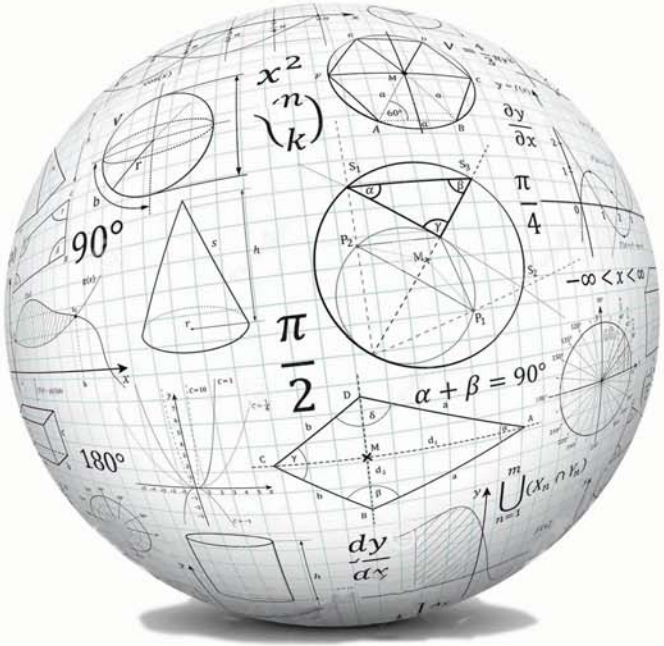
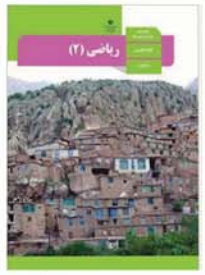
هزار چهره ریاضیات

ریاضی (۲) یازدهم تجربی

آمادگی برای امتحان نهایی





- درسنامه کامل به همراه حل تمرینات، فعالیت ها و کار در کلاس ها
- شامل حل تشریحی تمام سوالات نهایی ریاضی (۲)
- جامع ترین منبع برای امتحان نهایی
- آزمون های شبه نهایی با پاسخ تشریحی برای هر دو نیمسال

دکتر سعید اقدم
مهندس علی اقدم

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

هزار چهره ریاضیات

دکتر سعید اقدم
مهندس علی اقدم

واسه یه امتحان نهایی با نمره عالی

خوندن همین کتاب کافیه!
جامع - استاندارد - بی حاشیه

درسنامه | حل تمرینات و فعالیت های کتاب درسی | سوالات نهایی سال های قبل با پاسخ تشریحی | آزمون های شبه نهایی

مخصوص امتحانات نهایی ریاضی (۲) یازدهم تجربی

ISBN : 978-622-8227-14-6

سخنی با دانش‌آموزان:

در سال‌های اخیر اهمیت نمرات نهایی و تاثیر قطعی آن در کنکور و سهم سوابق تحصیلی در پذیرش دانشگاه‌ها موجب شده اغلب داوطلبان توجه بیشتری نسبت به نمرات دروس نهایی داشته باشند. از این رو داشتن یک منبع کامل، بهمراه درسنامه و حل تشریحی سوالات آزمون‌های نهایی سال‌های گذشته، یکی از دغدغه‌های مهم این روزها برای داوطلبان شده است. این موضوع مرا بر آن داشت تا بار دیگر به لطف خداوند، مجموعهٔ دیگری را با همت ناچیز خود به ثمر برسانم و تمام نکات کتاب درسی ریاضی ۲ را به همراه حل کامل تمرینات و کار در کلاس‌ها در این کتاب ارائه کنم. در متن هر فصل، مثال‌های وجود دارند که با علامت * مشخص شده‌اند، این مثال‌ها کمی فراتر از مباحث کتاب درسی هستند و صرفا برای تسلط بیشتر دانش آموزان بر موضوع مورد بحث ارائه شده‌اند. همچنین سوالات نهایی سال‌های گذشته به تفکیک هر فصل در پایان هر فصل، همراه با پاسخ نامه تشریحی آورده شده و حتی الامکان از آوردن سوالات نهایی تکراری پرهیز شده است. در آخر این کتاب نیز، آزمون‌های شبیه‌سازی شده برای هر دو نیمسال اول و دوم با پاسخ تشریحی طراحی شده است که خواننده می‌تواند از این آزمون‌ها برای محک بیشتر خود استفاده کند. امید است دانش‌آموزان عزیز با مطالعهٔ خط به خط این کتاب و حل تمرینات و آزمون‌های آن، بتوانند خود را برای آزمون نهایی این درس آماده کنند و با کسب نمرهٔ بهتر یک تیر و دو نشان بزنند چرا که علاوه بر مطالعه برای امتحان نهایی می‌توانند خود را برای تست‌های کنکور، که لازمهٔ مطالعهٔ این بخش درک بهتر و اساسی کتاب درسی است نیز آماده کنند و پیش زمینه‌ای برای سوالات کنکور داشته باشند، چونکه در سال‌های اخیر توجه طراحان کنکور، بیشتر به طرح سوالاتی بر مبنای کتاب درسی و تمرینات آن می‌باشد. مطلب مهم دیگری که اهمیت دارد این است که نحوهٔ نوشتن پاسخ کتبی در امتحان نهایی باید برایتان مهم باشد و باید آگاه باشید که چه نوع نوشتنی برایتان نمره کسب می‌کند. پاسخنامهٔ این کتاب با توجه به این موضوع به شیوه‌ای نوشته شده که راهنمای پاسخ به امتحان کتبی باشد. یادآور میشوم، طراحی سوالات این کتاب بر اساس سطوح یادگیری، انجام گرفته که در این کار از راهنمایی‌های دوست عزیزم جناب آقای ناصر الماسیان که از مشاوران حرفه‌ای و برتر در زمینهٔ امتحانات نهایی و کنکور می‌باشند، استفاده گردیده است. با همهٔ این تفاصیل هیچ اثری عاری از ایراد نیست لذا از همهٔ صاحب‌نظران و خوانندگان که این اثر در اختیار آنها قرار دارد، تقاضا دارم هرگونه اشکالات احتمالی و نظرات سازندهٔ خود را از طریق شماره تلفن ۰۹۰۱۳۱۳۰۱۹۰ با بنده در میان بگذارند تا در جلدهای بعدی این اشکالات را به مینیمم خود برسانیم.

با آرزوی موفقیت برای همهٔ دانش‌آموزان سرزمینم.

سعید اقدم

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

فصل سوم

تـابـع

در این فصل می‌خوانیم:

* درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع

* درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک

* درس سوم: اعمال جبری روی توابع

بارم‌بندی فصل سوم در امتحانات نهایی:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
۷	۳	۳

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

فصل سوّم: تابع

❊ درس اوّل: آشنایی با برخی از انواع توابع

در سال قبل با مفهوم تابع و ضابطهٔ تابع آشنا شده‌ایم، اکنون در این فصل می‌خواهیم برخی از انواع توابع و دامنهٔ آن‌ها را مورد بررسی قرار دهیم. توجه شود که اگر ضابطهٔ تابعی داده شده باشد اما دامنهٔ آن صریحا گفته نشده باشد، بزرگترین مجموعه‌ای که آن تابع در آن قابل تعریف است، به عنوان دامنهٔ تابع در نظر گرفته می‌شود.

توابع چندجمله‌ای: در سال قبل خواندیم که توابعی که نمایش جبری آن‌ها چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چندجمله‌ای نام دارند. بعبارتی در چندجمله‌ای توان x عدد حسابی است و x در مخرج و زیر رادیکال نیست.

مثال: توابع زیر همگی چندجمله‌ای هستند.

الف) $f(x)=۳$ ب) $g(x)=۲x-\frac{۵}{۳}$ پ) $h(x)=x^{۲}-\sqrt{۳}x+۱$ ت) $t(x)=x(x-۱)^{۲}$

❊ دامنهٔ تمام چندجمله‌ای‌ها برابر $\mathbb{R}$ است. بعبارتی در چندجمله‌ای به x هر مقدار دلخواه از $\mathbb{R}$ را می‌توان داد.

بنابراین دامنهٔ تمام توابع ارئه شده در مثال بالا، $\mathbb{R}$ می‌باشد.

توابع گویا: هر تابع گویا بفرم $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ می‌باشد که در آن صورت و مخرج کسر هر دو چندجمله‌ای هستند و مخرج غیرصفر می‌باشد.

مثال: توابع زیر همگی گویا هستند.

الف) $f(x)=\frac{x^{۲}+۴}{۵x-۱}$ ب) $g(x)=\frac{۱}{x}$ پ) $h(x)=۲$ ت) $r(x)=\sqrt{۵}x$

❊ می‌دانیم مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد، بنابراین آن دسته از اعدادی که مخرج یک کسر را صفر می‌کنند باید از دامنهٔ تابع خارج شوند یعنی:

❊ دامنهٔ توابع گویا برابر است با: $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

در مثال بالا: $D_r=\mathbb{R}$, $D_h=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$, $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{۱}{۵}\right\}$.

❋**تذکر مهم:** در یافتن دامنهٔ توابع نباید ضابطهٔ آنرا ساده کرد.

مثال: دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{x(x-۱)}{x}$ ب) $g(x)=\dfrac{\frac{x-۲}{x}}{\frac{x+۱}{x+۳}}$ پ) $h(x)=\dfrac{x-۳}{x+۱}\times\dfrac{x-۷}{x-۳}$ ت) $r(x)=\dfrac{۳}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{x}}$

حل: در هیچ‌کدام از توابع بالا برای یافتن دامنه، نباید ضابطهٔ آنها را ساده کرد بنابراین:

$$D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\quad,\quad D_g=\mathbb{R}-\{۰,-۱,-۳\}\quad,\quad D_h=\mathbb{R}-\{-۱,۳\}\quad,\quad D_r=\mathbb{R}-\{۰,-۲\}$$

مثال: دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x^{۲}-۲x+۵}$ را بدست آورید.

حل: $x^{۲}-۲x+۵=۰\Rightarrow\Delta=b^{۲}-۴ac=-۱۶<۰$، بنابراین مخرج فاقد ریشه است و دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد یعنی این تابع به ازای هر عدد حقیقی x معنی‌دار است.

مثال: اگر تابع $f(x)=\dfrac{۲}{x^{۲}-۳x-۲m}$ به ازای هر عدد حقیقی x معنی‌دار باشد، در اینصورت حدود m را بدست آورید.

حل: طبق فرض مسأله دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ است، بنابراین مخرج کسر فوق فاقد ریشه است یعنی:

$$\Delta<۰\Rightarrow ۹-۴(-۲m)<۰\Rightarrow ۹+۸m<۰\Rightarrow m<-\frac{۹}{۸}$$

مثال: دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x^{۲}-ax-۲a}$ برابر $\mathbb{R}-\{-۱,b\}$ است. مقادیر b,a رابدست آورید.

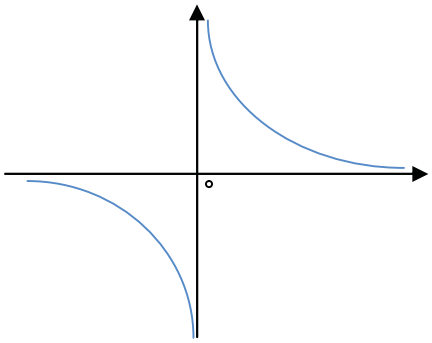
حل: $x=-۱$ ریشهٔ مخرج است بنابراین $(-۱)^{۲}-a(-۱)-۲a=۰\Rightarrow ۱+a-۲a=۰\Rightarrow a=۱$. از طرفی ریشهٔ دیگر مخرج $x=b$ است لذا: $x^{۲}-x-۲=۰\Rightarrow(x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۲,-۱\Rightarrow b=۱$.

مثال: دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x^{۲}-ax-۲b}$ برابر $\mathbb{R}-\{۲\}$ است. مقادیر b,a رابدست آورید.

حل: $x=-۱$ ریشهٔ مخرج است بنابراین $(-۱)^{۲}-a(-۱)-۲b=۰\Rightarrow ۱+a-۲b=۰\Rightarrow a-۲b=-۱$ از طرفی تنها ریشهٔ مخرج است لذا دلتای مخرج برابر صفر است و $x=-۱$ ریشهٔ مضاعف مخرج است یعنی: $-\dfrac{-a}{۲}=-۱\Rightarrow a=-۲$ و با جاگذاری مقدار آن در رابطهٔ $a-۲b=-۱$، مقدار b بدست می آید: $-۲-۲b=-۱\Rightarrow b=-\dfrac{۱}{۲}$.

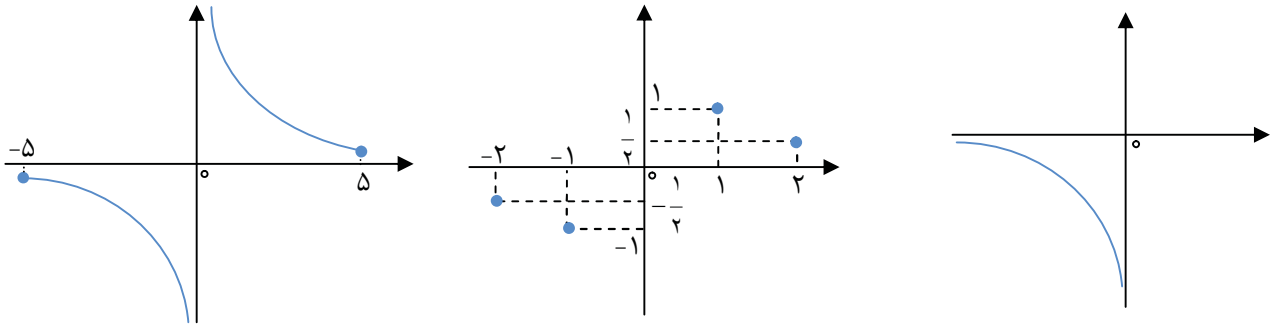
نکته از لحاظ هندسی، دامنهٔ تابع یعنی جائیکه نمودار تابع در آنجا رسم می‌شود. مثلا تابع گویای $y=\dfrac{۱}{x}$ را که به تابع هموگرافیک معروف است در نظر گیرید. دامنهٔ این تابع برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ است پس نمودار آن همه جا رسم می‌شود به جزء در راستای $x=۰$. (شکل صفحه بعد را ببینید).

* در تابع $y=\frac{۱}{x}$ با افزایش x، مقدار y کاهش میابد و برعکس با کاهش x مقدار y افزایش میابد. از طرفی اگر $x>۰$ باشد آنگاه $y>۰$ است و اگر $x<۰$ باشد در اینصورت $y<۰$ است لذا نمودار تابع در نواحی ۱ و ۳ رسم می‌شود.



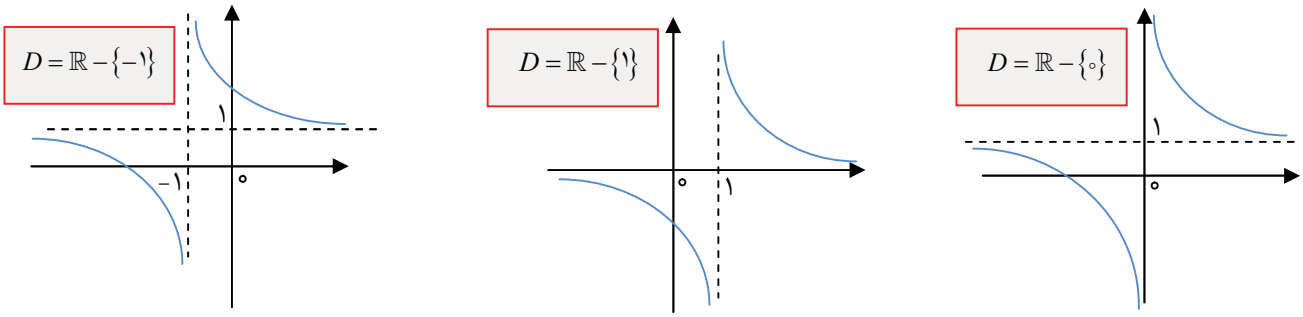
مثال: نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را در دامنه‌های متفاوت زیر رسم کنید.

الف) $D_y=(-\infty,۰)$ ب) $D_y=\{-۲,-۱,۱,۲\}$ پ) $D_y=[-۵,۵]-\{۰\}$



مثال: ابتدا دامنهٔ توابع زیر را یافته و سپس نمودار آنها را به کمک انتقال از روی نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ رسم کنید.

الف) $y=\frac{۱}{x}+۱$ ب) $y=\frac{۱}{x-۱}$ پ) $y=\frac{x+۲}{x+۱}$



برای قسمت (الف) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. برای قسمت (ب) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم و در نمودار قسمت(پ) داریم: $y=\frac{x+۲}{x+۱}=\frac{(x+۱)+۱}{(x+۱)}=\frac{(x+۱)}{(x+۱)}+\frac{۱}{(x+۱)}=\frac{۱}{x+۱}+۱$. یعنی نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به چپ و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

توابع رادیکالی: در این بخش تابع رادیکالی $f(x)=\sqrt{x}$ و نمودار آن‌را مورد بررسی قرار می‌دهیم. می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج نباید منفی باشد، بنابراین دامنهٔ این تابع برابر است با: $x\geq ۰\Rightarrow D_f=[۰,+\infty)$. در زیر دامنهٔ این تابع را در حالات مختلف بررسی می‌کنیم.

(۱) $\sqrt{f}\Rightarrow f\geq ۰$

(۲) $\dfrac{f}{\sqrt{g}}\Rightarrow g>۰$

(۳) $\dfrac{\sqrt{f}}{\sqrt{g}}\Rightarrow f\geq ۰\cap g>۰$

(۴) $\sqrt{\dfrac{f}{g}}\Rightarrow \dfrac{f}{g}\geq ۰$

(۵) $\dfrac{\sqrt{f}}{g}\Rightarrow f\geq ۰-\{x|g=۰\}$

(۶) $y=\sqrt[۳]{f}\Rightarrow D_y=D_f$

مثال: دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید.

