

جزوه آموزشی مثلثات

مؤلف : عادل آخکـــــــندی

مقدمه مؤلف

به نام خالق زیبایی ها

منحنی قامتم، قامت ابروی توست،خط مجانب بر آن، سلسله گیسوی اوست. حد رسیدن به او، مبهم و بی انتهاست. بازه تعریف دل، در حرم کوی دوست، چون به حد یک توئی من همه صفرها آن چه که معنی دهد قامت دلجوی توست. پرتوی خورشید شد مشتق از آن روی تو، گرمی جان بخش او جزئی از آن خوی توست بی تو وجودم بود یک سری واگرا ناحیه همگراش دایره روی توست (پروفسور شترودی)

هیچگاه دلی را مشکن چون ممکن است خانه خدا باشد. هیچگاه انسانی را تحقیر نکن چون ممکن است حبیب خدا باشد، هیچگاه گناهانت را کوچک نشمار چون ممکن است آن لحظه، لحظه مرگ تو باشد.

این کتاب می تواند برای هر دانش آموز مورد استفاده قرار بگیرد و خواننده کتاب به راحتی می تواند از مباحث و موضوعهای متنوع کتاب بهره ی کافی رابرده و با مطالعه ی مثال ها و مسایل های حل شده ی آن به عمق مطلب پی ببرد.

در خاتمه تاکید می کنم از آنجا که هیچ کلامی جز کلام خداوند خالی از اشتباه نیست، از خوانندگان عزیز تقاضا می کنیم ما را از نظرات، انتقادات و پیشنهادات خویش بهره مند ساخته تا در تالیفات بعدی از آنها استفاده شود.



عنوان

جزوه آموزشی مثلثات

نگارش

عادل آخکندی

دبیر ریاضی : عادل آخکندی

فهرست **صفحه**

۱ فصل اول دایره ی مثلثاتی ۱

۱.۱ واحد های زاویه : ۱- درجه ۲- رادیان ۲

۲.۱ موقعیت های مختلف زوایای پرکاربرد : ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ ..... ۷

۳.۱ معرفی نسبت های مثلثاتی : ۹

۱.۳.۱ معرفی نسبت مثلثاتی $y = sin\alpha$ ۹

۲.۳.۱ معرفی نسبت مثلثاتی $y = cos\alpha$ ۱۱

۳.۳.۱ معرفی نسبت مثلثاتی $y = tan\alpha$ ۱۳

۴.۳.۱ معرفی نسبت مثلثاتی $y = cot\alpha$ ۱۶

۴.۱ جمع بندی : ۱۸

۵.۱ کمان های متمم، مکمل و قرینه ۱۹

۶.۱ کاربرد مثلثات ۲۳

۲ بررسی نمودار توابع مثلثاتی ۲۷

۱.۲ دوره تناوب توابع مثلثاتی ۲۷

۲.۲ نمودار توابع مثلثاتی ۲۸

۳ فرمول های مقدماتی ۳۵

۱.۳ فرمول های مجموع و تفاضل دو زاویه ۳۵

۲.۳ نسبت های مثلثاتی $2a$ و 3α بر حسب a ۳۶

۳.۳ فرمول های تقلیل (کاهش) دادن توان ها یا ازدیاد آن ها ۴۲

۴.۳ چند رابطه مهم ۴۳

۵.۳ فرمول های تبدیل جمع به ضرب (ویژه رشته ریاضی) ۴۴

۶.۳ فرمول های تبدیل ضرب به جمع (ویژه رشته ریاضی) ۴۴

۴ معادلات مثلثاتی ۴۶

۱.۴ معادله ی مثلثاتی ساده ۴۶

۱.۱.۴ معادله ی $\sin x = \sin a$ ، $-1 \leq a \leq 1$ ۴۶

۴.۱.۲ معادله ی $cosx = cosa$ ، $-1 \leq a \leq 1$ ۴۷

۳.۱.۴ معادله ی $tanx = tana$ ۴۸

۴.۱.۴ معادله ی $cotx = cota$ ۴۸

دبیر ریاضی : عادل آخکندی

معذرت ....

معذرت میخوام فیثاغورس ... چرا که مادر من سخت ترین معادلات است !

معذرت میخوام نیوتن ... چرا که مادر من راز جاذبه است !

معذرت میخوام ادیسون ... چرا که مادر من اولین چراغ زندگی من است !

معذرت میخوام افلاطون ... چرا که این مادر من است که شعر فاضله قلب من است !

معذرت میخوام رومیو... چرا که همه راه ها به عشق مادر من ختم میشود !

معذرت میخوام ژولیت ... چرا که مادرم عشق من است !

مثلثات یا سه‌بَرسنجی یکی از شاخه‌های ریاضیات است که روابط میان طول اضلاع و زاویه‌های مثلث را مطالعه می‌کند. نخستین کاربرد مثلثات در مطالعات اخترشناسی بوده‌است. اکنون مثلثات کاربردهای زیادی در ریاضیات محض و کاربردی دارد.

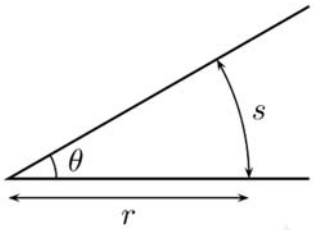
بعضی از روش‌های بنیادی تحلیل، مانند تبدیل فوریه و معادلات موج، از توابع مثلثاتی برای توصیف رفتار تناوبی موجود در بسیاری از فرایندهای فیزیکی استفاده می‌کنند. هم‌چنین مثلثات پایه علم نقشه‌برداری است.

ساده‌ترین کاربرد مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه است. هر شکل هندسی دیگری را نیز می‌توان به مجموعه‌ای از مثلث‌های قائم‌الزاویه تبدیل کرد. شکل خاصی از مثلثات، مثلثات کروی است که برای مطالعه مثلثات روی سطوح کروی و منحنی به کار می‌رود.در اینجا لازم می دانم از دوست گرامی ام آقای رضا نظری که در تهیه ی این جزوات من را بسیار یاری نمودند ،کمال تشکر را داشته باشم.

۱ فصل اول

دایره ی مثلثاتی

زاویه : زاویه یا **گوشه** یکی از مفاهیم هندسه است و به "ناحیه‌ای از صفحه" گفته می‌شود که بین دو نیم‌خط که سر مشترک دارند محصور شده‌است. به سر مشترک این دو نیم‌خط **رأس زاویه** یا **گوشه** می‌گویند.



انواع زاویه ها:

زاویه ها را با توجه به مقدارشان به این صورت طبقه بندی می کنند:

زاویه تند : (acute angle) زاویه θ را تند یا حاده میگوییم هرگاه اندازه اش کمتر از ۹۰ در جه باشد. به عبارت دیگر:

زاویه راست : (right angle) زاویه θ را راست یا قائم میگوییم هرگاه اندازه آن برابر ۹۰ در جه باشد.

زاویه باز : (obtuse angle) زاویه θ را باز یا منفرجه می گوییم هرگاه بزرگتر از ۹۰ درجه و کمتر از ۱۸۰ درجه باشد. به عبارت دیگر:

زاویه نیم صفحه : (straight angle) زاویه θ را نیم صفحه میگوییم هرگاه برابر ۱۸۰ درجه باشد.

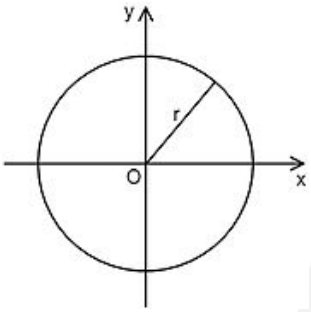
زاویه بازتاب : (reflex angle) زاویه θ را زاویه بازتاب میگوییم هرگاه بزرگتر از ۱۸۰ درجه و کمتر از ۳۶۰ درجه باشد. به عبارت دیگر:

زاویه کامل : (full angle) زاویه θ را کامل یا تمام صفحه می گوییم هرگاه برابر ۳۶۰ درجه باشد.

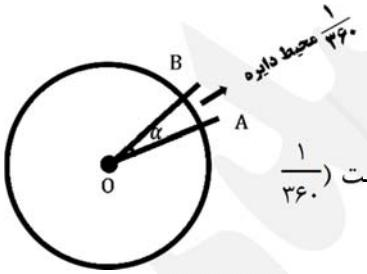
سوال ۱ : رابطه ی فیثاغورس را بیان کنید :

مثال ۱ : در یک مثلث طول اضلاع ، اعداد ۹ و ۱۲ و ۱۵ واحد هستند آیا چنین مثلثی می تواند قائم باشد؟

مثال ۲ : در یک مثلث طول ا ضلاع ، اعداد ۸ و ۱۲ و ۱۳ واحد ه ستند ،به نظر شما زاویه ی بین دو ضلع ۸ و ۱۲ می تواند منفرجه باشد؟

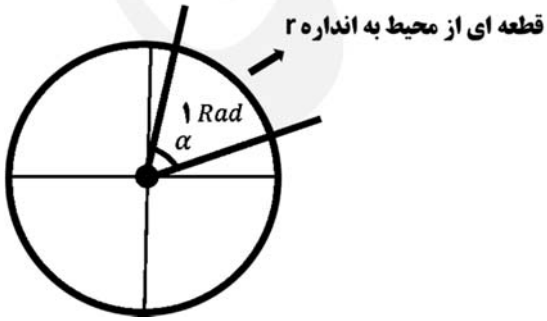


دایره مثلثاتی : دایره ای ا ست به مرکز مبدأ مخت صات و شعاع واحد . حرکت در جهت حرکت عقربه های ساعت را خلاف جهت مثلثاتی می گوییم و زاویه هایی که در این جهت طی شده باشند با علامت منفی نشان می دهیم. اما حرکت در خلاف عقربه های ساعت را حرکت در جهت مثلثاتی نامیده و زاویه هایی که در این جهت طی شده با شد را با علامت مثبت نشان می دهیم.



۱.۱ واحد های زاویه : ۱- درجه ۲- رادیان

درجه : هر یک درجه اندازه ی زاویه ای اســـت رو به رو به $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره اســـت ($\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره را در خود جایی داده است)



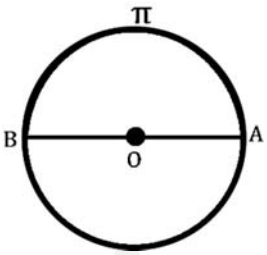
رادیان : اندازه ی زاویه ای است که کمان رو به روی آن برابر شعاع دایره است.

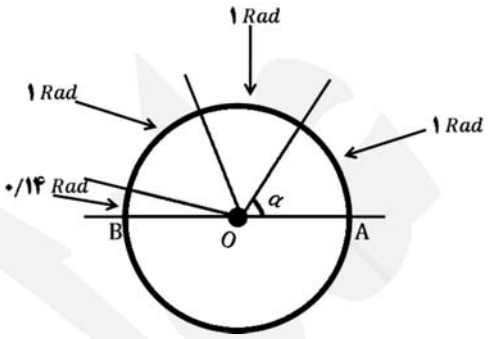
همچنین رابطه ی بین درجه و رادیان به شکل مقابل است : $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$

زیرا :

نتیجه : $\pi \sim ۱۸۰$

R	D
π	۱۸۰

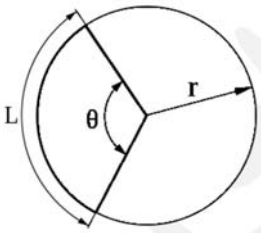




مثال ۳ : ۱ رادیان برابر با چند درجه است؟

سوال : هر یک از زاویه های زیر را به رادیان تبدیل کنید .

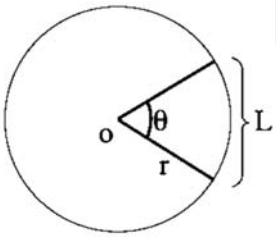
۳۶۰ و ۲۷۰ و ۱۸۰ و ۱۲۰ و ۹۰ و ۶۰ و ۴۵ و ۳۰ و ۱۵ و ۰



قطاع : بخشی از یک قرص یا دایره است که به دو شعاع و یک کمان محدود شده‌است. θ (زاویه مرکزی) روبروی کمان، r (شعاع دایره) و L (طول کمان) است .

