \times\sqrt{u}\sqrt{u-3} \rightarrow \sqrt{u}-2\sqrt{u-3}=0$

$\sqrt{u}=2\sqrt{u-3} \xrightarrow[\text{هر دو}]{\text{به توان}} u=4(u-3) \rightarrow u=4u-12$

$\rightarrow -3u=-12 \rightarrow u=4$ ✓

$\frac{1}{1}-\frac{2}{2}=0$

مثال: جواب معادلات زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\sqrt{t}+2=0$ ب) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}+1=0$ پ) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$

الف) $\sqrt{t}=-2$ ✗ جواب ندارد

ب) $(+)+(+)+1=0$ امکان ندارد ← جواب ندارد

پ) $(+)+(+)=0 \xrightarrow{\text{عبارت}=0}$ $1-x=0 \rightarrow x=1$ ، $x-2=0 \rightarrow x=2$ جواب ندارد

در مثال های بالا حل شد.

$x+\sqrt{x}=6 \longrightarrow x=4$

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

۲ معادله $\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x-2}=0$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

$x^2-4=0 \longrightarrow x=\pm 2$

$x-2=0 \longrightarrow x=2$

$x=2$ هم زیر رادیکال را صفر می‌کند پس جواب هاست.

نکته: هرگاه جمع دو رادیکال صفر شود تنها زمانی که جواب دارد که هر دو عبارت زیر رادیکال n ام مشترک همزمان صفر شوند.

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به‌طوری که $t=\sqrt{10-\frac{h}{5}}$.
این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

$2=\sqrt{10-\frac{h}{5}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4=10-\frac{h}{5} \longrightarrow -6=-\frac{h}{5}$

$\longrightarrow -h=-30 \longrightarrow h=30\ m$

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

الف) $\sqrt{n} - n = \frac{n}{2} \longrightarrow \sqrt{n} = \frac{n}{2} + n = \frac{3}{2}n$

$\xrightarrow[2]{\text{به توان}} n = \frac{9}{4}n^2 \longrightarrow \frac{9}{4}n^2 - n = 0 \longrightarrow n(\frac{9}{4}n - 1) = 0$

$n = 0$ ✓

$\frac{9}{4}n = 1 \longrightarrow n = \frac{4}{9}$ ×

ب) $n - \sqrt{n} = \frac{n}{2} \longrightarrow n - \frac{n}{2} = \sqrt{n}$

$\frac{1}{2}n = \sqrt{n} \xrightarrow[2]{\text{به توان}} \frac{1}{4}n^2 = n \longrightarrow \frac{1}{4}n^2 - n = 0 \longrightarrow n(\frac{1}{4}n - 1) = 0$

$n = 0$ ✓

$n = 4$ ✓ $4 - 2 = 2$

۵ معادله‌ای شاملِ مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

$\sqrt{2 - n} + \sqrt{n + 3} = 3$