(۱) $y=\sqrt{۲x-۱}$

(۲) $y=\dfrac{x-۱}{\sqrt{x^۲-۲x}}$

(۳) $y=\dfrac{\sqrt{x-۲}}{\sqrt{x-۵}}$

(۴) $y=\sqrt{\dfrac{x-۲}{x-۵}}$

(۵) $y=\dfrac{\sqrt{-x^۲-x+۲}}{x+۱}$

(۶) $y=\sqrt[۳]{x-\dfrac{۱}{x}}$

قبل از یافتن دامنهٔ این توابع، توجه کنید که:

نامعادلات درجهٔ اول با معلوم‌ومجهول کردن و نامعادلات درجه دوم، سوم و بالاتر و نیز نامعادلات کسری با تعیین علامت حل می‌شوند.

حل:

۱) $۲x-۱\geq ۰\Rightarrow ۲x\geq ۱\Rightarrow x\geq \frac{۱}{۲}\Rightarrow D_y=\left[\frac{۱}{۲},+\infty\right)$

۲) $\underbrace{x^۲-۲x}_{p}>۰\Rightarrow x(x-۲)=۰\Rightarrow x=۰,۲$

x		۰		۲	
p	$+$	۰	$-$	۰	$+$
	ج				ج

$\Rightarrow D_y=(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$

۳) $\begin{cases}x-۲\geq ۰\Rightarrow x\geq ۲\\ x-۵>۰\Rightarrow x>۵\end{cases}\overset{\cap}{\Rightarrow} D_y=(۵,+\infty)$

۴) $\underbrace{\frac{x-۲}{x-۵}}_{p} \geq ۰ \Rightarrow x=۲, x=۵$

x		۲		۵	
p	+	۰	-	ت	+
	ج				ج

$\Rightarrow D_y = (-\infty, ۲] \cup (۵, +\infty)$

۵) $\underbrace{-x^۲ - x + ۲}_{p} \geq ۰ \Rightarrow -x^۲ - x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱, -۲$

x		-۲		۱	
p	-	۰	+	۰	-
			ج		

$\Rightarrow D_y = [-۲, ۱] - \{-۱\}$

ریشهٔ مخرج

۶) برای یافتن دامنهٔ این تابع کافیست رادیکال را نادیده بگیریم و تنها دامنهٔ تابع داخل رادیکال را بیابیم. تابع داخل رادیکال یک تابع گویا است و دامنهٔ آن برابر همهٔ اعداد حقیقی غیر از ریشهٔ مخرج است یعنی: $D_y = \mathbb{R} - \{۰\}$

مثال: دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{۳ + \sqrt{۱ - x}}$ ب) $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ پ) $h(x) = \sqrt{x^۲ - x + ۱}$

ت) $r(x) = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}$ ث) $t(x) = \sqrt{-x^۲ + ۴x - ۴}$ ج) $w(x) = \sqrt{-x^۲ + x - ۴}$

حل: الف) $\begin{cases} ۱ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۱ \\ ۳ + \sqrt{۱ - x} \geq ۰ \end{cases}$ برقرار است. $\Rightarrow D_f = (-\infty, ۱]$

ب) $\begin{cases} x \geq ۰ \\ (x + \sqrt{x}) \geq ۰ \end{cases}$ برقرار است. $\Rightarrow D_g = [۰, +\infty)$

پ) $\underbrace{x^۲ - x + ۱}_{a>۰, \Delta<۰} \geq ۰ \Rightarrow D_h = \mathbb{R}$

ت) $x^۲ - ۴x + ۴ \geq ۰ \Rightarrow \underbrace{(x-۲)^۲ \geq ۰}_{\text{همواره برقرار است.}} \Rightarrow D_r = \mathbb{R}$

ث) $\underbrace{-x^۲ + ۴x - ۴}_{-(x-۲)^۲ \leq ۰} \geq ۰ \Rightarrow -(x-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow D_t = \{۲\}$

ج) $\underbrace{-x^۲ + x - ۴}_{a<۰, \Delta<۰} \geq ۰ \Rightarrow D_w = \phi$

*** یادآوری:** در تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ اگر:

الف) $a > ۰, \Delta < ۰$ باشد، آنگاه عبارت درجه دوم همواره مثبت است.

ب) $a < ۰, \Delta < ۰$ باشد، آنگاه عبارت درجه دوم همواره منفی است.

پ) $a > ۰, \Delta = ۰$ باشد، آنگاه عبارت درجه دوم مربع کامل است و نامنفی ایست یعنی بفرم $(.....\pm.....)^۲$ است.

ت) $a < ۰, \Delta = ۰$ باشد، آنگاه عبارت درجه دوم مربع کامل است و نامثبت است یعنی بفرم $-(.....\pm.....)^۲$ است.

مثال: دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

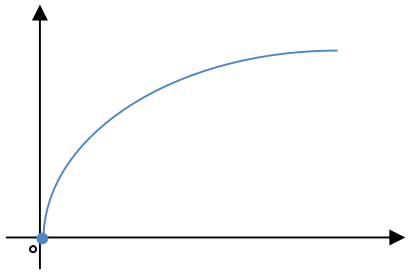
الف) $y=\sqrt{x^{۲}}$ ب) $y=\sqrt{x}^{۲}$ پ) $y=\sqrt{-x^{۲}(x-۳)^{۲}}$ ت) $y=\sqrt{x}(\sqrt{x-۱}+۲)$

حل: الف) $x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow D=\mathbb{R}$ ب) $x\geq ۰ \Rightarrow D=[۰,+\infty)$

پ) $-x^{۲}(x-۳)^{۲}\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}(x-۳)^{۲}=۰ \Rightarrow x=۰,۳ \Rightarrow D=\{۰,۳\}$ ت) $\begin{cases} x\geq ۰ \\ x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱ \end{cases} \overset{\cap}{\Rightarrow} D=[۱,+\infty)$

***یادمان باشد اگر تابع اصلی از جمع و تفریق یا ضرب و تقسیم چندین تابع مختلف تشکیل شده باشد، دامنهٔ هرکدام را یافته و اشتراک می‌گیریم.**

نکته نمودار تابع رادیکالی $f(x)=\sqrt{x}$ بصورت زیر است، همانطور که از نمودار معلوم است، نمودار تابع در دامنهٔ خود یعنی در بازهٔ $[۰,+\infty)$ رسم شده.

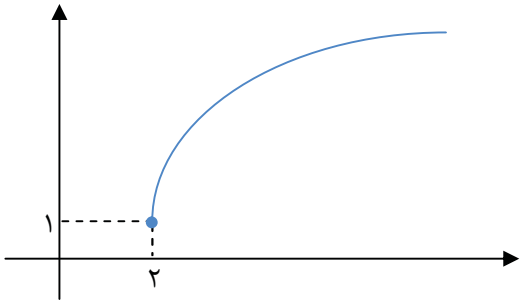


مثال: ابتدا دامنهٔ توابع زیر را یافته و سپس به کمک انتقال نمودار آنها را رسم کنید.

الف) $y=\sqrt{x-۲}+۱$ ب) $y=۲-\sqrt{x+۱}$

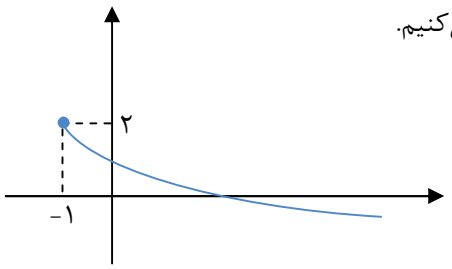
حل: الف) $x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲$, $D=[۲,+\infty)$

نمودار $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به راست و یک واحد هم به بالا منتقل می‌کنیم.



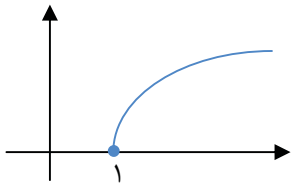
ب) $x+۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۱$, $D=[-۱,+\infty)$

نمودار $y=\sqrt{x}$ را ابتدا یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم سپس نسبت به محور xها قرینه کرده و در ادامه دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

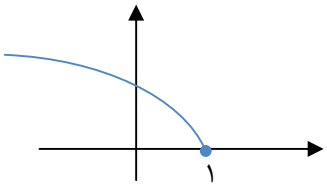


مثال: نمودار تابع $y=\sqrt{۱-x}$ کدامیک از موارد زیر است؟

الف)



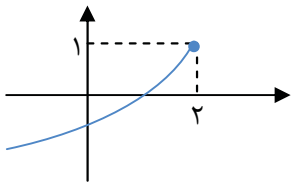
ب)



حل: با توجه به دامنهٔ تابع داده شده؛ $D=(-\infty,۱] \Leftarrow x\le ۱ \Leftarrow ۱-x\ge ۰$ ، نمودار تابع باید در بازهٔ $(-\infty,۱]$ رسم شود بنابراین نمودار گزینهٔ (ب) درست است.

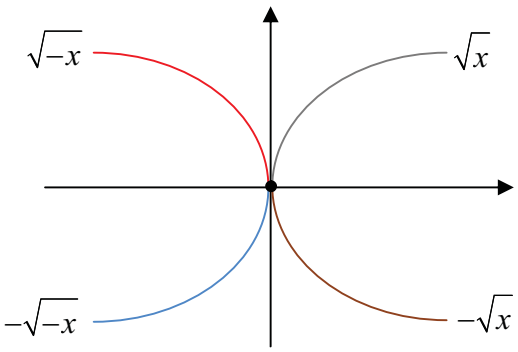
مثال: نمودار تابع $y=۱-\sqrt{۲-x}$ را رسم کنید.

حل: دامنهٔ تابع برابر است با: $D=(-\infty,۲] \Leftarrow x\le ۲ \Leftarrow ۲-x\ge ۰$. بنابراین ابتدا نمودار $\sqrt{۲-x}$ را رسم می‌کنیم سپس آنرا نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم و در آخر یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم.



تاکید می‌کنیم وقتی در داخل رادیکال ضریب x منفی باشد، باید نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم که این موضوع در سال بعد مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

در زیر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در چهار حالت مختلف رسم شده است آنها را بخاطر بسپارید.

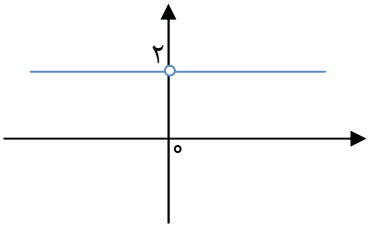


نکته در رسم نمودار توابع می‌توان ضابطهٔ آنها را ساده کرد و نمودار ضابطهٔ ساده شده را رسم کرد ولی این نمودار را باید در دامنهٔ اصلی خود رسم کنیم و نه در دامنهٔ ضابطهٔ ساده شده.

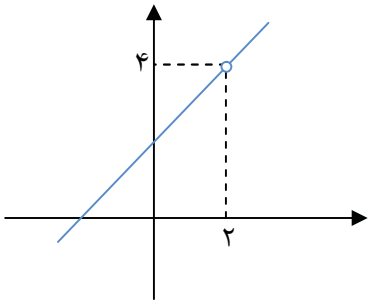
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\frac{۲x}{x}$ ب) $g(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}$ پ) $h(x)=\sqrt{x}^۲$ ت) $t(x)=\sqrt{x^۲}$

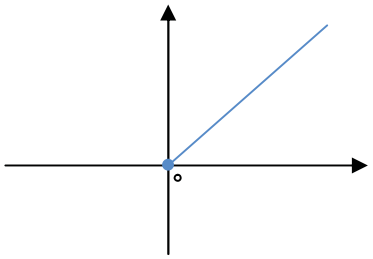
حل: الف) $f(x)=\frac{۲x}{x}=۲ \quad , \quad D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$



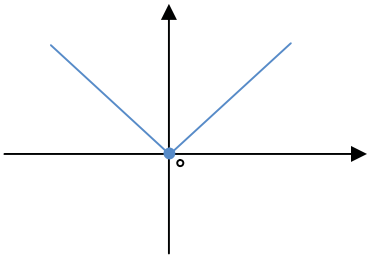
ب) $g(x)=\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}=x+۲ \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$



پ) $h(x)=\sqrt{x}^{۲}=x \quad , \quad D_h=[۰,+\infty)$



ت) $t(x)=\sqrt{x^{۲}}=|x| \quad , \quad D_t=\mathbb{R}$



❋ **تذکر مهم:** همواره دامنهٔ تابع را قبل از ساده کردن ضابطهٔ آن محاسبه می‌کنیم.

تساوی دو تابع: دو تابع f و g را مساوی گویند هرگاه:

الف) دامنهٔ آنها باهم برابر باشند. $\left(D_f=D_g\right)$

ب) به ازای هر x در دامنهٔ یکسان، مقادیر دو تابع باهم برابر باشند.(بعبارتی ضابطهٔ یکسان داشته باشند. $\left(f(x)=g(x)\right)$)

❋ **تذکر:** اگر دو تابع باهم برابر باشند، در اینصورت نمودار آنها دقیقا منطبق برهم خواهند بود، یعنی دو نمودار عین هم خواهد بود و در یک بازهٔ یکسان رسم می‌شوند.

❋ **تذکر:** اگر دو تابع برابر هم باشند، در اینصورت دامنه و برد آنها نظیر به نظیر باهم برابر خواهند بود. ولی عکس این مطلب همواره درست نیست یعنی اگر دامنه دو تابع و نیز برد آنها برابرهم باشند، نمی‌توان نتیجه گرفت که این دو تابع مساوی هم‌اند.

بعنوان مثال: دامنه و برد دو تابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=|x|$ برابر هم هستند ولی این دو تابع مساوی هم نیستند.

$$D_f = D_g = \mathbb{R} \quad , \quad R_f = R_g = [۰,+\infty)$$

مثال: کدام جفت توابع باهم برابرند؟

الف) $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{x^{۲}-x}{x-۱}$

ب) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+۱}}$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+۱}}$

پ) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^{۲}}$

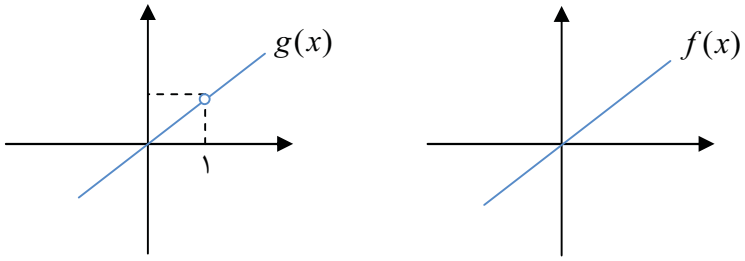
ت) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x}^{۲}$

ث) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$, $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

ج) $f(x)=\begin{cases}۱ & x\geq ۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$, $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

حل: الف) $D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$, $g(x)=\dfrac{x(x-۱)}{x-۱}=x$

با اینکه ضابطهٔ هر دو تابع یکی است ولی چون دامنهٔ یکسان ندارند پس مساوی هم نیستند. (نمودارهای دو تابع را نگاه کنید که منطبق برهم نیستند.)

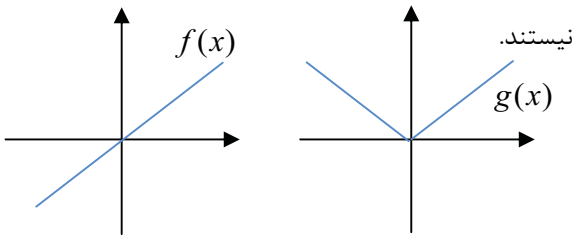


ب) $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+۱}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+۱}}, D_f:\begin{cases}x\geq ۰\\ x+۱\geq ۰\Rightarrow x\geq -۱\end{cases}\xrightarrow{\cap}[۰,+\infty), D_g:\dfrac{x}{x+۱}\geq ۰\overset{\text{تعیین علامت}}{\Rightarrow}(-\infty,-۱]\cup[۰,+\infty)$

با اینکه ضابطهٔ هر دو تابع یکی است ولی چون دامنهٔ یکسان ندارند پس مساوی هم نیستند.

پ) $D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}$, $\sqrt{x^{۲}}=|x|\neq x$

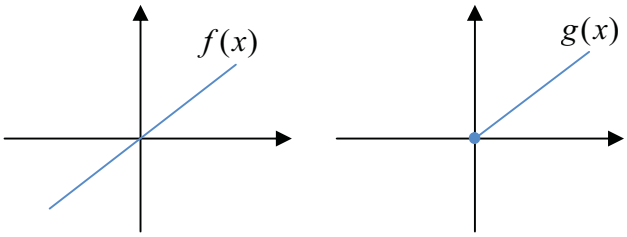
دامنهٔ هر دو تابع برابرند ولی ضابطه یکسان ندارند لذا دو تابع مساوی هم نیستند.
نمودارهای دو تابع نیز منطبق برهم نیستند.



ت) $D_g=[0,+\infty)\ ,\ D_f=\mathbb{R}\ ,\ \sqrt{x}^{2}=x$

با اینکه ضابطهٔ هر دو تابع یکی است ولی چون دامنهٔ یکسان ندارند پس مساوی هم نیستند.

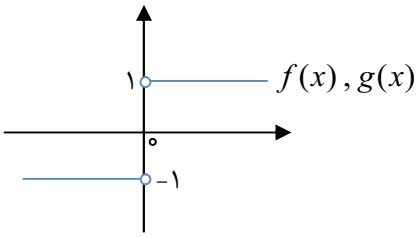
نمودارهای دو تابع نیز منطبق برهم نیستند.



ث) $f(x)=g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{0\}\ ,\ D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

هم ضابطه‌ها و هم دامنه‌ها باهم برابرند لذا دو تابع مساوی هم هستند.

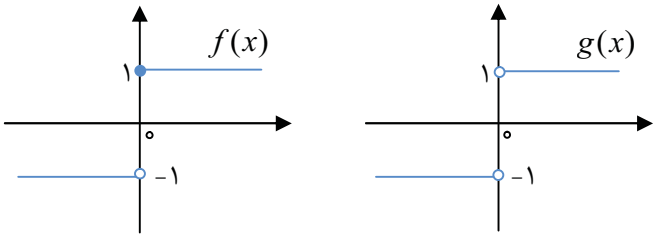
نمودارهای آنها نیز دقیقا منطبق برهم‌اند.



ج) $D_g=\mathbb{R}-\{0\}\ ,\ D_f=\mathbb{R}$

گرچه ضابطهٔ هر دو تابع برابر است ولی دامنهٔ یکسان ندارند لذا دو تابع مساوی هم نیستند.

نمودارهای دو تابع عین هم نیستند.