نکته ۱ : یک قطاع با زاویه ی ۱۸۰ درجه را نیم‌دایره و با زاویه ۹۰ درجه را ربع دایره می‌نامند

در هر قطاع داریم :



$L = r\theta$

مثال ۴ : چرخ اتومبیلی به شعاع ۲۵ سانتی متر اگر مسافتی برابر با ۳ متر را طی کند ، به نظر شما محور این چرخ چند درجه را طی می کند؟

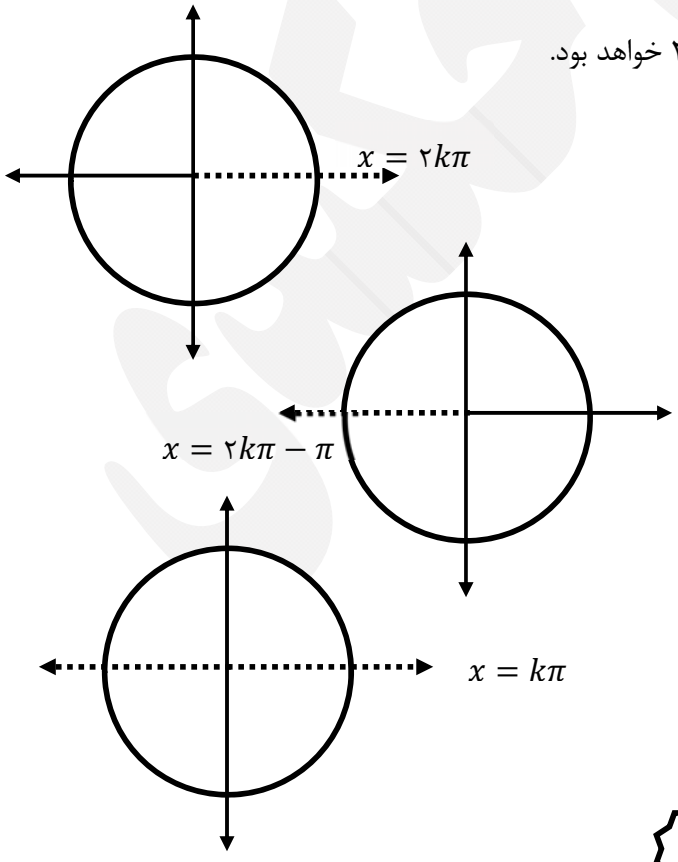
سوال ۲ : اگر عقربه ی دقیقه شمار به مدت ۲۰ دقیقه جابجا شود در این مدت عقربه ی ساعت شمار چه زاویه ای را طی می کند؟

معرفی محورهای مختصات روی دایره ی مثلثاتی بر اساس حرکت زوایا

یادآوری : نمایش اعداد صحیح به صورت $k \in \mathbb{Z}\ ,\ k$ و نمایش اعداد صحیح زوج به صورت $k \in \mathbb{Z}\ ,\ ۲k$

و نمایش اعداد صحیح فرد به صورت $k \in \mathbb{Z}\ ,\ ۲k - ۱$ خواهد بود.

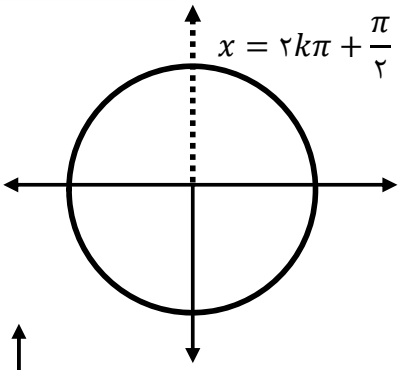
۱) سمت راست محور طول ها :



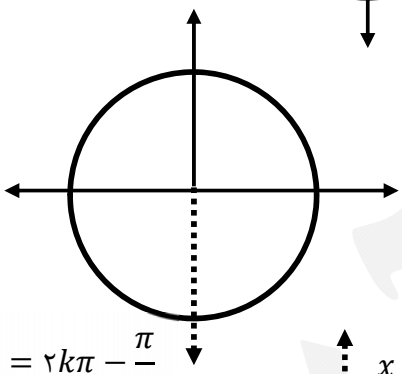
۲) سمت چپ محور طول ها :

۳) کل محور طول ها :

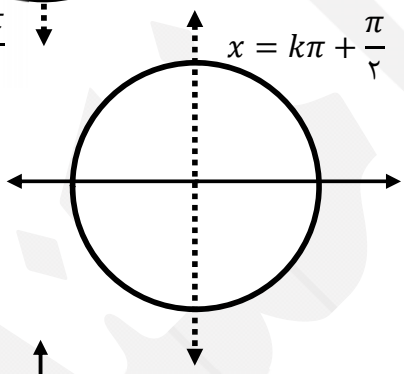
۴) سمت بالای محور عرض ها :



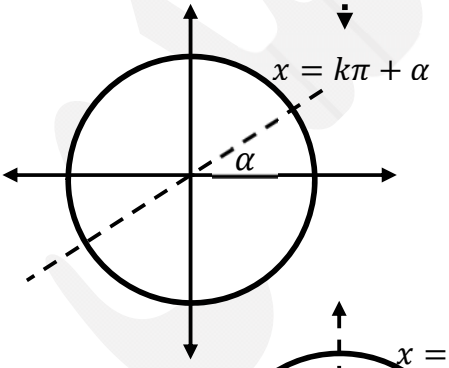
۵) سمت پایین محور عرض ها :



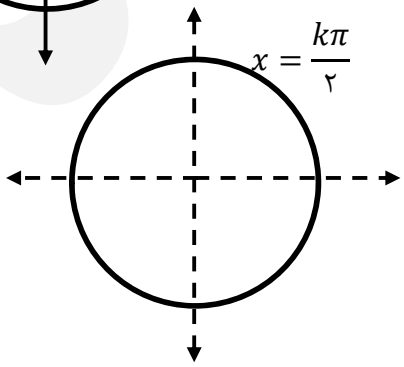
۶) کل محور عرض ها :



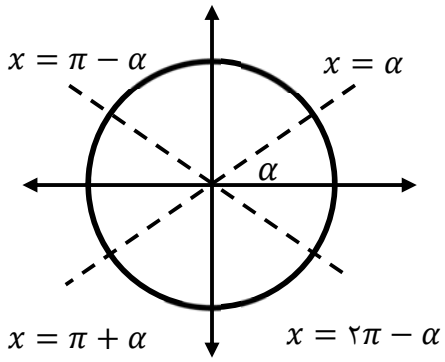
۷) حرکت محور طول ها :



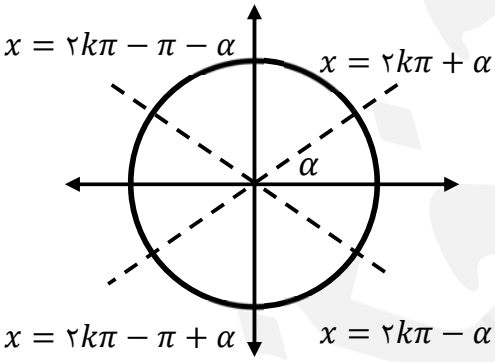
۸) کل محور مختصات :



موقعیت یک زاویه ی دخواه در دایره ی مثلثاتی (دور اول) : فرض کنید α زاویه ای در ربع اول باشـــد در این صورت :



موقعیت یک زاویه ی دخواه در دایره ی مثلثاتی (تمام دور ها) :



سوال ۳ : روی دایره ی مثلثاتی موقعیت زاویه $x = k\pi + \alpha$ را مشخص کنید .

به طور کلی می توان نتیجه گرفت که :

$$\begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \sim \alpha \\ x = ۲k\pi - \alpha \sim -\alpha \\ x = ۲k\pi + \pi + \alpha \sim \pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \sim \pi - \alpha \end{cases}$$

سوال ۴ : موقعیت هر کدام از زوایای زیر را روی دایره ی مثلثاتی مشخص کنید.

$$\begin{cases} \theta = k\pi + ۳۰ \\ \theta = \dfrac{k\pi}{۲} + ۶۰ \\ \theta = ۲k\pi - ۴۵ \\ \theta = ۲k\pi + ۴۵ \end{cases}$$



۲.۱ موقعیت های مختلف زوایای پرکاربرد : ۳۰ و ۴۵ و ۶۰

۱) ضربدر با مدل ۳۰ درجه:

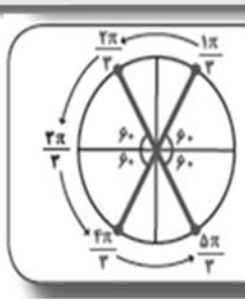


هر کدوم از ضلع‌های این ضربدر، با افق زاویه‌ی ۳۰ درجه (یعنی $\frac{\pi}{۶}$) می‌سازن . بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۳۰ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۶}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۶}$، $\frac{۵\pi}{۶}$، $\frac{۷\pi}{۶}$ و $\frac{۱۱\pi}{۶}$)

۲) ضربدر با مدل ۴۵ درجه:



ضلع‌های این ضربدر، با افق زاویه‌ی ۴۵ درجه (یعنی $\frac{\pi}{۴}$) می‌سازن. بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۴۵ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۴}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$)

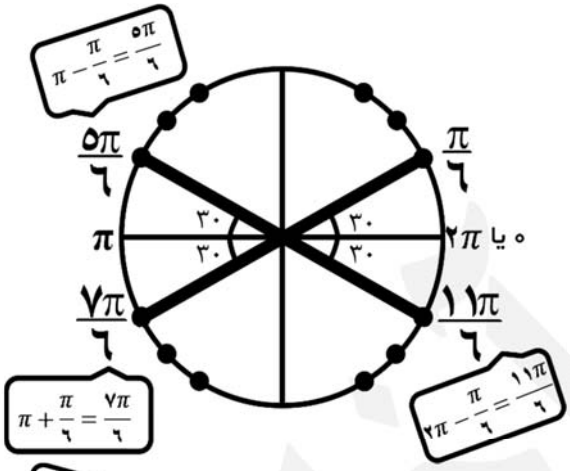


اضلاع این ضربدر، زاویه‌ی 60° یا $\frac{\pi}{3}$ با افق ایجاد می‌کنند.

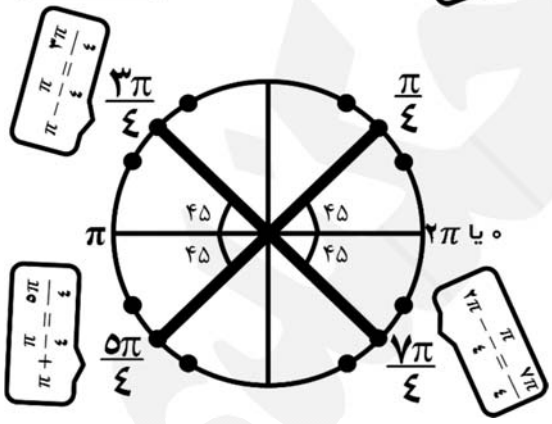
بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۶۰ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{3}$ هستن. (یعنی: $\frac{1\pi}{3}$، $\frac{2\pi}{3}$، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$)

۳) ضربدر با مدل ۶۰ درجه:

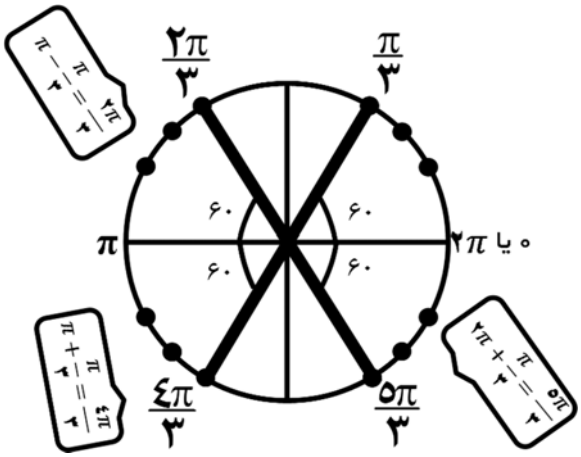
۱) زوایای مرتبط با ۳۰ درجه



۲) زوایای مرتبط با ۴۵ درجه



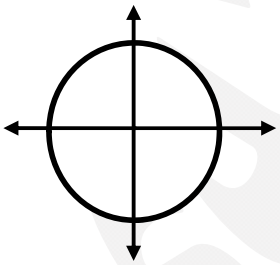
۳) زوایای مرتبط با ۶۰ درجه



سوال ۵ : موقعیت استاندارد هر کدام از زوایای زیر را روی دایره ی مثلثاتی مشخص کنید.

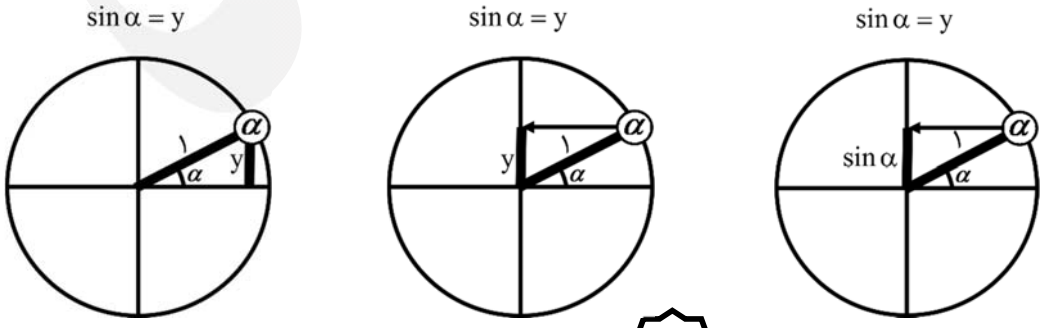
$$\begin{cases} \theta = ۱۹\pi \\ \theta = \frac{۱۹\pi}{۲} \\ \theta = \frac{-۱۹\pi}{۴} \\ \theta = \frac{-۱۹\pi}{۳} \\ \theta = \frac{-۱۹\pi}{۶} \end{cases}$$

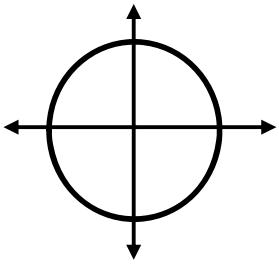
فراموش نکنیم که: برای یافتن قرینه ی یک زاویه ی کافی است آنرا نسبت به محور طول ها قرینه کنیم به عنوان مثال اگر زاویه ای در ربع اول باشد ، قرینه ی آن در ربع چهارم قرار خواهد گرفت.



۳.۱ معرفی نسبت های مثلثاتی :

۱.۳.۱ معرفی نسبت مثلثاتی $y = sin\alpha$

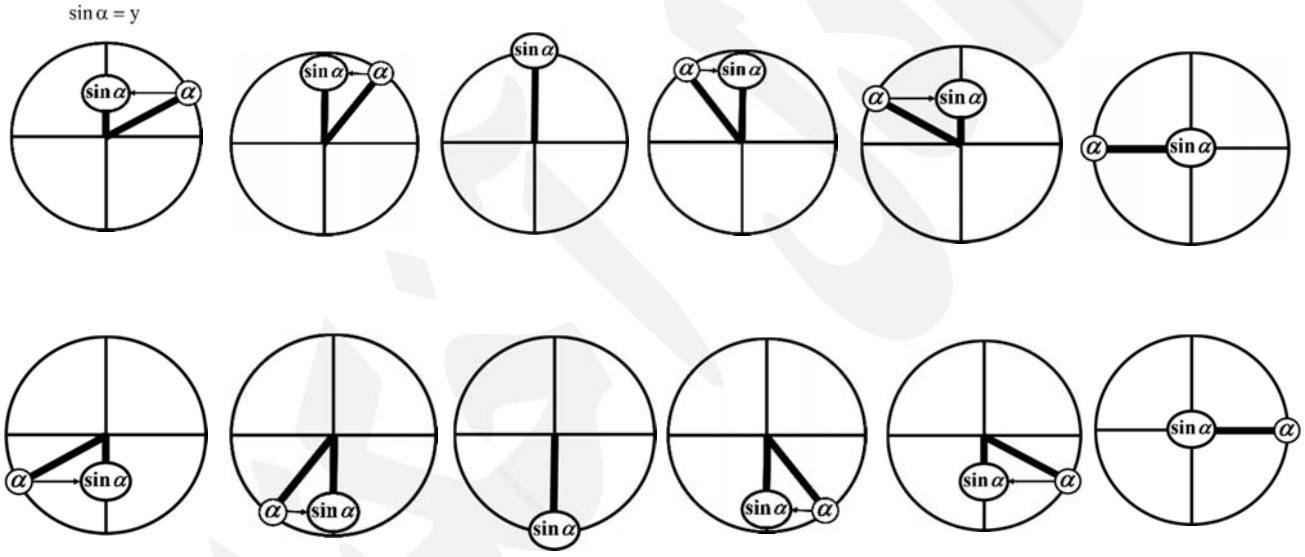




نتیجه : محور عرض ها ، همان محور سینوس ها می باشد. $-1 \leq sin\theta \leq 1$

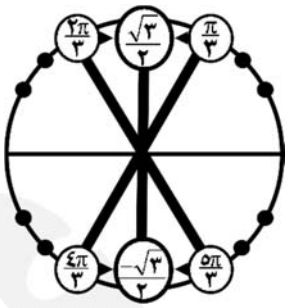
الف) بررسی علامت $sin\theta$ در دایره ی مثلثاتی :

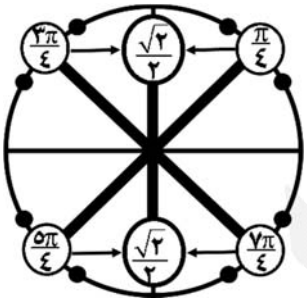
- ب) بررسی تغییرات $sin\theta$ در دایره ی مثلثاتی :

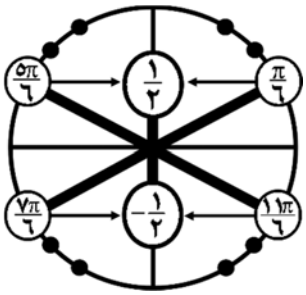


ج) بررسی مقادیر $sin\theta$ در زوایای پرکاربرد :

رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$sin\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰







۲.۳.۱ معرفی نسبت مثلثاتی $y = cos\alpha$

الف) تعریف $cos\alpha$ در مثلث قایم الزاویه :

ب) تعریف روی دایره ی مثلثاتی :

نتیجه : محور طول ها ، همان محور کسینوس هاست. $-۱ \leq cos\alpha \leq ۱$

ج) بررسی علامت $cos\alpha$ در دایره ی مثلثاتی :

د) بررسی تغیرات $cos\alpha$ از نظر افزایش و کاهش در دایره ی مثلثاتی :

ه) بررسی مقدار $cos\alpha$ در زوایای پرکاربرد :

در اینجا به بررسی $cos\alpha$ در زوایای ۳۰ درجه و ۴۵ درجه و ۶۰ درجه میپردازیم.

۱)

۲)

۳)

مثال ۵ : در هر کدام از حالت های زیر محدود ه ی $\cos\theta$ را تعیین کنید .

۱) $\frac{\pi}{۶} \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}$

۲) $\frac{۵\pi}{۴} \leq \theta \leq \frac{۹\pi}{۴}$

نتیجه : اگر زاویه ای در $\cos\theta$ مقدار بیشـــینه یا کمینه خود را طی کند نمی توانیم تنها مقادیر ابتدا و انتها را مقایسه کنیم.

سوال ۶ : اگر $\frac{۹\pi}{۴} \leq \theta \leq \frac{۵\pi}{۴}$ و $\cos ۳\theta = \frac{m-۱}{۲}$ ، آنگاه مقادیر ممکن برای m را بیابید.

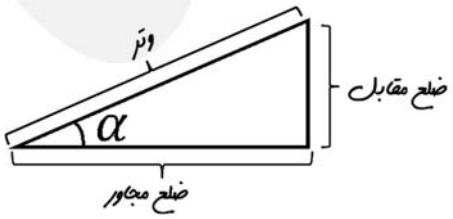
سوال ۷ : مقدار $\cos ۱$ را با $\sin ۱$ مقایسه کنید.

سوال ۸ : حاصل عبارت $|sinx - cosx|$ که در آن $x\epsilon[۰, \frac{\pi}{۴}]$ بدون قدرمطلق بنویسید.

سوال ۹ : دامنه ی هر کدام از توابع $y = \sqrt{۲sinx - ۱}$ و $y = \sqrt{۲cosx - ۱}$ را تعیین کنید.

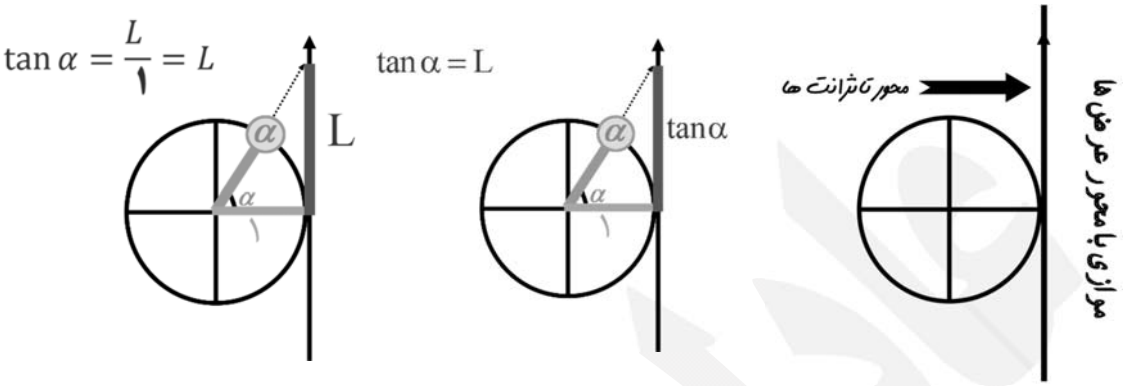
۳.۳.۱ معرفی نسبت مثلثاتی $y = tan\alpha$

الف) در مثلث قائم الزاویه داریم :



$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

ب)روی دایره ی مثلثاتی :



فراموش نکنیم که : $-\infty \leq tan\alpha \leq \infty$

برخی از کاربرد های فیزیکی :

الف) ثابت فنر در نیروی کشسانی فنر : $F = Kx$

ب) سرعت متوسط : $V = \frac{\Delta X}{\Delta t}$

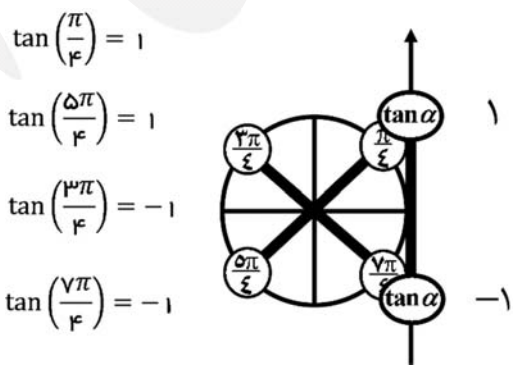
ج) ظرفیت گرمایی ویژه در $Q = mc\Delta\theta$

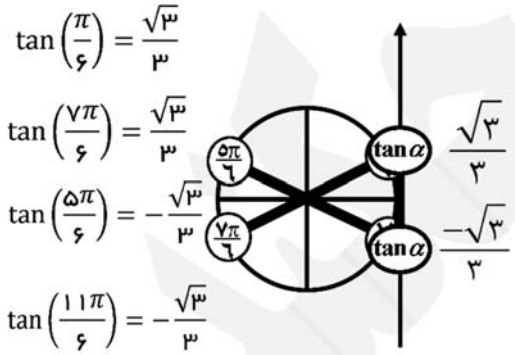
نکته ۲: نحوه یافتن $tan\alpha$ در دایره ی مثلثاتی : (در چهار ربع دایره ی مثلثاتی)