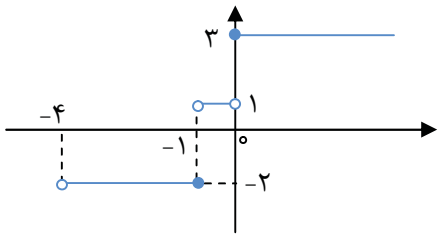


توابع پله‌ای و تابع جزءصحیح

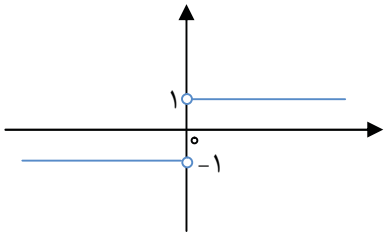
هر تابع چندضابطه‌ای که ضابطه‌های آن اعداد حقیقی باشند، تابع پله‌ای نام دارد. نمودار این تابع حالت پلکانی دارد و به این دلیل نام پله‌ای بر آن گذارده شده.

مثال: توابع زیر همگی تابع پله‌ای هستند.

الف) $f(x)=\begin{cases}3 & x\geq 0\\ 1 & -1<x<0\\ -2 & -4<x\leq -1\end{cases}$



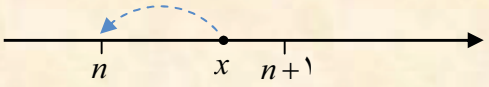
ب) $g(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$



یکی از توابع مهم پله‌ای تابع جزءصحیح نام دارد. تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از آن عدد را نسبت می‌دهد. ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود.

$n \le x < n+1 \Rightarrow [x]=n$

n و $n+1$ دو عدد صحیح متوالی هستند.



همانطور که دیدیم جزءصحیح هر عدد حقیقی مانند x برابر است با بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x. یعنی برای اعداد غیرصحیح، برابر با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد است و برای اعداد صحیح، خودش است.

مثال: $[۰]=۰$, $[۹]=۹$, $[-۷]=-۷$, $[-\pi]=-۴$, $[-۴/۵۲]=-۵$, $[\sqrt{۱۰}]=۳$, $\left[\frac{۲۵}{۶}\right]=۴$, $[۲/۷۵]=۲$

مثال: بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از $\sqrt[۳]{۱۰۰}$ را بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases}\sqrt[۳]{۶۴}=۴\\ \sqrt[۳]{۱۲۵}=۵\end{cases} \Rightarrow ۴<\sqrt[۳]{۱۰۰}<۵ \Rightarrow \left[\sqrt[۳]{۱۰۰}\right]=۴$$

مثال: اگر $۲^x=۱۰۰$ آنگاه $[x]$ را بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases}۲^۶=۶۴\\ ۲^۷=۱۲۸\end{cases} \Rightarrow ۶<x<۷ \Rightarrow [x]=۶$$

مثال: حاصل $[\sqrt{۱}]+[\sqrt{۲}]+[\sqrt{۳}]+\ldots+[\sqrt{۱۰}]$ را بدست آورید.

حل:

$$(۱+۱+۱)+(۲+۲+۲+۲+۲)+(۳+۳)=۱۹$$

مثال: حاصل $\left[(۱-\sqrt{۲})^{۱۴۰۳}\right]+\left[(۱-\sqrt{۲})^{۱۴۰۴}\right]$ را بدست آورید.

حل:

$$-۱<(۱-\sqrt{۲})<۰ \Rightarrow \begin{cases}۰\le(۱-\sqrt{۲})^{۱۴۰۴}\le۱ \Rightarrow \left[(۱-\sqrt{۲})^{۱۴۰۴}\right]=۰\\ -۱\le(۱-\sqrt{۲})^{۱۴۰۳}\le۰ \Rightarrow \left[(۱-\sqrt{۲})^{۱۴۰۳}\right]=-۱\end{cases} \Rightarrow \left[(۱-\sqrt{۲})^{۱۴۰۴}\right]+\left[(۱-\sqrt{۲})^{۱۴۰۳}\right]=-۱$$

مثال: حاصل عبارت $\left[\frac{۲x}{x-۱}\right]+[۲x]+[-x]$ به ازای $x=\frac{۵}{۳}$ را بیابید.

حل:

$$\left[-\frac{۵}{۳}\right]+\left[\frac{۱۰}{۳}\right]+[۵]=-۲+۳+۵=۶$$

مثال: معادلات مقابل را حل کنید.

الف) $[۲x-۱]=-۵$ ب) $۲[x]-۵=۰$ پ) $x-[x]=۰$

حل: الف) $[۲x-۱]=-۵\Rightarrow -۵\le ۲x-۱<-۴\Rightarrow -۴\le ۲x<-۳\Rightarrow -۲\le x<\frac{-۳}{۲}$

ب) $[x]=۲/۵\Rightarrow ۲[x]-۵=۰$، این معادله فاقد جواب است زیرا مقدار جزءصحیح یک عدد هیچگاه نمی‌تواند یک عدد غیرصحیح باشد.

نکته: به ازای هر عدد حقیقی x، همواره مقدار $[x]$ عددی صحیح است.

پ) $x-[x]=۰\Rightarrow [x]=x\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

نکته: $[x]=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

مثال: معادلهٔ $۲[x]^۲+۹[x]+۱۰=۰$ را حل کنید.

حل: برای حل از تغییرمتغیر $[x]=t$ استفاده می‌کنیم.

$$۲t^۲+۹t+۱۰=۰\Rightarrow \Delta=۸۱-۸۰=۱\ ,\ \begin{cases} t_۱=\frac{-۹+۱}{۴}=-۲=[x]\Rightarrow -۲\le x\le -۱ \\ t_۲=\frac{-۹-۱}{۴}=\underbrace{-۲/۵=[x]}_{\text{غ ق ق}} \end{cases}$$

مثال: دامنهٔ توابع زیر رابدست آورید.

الف) $f(x)=[x]$ ب) $g(x)=\frac{۱}{۲[x]-۶}$

پ) $h(x)=\frac{۱}{[۲x]-۶}$ ت) $t(x)=\frac{۱}{۳[x]-۵}$

حل: الف) $D_f=\mathbb{R}$

نکته: دامنهٔ تابع $f(x)=[x]$ برابر $\mathbb{R}$ است و برد آن برابر $\mathbb{Z}$ (مجموعه اعداد صحیح) است.

ب) $۲[x]-۶=۰\Rightarrow [x]=۳\Rightarrow ۳\le x<۴\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-[۳,۴)$

پ) $[۲x]-۶=۰\Rightarrow[۲x]=۶\Rightarrow ۶\le ۲x<۷\Rightarrow ۳\le x<\frac{۷}{۲}\Rightarrow D_h=\mathbb{R}-[۳,۳/۵)$

نکته: $[nx]\neq n[x]$ بعنوان مثال در حالت کلی: $[-x]\neq -[x]$, $[۲x]\neq ۲[x]$

ت) $۳[x]-۵=۰\Rightarrow ۳[x]=۵\Rightarrow \underbrace{[x]=\frac{۵}{۳}}_{\text{غ ق ق}}\Rightarrow D_t=\mathbb{R}$

نکته: $[x\pm n]=[x]\pm n$ بشرطی که $n\in\mathbb{Z}$ باشد. بعنوان مثال:

$[۵-x]=۵+[-x]$, $[a+۲/۵]\neq[a]+۲/۵$, $[a+۳]=[a]+۳$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x+\frac{۳}{۲}\right]=۳$

ب) $\left[[x]+\frac{۳}{۲}\right]=۲$

حل: الف)

$$\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x+\frac{۳}{۲}\right]=۳\Rightarrow\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x+\frac{۱}{۲}+۱\right]=۳\Rightarrow\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+۱=۳\Rightarrow\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=۲\Rightarrow$$

$$۲\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=۲\Rightarrow\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=۱\Rightarrow\Rightarrow ۱\le x+\frac{۱}{۲}<۲\Rightarrow ۰/۵\le x<۱/۵$$

ب) $\left[\underbrace{[x]}_{\in\mathbb{Z}}+\frac{۳}{۲}\right]=۲\Rightarrow[x]+\left[\frac{۳}{۲}\right]=۲\Rightarrow[x]+۱=۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow ۱\le x<۲$

نکته:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

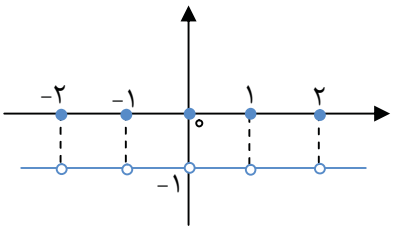
بعنوان مثال:

$$\begin{cases}[۲]+[-۲]=۲-۲=۰\\ [۲/۵]+[-۲/۵]=۲-۳=-۱\end{cases}$$

مثال: ابتدا نشان دهید تابع $f(x)=[x]+[-x]$ یک تابع پله‌ای است و سپس دامنه و برد آنرا تعیین کنید و در ادامه نمودار آنرا نیز رسم کنید.

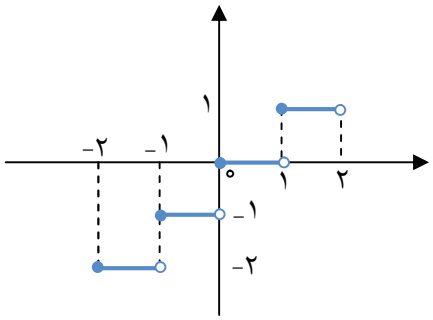
حل: می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، لذا تابع $f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ پله‌ای با دامنهٔ $D_f=\mathbb{R}$ و برد $R_f=\{۰,-۱\}$ است.

نمودار این تابع بصورت زیر است:



رسم نمودار تابع جزءصحیح: همانطور که قبلا نیز گفتیم این تابع یک تابع پله‌ای است و لذا برای رسم آن کافیست تابع را به چند ضابطه‌ای تبدیل کنیم.

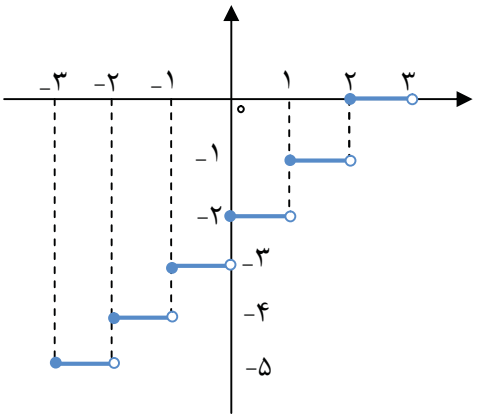
$$f(x)=[x]=\begin{cases}\vdots & \\ -۲ & -۲\le x<-۱\\ -۱ & -۱\le x<۰\\ ۰ & ۰\le x<۱\\ ۱ & ۱\le x<۲\\ ۲ & ۲\le x<۳\\ \vdots & \end{cases}$$



مثال: نمودار تابع $f(x)=[x-۲]$ و دامنهٔ $D_f=[-۳,۳)$ را رسم کنید.

کافیست تابع را به چندضابطه‌ای تبدیل کنیم.

$$f(x)=[x-۲]=[x]-۲=\begin{cases}\vdots & \\ -۳-۲=-۵ & -۳\le x<-۲\\ -۲-۲=-۴ & -۲\le x<-۱\\ -۱-۲=-۳ & -۱\le x<۰\\ ۰-۲=-۲ & ۰\le x<۱\\ ۱-۲=-۱ & ۱\le x<۲\\ ۲-۲=۰ & ۲\le x<۳\\ \vdots & \end{cases}$$

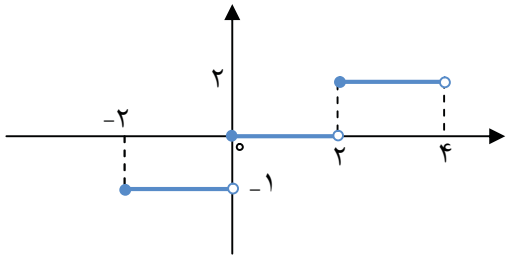


مثال: نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{x}{۲}\right]$ و دامنهٔ $D_f=[-۲,۴)$ را رسم کنید.

$$-۲\le x<۴\Rightarrow -۱\le \frac{x}{۲}<۲$$

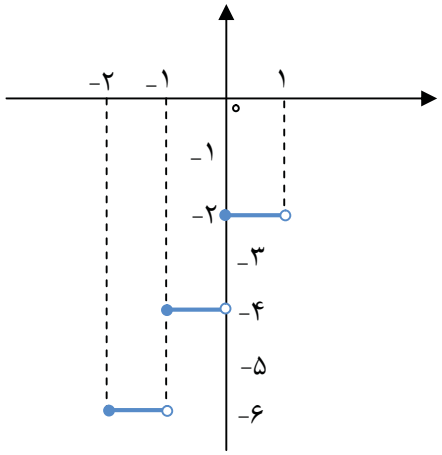
هر بار با قرار دادن $\frac{x}{۲}$ بین دو عدد صحیح متوالی، تابع را به یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم و نمودار آنرا رسم می‌کنیم.

$$f(x)=\left[\frac{x}{۲}\right]=\begin{cases}-۱ & -۱\le\frac{x}{۲}<۰ \quad , \quad -۲\le x<۰\\ ۰ & ۰\le\frac{x}{۲}<۱ \quad , \quad ۰\le x<۲\\ ۱ & ۱\le\frac{x}{۲}<۲ \quad , \quad ۲\le x<۴\end{cases}$$

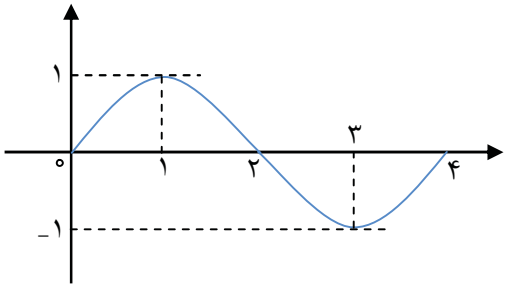


مثال: نمودار تابع $f(x)=۲[x-۱]$, $-۲\le x<۱$ را رسم کنید.

$$f(x)=۲[x-۱]=۲[x]-۲=\begin{cases}-۶ & -۲\le x<-۱\\ -۴ & -۱\le x<۰\\ -۲ & ۰\le x<۱\end{cases}$$

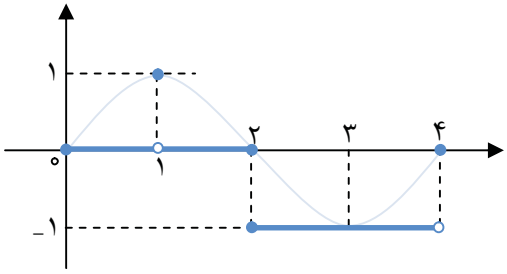


مثال: شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ در دامنهٔ $[۰,۴]$ است. نمودار تابع $y=[f(x)]$ را در این بازه رسم کنید.



حل:

$$\begin{cases}۰\le x\le ۲, x\ne ۱\Rightarrow ۰\le f(x)<۱\Rightarrow y=[f(x)]=۰\\ ۲<x<۴\Rightarrow -۱\le f(x)<۰\Rightarrow y=[f(x)]=-۱\\ x=۱\Rightarrow f(x)=۱, y=[f(x)]=[۱]=۱\\ x=۴\Rightarrow f(x)=۰, y=[f(x)]=[۰]=۰\end{cases}$$



نمونه سوالات تکمیلی درس اوّل با پاسخ تشریحی

۱- کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟

الف) تابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}+۱}$ به ازای همهٔ مقادیر حقیقی x دارای معنی است.

ب) نمودار تابع $f(x)=۲-\sqrt{x-۱}$ از ربع چهارم عبور نمی‌کند.

پ) اگر دامنه و برد دو تابع باهم برابر باشند آنگاه دو تابع مساوی هم‌اند.

ت) اگر دو تابع مساوی هم باشند آنگاه دامنه و برد آنها باهم برابرند.

ث) برد تابع $y=[x]$ برابر با تمام اعداد حقیقی است.

پاسخ: الف) درست ب) درست پ) نادرست ت) درست ث) نادرست

۲- جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

الف) مقدار عبارت $\left[\frac{۳x-۱}{۲}\right]$ به ازای $x=-\frac{۴}{۵}$ برابر ..... است.

ب) دو تابع $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^{۲}-۴}{x+۲} & x\neq -۲\\ a & x=-۲\end{cases}$ برابرند هرگاه اگر مقدار a برابر ..... باشد.

پ) دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}$ برابر با ..... است.

ت) مجموعه جواب معادلهٔ $[x]+[-x]=-۱$ برابر با ..... است.

پاسخ: الف) ۲- ب) ۴- پ) مجموعه اعداد حقیقی ت) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

۳- بررسی کنید کدام جفت توابع باهم برابرند؟

الف) $f(x)=x|x+۱|, g(x)=|x^{۲}+x|$

ب) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^{۲}+۱}}, g(x)=\sqrt{\frac{x}{x^{۲}+۱}}$

پ) $f(x)=\sqrt{x}.\sqrt{x+۱}, g(x)=\sqrt{x^{۲}+x}$

ت) $f(x)=\frac{x^{۳}+x}{x^{۲}+۱}, g(x)=x$

پاسخ: الف) $D_f=D_g=\mathbb{R}$ ولی ضابطهٔ برابر ندارند زیرا: $|x^{۲}+x|=|x(x+۱)|=|x||x+۱|\neq x|x+۱|$.

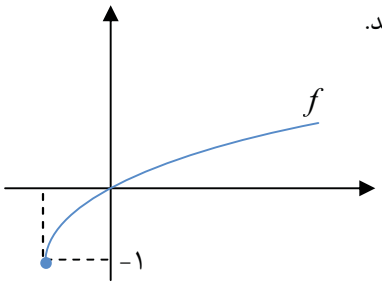
ب) دو تابع برابرند زیرا: $\sqrt{\frac{x}{x^{۲}+۱}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ و $D_f=D_g=[۰,+\infty)$.

پ) ضابطهٔ دو تابع باهم برابر است ولی دامنهٔ یکسان ندارند زیرا:

$$D_f=[۰,+\infty)\cap[-۱,+\infty)=[۰,+\infty), D_g=(-\infty,-۱]\cup[۰,+\infty)$$

ت) دو تابع برابرند زیرا: $\frac{x(x^{۲}+۱)}{x^{۲}+۱}=x$ و $D_f=D_g=\mathbb{R}$.