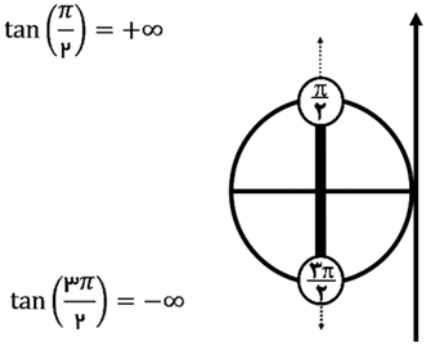
ج) بررسی تغییرات $tan\alpha$ در دایره ی مثلثاتی : (افزایش یا کاهش)

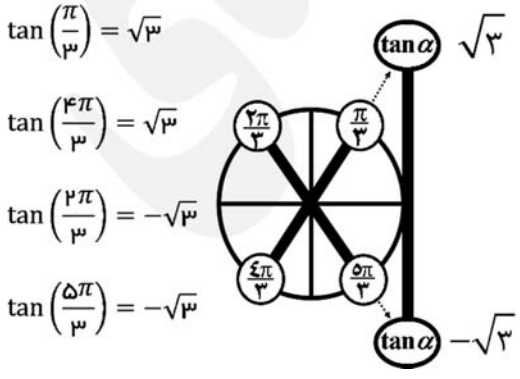
د) محاسبه ی $tan\alpha$ در زوایاس پرکاربرد :

رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π		
زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°	فرمول ها در مثلث	$r^۲ = x^۲ + y^۲$
$\boldsymbol{tan\theta}$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰	$\boldsymbol{tan\theta = \frac{y}{x}}$	$tan\theta \in \mathbb{R}$



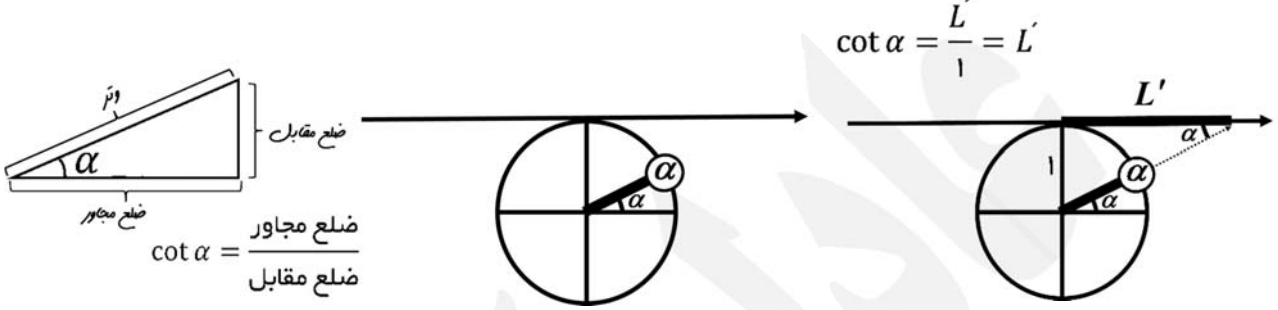




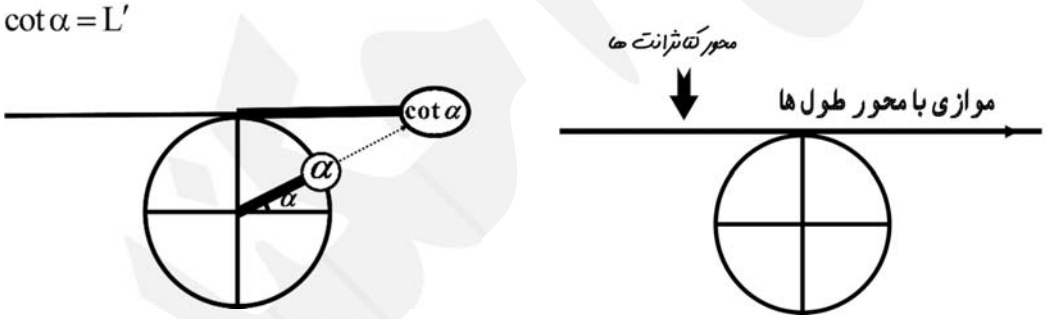


۴.۳.۱ معرفی نسبت مثلثاتی $y = cot\alpha$

الف) در مثلث قائم الزاویه داریم و روی دایره ی مثلثاتی :



می توان نتیجه گرفت که محور کتانژانت محوری اســت موازی با محور طول ها به فاصــله ی یک واحد از آن :

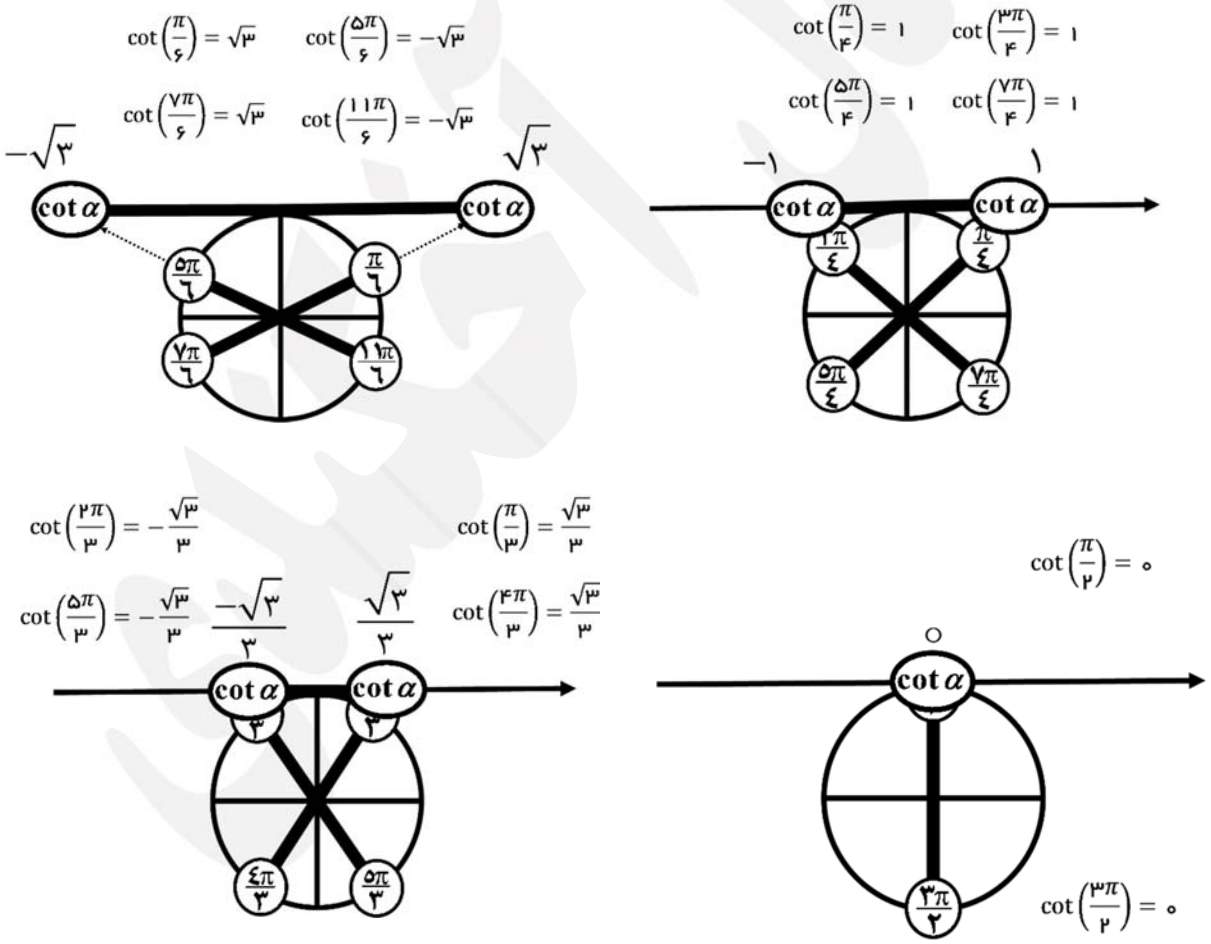


ب) نحوه یافتن $cot\alpha$ روی دایره ی مثلثاتی در تمام نواحی :

ج) بررسی تغییرات $cot\alpha$ در دایره ی مثلثاتی (افزایش یا کاهش)

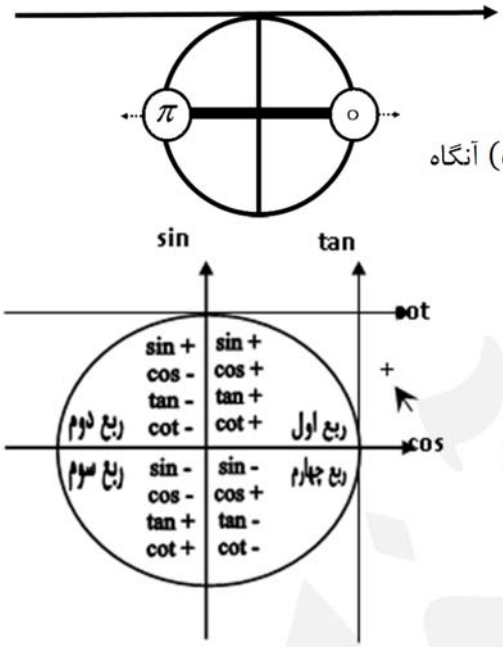
د) محاسبه ی مقدار $cot\alpha$ در زوایای پرکاربرد :

رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π		
زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°	فرمول ها در مثلث	$r^۲ = x^۲ + y^۲$
$\boldsymbol{cot\theta}$	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞	$\boldsymbol{cot\theta = \frac{x}{y}}$	$cot\theta \in \mathbb{R}$



سوال ۱۰ : در چه نقاطی تانژانت و کتانژانت تعریف نشده هستند؟

$\cot(\pi) = -\infty \qquad \cot(0) = +\infty$



سوال ۱۱ : اگر $(sinx) \times (cosx) < 0$ و $(cosx) \times (cotx) < 0$ آنگاه انتهای کمان x در ناحیه ای قرار دارد؟

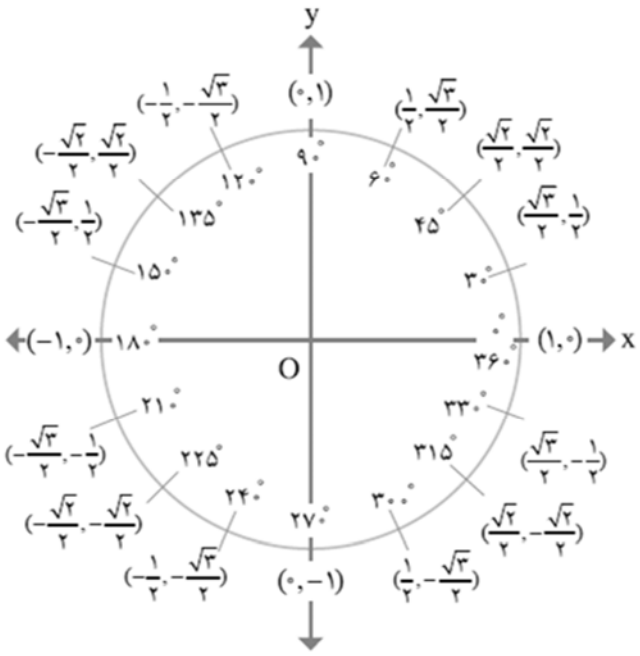
۴.۱ جمع بندی :

جدول نسبت های مثلثاتی (مقدار زاویه ها) :

رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π		
زاویه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	فرمول ها در مثلث	$r^2 = x^2 + y^2$
$sin\theta$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰	$sin\theta = \frac{y}{r}$	$-1 \le sin\theta \le 1$
$cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱	$cos\theta = \frac{x}{r}$	$-1 \le cos\theta \le 1$
$tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	ت ن	۰	ت ن	۰	$tan\theta = \frac{y}{x}$	$tan\theta \in \mathbb{R}$
$cot\theta$	ت ن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	ت ن	۰	ت ن	$cot\theta = \frac{x}{y}$	$cot\theta \in \mathbb{R}$

نکته ۳ : در دایره مثلثاتی داریم :

حال مقادیر دقیق سینوس و کسینوس بعضی از زوایای خاص را روی دایره مثلثاتی مشخص می کنیم.



نکته ۴: در ربع اول نامساوی های زیر را داریم :

$$۱)\ ۰ < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} sinx < cosx \\ tanx < cotx \end{cases}$$

$$۲)\ \frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \begin{cases} sinx > cosx \\ tanx > cotx \end{cases}$$

۵.۱ کمان های متمم، مکمل و قرینه

برای تعیین نسبت های مثلثاتی کمان های $\frac{k\pi}{۲} \pm \theta$ و $k\pi \pm \theta$ و $۲k\pi \pm \theta$ به ترتیب زیر عمل می کنیم :

۱) انتهای کمان را مشخص می کنیم که در کدام ناحیه قرار دارد .

۲) علامت نسبت مثلثاتی را در آن ناحیه مشخص می کنیم .

۳) اگر در کمان مورد نظر ، مضرب فرد $\frac{\pi}{۲}$ بود sin را به $\cos$ و tan را به $\cot$ و به عکس تبدیل می کنیم .

۴) مضارب ۲π را برای sin و $\cos$ حذف می کنیم .

۵) مضارب π را برای tan و $\cot$ حذف می کنیم .

مضارب فرد π

۱) $\sin(\pi - x) = sinx$

۲) $\cos(\pi - x) = -cosx$

۳) $tan(\pi - x) = -tanx$

۴) $cot(\pi - x) = -cotx$

۱) $\sin(\pi + x) = -sinx$

۲) $\cos(\pi + x) = -cosx$

۳) $tan(\pi + x) = tanx$

۴) $cot(\pi + x) = cotx$

مضارب زوج π و قرینه

۱) $\sin(-x) = -sinx$

۲) $\cos(-x) = cosx$

۳) $tan(-x) = -tanx$

۴) $cot(-x) = -cotx$

۱) $\sin(۲\pi + x) = sinx$

۲) $\cos(۲\pi + x) = cosx$

۳) $tan(۲\pi + x) = tanx$

۴) $cot(۲\pi + x) = cotx$

مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$

۱) $\sin\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = cosx$

۲) $\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = sinx$

۳) $tan(\frac{\pi}{۲} - x) = cotx$

۴) $cot(\frac{\pi}{۲} - x) = tanx$

۱) $\sin\left(\frac{\pi}{۲} + x\right) = cosx$

۲) $\cos\left(\frac{\pi}{۲} + x\right) = -sinx$

۳) $tan\left(\frac{\pi}{۲} + x\right) = -cotx$

۴) $cot\left(\frac{\pi}{۲} + x\right) = -tanx$

۱) $\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)=-cosx$

۲) $\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)=sinx$

۳) $tan\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)=-cotx$

۴) $cot\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)=-tanx$

۱) $\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}-x\right)=-cosx$

۲) $\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-x\right)=-sinx$

۳) $tan(\frac{۳\pi}{۲}-x)=cotx$

۴) $cot(\frac{۳\pi}{۲}-x)=tanx$

تست ۱: اگر $tan\theta = ۰/۲$ باشد مقدار جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right)-cos(\pi+\theta)}{sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}$ کدام است ؟

(ریاضی داخل کشور ۹۱)

الف) -۲ ب) $۱/۲$ ج) ۲ د) ۳

تست ۲: اگر $tan۲۰^{\circ} = ۰/۴$ باشد مقدار جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\sin(۲۵۰)+cos(۷۰۰)}{sin(۵۶۰)-\sin(۱۱۰)}$ کدام است ؟

(تجربی خارج کشور ۹۴)

الف) $-\frac{۳}{۴}$ ب) $\frac{۳}{۴}$ ج) $\frac{۷}{۳}$ د) $\frac{۵}{۸}$

تست ۳: اگر $tan۱۵^{\circ} = ۰/۲۸$ باشد مقدار جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\sin(۲۸۵)+cos(۲۵۵)}{sin(۵۲۵)-\sin(۱۰۵)}$ کدام است ؟

(تجربی داخل کشور ۹۴)

الف) $-\frac{۱۶}{۹}$ ب) $-\frac{۹}{۱۶}$ ج) $\frac{۹}{۱۶}$ د) $\frac{۱۶}{۹}$

نکته ۵: اگر دو زاویه ی α و β متمم هم باشند آنگاه : $\alpha + \beta = ۹۰$

۱) $\sin(\alpha) = cos(\beta)$

۲) $\cos(\alpha) = sin(\beta)$

۳) $\tan(\alpha) = cot(\beta)$

۴) $\cot(\alpha) = tan(\beta)$

نکته۶ : اگر دو زاویه ی α و β متکمل هم باشند آنگاه : $\alpha + \beta = ۱۸۰$

۱) $\sin(\alpha) = sin(\beta)$

۲) $\cos(\alpha) = -cos(\beta)$

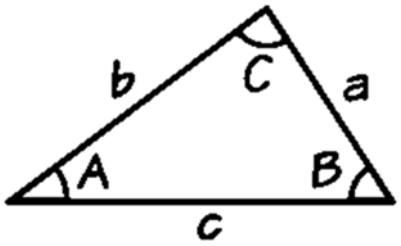
۳) $\tan(\alpha) = -tan(\beta)$

۴) $\cot(\alpha) = -cot(\beta)$

مثال ۶ : حاصل $\cos(\frac{۱۱\pi}{۱۴}) + \cos(\frac{۹\pi}{۱۴}) + \cos(\frac{۵\pi}{۱۴}) + \cos(\frac{۳\pi}{۱۴})$ را بیابید.

۶.۱ کاربرد مثلثات

قانون ک سینوس ها : وقتی دو ضلع از یک مثلث و زاویه ی بین آن ها را داشته باشیم ، در این حالت از قانون کسینوس ها استفاده می کنیم .



$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos C$$
$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos B$$
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$$

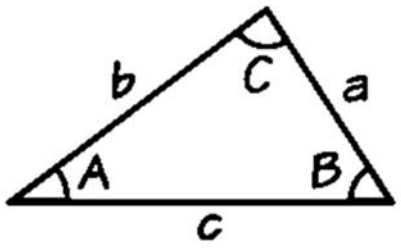
نکته ۷ : در یک متوازی الاضلاع با طول اضلاع a و b وزاویه ی θ بین آنها داریم :

$$S = a.b.sin\theta$$

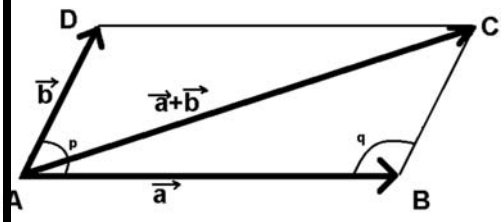
نکته ۸ : در یک متوازی الاضلاع با دو قطر a و b و زاویه ی θ بین آنها داریم :

$$S = \frac{۱}{۲}a.b.sin\theta$$

نکته ۹ : اگر دو ضلع از مثلثی و زاویه ی بین آن ها را داشته باشیم ، آنگاه مساحت مثلث از رابطه ی زیر محاسبه می شود :



$$S = \frac{۱}{۲}a.b.sinC$$
$$S = \frac{۱}{۲}a.c.sinB$$
$$S = \frac{۱}{۲}b.c.sinA$$



نکته ۱۰ : این قانون (کسینوی ها) در فیزیک به نام قانون تفاضل بردارها شناخته می شود. همچنین برای برآیند دو بردار داریم :

نکته ۱۱ : قانون سینوس ها ، برای حل مثلث هایی که درآن یک ضلع و زاویه ی رو به روی آن ها را داریم بسیار سودمند خواهد بود .

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$$ (قانون سینوس ها)

نکته ۱۲ : اگر سه ضلع از مثلثی مشخص باشد داریم :

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\text{مساحت} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

تست ۴ : مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد برابر $۲۴\sqrt{۵}$ واحد مربع است، بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟(ریاضی داخل کشور ۹۴)

الف) ۲۱ ب) ۲۲ ج) ۲۳ د) ۲۴

نکته ۱۳ : در کاربرد های مثلثات تا جایی که ممکن است شکل رسم کنید.

تست ۵ : در مثلث قائم الزاویه ای سینوس یکی از زاویه ها $\frac{۵}{۷}$ و اندازه وتر ۱۴ واحد است. کوچکترین ضلع مثلث کدام است ؟

الف) $۲\sqrt{۳}$ ب) $۳\sqrt{۷}$ ج) $۴\sqrt{۶}$ د) $۵\sqrt{۲}$

تست ۶ : ناظری به فاصله ۳/۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه ای قرار دارد ایستاده است . زاویه ی رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق ۴۵ و ۴۰ درجه است . ارتفاع مجسمه چقدر است ؟ $(\tan ۴۰ = ۰/۸)$

الف) ۶ ب) ۶/۴ ج) ۷ د) ۷/۲

تست ۷ : مساحت مثلثی به طول اضلاع ۷,۹,۱۲ کدام است ؟

الف) $۱۵\sqrt{۲}$ ب) $۱۴\sqrt{۳}$ ج) $۱۲\sqrt{۵}$ د) $۱۴\sqrt{۵}$

تمرین : در مثلث ABC مقدار $cCosB + bCosC$ کدام است ؟

الف) a ب) $acosA$ ج) $asinA$ د) $a^۲$

تست ۸ : بزرگترین زاویه از مثلثی به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ کدام است ؟

الف) ۶۰ ب) ۷۵ ج) ۱۰۵ د) ۱۲۰

سوال ۱۲ : در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC = ۳ + \sqrt{۳}$ و زاویه های $B = ۶۰$ و $C = ۴۵$ اندازه ی ضلع AC را بیابید.

تست ۹ : بیشترین مقدار $sin(\pi x) + sin(\pi y)$ کدام است ؟

الف) ۱ ب) $\sqrt{۲}$ ج) $\sqrt{۳}$ د) ۲

تست ۱۰ : مقدار $tan(۱).tan(۲).tan(۳) \dots tan(۸۸).tan(۸۹)$ کدام است ؟

الف) ۱ ب) صفر ج) -۱ د) $tan۵۰$

تست ۱۱ : حاصل عبارت $\frac{sinx+cosx}{۲} + \frac{|sinx-cosx|}{۲}$ که در آن $x\epsilon[۰,\frac{\pi}{۴}]$ کدام است ؟

الف) $sinx$ ب) $cosx$ ج) $sinx + cosx$ د) $cosx - sinx$

تست ۱۲ : اگر $sinx + cosx < ۰$ و $sinx \,.\, cosx > ۰$ آنگاه انتهای کمان a در کدام ناحیه مثلثاتی است ؟

الف) اول ب) دوم ج) سوم د) چهارم

تست ۱۳ : در یک پنج ضلعی منتظم که طول ضلع آن $\sqrt{۵}$ است،طول قطر پنج ضلعی را بیابید. $cos۷۲ = ۰/۳$.

الف) $\sqrt{۱۳}$ ب) $\sqrt{۱۵}$ ج) $۲\sqrt{۳}$ د) $۳\sqrt{۳}$

۲ بررسی نمودار توابع مثلثاتی

دوره تناوب : کوچکترین عدد حقیقی مثبت که به ازای آن نمودار تابع کامل گشـــته و بعد از آن مجددا تکرار می شود دوره ی تناوب گویند.

۱.۲ دوره تناوب توابع مثلثاتی

۱) $y = sinax$, $y = cosax$ $T = \frac{۲\pi}{|a|}$

۲) $y = tanax$, $y = cotax$ $T = \frac{\pi}{|a|}$

۳) $y = \sin^{۲k}(ax + c)$, $y = \cos^{۲k}(ax + c)$ $T = \frac{\pi}{|a|}$

۴) $y = |\sin(ax + c)|$, $y = |\cos(ax + c)|$ $T = \frac{\pi}{|a|}$

۵) $\sin^{۲k+۱}(ax + c)$, $y = \cos^{۲k+۱}(ax + c)$ $T = \frac{۲\pi}{|a|}$

۶) $y = tan^{k}(ax + c)$, $y = cot^{k}(ax + c)$ $T = \frac{\pi}{|a|}$

سوال ۱۳ : دوره ی تناوب توابع زیر را بیابید :

۱) $y = sin(۲x)$

۲) $y = sin^{۳}(-۲x)$

۲) $y = sin^{۴}(-۲x)$

۲.۲ نمودار توابع مثلثاتی

۱) رسم تابع مثلثاتی $y = sin(x)$

نکته ۱۴ : قبل از رسم دوره تناوب را مشخص کنید :

سوال ۱۴ : نمودار توابع $y = sin(۲x)$ و $y = sin\left(\frac{۱}{۲}x\right)$ را رسم کنید.