۴- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+a}+b$ است مقادیر a و b را بدست آورید.



پاسخ: $b=-۱$ است زیرا نمودار $\sqrt{x}$ پس از انتقال به چپ، یک واحد به پایین منتقل شده. از طرفی نمودار از مبدأ مختصات عبور می‌کند پس:

$$f(۰)=۰\Rightarrow \sqrt{۰+a}-۱=۰\Rightarrow \sqrt{a}=۱\Rightarrow a=۱$$

۵- کدامیک از تساوی‌های زیر همواره برقرار است؟([ ] نماد جزءصحیح است.)

الف) $[۲x]=۲[x]$ ب) $[۵-x]=۵-[x]$ پ) $[x+[x]]=۲[x]$ ت) $[x]+[-x]=۰$

پاسخ: با توجه به مباحث خوانده شده، تنها گزینهٔ (پ) برقرار است و سایر گزینه‌ها نمی‌توانند همواره درست باشند.

۶- مجموعه جواب نامعادلهٔ $-\sqrt{۲}\le [x]<۱$ را بدست آورید.

پاسخ: با توجه به اینکه $[x]$ همواره یک مقدار صحیح است لذا از نامساوی داده شده نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases}[x]=-۱\Rightarrow -۱\le x<۰\\ \text{یا}\\ [x]=۰\Rightarrow ۰\le x<۱\end{cases}\xrightarrow{\cup}\Rightarrow[-۱,۱)$$

۷- دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{x+a}+b$ هر دو برابر $[-۲,+\infty)$ می‌باشند. مقادیر a,b را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases}x+a\ge ۰\Rightarrow x\ge -a\Rightarrow -a=-۲\Rightarrow a=۲\\ \sqrt{x+a}\ge ۰\Rightarrow \sqrt{x+a}+b\ge b\Rightarrow b=-۲\end{cases}$$

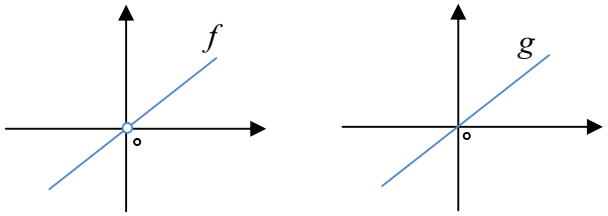
۸- برای دو تابع $f(x)=\frac{x^{۲}}{x}$ و $g(x)=x$، چند مورد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

الف) دامنه دو تابع باهم برابرند. ب) نمودارهای دو تابع منطبق بر هم هستند.

پ) برد دو تابع باهم برابرند. ت) به ازای مقادیری از x که هر دو تابع در آن تعریف شده؛ $f(x)=g(x)$.

پاسخ: $D_g=\mathbb{R}$, $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ بنابراین دو تابع نمی‌توانند باهم برابر باشند و نمودارهای آنها منطبق برهم نمی‌شوند.

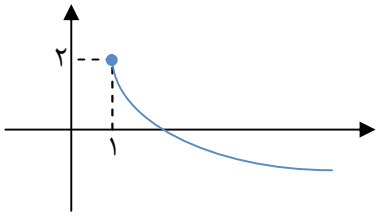
$R_g=\mathbb{R}$, $R_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ پس برد آنها نیز برابر هم نیستند. و تنها گزینهٔ (ت) درست است.



۹- نمودار تابع $f(x)=۲-\sqrt{x-۱}$ را به کمک انتقال از روی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید و مراحل رسم را شرح دهید و سپس دامنه و برد آنرا نیز تعیین کنید.

پاسخ: ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به راست و سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده و در آخر دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

$D_f=[۱,+\infty)\ ,\ R_f=(-\infty,۲]$



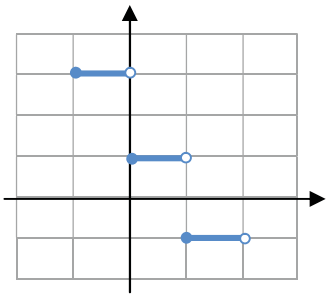
۱۰- نمودار توابع زیر را در دامنه‌های داده شده رسم کنید.

الف) $f(x)=۱-۲[x]\ ,\ x\in[-۱,۲)$

ب) $g(x)=[۱-x]\ ,\ x\in(-۲,۱]$

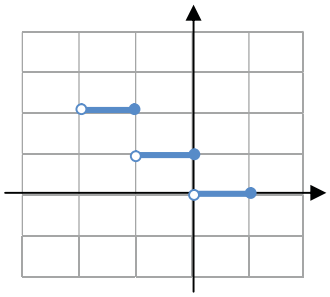
پاسخ: الف)

$$f(x)=۱-۲[x]=\begin{cases}۳ & -۱\le x<۰\\ ۱ & ۰\le x<۱\\ -۱ & ۱\le x<۲\end{cases}$$



ب)

$$g(x)=[۱-x]=۱+[-x]=\begin{cases}۲ & -۲<x\le -۱\Rightarrow ۲>-x\ge ۱\\ ۱ & -۱<x\le ۰\Rightarrow ۱>-x\ge ۰\\ ۰ & ۰<x\le ۱\Rightarrow ۰>-x\ge -۱\end{cases}$$



---

* **۱۱**- دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{۲}-\frac{x}{x+۱}}$

ب) $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲-۲x+۱}}$

پاسخ: الف)

$$\begin{cases}\frac{۱}{x}: x=۰\\ \frac{x}{x+۱}: x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\\ \frac{۱}{۲}-\frac{x}{x+۱}=۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{x}{x+۱}\Rightarrow x+۱=۲x\Rightarrow x=۱\end{cases}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰,-۱,۱\}$$

ب) $x^۲-۲x+۱>۰\Rightarrow (x-۱)(x-۱)=(x-۱)^۲>۰\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$

---

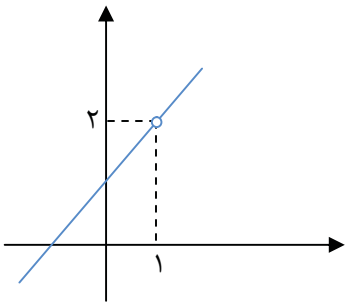
* **۱۲**- توابع $f(x)=\dfrac{x+a}{x^۲+bx+c}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x-۱}$ باهم برابرند. مقادیر c,b,a را بدست آورید.

پاسخ: $D_g = \mathbb{R} - \{۱\}$ است پس باید دامنهٔ f نیز برابر همین باشد. یعنی $x = ۱$ ریشهٔ مخرج است و تنها ریشهٔ مخرج است. لذا:

$۱ + b + c = ۰ , -\frac{b}{۲} = ۱ \Rightarrow b = -۲, c = ۱$. داریم:

$$f(x) = \frac{x+a}{x^۲ - ۲x + ۱} = \frac{x+a}{(x-۱)^۲} = \frac{۱}{x-۱} \Rightarrow a = -۱$$

۱۳*- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \frac{x^۲ - a}{x+b}$ است. مقادیر b, a را بدست آورید.



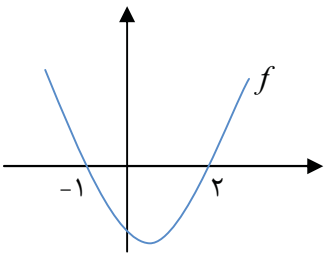
پاسخ: طبق نمودار $x = ۱$ در دامنهٔ تابع نیست و چون تابع گویاست پس $x = ۱$ ریشهٔ مخرج است لذا: $۱ + b = ۰ \Rightarrow b = -۱$.

ضابطهٔ ساده شده طبق نمودار، یک خط است. این زمانی رخ می‌دهد که صورت کسر بر مخرج آن بخش‌پذیر باشد بعبارتی یکی از عوامل در تجزیهٔ صورت، $x - ۱$ باشد.

با این توضیحات داریم:

$$x^۲ - a = (x-۱)(x+a) \ , \ f(x) = \frac{(x-۱)(x+a)}{(x-۱)} = (x+a) \Rightarrow ۱ + a = ۲ \Rightarrow a = ۱$$

۱۴*- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ است . دامنهٔ تابع $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x}}$ را بدست آورید.



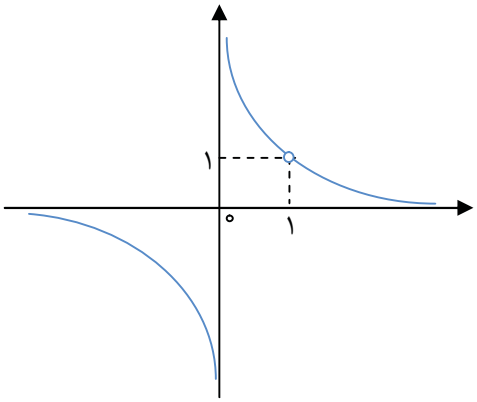
پاسخ:

$$\frac{f(x)}{x} \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq ۰, x > ۰ \Rightarrow (-\infty, -۱] \cup [۲, +\infty) \ \cap \ (۰, +\infty) = [۲, +\infty) \\ \cup \\ f(x) \leq ۰, x < ۰ \Rightarrow [-۱, ۲] \ \cap \ (-\infty, ۰) = [-۱, ۰) \end{cases} \overset{\cup}{\Rightarrow} [-۱, ۰) \cup [۲, +\infty)$$

۱۵*- نمودار تابع $f(x) = \frac{x-۱}{x^۲ - x}$ را رسم کنید.

پاسخ:

$$f(x) = \frac{x-۱}{x^۲ - x} = \frac{x-۱}{x(x-۱)} = \frac{۱}{x} \ , \ D_f = \mathbb{R} - \{۰, ۱\}$$



❊ درس دوّم: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک

وارون یک تابع: فرض کنید $y=f(x)$ یک تابع دلخواه باشد که نشان می‌دهد چگونه می‌توان با در دست داشتن متغیر x به متغیر y رسید. (y بر حسب x است.) مثلا تابع $y=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ را در نظر گیرید که رابطه بین درجه سانتی‌گراد(x) و فارنهایت (y) را نشان می‌دهد. یعنی با در دست داشتن مقدار درجهٔ یک جسم بر حسب سانتی‌گراد(x)، می‌توان اندازهٔ درجهٔ آنرا بر حسب فارنهایت (y)، بدست آورد. ولی گاهی اوقات لازم می‌شود که از مقدار y به مقدار x برسیم یعنی رابطه‌ای بیابیم که x را بر حسب y نشان دهد. رابطه‌ای که x را بر حسب y نشان دهد، $f^{-۱}$ می باشد و به آن وارون تابع f گویند. یعنی $x=f^{-۱}(y)$ رابطه ایست که x را بر حسب y نشان می‌دهد. بعنوان نمونه در مثال بالا:

$$y=\frac{۹}{۵}x+۳۲ \Rightarrow y-۳۲=\frac{۹}{۵}x \Rightarrow x=\underbrace{\frac{۵}{۹}(y-۳۲)}_{f^{-۱}(y)}$$

که نشان می‌دهد چگونه می‌توان با در دست داشتن درجه یک جسم برحسب فارنهایت، می‌توان درجه آنرا برحسب سانتی‌گراد بدست آورد.

اگر نمایش تابع، برحسب زوج‌های مرتب باشد، مثلا $f=\{(-۱,۲),(۴,۵),(۳,۰),(۷,۷),(۰,۳)\}$، در اینصورت با جابجا کردن مولفه‌های اول و دوم در هر زوج مرتب، رابطه‌ای که بدست می‌آید همان $f^{-۱}$ (وارون تابع f) می‌باشد. در این مثال:
$f^{-۱}=\{(۲,-۱),(۵,۴),(۰,۳),(۷,۷),(۳,۰)\}$.

مثال: وارون تابع $g=\{(۲,۴),(-۵,۳),(۰,۲),(۶,۴)\}$ را بدست آورید.

حل: $g^{-۱}=\{(۴,۲),(۳,-۵),(۲,۰),(۴,۶)\}$

❊ **تذکر مهم:** وارون یک تابع ممکن است خود یک تابع نباشد. مثلا در مثال بالا، وارون تابع g، خود تابع نیست. بنابراین برای هر تابع، همواره وارون وجود دارد. حال اگر وارون یک تابع، خود نیز تابع باشد، گویند تابع یک‌به‌یک است و اگر وارونش تابع نباشد، آن تابع غیر یک‌به‌یک خواهد بود.

در مثال‌های بالا f تابعی یک‌به‌یک است (زیرا وارونش تابع است) ولی g تابع یک‌به‌یک نیست. (زیرا وارونش، تابع نیست)

تعریف تابع یک‌به‌یک: تابع f را یک‌به‌یک گویند هرگاه هیچ دو زوج مرتب در آن موجود نباشد که دارای مولفه‌های دوم برابر باشند و اگر مولفه‌های دوم برخی از زوج مرتب‌ها باهم برابر باشد باید مولفه‌های اول آنها هم برابر باشد تا یک‌به‌یک شود، در غیر اینصورت، تابع یک‌به‌یک نخواهد بود.

مثال: کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟

الف) وارون هر تابع یک‌به‌یک، خود یک تابع است. (درست)

ب) همهٔ توابع دارای وارون هستند. (درست)

پ) اگر وارون یک تابع، خود تابع نباشد، آن تابع غیر یک‌به‌یک است. (درست)

ت) توابع ثابت یک‌به‌یک هستند. (نادرست)

مثال: جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.

الف) به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع ..... می‌گوییم.

ب) وارون تابع f، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مولفه‌های ..... تکراری وجود نداشته باشد.

پ) اگر f یک تابع باشد و $f(۲)=-۳$، آنگاه مقدار $f^{-۱}(-۳)$ برابر است با ..... .

ت) اگر f یک تابع همانی باشدیعنی $f(x)=x$، در اینصورت وارون این تابع برابر با ..... است.

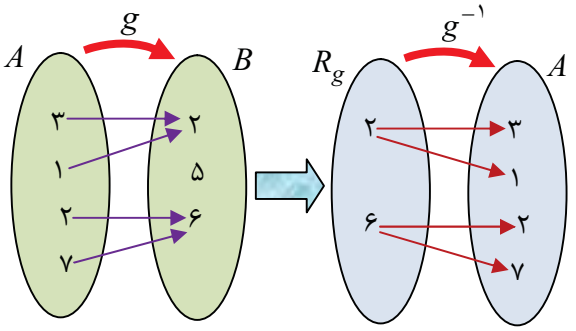
ث) اگر برای تابع f داشته باشیم، $f^{-۱}(۳)=\pm ۲$، در اینصورت f تابعی ..... است.

پاسخ: الف) یک‌به‌یک ب) دوم پ) ۲ ت) خودش ث) غیر یک‌به‌یک

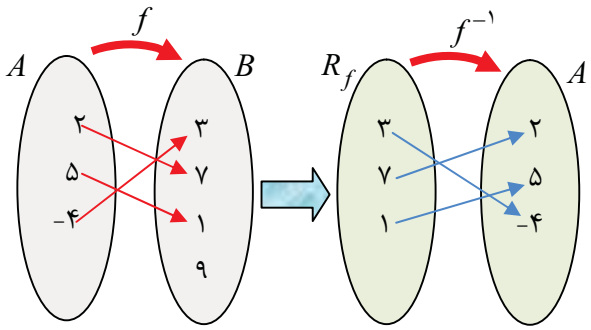
مثال: مقادیر b,a را چنان بیابید که تابع $f=\{(۱,۴),(۶,۵),(a^{۲},۴),(a+۵,۷),(-۲,۳),(b,a+۸)\}$ یک‌به‌یک باشد.

حل: با توجه به زوج مرتب‌های $(۱,۴)$ و $(a^{۲},۴)$ باید قرار دهیم: $a^{۲}=۱\Rightarrow a=\pm ۱$. ولی اگر $a=۱$ باشد، رابطهٔ بالا تابع نخواهد بود، بنابراین $a=-۱$ قابل قبول است. داریم: $\begin{cases}(b,a+۸)=(b,۷)\\(a+۵,۷)=(۴,۷)\end{cases}\Rightarrow b=۴$.$a=-۱\Rightarrow$

نکته از لحاظ نمودار پیکانی، $f:A\longrightarrow B$ تابعی ایست یک‌به‌یک هرگاه به هر عضو B یا پیکانی وصل نشود یا اگر وصل شود فقط یک پیکان متصل شود.



g یک‌به‌یک نیست، بنابراین $g^{-۱}$ تابع نیست.



f یک‌به‌یک است، بنابراین $f^{-۱}$ تابع است.

*** تذکر:** با توجه به مباحث گفته شده و مثال‌های حل شده، داریم: $R_{f^{-۱}}=D_f$ ، $D_{f^{-۱}}=R_f$.

مثال: دو شخص A و B را در نظر گیرید. الف) کدامیک از نمودارهای پیکانی زیر نشان دهندهٔ تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی این دو نفر است؟

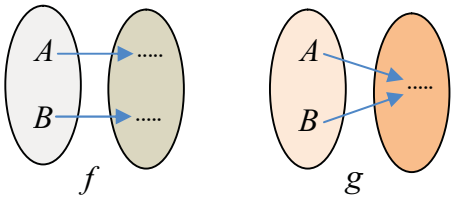
ب) آیا f و g هر دو تابع هستند؟

پ) کدامیک از توابع f و g یک‌به‌یک هستند.

ت) عبارات زیر را کامل کنید.

(۱) با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او بطور یکتا تعیین ..... .

(۲) با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او بطور یکتا تعیین ..... .



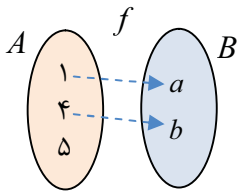
حل: الف) از آنجاییکه اثر انگشت هر شخص منحصر بفرد است ولی گروه خونی دو نفر می‌توانند یکسان باشند، لذا نمودار پیکانی f نشان دهندهٔ تابع اثر انگشت و نمودار پیکانی g نشان دهندهٔ تابع گروه خونی این دو نفر است.

ب) هر دوی f و g تابع هستند. پ) f یک‌به‌یک است ولی g یک‌به‌یک نیست.

ت) (۱) نمی‌شود. (۲) می‌شود.