نتیجه :

$$y = \sin(ax) \Rightarrow \begin{cases} a > ۱ \rightarrow \text{نمودار جمع می شود} \\ ۰ < a < ۱ \rightarrow \text{نمودار باز می شود} \end{cases}$$

سوال ۱۵ : نمودار تابع $y = sin(-x)$ و $y = sin(-۲x)$ را رسم کنید.

نتیجه : در این حالت ابتدا نمودار را نسبت به محور طول ها قرینه کنید سپس مانند حالت مثبت عمل کنید.

سوال ۱۶ : نمودار تابع $y = ۲sin(x)$ و $y = \frac{۱}{۲}sin(x)$ و $y = \frac{-۱}{۲}sin(x)$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

$$y = b\sin(x) \Rightarrow \begin{cases} b > ۱ \rightarrow & \text{سبب کشیدگی عمودی می شود} \\ ۰ < b < ۱ \rightarrow & \text{سبب جمع شدن عمودی می شود} \\ b < ۰ \rightarrow & \end{cases}$$

ابتدا نمودار را نسبت به محور طول ها قرینه کنید سپس مانند حالات قبل عمل کنید.

تمرین : نمودار $y = -۳sin(۲x)$ را رسم کنید.

سوال ۱۷ : نمودار تابع $y = sin(x) + ۲$ و $y = sin(x) - ۱$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

$$y = \sin(x) + d \Rightarrow \begin{cases} d > ۰ \rightarrow & \text{d واحد به سمت بالای محور عرض ها حرکت میکنیم} \\ d < ۰ \rightarrow & \text{d واحد به سمت پایین محور عرض ها حرکت میکنیم} \end{cases}$$

سوال ۱۸ : نمودار تابع $y = sin(x + ۱)$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

$$y = \sin(x + c) \Rightarrow \begin{cases} c > 0 \rightarrow & \text{c واحد به سمت چپ محور طول ها حرکت میکنیم} \\ c < 0 \rightarrow & \text{c واحد به سمت راست محور طول ها حرکت میکنیم} \end{cases}$$

۲) رسم تابع مثلثاتی $y = cos(x)$

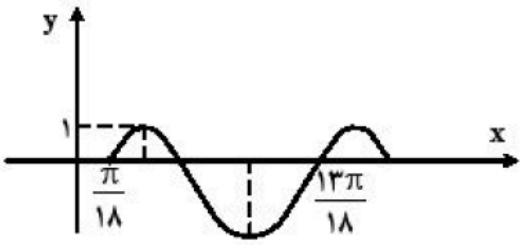
نکته ۱۵: قبل از رسم دوره تناوب را مشخص کنید :

سوال ۱۹ : نمودار توابع $y = cos(2x)$ و $y = -3cos(x)$ و $y = cos\left(\frac{-1}{2}x\right)$ و $y = 3cos(-2x)$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

جمع بندی برای رسم تابع های $y = bsin(ax)\,, y = bcos(ax)\,,\quad b > ۰$ در یک دوره ی تناوب ، از آن جایی که دوره ی تناوب این توابع $\frac{۲\pi}{|a|}$ اســت ، کافی اســت نمودار را در بازه ی $[۰, \frac{۲\pi}{|a|}]$ رســم نماییم . ماکزیمم و مینیمم این دو تابع $|b|$ و $-|b|$ خواهد بود . اگر $a < ۰$ ، جای نقاط ماکزیمم و مینیمم برای تابع سینوی عوض می شود . همچنین نمودار توابع

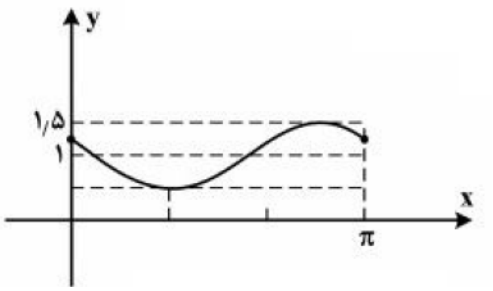
$y = bsinax\,, y = bcosax$ به دست می آید . در صورتی که $c > ۰$ نمودار c واحد به سمت راست و در صورتی که $c < ۰$ ، نمودار c واحد به چپ انتقال می یابند . $y = bsina(x - c)\,, y = bcosa(x - c)$ با انتقال افقی $|c|$ واحدی تابع های

تست ۱۴ : شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a - ۲\cos(bx + \frac{\pi}{۲})$ است. $a + b$ کدام است ؟(ر-۹۵)



الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) ۱ ج) $\frac{۳}{۲}$ د) ۲

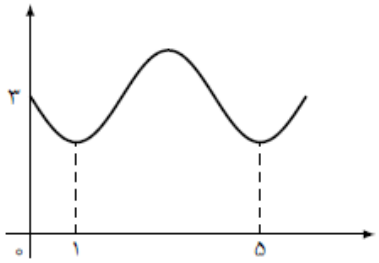
تست ۱۵ : شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = ۱ + a\sin(bx - \frac{\pi}{۶})$ است. $a + b$ کدام است ؟



الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) ۱ ج) $\frac{۳}{۲}$ د) ۲

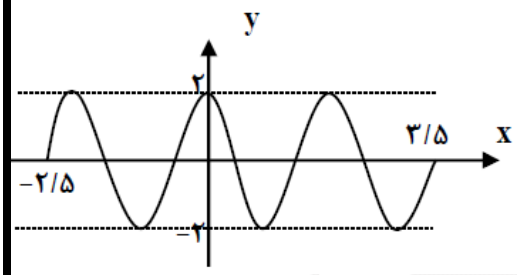
تست ۱۶ : شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است . مقدار y در نقطه $x = \frac{۲۵}{۳}$ کدام است ؟

(سراسری تجربی ۹۳)



الف) ۲ ب) ۲/۵ ج) ۳/۵ د) ۳

تست ۱۷ : شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲} + bx)$ است . $a.b$ کدام است ؟



الف) ۲ ب) ۲/۵ ج) ۳/۵ د) ۳

تست ۱۸ : معادله $\sin x - \sqrt{x}\cos x = ۰$ در بازه $(۰,۳\pi)$ چند ریشه دارد ؟

الف) ۲ ب) ۱ ج) ۳ د) ۴

تست ۱۹: معادله $x\sin x - ۱ = ۰$ در بازه $[-\pi,\pi]$ چند ریشه حقیقی دارد ؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۵

تست ۲۰ : نمودار تابع به معادله $y = -۴\cos(\frac{\pi}{۴} - ۳\pi x)$ روی بازه $[-۱,۱]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد ؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

تست ۲۱ : اختلاف بیشترین و کمترین مقدار تابع f با ضابطه $f(x) = ۱ - ۳\cos^{۲} x$ کدام است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶

۳ فرمول های مقدماتی

۱) $\sin^{۲} x + \cos^{۲} x = ۱ \rightarrow$

۲) $tanx = \frac{sinx}{cosx}$, $cotx = \frac{cosx}{sinx}$

۳) $tanx.cotx = ۱ \rightarrow tan\frac{x}{۲}.cot\frac{x}{۲} = ۱$ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۴) $۱ + tan^{۲}x = \frac{۱}{cos^{۲} x}$ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۵) $۱ + cot^{۲} x = \frac{۱}{\sin^{۲} x}$ $x \neq k\pi$

۱.۳ فرمول های مجموع و تفاضل دو زاویه

۱) $\sin(a \pm b) = sina.cosb \pm sinb.cosa$

۲) $\cos(a \pm b) = cosa.cosb \mp sina.sinb$

۳) $tan(a \pm b) = \frac{tana \pm tanb}{۱ \mp tana.tanb}$

۴) $\frac{۱ + tana}{۱ - tana} = tan\left(\frac{\pi}{۴} + a\right)$, $\frac{۱ - tana}{۱ + tana} = tan\left(\frac{\pi}{۴} - a\right)$

۵) $cot(a \pm b) = \frac{cota \times cotb \mp ۱}{cota \pm cotb}$

۶) $\sin(a + b).\sin(a - b) = \sin^{۲} a - \sin^{۲} b$

۷) $\cos(a + b).\cos(a - b) = \cos^{۲} a - \sin^{۲} b$

تست ۲۲ : اگر $tan(a+۲۰)=\frac{۳}{۴}$ باشد ، مقدار $cot(۲۵-a)$ کدام است ؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸

تست ۲۳: اگر $tan(a-۱۵)=\frac{۱}{۳}$ باشد ، مقدار $tan(۶۰-a)$ کدام است ؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) ۴ د) ۲

تست ۲۴ : اگر $\tan b = ۳$ و $\tan(a-b)=۲$ مقدار $\tan ۳a$ کدام است ؟

الف) -۱ ب) ۱ ج) $\sqrt{۳}$ د) $-\frac{۱}{۳}$

تست ۲۵ : حاصل $\cos x + \sqrt{۳}\sin x$ به ازای $x = ۱۵^\circ$ کدام است ؟

الف) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ ب) $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ ج) $\sqrt{۲}$ د) $\sqrt{۶}$

۲.۳ نسبت های مثلثاتی $2a$ و $3a$ بر حسب a

$$۱)\ sin۲a = ۲sina.cosa \rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}sin۲a = sina.cosa \\ sina = ۲sin\frac{a}{۲}.cos\frac{a}{۲} \\ sin۴a = ۲sin۲a.cos۲a \end{cases}$$

۲) $cos۲a = \cos^۲ a - \sin^۲ a \rightarrow \begin{cases} cos۲a = ۲\cos^۲ a - ۱ \\ cos۲a = ۱ - ۲\sin^۲ a \end{cases}$ نسبت طلایی

۳) $\sin^۲ a = \frac{۱ - cos۲a}{۲} \rightarrow ۲\sin^۲ a = ۱ - cos۲a$ و $\cos^۲ a = \frac{۱ + cos۲a}{۲} \rightarrow ۲\cos^۲ a = ۱ - cos۲a$

۴) $sin۲a = \frac{۲tana}{۱ + tan^۲ a}$

۵) $cos۲a = \frac{۱ - tan^۲ a}{۱ + tan^۲ a}$

۶) $tan۲a = \frac{۲tana}{۱ - tan^۲ a}$

۷) $cot۲a = \frac{۲tan^۲ a - ۱}{۲cota}$

۸) $\frac{sinx}{۱ + cosx} = tan\frac{x}{۲}$

۹) $cota - tana = ۲cot۲a$

۱۰) $tanx + cotx = \frac{۱}{sinx.cosx} = \frac{۲}{sin۲x}$

۱۱) $\cos^۴ x - \sin^۴ x = \cos^۲ x - \sin^۲ x = cos۲x$

۱۲) $(sinx \pm cosx)^۲ = ۱ \pm ۲sinx.cosx = ۱ \pm sin۲x$

۱۳) $\frac{sinx}{۱ - cosx} = \frac{۱ + cosx}{sinx}$

۱۴) $cos۳a = ۴\cos^۳ a - ۳cosa$

۱۵) $sin۳a = ۳sina - ۴\sin^۳ a$

۱۶) $sina.\sin\left(\frac{\pi}{۳} - a\right).\sin\left(\frac{\pi}{۳} + a\right) = \frac{۱}{۴}sin۳a$

۱۷) $cosa.\cos\left(\frac{\pi}{۳} - a\right).\cos\left(\frac{\pi}{۳} + a\right) = \frac{۱}{۴}cos۳a$

۱۸) $tana.tan\left(\frac{\pi}{۳}-a\right).tan\left(\frac{\pi}{۳}+a\right)=tan۳a$

۱۹) $tanx+tany+ktanxtany=k$

۲۰) $\sin^{۴}x+\cos^{۴}x=۱-۲\sin^{۲}x.cos^{۲}x$

۲۱) $\sin^{۶}x+\cos^{۶}x=۱-۳\sin^{۲}x.\cos^{۲}x=۱-\frac{۳}{۴}\sin^{۲}۲x$

نکته ۱۶ : به ازای هر a,b داریم :

$$-\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}\leq a\sin x+b\cos x\leq\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$$

تست ۲۶ : حاصل $\frac{sin۳acosa}{sina}-cos۳a$ برابر کدام است ؟

الف) $-cosa$ ب) $cotga$ ج) $۲sina$ د) $۲cosa$

تست ۲۷ : اگر $sin۲a>۰$ و $cosa.tana<۰$ آنگاه انتهای کمان a در کدام ناحیه است ؟

الف) اول ب) دوم ج) سوم د) چهارم

تست ۲۸ : اگر $\sin x=\frac{۲}{۳}$ باشد مقدار $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۴x)$ کدام است ؟

الف) $-\frac{۷۹}{۸۱}$ ب) $-\frac{۲}{۲۷}$ ج) $\frac{۷۹}{۸۱}$ د) $-\frac{۲۶}{۲۷}$

تست ۱: حاصل $sin۵۰ \cdot sin۱۱۰$ در $\sin ۱۰$ کدام است ؟

الف) ۱ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{۱}{۸}$ د) $\frac{۱}{۱۶}$

تست ۳۰: اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{۱}{۲}$ باشد مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha)$ کدام است ؟(سراسری تجربی داخل کشور ۹۵)

الف) $-\frac{۳}{۴}$ ب) $-\frac{۳}{۸}$ ج) $\frac{۳}{۸}$ د) $\frac{۳}{۴}$

تست ۳۱: اگر $\frac{\sin \alpha}{۱+\cos a} = \frac{۱}{۲}$ باشد مقدار $\tan(\frac{\pi}{۲} + \frac{\alpha}{۲})$ کدام است ؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۵)

الف) -۲ ب) $-\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) ۲

تست ۳۲: اگر $\tan \frac{x}{۲} - \cot \frac{x}{۲} = ۱$ مقدار $\tan ۲x$ کدام است ؟(سراسری خارج کشور ۹۴)

الف) $-\frac{۳}{۲}$ ب) $\frac{۳}{۴}$ ج) $\frac{۴}{۳}$ د) $\frac{۳}{۲}$

تست ۳۳: اگر $\tan \beta = \frac{۱}{۲}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{۴}$ مقدار $\sin ۲\alpha$ کدام است ؟(سراسری تجربی داخل کشور ۹۴)

الف) ۰ / ۴۵ ب) ۰ / ۶ ج) ۰ / ۷۵ د) ۰ / ۸

تست ۳۴: اگر $\cos\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{۲}{۳}$ مقدار $cos۲x$ کدام است ؟(سراسری تجربی داخل کشور ۹۳)

الف) $-\frac{۲}{۹}$ ب) $-\frac{۱}{۹}$ ج) $\frac{۱}{۹}$ د) $\frac{۲}{۹}$

تست ۳۵: اگر $\tan\beta=۳\ ,\ \tan\alpha=۲$ باشد مقدار $\tan(۲\alpha-\beta)$ کدام است ؟(سراسری تجربی خارج کشور ۹۳)

الف) $\frac{۲}{۹}$ ب) $\frac{۱۱}{۹}$ ج) $\frac{۱۷}{۷}$ د) $\frac{۲۴}{۷}$

تست ۳۶: ساده شده کسر $\frac{(۱+\tan^{۲}\theta)(۱+\cot^{۲}\theta)}{۱-\sin^{۲}\theta-\cos^{۴}\theta}$ کدام است ؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۱)

الف) $۸\cos^{-۲}۲\theta$ ب) $۸\sin^{-۲}۲\theta$ ج) $۱۶\sin^{-۴}۲\theta$ د) $۱۶\cos^{-۴}۲\theta$

تست ۳۷: اگر $\tan\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}-x\right)=۱$ باشد مقدار $cos۲x$ کدام است ؟ (سراسری تجربی داخل کشور ۸۸)

الف) $-\frac{۲}{۳}$ ب) $-\frac{۱}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۳}$ د) $\frac{۲}{۳}$

تست ۳۸: به ازای کدام مقدار k تساوی $\frac{۱}{\cos^{۴}x}+\frac{k}{\cos^{۲}x}=tan^{۴}x-۱$ یک اتحاد است ؟

الف) ۲ ب) ۱ ج) ۱- د) ۲-

تست ۳۹ : اگر $a+b=\frac{\pi}{۴}$ باشد حاصل $8cosacosbcos\left(\frac{\pi}{۲}-a\right)\cos(\frac{\pi}{۲}-b)$ برابر کدام است ؟

الف) $sin۴a$ ب) $cos۴a$ ج) $\sin^{۲}۲a$ د) $\cos^{۲}۲a$

تست ۴۰ : اگر $\sin x\cos x=\frac{۲}{۵}$ حاصل $\tan^{۴}x+\cot^{۴}x$ تقریبا چقدر است ؟

الف) ۱۴/۵ ب) ۱۵/۵ ج) ۱۶ د) ۱۷

تست ۴۱ : اگر $۰\leq\alpha\leq\frac{\pi}{۲}$ باشد بیشترین مقدار $\sin\theta+\cos\theta$ کدام است ؟

الف) ۱ ب) $\sqrt{۲}$ ج) $\frac{۳}{۲}$ د) $\sqrt{۳}$

تست ۴۲ : به ازای کدام مقدار x ، $\frac{۳\pi}{۴}<x<\frac{۵\pi}{۶}$ کدام نامساوی درست است ؟

الف) $\sin^{۳}x>cosx$ ب) $\sin^{۳}x<cos^{۳}x$ ج) $cosx>cos^{۲}x$ د) $\cos^{۳}x>cosx$

تست ۴۳ : به ازای کدام مقدار x ، $sin(x)=x^{۲}-۶x+۱۰$ همواره درست است ؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

سوال : اگر $\frac{sinx}{۱+cosx} = \frac{۱}{۲}$ ، باشد مقدار $tanx$ کدام است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

۳.۳ فرمول های تقلیل (کاهش) دادن توان ها یا ازدیاد آن ها

۱) $(sinx \pm cosx)^۲ = ۱ \pm sin۲x$

۲) $۱ - cos۲x = ۲\sin^۲ x$

۳) $۱ + cos۲x = ۲\cos^۲ x$

۴) $tan^۲x = \frac{۱ - cos۲x}{۱ + cos۲x}$

۵) $\sin^۴ x + \cos^۴ x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x\cos^۲ x$

۶) $\sin^۶ x + \cos^۶ x = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x = ۱ - ۳\sin^۲ x\cos^۲ x$

تست ۴۴ : خلاصه عبارت $tan۲۰(۱ + cos۴۰)$ برابر کدام است ؟

الف) $sin۲۰$ ب) $sin۴۰$ ج) $cos۲۰$ د) $cos۴۰$

تست ۴۵ : اگر $\frac{sinx}{۱-cosx} = ۲$ باشد ، مقدار $cotx$ کدام است ؟

الف) $\frac{۵}{۴}$ ب) $\frac{۵}{۲}$ ج) $\frac{۳}{۲}$ د) $\frac{۳}{۴}$

تست ۴۶ : اگر $\sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشد حاصل $\sin(x - \frac{\pi}{۴}) - ۲\sin^۲(\frac{x}{۲} - \frac{\pi}{۸})$ کدام است ؟

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) ۱ د) صفر

سوال ۲۰ : اگر $tanb = ۳$ و $tan(a-b) = ۳$ باشد حاصل $tan۲a = ۳$ را بیابید.

۴.۳ چند رابطه مهم

۱) $sinx + cosx = \sqrt{۲}\sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}\cos(x - \frac{\pi}{۴})$

۲) $sinx - cosx = \sqrt{۲}\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = -\sqrt{۲}\cos(x + \frac{\pi}{۴})$

۳) $tanx + cotx = \frac{۲}{sin۲x}$

۴) $cotx - tanx = ۲cotg۲x$

تست ۴۷ : اگر $sinx(cosx - sinx) = -۱$ باشد ، آنگاه $\cos(۲x - \frac{\pi}{۴})$ چقدر است ؟

الف) صفر　　ب) ۳　　ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　د) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

تست ۴۸ : حاصل $\tan ۶۷/۵^\circ - \cot ۶۷/۵^\circ$ کدام است ؟

الف) -۲　　ب) $\frac{۱}{۲}$　　ج) ۲　　د) $-\frac{۱}{۲}$

تست ۴۹ : اگر $a + b = \frac{\pi}{۲} - a$ حاصل $tana + tanb$ کدام است ؟

الف) $sinb$　　ب) $cosa$　　ج) $\frac{۱}{sina}$　　د) $\frac{۱}{cosb}$

۵.۳ فرمول های تبدیل جمع به ضرب (ویژه رشته ریاضی)

۱) $sinx + siny = ۲sin\frac{x+y}{۲}cos\frac{x-y}{۲}$

۲) $sinx - siny = ۲cos\frac{x+y}{۲}sin\frac{x-y}{۲}$

۳) $cosx + cosy = ۲cos\frac{x+y}{۲}cos\frac{x-y}{۲}$

۴) $cosx - cosy = -۲sin\frac{x+y}{۲}sin\frac{x-y}{۲}$

۵) $tanx + tany = \frac{\sin(x+y)}{cosxcosy}$

۶) $tanx - tany = \frac{\sin(x-y)}{cosxcosy}$

۷) $cotx + coty = \frac{\sin(x+y)}{sinxsiny}$

تست ۵۰ : مقدار عبارت $cosa + cos۲a + cos۳a + cos۴a$ به ازای $a = \frac{۲\pi}{۹}$ چقدر است ؟

الف) -۱ ب) $-\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) ۱

۶.۳ فرمول های تبدیل ضرب به جمع (ویژه رشته ریاضی)

۱) $sinx.cosy = \frac{۱}{۲}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

۲) $cosx.cosy = \frac{۱}{۲}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

۳) $sinx.siny = -\frac{۱}{۲}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

تست ۵۱ : ساده شده ی عبارت $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right)\sin(\frac{\pi}{4}-a)$ کدام است ؟

الف) $cosa-sina$ ب) $cos2a$ ج) $1+sin2a$ د) $1-sin2a$

تست ۵۲ : حاصل $cos165cos105$ کدام است ؟

الف) $-\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $-\frac{1}{4}$

تست ۵۳ : حاصل $sin70+cos70tan10$ کدام است ؟

الف) $\sqrt{2}$ ب) 1 ج) $\sqrt{2}-1$ د) $\sqrt{2}+1$

۴ معادلات مثلثاتی

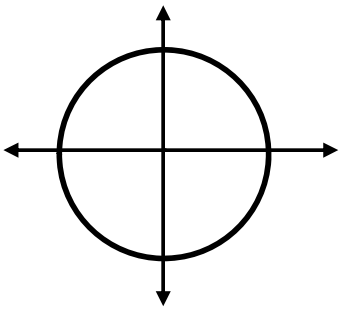
۱.۴ معادله ی مثلثاتی ساده

منظور از حل یک معادله ی مثلثاتی تعیین کلیه ی کمان هایی است که در تساوی مثلثاتی صدق می کند .برای حل این نوع معادلات می بایستی به کمک روابط مثلثاتی کل معادله تنها بر حسب یک نوع نسبت مثلثاتی نوشته شوند :

۱.۱.۴ معادله ی $\sin x = \sin a$ ، $-1 \le a \le 1$

جواب معادله ی بالا به شکل زیر است :

$$sinx = sina \implies \begin{cases} x = ۲k\pi + a \\ x = ۲k\pi + \pi - a \end{cases}$$



حالت های خاص معادله ی بالا

$$۱)\ sinx = ۱ \implies x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$۲)\ sinx = ۰ \implies x = k\pi$$

$$۳)\ sinx = -۱ \implies x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

مثال ۷ : مجموعه جواب معادله مثلثاتی $۲sinx = ۱$ را بیابید.