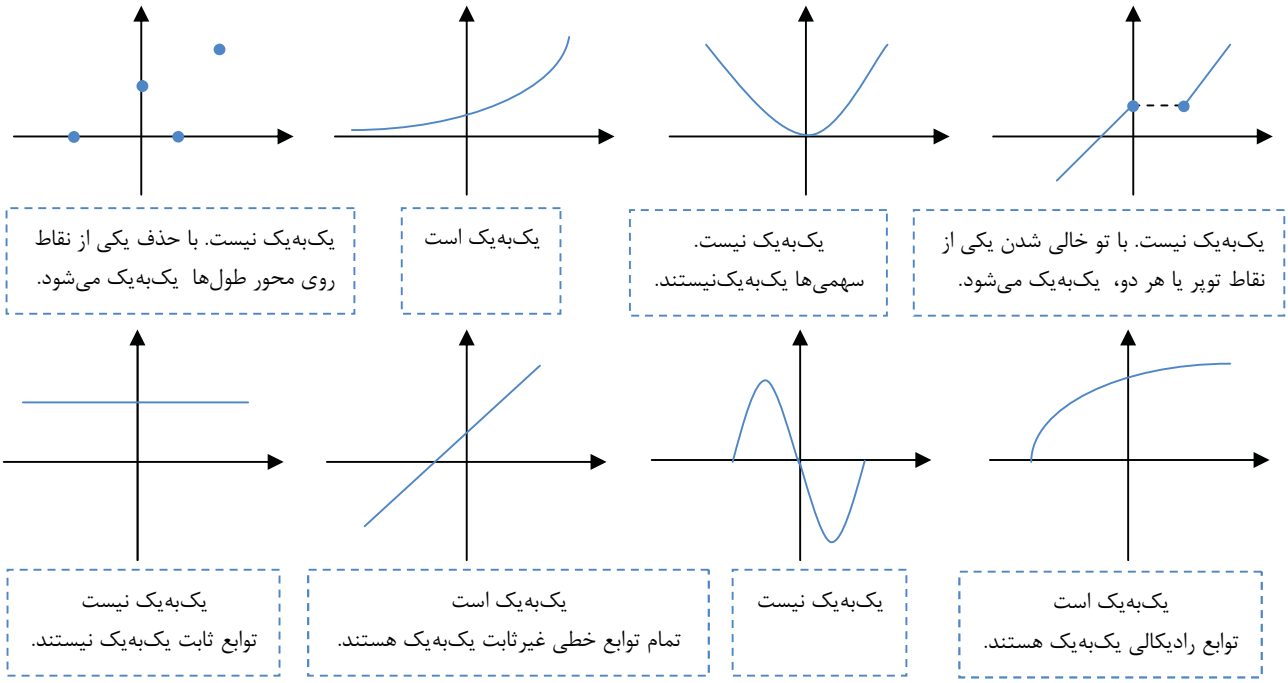
مثال: فرض کنید $A=\{۱,۴,۵\}$ و $B=\{a,b\}$ دو مجموعهٔ دلخواه باشند. تمام توابع مانند f از A به B را در نظر گیرید. چند مورد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟

حل: با توجه به مباحث ذکر شده برای یک‌به‌یک بودن تابع $f: A \longrightarrow B$، لازم است تعداد اعضای B از تعداد اعضای A بیشتر یا مساوی باشد بنابراین در این مثال هیچ کدام از توابع تعریف شده از A به B نمی‌توانند یک‌به‌یک باشند. بعنوان مثال تابع زیر را در نظر گیرید که یک‌به‌یک نیست.



نکته از لحاظ نمودار مختصاتی، تابع f یک‌به‌یک است، هرگاه هر خط موازی محور xها نمودار آنرا حداکثر در یک نقطه قطع کند. این به این دلیل است که در تابع یک‌به‌یک هیچ دو نقطه که عرض برابر داشته باشند، وجود ندارد.

مثال: کدامیک از نمودارهای زیر، نمودار تابع یک‌به‌یک است؟



* **نتیجه:** توابع خطی غیر ثابت یک‌به‌یک هستند. تابع ثابت یک‌به‌یک نیست. توابع درجه دوم یک‌به‌یک نیستند. توابع رادیکالی مورد بحث در این کتاب همگی یک‌به‌یک هستند.

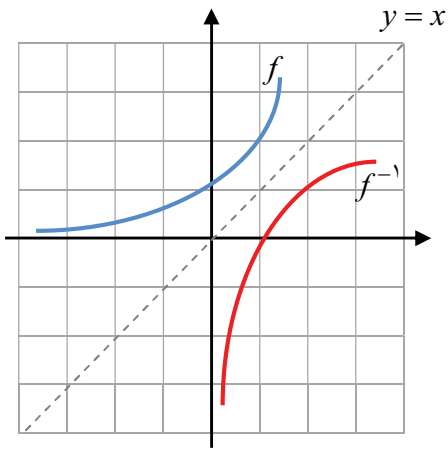
مثال: کدام یک از توابع زیر در کل دامنهٔ خود، یک‌به‌یک است؟

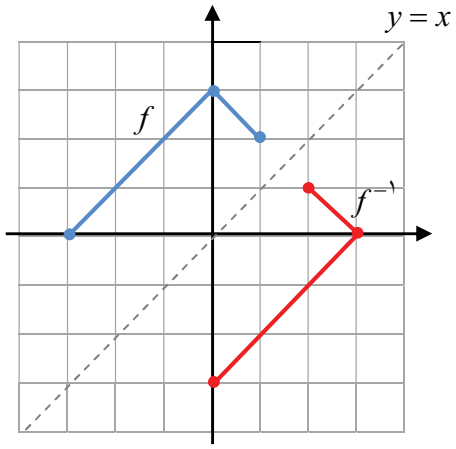
الف) $y=[x]$ ب) $y=|x|$ پ) $y=\sqrt{x}$ ت) $y=x^{۲}$

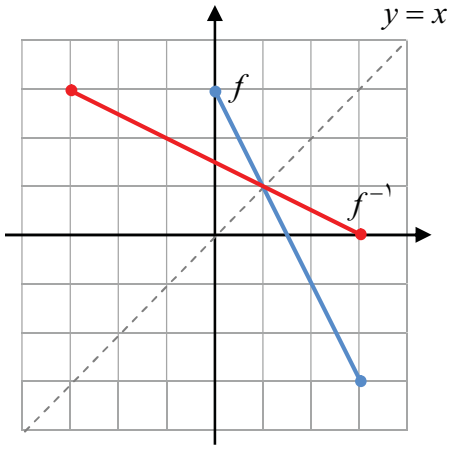
حل: با توجه به نمودار توابع بالا، تنها تابع $y=\sqrt{x}$ یک‌به‌یک است.

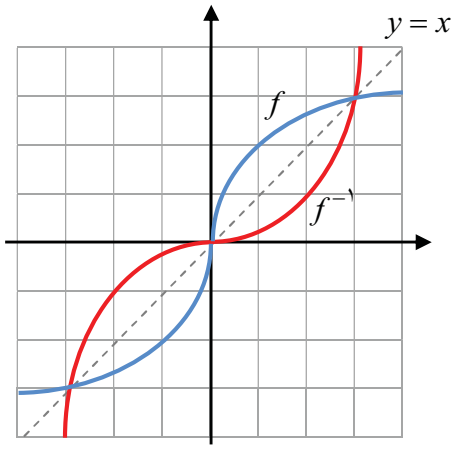
رسم نمودار $f^{-۱}$ از روی نمودار f: برای رسم نمودار $f^{-۱}$ از روی نمودار f، کافیست نمودار f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه کنیم. توجه داریم که؛ $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-۱}$.

مثال:

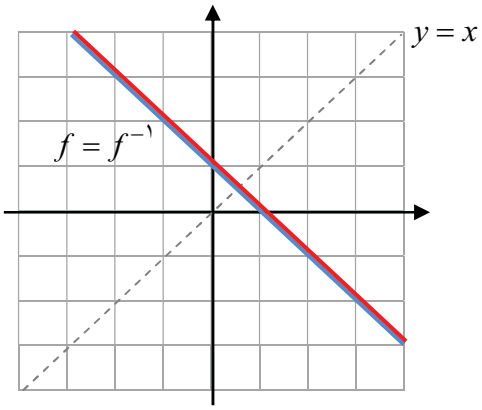








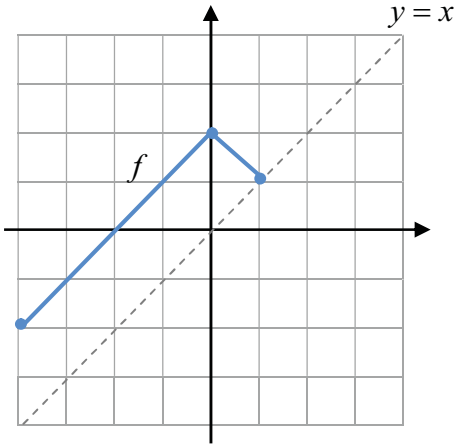
مثال: نمودار تابع $f(x)=۱-x$ را رسم کنید و از روی نمودار شرح دهید که چرا این تابع یک‌به‌یک است؟ در ادامه نمودار وارون این تابع را نیز در همان دستگاه مختصات رسم کنید.



حل: هر خط موازی محور x نمودار این تابع را تنها در یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین این تابع یک‌به‌یک است.

نمودار این تابع بر خط $y=x$ عمود است لذا وارون این تابع برابر خودش می‌شود.پس نمودار $f, f^{-۱}$ منطبق برهم خواهند بود.

مثال: شکل مقابل نمودار $y=f(x)$ است. به کمک نمودار f مقادیر خواسته شده را بدست آورید.



الف) $f^{-1}(0)$

ب) $f^{-1}(1)$

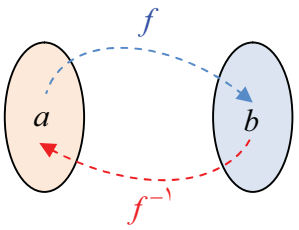
پ) اگر $f^{-1}(2a-1)=-3$ باشد، مقدار a را بیابید.

حل: الف) $f^{-1}(0)=b \Rightarrow f(b)=0 \Rightarrow b=-2$

ب) $f^{-1}(1)=b \Rightarrow f(b)=1 \Rightarrow b=1,-1$

پ) $f^{-1}(2a-1)=-3 \Rightarrow f(-3)=2a-1 \Rightarrow -1=2a-1 \Rightarrow a=0$

* **تذکر:** با توجه به مباحث ذکر شده، ورودی تابع f، خروجی f^{-1} خواهد بود و خروجی تابع f، ورودی f^{-1} می باشد.



$$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

مثال: اگر $f(x)=2-\frac{3-x}{5}$ باشد، در اینصورت مقدار $f^{-1}(-3)$ را بدست آورید.

حل: $f^{-1}(-3)=b \Rightarrow f(b)=-3 \Rightarrow 2-\frac{3-b}{5}=-3 \Rightarrow 5=\frac{3-b}{5} \Rightarrow 25=3-b \Rightarrow b=-22$

مثال: اگر $f(x)=\frac{x-m}{2}+3$ و $f^{-1}(4)=-1$ باشد، در اینصورت مقدار m را بدست آورید.

حل: $f^{-1}(4)=-1 \Rightarrow f(-1)=4 \Rightarrow \frac{-1-m}{2}+3=4 \Rightarrow \frac{-1-m}{2}=1 \Rightarrow -1-m=2 \Rightarrow m=-3$

مثال: اگر $f(x)=5x-3$ باشد، در اینصورت نمودار f^{-1} از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟

الف) $(2,\frac{1}{5})$ ب) $(1,2)$ پ) $(0,-3)$ ت) $(-1,\frac{2}{5})$

حل: در هر زوج مرتب جای مولفه‌ها را جابجا می‌کنیم، هر کدام که در ضابطهٔ f صدق کند، پاسخ مسأله است.

$$(\frac{2}{5},-1) \Rightarrow f(\frac{2}{5})=-1$$

بنابراین پاسخ درست گزینهٔ (ت) خواهد بود.

مثال: نمودار تابع $f(x)=ax-b$ و f^{-1} در نقطهٔ $(-1,2)$ متقاطع‌اند. مقادیر a و b را بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases}(-1,2)\in f \Rightarrow f(-1)=2 \Rightarrow -a-b=2\\ (-1,2)\in f^{-1} \Rightarrow (2,-1)\in f \Rightarrow 2a-b=-1\end{cases} \Rightarrow a=-1, b=-1$$

نحوهٔ یافتن ضابطهٔ f^{-1} از روی ضابطهٔ تابع f: الف) به جای $f(x)$ قرار دهید y. ب) x را بر حسب y بدست آورید.

پ) به جای x بنویسید $f^{-1}(x)$ و به جای y بنویسید x.

* تاکید می‌کنیم در این کتاب تمرکز ما روی یافتن ضابطهٔ وارون توابع خطی غیر ثابت است.

مثال: ضابطهٔ وارون هر کدام از توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=\frac{3-2x}{5}$ ب) $g(x)=\frac{3}{5}x-2$ پ) $h(x)=1-\sqrt{x+2}$

حل: الف)

$$y=\frac{3-2x}{5} \Rightarrow 5y=3-2x \Rightarrow 2x=3-5y \Rightarrow x=\frac{3-5y}{2}, f^{-1}(x)=\frac{3-5x}{2}$$

ب)

$$y=\frac{3}{5}x-2 \Rightarrow y+2=\frac{3}{5}x \Rightarrow x=\frac{5}{3}(y+2), g^{-1}(x)=\frac{5}{3}(x+2)$$

پ)

$$y=1-\sqrt{x+2} \Rightarrow \sqrt{x+2}=1-y \Rightarrow x+2=(1-y)^2 \Rightarrow x=(1-y)^2-2, h^{-1}(x)=(x-1)^2-2$$

مثال: ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=2-\frac{4x+1}{3}$, $-1\le x<5$ را به‌همراه دامنهٔ آن تعیین کنید.

حل:

$$y=2-\frac{4x+1}{3} \Rightarrow \frac{4x+1}{3}=2-y \Rightarrow 4x+1=6-3y \Rightarrow 4x=5-3y \Rightarrow x=\frac{5-3y}{4}, f^{-1}(x)=\frac{5-3x}{4}$$

برای یافتن دامنهٔ تابع وارون باید بسراغ برد تابع f برویم:

$$-1\le x<5 \Rightarrow -4\le 4x<20 \Rightarrow -3\le 4x+1<21 \Rightarrow -1\le \frac{4x+1}{3}<7 \Rightarrow 1\ge -\frac{4x+1}{3}>-7 \Rightarrow$$

$$3\ge 2-\frac{4x+1}{3}>-5 \Rightarrow -5<y\le 3 \Rightarrow D_{f^{-1}}=(-5,3]$$

مثال: وارون تابع $f(x)=\frac{ax-2}{3}$ از نقطهٔ $(-1,2)$ می‌گذرد. ضابطهٔ f^{-1} را بدست آورید.

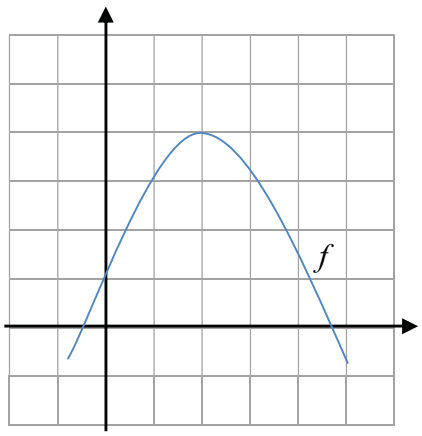
حل:

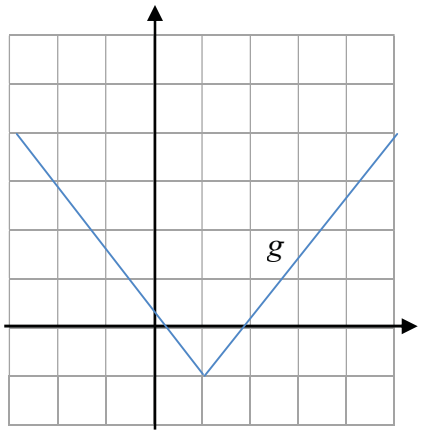
$$f(2)=-1 \Rightarrow \frac{2a-2}{3}=-1 \Rightarrow 2a-2=-3 \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{-\frac{1}{2}x-2}{3}$$

$$y=\frac{-\frac{1}{2}x-2}{3} \Rightarrow 3y=-\frac{1}{2}x-2 \Rightarrow 3y+2=-\frac{1}{2}x \Rightarrow x=-6y-4, f^{-1}(x)=-6x-4$$

* **تذکر:** برخی توابع در کل دامنهٔ خود یک‌به‌یک نیستند ولی می‌توان با محدود کردن دامنه، آنها را یک‌به‌یک کرد. مانند توابع درجه دوم یا تابع قدرمطلق.

مثال: توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنه، تابعی یک‌به‌یک بسازید.





نمودار تابع f در بازه‌های مانند $(-\infty,۲],[۲,+\infty),[۰,۲],[۲,۴]$ و... یک‌به‌یک است. و بزرگترین فاصله‌ای که در آنجا یک‌به‌یک است بازه‌های $(-\infty,۲]$ و $[۲,+\infty)$ هستند.

نمودار تابع g در بازه‌های مانند $(-\infty,۱],[۱,+\infty),[-۲,۱],[۱,۴]$ و... یک‌به‌یک است. و بزرگترین فاصله‌ای که در آنجا یک‌به‌یک است بازه‌های $(-\infty,۱]$ و $[۱,+\infty)$ هستند.

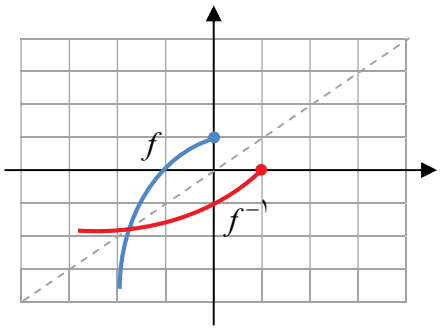
نکته تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ در کل دامنهٔ خود یک‌به‌یک نیست ولی در بازه‌های $\left(-\infty,-\frac{b}{۲a}\right]$ و $\left[-\frac{b}{۲a},+\infty\right)$ یک‌به‌یک است.

مثال: ابتدا دامنهٔ توابع زیر را چنان محدود کنید که یک‌به‌یک شوند سپس ضابطهٔ وارون هر کدام را بدست آورید. در ادامه نمودار تابع را به همراه نمودار وارون آن در یک دستگاه رسم کنید.

الف) $f(x)=۱-x^۲$ ب) $g(x)=x^۲-۴x+۱$ پ) $h(x)=|x+۱|$

حل: الف) طول رأس این سهمی برابر $x=-\frac{b}{۲a}=۰$ است لذا با فرض اینکه $x\le ۰$ این تابع یک‌به‌یک می‌شود. با همین فرض داریم:

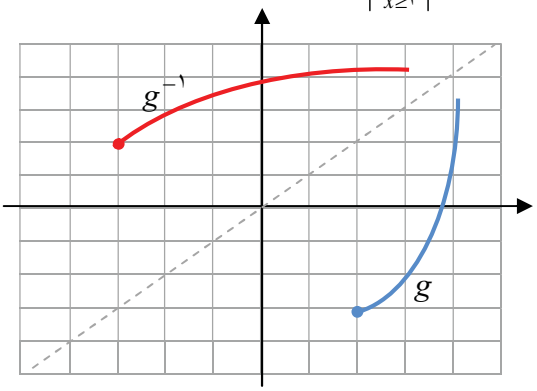
$$y=۱-x^۲ \Rightarrow x^۲=۱-y \Rightarrow \underbrace{|x|}_{x\le ۰}=\sqrt{۱-y} \Rightarrow$$
$$-x=\sqrt{۱-y} \Rightarrow x=-\sqrt{۱-y} \Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{۱-x}$$



ب) طول رأس این سهمی برابر $x=-\frac{b}{2a}=2$ است لذا با فرض اینکه $x\geq 2$ این تابع یک‌به‌یک می‌شود. با همین فرض داریم:

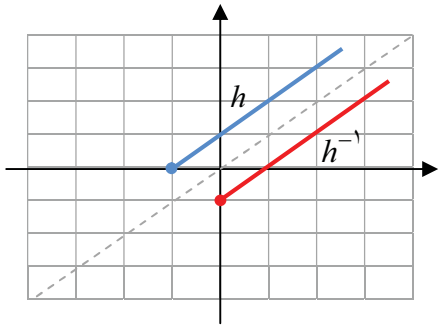
$$y=x^2-4x+1\Rightarrow y-1=x^2-4x\Rightarrow y-1+4=x^2-4x+4\Rightarrow y+3=(x-2)^2\Rightarrow \sqrt{y+3}=\underbrace{|x-2|}_{x\geq 2}\Rightarrow$$

$$\sqrt{y+3}=x-2\Rightarrow x=\sqrt{y+3}+2\Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt{x+3}+2$$



پ) در توابع قدرمطلق برای یک‌به‌یک ساختن یک تابع کافیست (ریشه داخل قدر $x\geq$) یا (ریشه داخل قدر $x\leq$) قرار دهیم. در این مثال فرض می‌کنیم؛ $x\geq -1$ باشد لذا داریم:

$$y=\underbrace{|x+1|}_{x\geq -1}=x+1\Rightarrow y-1=x\Rightarrow h^{-1}(x)=x-1$$



مثال: نمودار تابع $f(x)=2-\frac{4x+5}{3}$ را ابتدا در راستای محور طول‌ها یک واحد به راست منتقل می‌کنیم سپس نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه کرده و در نهایت ۲ واحد در راستای محور عرض‌ها به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ جدید را بدست آورید.

حل: ابتدا در ضابطهٔ تابع به جای x می‌نویسیم $x-1$: $y=2-\frac{4(x-1)+5}{3}=2-\frac{4x+1}{3}$. حال وارون تابع بدست آمده از مرحلهٔ اول را میابیم:

$$y=2-\frac{4x+1}{3}\Rightarrow \frac{4x+1}{3}=2-y\Rightarrow 4x+1=6-3y\Rightarrow x=\frac{5-3y}{4}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{5-3x}{4}$$

در نهایت ضابطهٔ داده شده را منهای ۲ می‌کنیم:

جدید $y=\frac{5-3x}{4}-2$

نمونه سوالات تکمیلی درس دوّم با پاسخ تشریحی

۱- کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟

الف) تمام توابع خطی وارون پذیرند.

ب) تابعی که به هر شخص نام خانوادگی او را نسبت دهد، تابعی غیر یک‌به‌یک است.

پ) تابع $y = x^۲ - ۴x + ۱$ در بازهٔ $(-\infty, ۳]$ یک‌به‌یک است.

ت) اگر $f : A \longrightarrow B$ تابع باشد آنگاه $f^{-۱} : R_f \longrightarrow A$ تعریف می‌شود.

پاسخ: الف) نادرست. (توابع خطی غیرثابت یک‌به‌یک هستند.) ب) درست.

پ) نادرست. ت) درست.

۲- در هر مورد گزینهٔ درست را انتخاب کنید.

(الف) اگر $f(۲) = f(-۱) = ۵$ باشد، در اینصورت مقدار $f^{-۱}(۵)$ برابر کدام گزینه زیر است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱-و۲

(ب) نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به خط ..... قرینه یکدیگرند.

۱) $y = -x$ ۲) $y = ۰$ ۳) $y = x$ ۴) $y = ۱$

(پ) وارون هر تابع یک‌به‌یک، تابع ..... است.

۱) یک‌به‌یک ۲) غیر یک‌به‌یک ۳) همانی ۴) ثابت

(ت) نمودار f و $f^{-۱}$ در صورت متقاطع بودن، همدیگر را روی خط ..... قطع می‌کنند. (f تابع خطی با شیب مثبت است.)

۱) $y = -x$ ۲) $y = ۰$ ۳) $y = x$ ۴) $y = ۱$

پاسخ: (الف) گزینهٔ ۴ (ب) گزینهٔ ۳ (پ)گزینهٔ ۱ (ت) گزینهٔ ۳

۳- بدون یافتن وارون تابع $f(x) = ۳ - \frac{۲}{۵}x$ مقدار $f^{-۱}(-۲)$ را بدست آورید.

پاسخ: $۳ - \frac{۲}{۵}x = -۲ \Rightarrow ۵ = \frac{۲}{۵}x \Rightarrow x = \frac{۲۵}{۲}$

۴- وارون تابع $f(x) = \frac{۲x+۵}{۳} - ۱$ را بدست آورید.

پاسخ: $y = \frac{۲x+۵}{۳} - ۱ \Rightarrow y + ۱ = \frac{۲x+۵}{۳} \Rightarrow ۳y + ۳ = ۲x + ۵ \Rightarrow x = \frac{۳y-۲}{۲}, f^{-۱}(x) = \frac{۳x-۲}{۲}$

۵- ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \frac{mx-۲}{۳}$ را با شرط $f^{-۱}(-۱) = ۲$ بدست آورید.

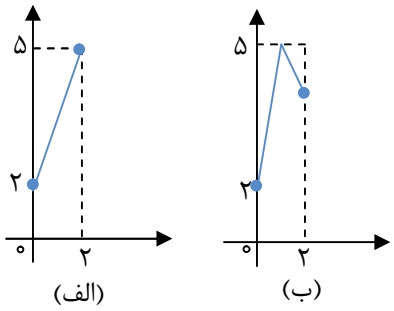
پاسخ: $f(۲) = -۱ \Rightarrow \frac{۲m-۲}{۳} = -۱ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۲}$, $f(x) = \frac{-\frac{۱}{۲}x - ۲}{۳}$

$y = \frac{-\frac{۱}{۲}x - ۲}{۳} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x - ۲ = ۳y \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x = ۳y + ۲ \Rightarrow x = -۶y - ۴$, $f^{-۱}(x) = -۶x - ۴$

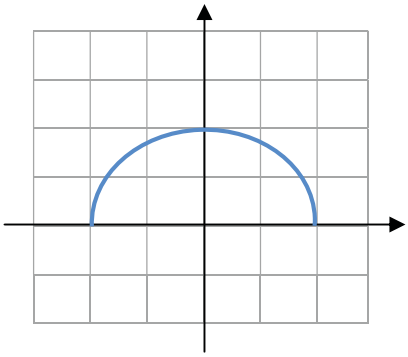
۶- نمودار تابعی با دامنهٔ $[۰,۲]$ و برد $[۲,۵]$ رسم کنید که:

الف) یک‌به‌یک باشد. ب) یک‌به‌یک نباشد.

پاسخ:

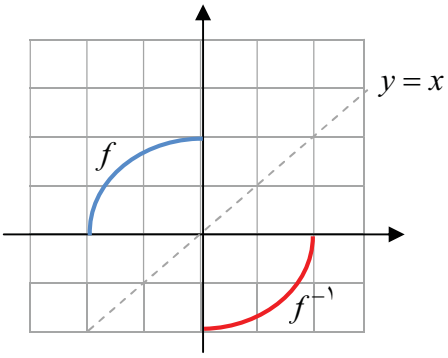


۷- با حذف بخشی از نمودار نیم‌دایره داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص کنید و سپس نمودار وارون آنرا نیز در یک دستگاه رسم کنید.

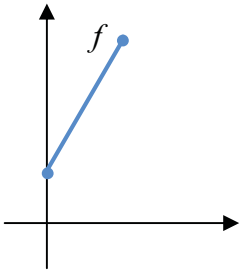


پاسخ: کافیست نمودار تابع f را در بازهٔ $[-۲,۰]$ یا $[۰,۲]$ انتخاب کنیم تا یک‌به‌یک شود.

در زیر بازهٔ $[-۲,۰]$ را در نظر می‌گیریم و نمودار وارون آنرا رسم می‌کنیم.

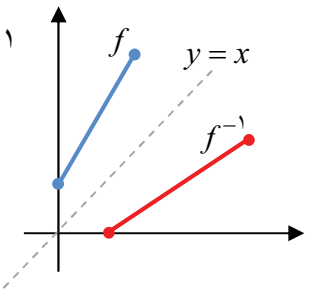


۸- درشکل زیر نمودار تابع f با دامنهٔ $[۰,۳]$ و برد $[۱,۴]$ داده شده است. ابتدا نمودار وارون این تابع را رسم کرده و در ادامه ضابطهٔ $f^{-۱}$ و دامنه و برد آنرا تعیین کنید.

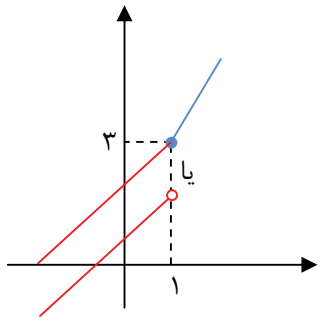


پاسخ: نمودار تابع خطی f از دو نقطهٔ $(۰,۱)$ و $(۳,۴)$ عبور می‌کند پس نمودار $f^{-۱}$ که خود نیز یک خط خواهد بود، از نقاط $(۱,۰)$ و $(۴,۳)$ می‌گذرد. داریم:

$$f^{-۱}(x)=ax+b \Rightarrow \begin{cases} f^{-۱}(۱)=۰ \Rightarrow a+b=۰ \\ f^{-۱}(۴)=۳ \Rightarrow ۴a+b=۳ \end{cases} \Rightarrow a=۱, b=-۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=x-۱$$



۹- حدود k را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x\geq ۱\\ x+k & x<۱\end{cases}$ یک‌به‌یک باشد.



پاسخ: نمودار ضابطهٔ اول را رسم می‌کنیم. مقدار ضابطهٔ دوم در $x=۱$ باید کمتر یا مساوی عدد ۳ باشد تا تابع یک‌به‌یک شود یعنی:

$$۱+k\leq ۳\Rightarrow k\leq ۲$$

۱۰- وارون تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x\geq ۱\\ x-۱ & x<۱\end{cases}$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases}y=۲x+۱\Rightarrow x=\dfrac{y-۱}{۲}\ ,\ y\geq ۳\\ y=x-۱\Rightarrow x=y+۱\ ,\ y<۰\end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-۱}{۲} & x\geq ۳\\ x+۱ & x<۰\end{cases}$$

---

* **۱۱**- اگر $f(x)=\begin{cases}۳-۵x & x\geq ۱\\ ۴-x & x<۱\end{cases}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۵)$ را بدست آورید.

پاسخ: باید بررسی کنیم عدد ۵ در برد کدام یک از دو ضابطهٔ فوق است! برای این منظور داریم:

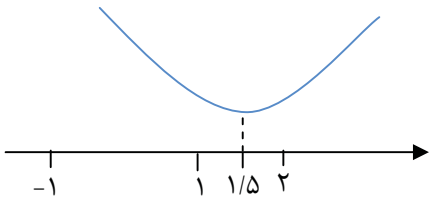
$$\begin{cases}x\geq ۱\xrightarrow[+۳]{\times(-۵)}y\geq -۲\\ x<۱\xrightarrow[+۴]{\times(-۱)}y>۳\end{cases}.$$

بنابراین عدد ۵ در برد ضابطهٔ دوم است و لذا خواهیم داشت: $f^{-۱}(۵)=-۱\Rightarrow x=-۱\Rightarrow ۴-x=۵$.

---

* **۱۲**- اگر a عدد طبیعی باشد و تابع $f(x)=x^{۲}-۳x+۱$ در بازهٔ $[-a,a]$ یک‌به‌یک باشد، مقدار a را بدست آورید.

پاسخ: طول رأس این سهمی برابر $x=-\dfrac{b}{۲a}=\dfrac{۳}{۲}=۱/۵$ است. بنابراین مطابق نمودار زیر باید $a=۱$ باشد تا تابع در بازهٔ $[-a,a]$ یک‌به‌یک شود.



---

* **۱۳**- دو خط $L:ax+by=۸$ و $\Delta:۲x-۳y=۱$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند. مقادیر a,b را بدست آورید.

پاسخ: دو تابع بالا وارون هم هستند بنابراین داریم:

$$\begin{cases}(\frac{۱}{۲},۰)\in\Delta\Rightarrow(۰,\frac{۱}{۲})\in L\Rightarrow\dfrac{b}{۲}=۸\Rightarrow b=۱۶\\ (۰,-\frac{۱}{۳})\in\Delta\Rightarrow(-\frac{۱}{۳},۰)\in L\Rightarrow-\frac{۱}{۳}a=۸\Rightarrow a=-۲۴\end{cases}$$

---

* **۱۴**- تابع $f(x)=(a-۳)x^{۲}-۲x+a$ بر روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است مقدار a را بدست آورید.

پاسخ: تابع درجه دوم در کل $\mathbb{R}$ نمی‌تواند یک‌به‌یک باشد بنابراین باید $(a-۱)=۰\Rightarrow a=۱$ باشد و تابع تبدیل به درجه یک شود و هر تابع خطی غیرثابت در $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است.

❊ درس سوّم: اعمال جبری روی توابع

فرض کنید f و g دو تابع دلخواه باشند، می‌خواهیم به کمک اعمال جبری جمع، تفریق، ضرب و تقسیم توابع جدیدی با استفاده از این دو تابع بسازیم. توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f.g)(x)=f(x)\times g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال: فرض کنید $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ و $g(x)=x-\frac{۱}{x}$ دو تابع باشند. مطلوبست تعیین:

الف) ضابطهٔ $f+g$ ب) دامنهٔ $f+g$ پ) نمودار $f+g$

حل: الف) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\left(x+\frac{۱}{x}\right)+\left(x-\frac{۱}{x}\right)=۲x$

❊ **نکتهٔ مهم:** برای یافتن دامنهٔ توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ نباید از ضابطهٔ ساده شدهٔ آنها استفاده کنیم بلکه باید از اشتراک استفاده کنیم یعنی:

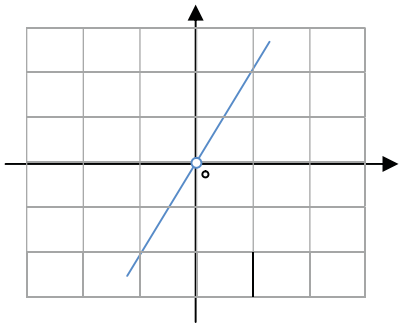
$$D_{f+g}=D_f\cap D_g \qquad D_{f-g}=D_f\cap D_g$$

$$D_{f.g}=D_f\cap D_g \qquad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}$$

بنابراین در این مثال:

ب) $D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{۰\}\cap\mathbb{R}-\{۰\}=\mathbb{R}-\{۰\}$

پ) برای رسم نمودار $f+g$ کافیست نمودار $y=۲x$ را در $\mathbb{R}-\{۰\}$ رسم کنیم.



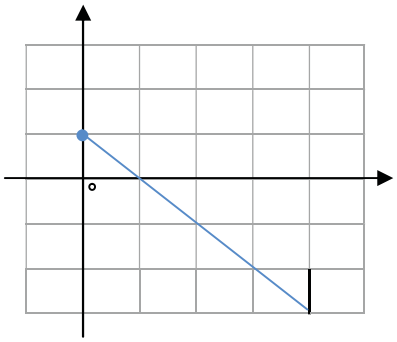
مثال: فرض کنید $f(x)=۱+\sqrt{x}$ و $g(x)=۱-\sqrt{x}$ دو تابع باشند. مطلوبست تعیین:

الف) ضابطهٔ $f.g$ ب) دامنهٔ $f.g$ پ) نمودار $f.g$

حل: الف) $(f.g)(x)=f(x)\times g(x)=\left(۱+\sqrt{x}\right)\left(۱-\sqrt{x}\right)=۱-x$

ب) $D_{f.g} = D_f \cap D_g = [۰,+\infty) \cap [۰,+\infty) = [۰,+\infty)$

پ) نمودار $y = ۱ - x$ را در فاصلهٔ $[۰,+\infty)$ رسم می‌کنیم.



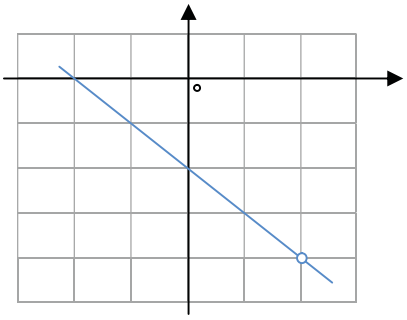
مثال: فرض کنید $f(x) = x^۲ - ۴$ و $g(x) = ۲ - x$ دو تابع باشند. مطلوبست تعیین:

الف) ضابطهٔ $\frac{f}{g}$ ب) دامنهٔ $\frac{f}{g}$ پ) نمودار $\frac{f}{g}$

حل: الف) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^۲ - ۴}{۲ - x} = -x - ۲$

ب) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{۲\} = \mathbb{R} - \{۲\}$

پ) نمودار $y = -x - ۲$ را در $\mathbb{R} - \{۲\}$ رسم می‌کنیم.