دقت کنید که در حالت کلی :

$$sinf(x) = sing(x) \implies \begin{cases} f(x) = ۲k\pi + g(x) \\ f(x) = ۲k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

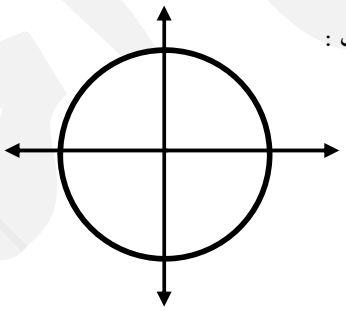
مثال ۸ : مجموعه جواب معادله مثلثاتی $sin۲x - ۱ = ۰$ را بیابید.

مثال ۹ : مجموعه جواب معادله مثلثاتی $sin۲x = sin۳x$ را بیابید.

۲.۱.۴ معادله ی $cosx = cosa$ ، $-1 \le a \le 1$

جواب معادله ی بالا به شکل زیر است :

$$cosx = cosa \implies x = ۲k\pi \pm a$$



حالت های خاص معادله ی بالا

$$۱)\ cosx = ۰ \implies x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$۲)\ cosx = ۱ \implies x = ۲k\pi$$

$$۳)\ cosx = -۱ \implies x = ۲k\pi + \pi$$

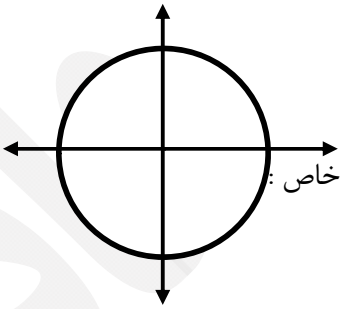
مثال ۱۰ : مجموعه جواب معادله مثلثاتی $cos۲x + sinx = ۰$ را بیابید.

نکته ۱۷ : جواب کلی دو معادله $\sin^۲ x = \sin^۲ a$ و $\cos^۲ x = \cos^۲ a$ به شکل $x = k\pi \pm a$ است .

۳.۱.۴ معادله ی $tanx = tana$

جواب کلی معادله ی بالا به صورت زیر است :

$$tanx = tava \implies x = k\pi + a$$



حالت خاص :

$$tanx = \cdot \implies x = k\pi$$

۴.۱.۴ معادله ی $cotx = cota$

جواب کلی معادله ی بالا به شکل زیر است :

$$cotx = cota \implies x = k\pi + a$$

حالت خاص :

$$cotx = \cdot \implies x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

نکته ۱۸ : در هر دور دایره ی مثلثاتی دو جواب برای $tanx = a$ و $cotx = a$ وجود دارد .

نکته ۱۹: در بعضی از موارد می توان دسته جواب بدست آمده را به صورت یک دسته جواب نوشت .

نکته ۲۰ : در حل معادلات به صورت $x.y = \cdot$ باید $x = \cdot$ یا $y = \cdot$ باشد و جواب کلی اجتماع جواب ها می باشد.

نکته ۲۱ : روش تغییر متغیر در حل معادلات مثلثاتی یک روش پرکاربرد است.

تست ۵۴ : مجموع جواب های معادله $۲\sin^۲ x - cosx - ۱ = \cdot$ در بازه $[\pi, ۲\pi]$ کدام است ؟

الف) $\frac{۸\pi}{۳}$ ب) $\frac{۱۱\pi}{۳}$ ج) $\frac{۱۰\pi}{۳}$ د) ۳π

تست ۵۵ : جواب کلی معادله ی $۲\sin^۲ x + ۳cosx = ۰$ کدام است ؟(سراسری تجربی داخل کشور ۹۵)

الف) $x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$ ب) $x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ج) $x = ۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶}$ د) $x = k\pi - \frac{\pi}{۳}$

تست ۵۶ : جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos(x - \frac{\pi}{۴})\cos(x + \frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۴}$ کدام است ؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۵)

الف) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ب) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ج) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ د) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

تست ۵۷ : جواب کلی معادله ی مثلثاتی $۲\cos^۲ x + ۲sinxcosx = ۱$ کدام است ؟(سراسری تجربی ۹۴)

الف) $k\pi - \frac{\pi}{۸}$ ب) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$ ج) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$ د) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$

تست ۵۸ : جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$ با شرط $\cos x \neq ۰$ به کدام صورت ا ست ؟
(سراسری تجربی خارج کشور ۹۴)

الف) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ب) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ج) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ د) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

تست ۵۹ : مجموع جواب های معادله $\sin ۴x = \sin^۴ x - \cos^۴ x$ در بازه $[۰, \pi]$ کدام است ؟(سراسری ریاضی داخل کشور ۹۵)

الف) $\frac{۷\pi}{۴}$ ب) $\frac{۹\pi}{۴}$ ج) $\frac{۵\pi}{۲}$ د) $\frac{۱۱\pi}{۳}$

تست ۶۰ : جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{۱-\tan x}{۱-tanx} = tan۳x$ به کدام صورت است ؟(سراسری ریاضی خارج کشور ۹۴)

الف) $\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}$ ب) $\frac{k\pi}{۴}-\frac{\pi}{۸}$ ج) $\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۱۶}$ د) $\frac{k\pi}{۴}-\frac{\pi}{۱۶}$

تست ۶۱ : در معادله مثلثاتی $sin۲x(sinx+cosx)=cos۲x(cosx-sinx)$ مجموع تمام جواب ها در بازه $[۰,\pi]$ کدام است ؟ (سراسری تجربی داخل کشور ۹۳)

الف) $\frac{۳\pi}{۴}$ ب) $\frac{۳\pi}{۲}$ ج) $\frac{۵\pi}{۴}$ د) $\frac{۷\pi}{۴}$

تست ۶۲ : جواب کلی معادله ی مثلثاتی $۲\cos^{۲}x-cosx-۳=۰$ کدام است ؟

الف) $k\pi$ ب) $۲k\pi+\pi$ ج) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ د) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$

نکته ۲۲ : در بعضی از معادلات مثلثاتی دو کمان متمم اند . لذا می توانیم با فرمول تبدیل $\frac{\pi}{۲}\pm a$ مساله را حل کنیم .

تست ۶۳ : صورت کلی تمام قوس هایی که در معادله ی $\sin^{۲}\frac{۷\pi}{۶}=\sin\left(\frac{\pi}{۲}+x\right)\cos(۲\pi-x)$ صدق می کنند کدام است ؟

الف) $۲k\pi-\frac{\pi}{۳}$ ب) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ج) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$ د) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

نکته ۲۳ : در حل بعضی از فرمول های $a\pm b$ ، مساله را به معادله ی ساده تر تبدیل کرده و سپس جواب را می یابیم .

تست ۶۴ : یکی از جواب های معادله $cos۲x+\sqrt{۳}sin۲x=۱$ به کدام صورت است ؟

الف) $k\pi-\frac{\pi}{۶}$ ب) $k\pi-\frac{\pi}{۳}$ ج) $k\pi+\frac{\pi}{۶}$ د) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$

نکته ۲۴ : در حل معادلات کسری باید ریشه های مخرج را از جواب ها کسر کنیم .

نکته ۲۵ : اگر در معادلات مثلثاتی طرفین را به توان ۲ برسانیم ممکن است یک سری جواب های اضافی ظاهر شود باید آن جواب اضافی را از جواب کلی کسر کنیم .

تست ۶۵: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{sin۳x+sinx}{sinx} = ۱$ به کدام صورت است ؟

الف) $\frac{k\pi}{۳}$ ب) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ج) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ د) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

نکته ۲۶: در حل بعضی از معادلات از فرمول های تبدیل جمع به ضرب و ضرب به جمع ، مسئله را به معادله ی مثلثاتی ساده ی قابل حل تبدیل می کنیم .

تست ۶۶ : جواب کلی معادله ی مثلثاتی $sin۴x - sin۲x = \sin(\frac{\pi}{۲} + ۳x)$ کدام است ؟

الف) $\frac{k\pi}{۶}$ ب) $\frac{k\pi}{۳}$ ج) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۳}$ د) $\frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

تست ۶۷ : جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{۱-cos۲x}{sin۲x} = \sqrt{۳}$ به کدام صورت است ؟

الف) $۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$ ب) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ج) $k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$ د) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$

تست ۶۸ : جواب کلی معادله مثلثاتی $\sqrt{۳}(\sin x + cosx) = ۱ + \sin(۲x)$ کدام است ؟

الف) $۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ب) $۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ج) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ د) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$

تست ۶۹: جواب کلی معادله مثلثاتی $۲\sqrt{۲}sinxcosx = sinx + cosx$ کدام است ؟

الف) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ب) $\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴}$ ج) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ د) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

تست ۷۰: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sqrt{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۴} - x\right) = ۱ + \sin(\frac{۵\pi}{۲} + x)$ کدام است ؟

الف) $k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ب) $۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ج) $۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ د) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

تست ۷۱: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $۲\sin^۲ x = ۳cosx$ به کدام صورت است ؟

الف) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ب) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ج) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ د) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

تست ۷۲: جواب معادله $۲\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{۳\pi}{۲} + x\right) + ۳cotgxsin(\pi + x) = ۰$ کدام است ؟

الف) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ب) $۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$ ج) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ د) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

تست ۷۳: جواب کلی معادله $tan\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) + tan\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = ۲\sqrt{۳}$ به کدام صورت است ؟

الف) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$ ب) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}$ ج) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$ د) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$

تست ۷۴: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin^۲ x - \cos^۲ x = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x)$ به کدام صورت است ؟

الف) $\frac{k\pi}{۳}$ ب) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ج) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ د) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

تست ۷۵ : نقاط پایانی کمان جواب های معادله $\frac{sinxcosx}{۱-cosx} = ۱ + cosx$ بروی دایره مثلثاتی رأس های کدام چندضلعی است ؟

الف) مربع ب) مستطیل ج) مثلث قائم الزاویه د) مثلث متساوی الساقین

تست ۷۶ : مجموع جواب های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{۸}) + \cos(x - \frac{۳\pi}{۸}) = ۱$ در بازه $[۰,۲\pi]$ کدام است ؟

الف) $\frac{۷\pi}{۴}$ ب) $\frac{۳\pi}{۴}$ ج) $\frac{۵\pi}{۴}$ د) $\frac{۳\pi}{۲}$

تست ۷۷ : جواب کلی معادله ی مثلثاتی $(\sin x - \tan x)\tan(\frac{۳\pi}{۲} - x) = \cos\frac{۴\pi}{۳}$ به کدام صورت است ؟

الف) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ب) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$ ج) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ د) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

تست ۲ : مجموع تمام جواب های معادله $sin۵x + sin۴x = ۱ + cos\pi$ در بازه $[۰,۲\pi]$ کدام است ؟

الف) ۸π ب) ۹π ج) ۱۰π د) ۱۱π

تست ۷۹ : جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$ با شرط $\cos x \neq ۰$ به کدام صورت است ؟

الف) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ب) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ج) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ د) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

تست ۸۰ : جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\sin ۳x}{\sin x} = ۲\cos^۲ x$ به کدام صورت است ؟

الف) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ب) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ج) $\frac{k\pi}{۲}$ د) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

تست ۸۱ : جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} = \sqrt{۳}$ به کدام صورت است ؟

الف) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$ ب) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$ ج) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}$ د) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$

تمرین : معادله مثلثاتی $sinx + \cos x + sinxcosx + ۱ = ۰$ را حل کنید.

تست ۸۲ : معادله ی $\frac{۱}{sin۲x} = \frac{۳cos^۲x - sin^۲x}{۲cosx}$ چند جواب روی بازه $[۰,۲\pi]$ دارد؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵

تمرینات جمع بندی کل مثلثات

تست ۸۳ : حاصل $\frac{tan^{۲}x}{۱-tan^{۴}x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{۶}}{۷۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۷۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۶}}{۲۴}$ د) $\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$

تست ۸۴ : حاصل $\frac{sin۲۰}{۱+cos۲۰}$ کدام است؟

الف) $sin۱۰$ ب) $cos۱۰$ ج) $tan۱۰$ د) $tan۴۰$

تست ۸۵ : اگر $tan(۲x+y)=\frac{۱}{۲}$ و $tan(x+۲y)=\frac{۱}{۵}$ باشد حاصل $tan(x-y)$ کدام است؟

الف) $\frac{۷}{۱۱}$ ب) $\frac{۷}{۹}$ ج) $\frac{۳}{۱۱}$ د) $\frac{۳}{۹}$