مثال: اگر $f(x) = \frac{x^۲ + x}{x - ۱}$ و $g(x) = x^۲ - ۲x$ دو تابع باشند، مطلوبست تعیین ضابطه و دامنهٔ توابع $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$.

حل:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x(x+۱)}{x-۱}}{x(x-۲)} = \frac{(x+۱)}{(x-۲)(x-۱)} \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} =$$

$$\mathbb{R} - \{۱\} \cap \mathbb{R} \quad - \{۰,۲\} = \mathbb{R} - \{۰,۱,۲\}$$

همچنین:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x(x-۲)}{\frac{x(x+۱)}{x-۱}} = \frac{(x-۲)(x-۱)}{(x+۱)} \quad , \quad D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = ۰\} =$$

$$\mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{۱\} \quad - \{۰,-۱\} = \mathbb{R} - \{۰,۱,-۱\}$$

* **تذکر:** اگر c یک عدد حقیقی و f تابع دلخواه باشد، آنگاه : $(cf)(x)=c.f(x)$.

مثال: فرض کنید $f(x)=2x-5$ و $g(x)=x^2-1$ دو تابع باشند، مطلوبست تعیین:

الف) ضابطهٔ $(2f-3g)(x)$ ب) مقدار $(f+3g)(-1)$ پ) مقدار $\left(\frac{3f}{2g-f}\right)(2)$

حل: الف) $(2f-3g)(x)=2f(x)-3g(x)=4x-10-3x^2+3=-3x^2+4x-7$

ب) $(f+3g)(-1)=f(-1)+3g(-1)=-7+0=-7$

پ) $\left(\frac{3f}{2g-f}\right)(2)=\frac{3f(2)}{2g(2)-f(2)}=\frac{-3}{6+1}=-\frac{3}{7}$

مثال: با توجه به جدول مقابل حاصل عبارات زیر را تعیین کنید.

x	-1	1	2	4
$f(x)$	3	2	-2	5
$g(x)$	5	0	8	2

الف) $\left(2f-3g^{-1}\right)(2)$

ب) $(f.g)(4)$

پ) $\left(\frac{f-2g}{3f}\right)(-1)$

حل: الف) $\left(2f-3g^{-1}\right)(2)=2f(2)-3g^{-1}(2)=-4-12=-16$ ب) $(f.g)(4)=f(4).g(4)=5\times 2=10$

پ) $\left(\frac{f-2g}{3f}\right)(-1)=\frac{f(-1)-2g(-1)}{3f(-1)}=\frac{3-10}{9}=-\frac{7}{9}$

سوال: آیا در این مثال مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$ تعریف شده است؟ دامنهٔ این تابع را بدست آورید.

پاسخ: خیر؛ زیرا مقدار $g(1)$ برابر صفر است و مخرج این کسر صفر می‌شود.

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}=\{-1,1,2,3\}-\{1\}=\{-1,2,3\}$$

مثال: اگر $f=\{(5,0),(-1,3),(1,0),(-2,4)\}$ و $g=\{(7,3),(5,5),(6,-1),(1,-4),(-2,1)\}$ دو تابع باشند، مطلوبست تعیین:

الف) $(f+g)$ ب) $\left(\frac{g}{f}\right)$ پ) $(3f-2g)$ ت) $\left(f+2g^{-1}\right)$

حل: ابتدا دامنه‌های مشترک دو تابع را بدست می‌آوریم.

$$D_f\cap D_g=\{5,-1,1,-2\}\cap\{7,5,6,1,-2\}=\{5,1,-2\}$$

الف) $(f+g)=\{(5,0+5),(1,0-4),(-2,4+1)\}=\{(5,5),(1,-4),(-2,5)\}$

ب) $\left(\frac{g}{f}\right)=\left\{(5,\frac{5}{0}),(1,\frac{-4}{0}),(-2,\frac{1}{4})\right\}=\left\{(-2,\frac{1}{4})\right\}$

پ) $(3f-2g)=\{(5,3\times 0-2\times 5),(1,3\times 0-2(-4)),(-2,3\times 4-2\times 1)\}=\{(5,-10),(1,8),(-2,10)\}$

ت) $\left(f+2g^{-1}\right)=\{(5,0+2\times 5),(1,0+2(-2)),(-1,3+2\times 6)\}=\{(5,10),(1,-4),(-1,15)\}$

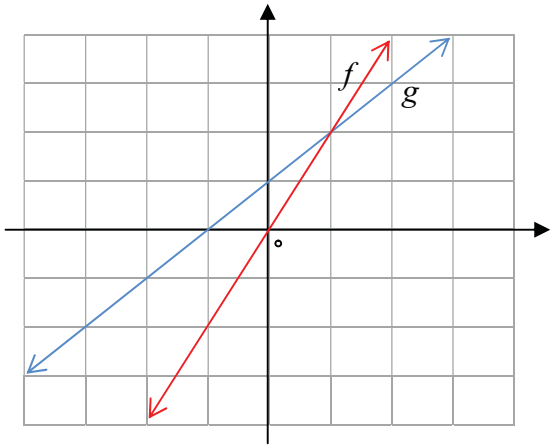
مثال: فرض کنید $f=\{(۴,۱),(-۱,-۳),(۱,۵),(-۲,۴)\}$ و $g=\{(۵,۱),(-۲,۴),(-۱,۵),(۴,۲)\}$ دو تابع باشند. توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $\left(f.g^{-۱}\right)$ ب) $\left(۲f^{-۱}+۳g^{-۱}\right)$

حل: الف) $\left(f.g^{-۱}\right)=\{(۴,۱\times(-۲)),(۱,۵\times(-۱))\}=\{(۴,-۲),(۱,-۵)\}$

ب) $\left(۲f^{-۱}+۳g^{-۱}\right)=\{(۱,۲\times۴+۳\times۵),(۵,۲\times۱+۳(-۱)),(۴,۲(-۲)+۳(-۲))\}=\{(۱,۲۳),(۵,-۱),(۴,-۱۰)\}$

مثال: فرض کنید نمودارهای دو تابع f و g بصورت زیر باشند. مطلوبست تعیین:



الف) $(۳f-g)(-۱)$

ب) $\left(\frac{g}{f}\right)(۱)$

پ) $\left(f^{-۱}+۵g^{-۱}\right)(۰)$

ت) دامنهٔ $\frac{f}{g}$

ث) ضابطهٔ $(f+g)(x)$ و رسم نمودار آن.

ج) ضابطهٔ $(f-۲g)(x)$

حل: الف) $(۳f-g)(-۱)=۳f(-۱)-g(-۱)=-۶-۰=-۶$

ب) $\left(\frac{g}{f}\right)(۱)=\frac{g(۱)}{f(۱)}=\frac{۲}{۲}=۱$ پ) $\left(f^{-۱}+۵g^{-۱}\right)(۰)=f^{-۱}(۰)+۵g^{-۱}(۰)=۰-۵=-۵$

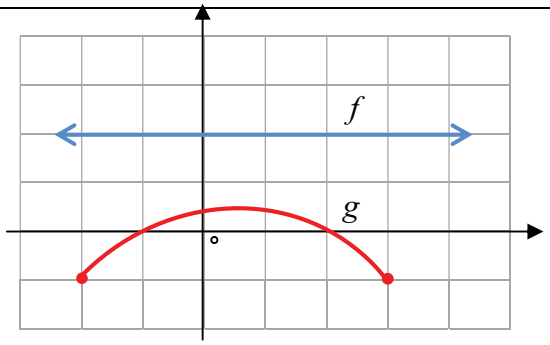
ت) $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{-۱\}=\mathbb{R}-\{-۱\}$

ث) ابتدا ضابطه‌های توابع خطی f و g را میابیم.

$$\begin{cases} f(x)=ax+b\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=۰\Rightarrow b=۰\\ f(۱)=۲\Rightarrow a=۲\end{cases}\Rightarrow f(x)=۲x \\ g(x)=a'x+b'\Rightarrow\begin{cases}g(۰)=۱\Rightarrow b'=۱\\ g(۱)=۲\Rightarrow a'=۱\end{cases}\Rightarrow g(x)=x+۱\end{cases}\Rightarrow(f+g)(x)=f(x)+g(x)=۳x+۱$$

ج) $(f-۲g)(x)=f(x)-۲g(x)=۲x-۲x-۲=-۲$

مثال: با توجه به نمودار توابع f و g، مطلوبست تعیین:



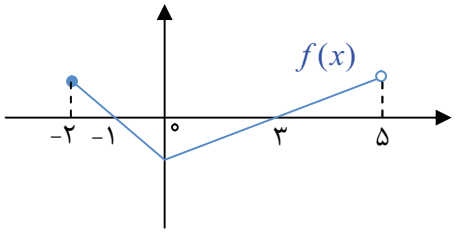
الف) دامنهٔ $\frac{f}{g}$

ب) $(f+۳g)(-۱)$

حل: الف) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = \mathbb{R} \cap [-۲,۳] - \{-۱,۲\} = [-۲,۳] - \{-۱,۲\}$

ب) $(f+۳g)(-۱) = f(-۱) + ۳g(-۱) = ۲ + ۰ = ۲$

مثال: شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ است، دامنهٔ تابع $y = \frac{۱}{f(x)}$ را بدست آورید.



حل: طبق نمودار جواب‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ برابر $x = -۱,۳$ می‌باشند

از طرفی صورت کسر تابع ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است. بنابراین دامنهٔ تابع y برابر:

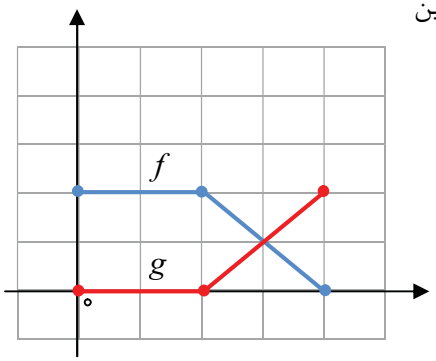
$[-۲,۵) - \{-۱,۳\} = [-۲,۵) - \{-۱,۳\}$ است. $\mathbb{R} \cap$

*تذکر: صفرهای تابع $f(x)$ یعنی محل برخورد نمودار این تابع با محور طول‌ها می‌باشد.

مثال: فرض کنید $f(x)$ تابعی با دامنهٔ $[-۱,۵]$ باشد، در اینصورت دامنهٔ تابع $y = \frac{f(x)}{x-۲}$ را بدست آورید.

حل: مخرج کسر تابع خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ریشهٔ $x = ۲$ است. بنابراین: $D_y = [-۱,۵] \cap \mathbb{R} - \{۲\} = [-۱,۵] - \{۲\}$.

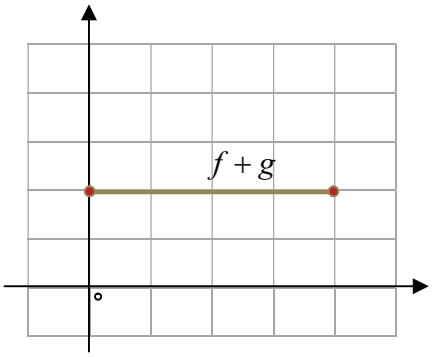
مثال: با توجه به نمودار توابع f و g، مطلوبست رسم نمودار $(f+g)(x)$ و تعیین ضابطه و دامنهٔ آن.



حل:

x	۰	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	۲	۲	۲	۱	۰
$g(x)$	۰	۰	۰	۱	۲
$(f+g)(x)$	۲	۲	۲	۲	۲

بنابراین؛ $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [۰,۴]$ ، $(f+g)(x) = ۲$



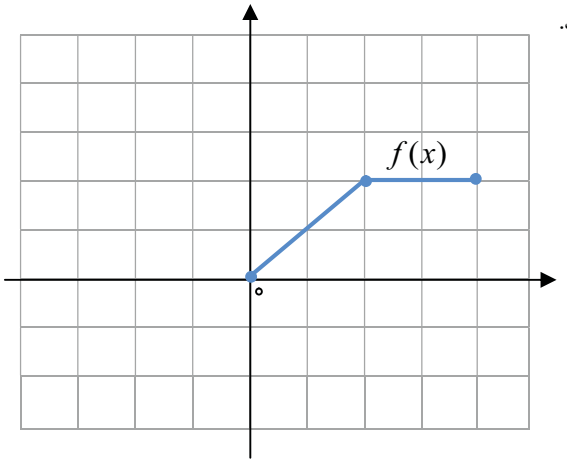
رسم نمودار $kf(x)$ از روی نمودار $f(x)$:

برای رسم نمودار $kf(x)$ از روی نمودار $f(x)$ کافیست نمودار $f(x)$ را با ضریب k انبساط $(k > ۱)$ یا انقباض $(۰ < k < ۱)$ عمودی دهیم. بعبارتی عرض نقاط را در عدد k ضرب می‌کنیم. توجه شود که دامنهٔ تابع ثابت می‌ماند.

اگر $k < ۰$ باشد آنرا مثبت در نظر گیرید و نمودار $kf(x)$ را (در حالتی که $k > ۰$ است) رسم کنید سپس نمودار را نسبت به محور xها قرینه کنید.

در حالت خاص: **برای رسم نمودار $-f(x)$، کافیست نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.**

مثال: شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ است. نمودار توابع زیر را رسم کنید.



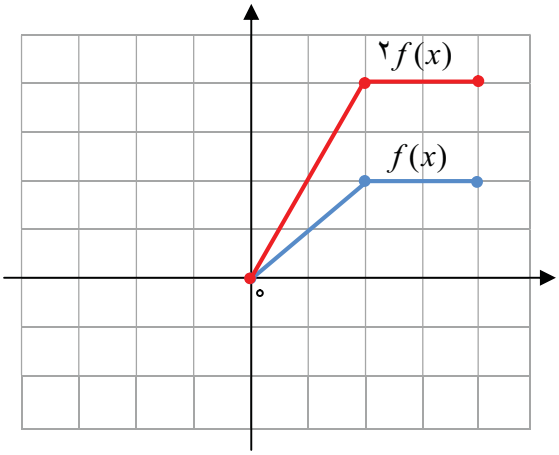
الف) $۲f(x)$

ب) $-f(x)$

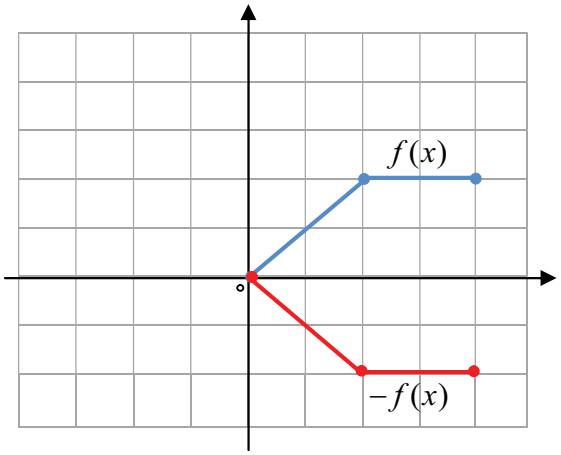
پ) $-\frac{۱}{۲}f(x)$

ت) $۲f(x+۱)$

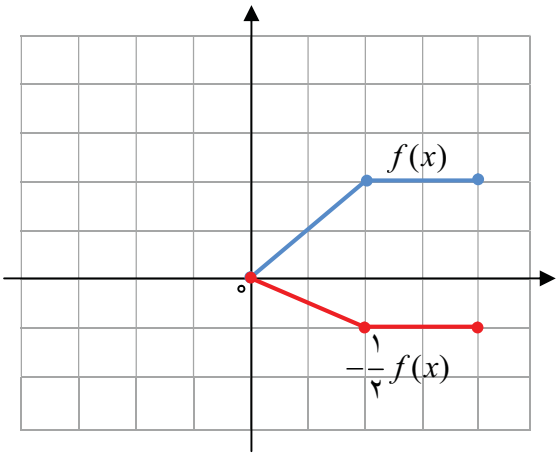
حل:



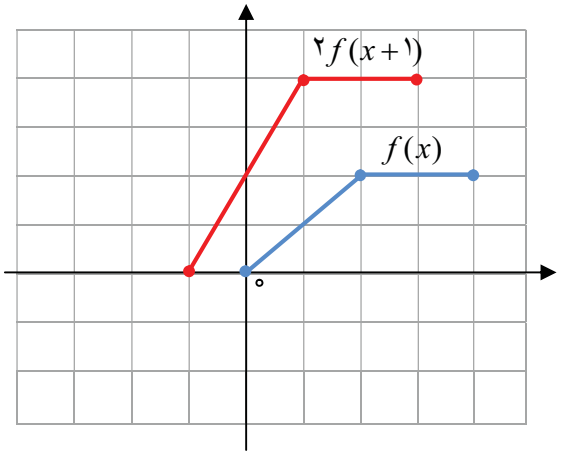
الف) عرض نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم.



ب) عرض نقاط را در ۱- ضرب می‌کنیم. (نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.)



پ) عرض نقاط را در $-\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم.(نمودار را به ضریب $\frac{۱}{۲}$ منقبض کرده و سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.)

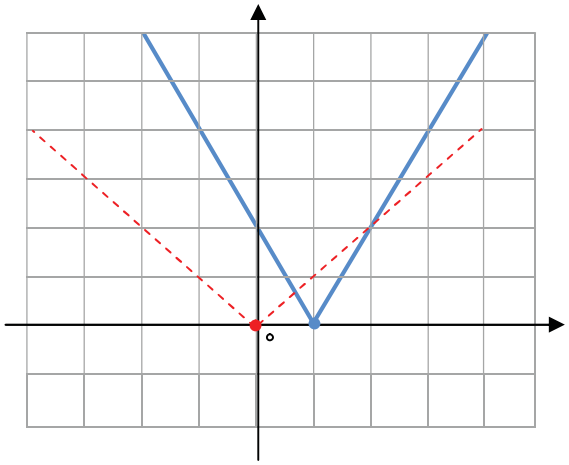


ت) نمودار را یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس عرض نقاط آنرا در ۲ ضرب می‌کنیم.

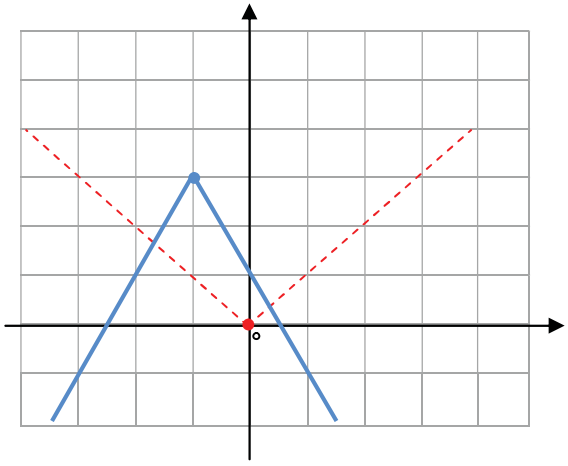
مثال: به کمک نمودار تابع $f(x)=|x|$، نمودار توابع زیر را رسم کنید. (مراحل رسم را شرح دهید.)

الف) $y=۲|x-۱|$ ب) $y=۳-۲|x+۱|$

حل:



الف) ابتدا نمودار $f(x)=|x|$ را یک واحد به راست و سپس عرض نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم.

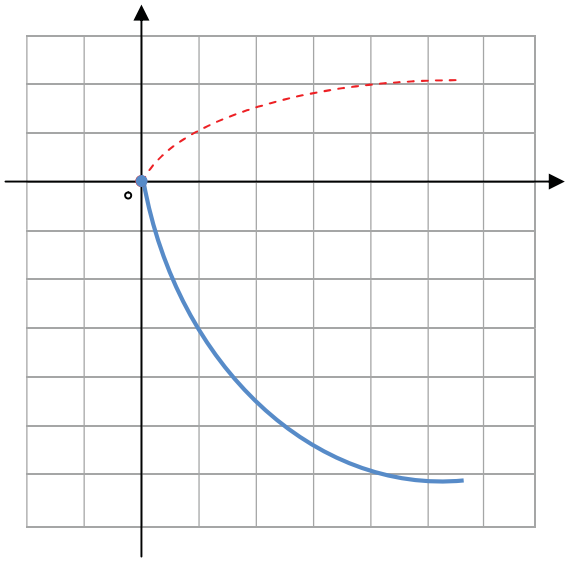


ب) ابتدا نمودار $f(x)=|x|$ را یک واحد به چپ و سپس عرض نقاط را در ۲ضرب می‌کنیم و در ادامه نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم و در آخر ۳ واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

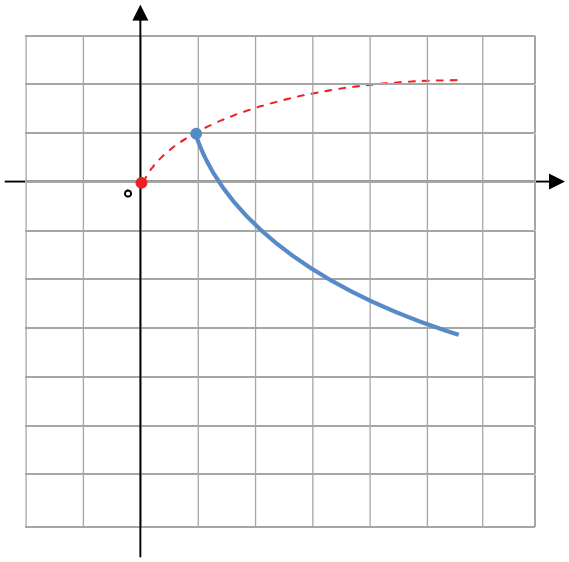
مثال: به کمک نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$، نمودار توابع زیر را رسم کنید. (مراحل رسم را شرح دهید.)

الف) $y=-۳\sqrt{x}$ ب) $y=۱-۲\sqrt{x-۱}$

حل:



الف) ابتدا عرض نقاط نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را در ۳ ضرب می‌کنیم و سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.



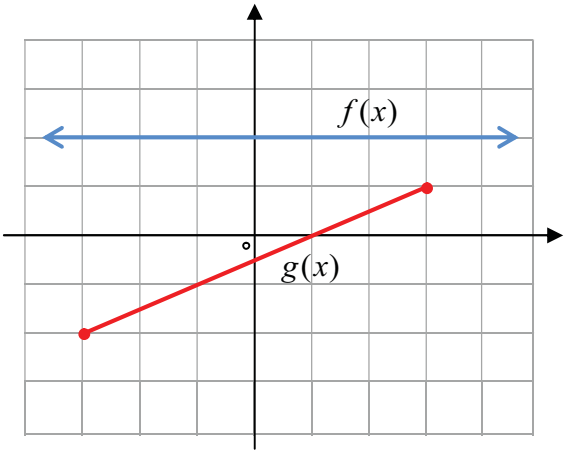
ب) ابتدا نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم سپس عرض نقاط را در ۲ ضرب کرده و درادامه نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده و در آخر یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

نمونه سوالات تکمیلی درس سوّم با پاسخ تشریحی

۱- نمودار دو تابع f و g مطابق شکل زیر رسم شده‌اند. مطلوبست تعیین:

الف) دامنهٔ $\frac{f}{g}$

ب) ضابطهٔ $f+g$ و نمودار آن.

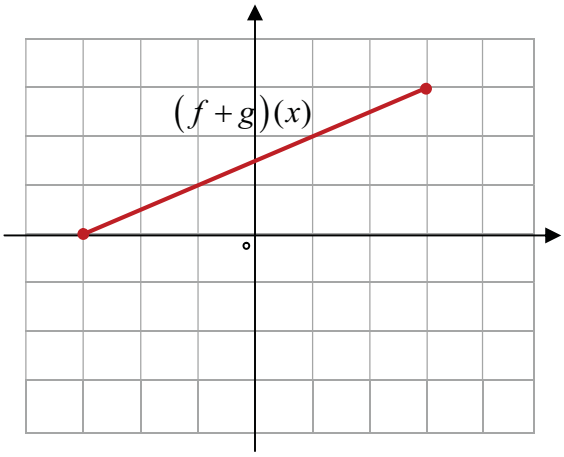


پاسخ: الف) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = \mathbb{R} \cap [-۳,۳] - \{۱\} = [-۳,۳] - \{۱\}$

ب) $f(x) = ۲$ تابع ثابت است و برای تابع خطی $g(x)$ داریم:

$$g(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} g(۳) = ۱ \Rightarrow ۳a + b = ۱ \\ g(-۳) = -۲ \Rightarrow -۳a + b = -۲ \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{۱}{۲}, a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow g(x) = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = ۲ + \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲}$$



۲- فرض کنید $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ و $g = \{(۲,۳),(۵,۱),(-۲,-۱),(۰,۷),(-۳,۱)\}$ دو تابع باشند. تابع $f+g$ را مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا دامنه‌های مشترک را میابیم؛ $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{۲,-۲,۰\}$. داریم:

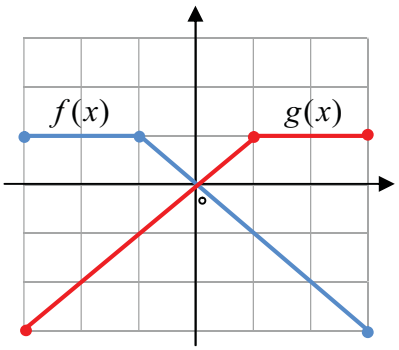
$$f+g = \{(۲, ۰+۳),(-۲, ۰+-۱),(۰, ۲+۷)\} = \{(۲,۳),(-۲,-۱),(۰,۹)\}$$

۳- برای دو تابع $f(x) = \sqrt{x-۲}$ و $g(x) = \sqrt{۲-x}$ مطلوبست تعیین تابع $(f+g)(x)$.

پاسخ:

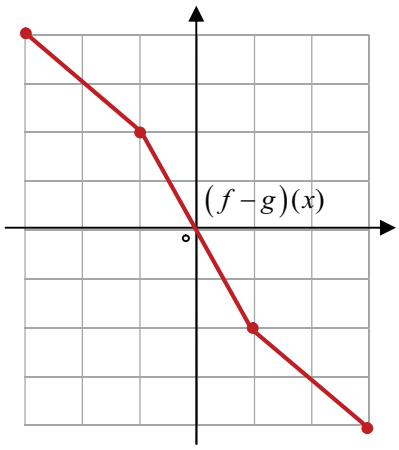
$$\begin{cases} D_f = [۲,+\infty) \\ D_g = (-\infty,۲] \end{cases} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{۲\} \Rightarrow (f+g) = \{(۲, ۰+۰)\} = \{(۲,۰)\}$$

۴- نمودار توابع f و g بصورت زیر است. نمودار تابع $(f-g)$ را رسم کنید.

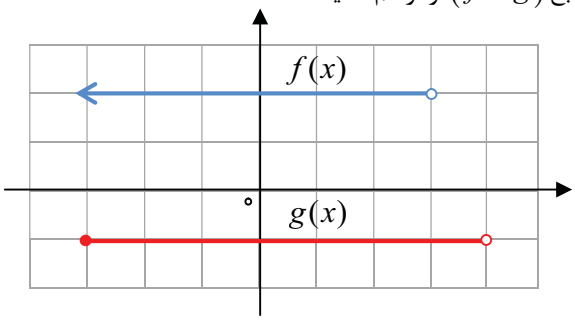


پاسخ:

x	-۳	-۱	۱	۳
$f(x)$	۱	۱	-۱	-۳
$g(x)$	-۳	-۱	۱	۱
$(f-g)(x)$	۴	۲	-۲	-۴



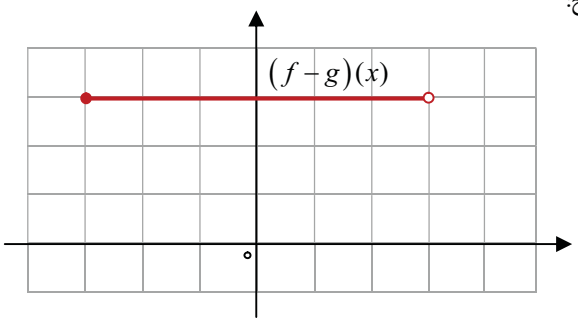
۵- نمودار توابع f و g بصورت زیر است. ابتدا ضابطه و سپس نمودار تابع $(f-g)$ را رسم کنید.



پاسخ:

$$\begin{cases} f(x)=۲ \\ g(x)=-۱ \end{cases} \Rightarrow (f-g)(x)=f(x)-g(x)=۳$$

$$\Rightarrow D_{f-g}=D_f \cap D_g=(-\infty,۳)\cup[-۳,۴)=[-۳,۳)$$



۶- f تابع همانی و g تابع ثابت است و $(f.g)(-۱)=۲$. ضابطهٔ تابع $(f+g)(x)$ را بدست آورید.

پاسخ:

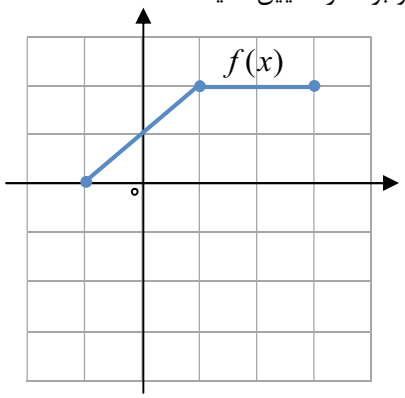
$$\begin{cases} f(x)=x \\ g(x)=c \end{cases} \Rightarrow (f.g)(-۱)=۲ \Rightarrow f(-۱).g(-۱)=۲ \Rightarrow -۱\times c=۲ \Rightarrow c=-۲$$

$$\Rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x-۲$$

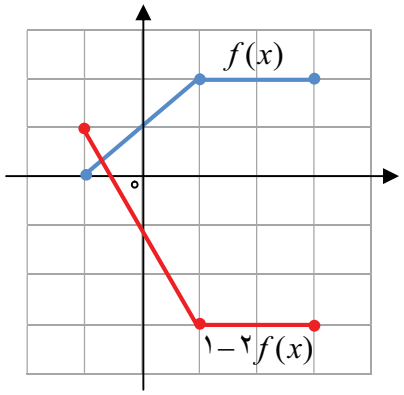
۷- اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x-۳}$ و $g(x)=۱+\frac{۱}{x}$ دو تابع باشند، دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را بدست آورید.

پاسخ: $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{۳\}\cap\mathbb{R}-\{۰\}-\{-۱\}=\mathbb{R}-\{۳,۰,-۱\}$

۸- نمودار تابع f بصورت زیر است. نمودار تابع $y=۱-۲f(x)$ را رسم کنید و دامنه و برد آنرا تعیین کنید.



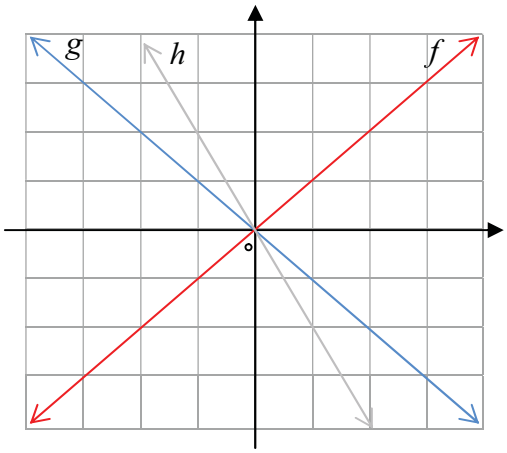
پاسخ: عرض نقاط را ابتدا در ۲- ضرب کرده و سپس یک واحد به آنها اضافه می‌کنیم.



$D_y=D_{f(x)}=[-۱,۳]$

$R_y=[-۳,۱]$

۹- با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدامیک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟

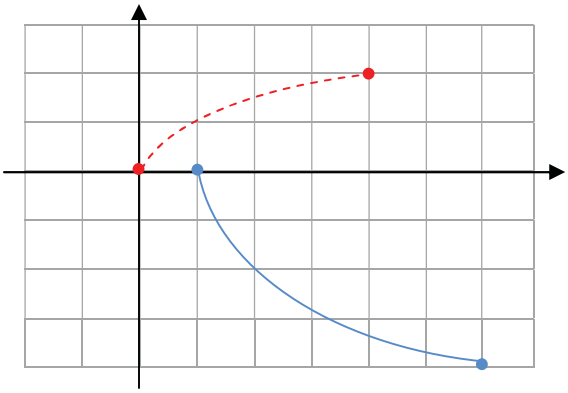


پاسخ: با توجه به ضابطه‌های هر سه تابع: $h(x)=-۲x$, $g(x)=-x$, $f(x)=x$، داریم:

$g(x)=f(x)+h(x)$

۱۰*- تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را با دامنهٔ $[۰,۴]$ در نظر گیرید. به کمک انتقال نمودار تابع $y=-۲f(x-۱)$ را رسم کنید.

پاسخ: کافیست نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم سپس عرض نقاط را در ۲ ضرب کرده و در آخر نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.



۱۱*- توابع $f(x)=\sqrt{x-a}$ و $g(x)=\sqrt{b-x}$ را در نظر گیرید. اگر $f+g=\{(۲,c)\}$ باشد، مقادیر a، b و c را بدست آورید.

پاسخ: $D_f=x\geq a\,,D_g=x\leq b\,,D_f\cap D_g=\{۲\}\Rightarrow a=b=۲$

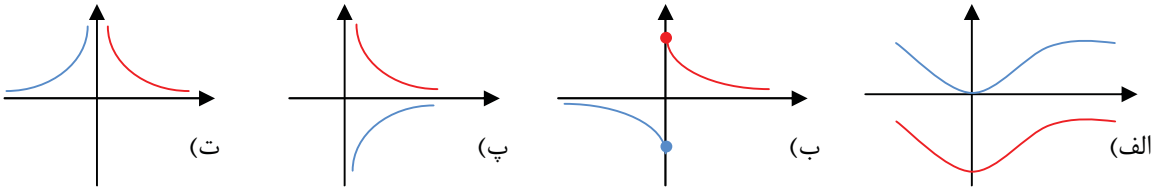
از طرفی $c=f(۲)+g(۲)$، بنابراین؛ $c=۰+۰=۰$.

۱۲*- فرض کنید f و g دو تابع خطی غیرثابت با دامنهٔ حقیقی باشند و $f(x)=۲x+۱$، اگر $(f-g)(۱)=۳$ در اینصورت دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را بدست آورید.

پاسخ: $(f-g)(۱)=۳\Rightarrow f(۱)-g(۱)=۳\Rightarrow g(۱)=۳-۳=۰$ بنابراین داریم:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{۱\}=\mathbb{R}-\{۱\}$$

۱۳*- اگر f و g دو تابع باشند بطوریکه $(f+g)(x)=۰$، آنگاه کدام گزینه می‌تواند نمودارهای دو تابع f و g را نشان دهد؟



پاسخ: $(f+g)(x)=۰\Rightarrow f(x)+g(x)=۰\Rightarrow f(x)=-g(x)$، بنابراین این دو تابع باید نسبت به محور طول‌ها قرینه هم باشند پس گزینهٔ (پ) پاسخ درست است.

۱۴*- فرض کنید برای توابع $f=\{(۲,۱),(a-۲,b),(۵,-۶)\}$ و $g=\{(۳,-۱),(۲,a),(c,۳)\}$، داشته باشیم؛ $f+g=\{(۲,۴),(۱,۷)\}$، در این صورت مقادیر a، b و c را بدست آورید.

پاسخ: $D_f\cap D_g=\{۲,۱\}\Rightarrow\begin{cases}a-۲=۱\Rightarrow a=۳\\c=۱\end{cases}\Rightarrow(f+g)(۱)=۷\Rightarrow f(۱)+g(۱)=b+۳=۷\Rightarrow b=۴$

۱۵*- اگر $(f+g)(x)=x-۳$ و $(f-g)(x)=x+۱$، آنگاه ضابطهٔ تابع $(f.g)(x)$ را بدست آورید.

پاسخ: $\begin{cases}f(x)+g(x)=x-۳\\f(x)-g(x)=x+۱\end{cases}\Rightarrow ۲f(x)=۲x-۲\Rightarrow f(x)=x-۱,g(x)=-۲\Rightarrow(f.g)(x)=f(x).g(x)=-۲x+۲$

RIAZISARA

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

https://www.instagram.com/riazisara.ir