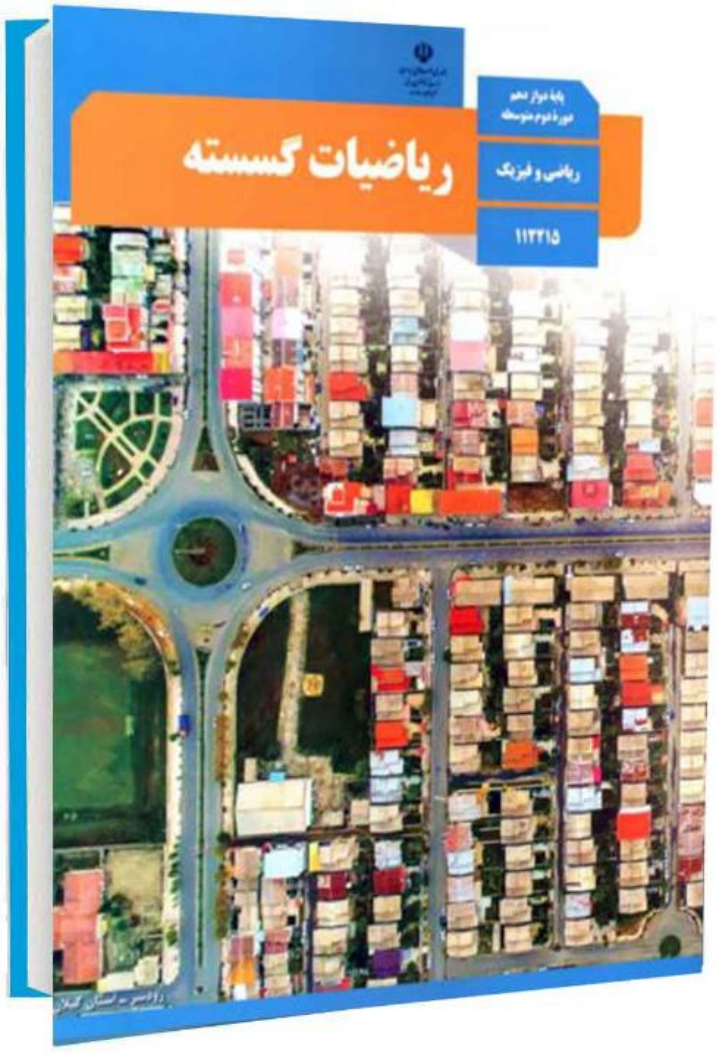
ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم ریاضی

گروه ریاضی استان همدان



مولف: سیدابوالفضل فاضلیان

به نام خدا

ریاضیات گسسته شاخه‌ای زیبا از علم ریاضیات است که با عناصر گسسته سروکار دارد و نه عناصر پیوسته.

ریاضیات گسسته به‌دلیل کاربردهای زیاد در علوم رایانه در دهه‌های گذشته مورد توجه قرار گرفته است.

با توجه به اهمیت نمرات امتحانات نهایی در آزمون سراسری و چالش‌های این درس، بر آن شدم جزوه‌ای خلاصه، کم حجم، شامل درسنامه و حل سوالات امتحان نهایی سال‌های گذشته، تالیف کنم.

با توجه به حجم بالای کار قطعاً اشتباهاتی در جزوه وجود دارد که از علاقه‌مندان پوزش‌می‌طلبم و خوشحال می‌شوم با شناسه شاد بنده به آدرس seyedfazelian@ در میان بگذارند، تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح شود.

در کانال گروه ریاضی استان همدان در شاد به آدرس riazihmd1@ می توانید جزوه دیگر درس‌ها و مطالب متنوع دیگر را ملاحظه نمایید.

در پایان یادآوری می‌شوم استفاده از این جزوه به هرصورت مجاز و هزینه آن فقط دعا برای عاقبت بخیری نگارنده است.

سیدابوالفضل فاضلیان

۱۴۰۳/۲/۳

جزوه ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد



مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

درس ۱ : استدلال ریاضی

اثبات قضیه‌ها یا رد کردن فرضیه‌ها ، قاعده بازی ریاضی است .

اثبات ریاضی ، استدلال دقیقی است برای متقاعد کردن خود و دیگران .

انواع روش‌های اثبات :

۱ـ اثبات مستقیم ۲ـ اثبات به روش استقرا (در نظر گرفتن همه حالت‌ها)

۳ـ اثبات غیر مستقیم (برهان خلف) ۴ـ اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم ارز)

قبل از شروع روش‌های اثبات درباره رد کردن فرضیه‌ها صحبت می‌کنیم .

مثال نقض : مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری یا حدس کلی نادرست است .

مثال : برای رد احکام زیر مثال نقض بیاورید.

۱ـ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 3$: باقی مانده 2^n بر ۷ همواره مربع کامل است .

$2^7 = 128 \xrightarrow[\text{بر } 7]{\text{باقی مانده}} 2$: $n = 7$

۲- عدد $2^n + 2^n$ به ازای هر عدد طبیعی n، اول است.

$n=5$: $2^5 + 2^5 = 64$ اول نیست

۳- جمع هر دو عدد گنگ، گنگ است.

$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$

۴- ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، گنگ است.

$0 \times \sqrt{2} = 0$

۵- اگر α و β دو عدد گنگ غیرصفری باشند، $\frac{\alpha+\beta}{2\beta}$ گنگ است.

$\frac{\alpha+\beta}{2\beta} = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{2}$ $\qquad \alpha = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{2}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ گویا

۶- اگر $A \cap B = A \cap C$ باشد آنگاه $B = C$

$A = \{1, 2\}$ $\quad B = \{1, 3\}$ $\quad C = \{1, 4\}$

$A \cap B = A \cap C = \{1\}$ ولی $B \neq C$

تذکر: در مورد گزاره‌های شرطی که به صورت $p \Rightarrow q$ بیان می‌شوند، یک مثال نقض باید طوری باشد که p درست و q نادرست باشد. ($p \Rightarrow q$ در منطق گفتیم ارزش آن نادرست است.)

پس برای نشان دادن نادرستی یک گزاره پیدا کردن یک مثال کافی است و برای اثبات درستی حکم نمی‌توانیم به مثال اکتفا کنیم و به روش‌هایی برای استدلال کردن نیاز داریم.

۱- اثبات مستقیم:

در اثبات مستقیم سعی می‌کنیم به صورت مستقیم از فرض به حکم برسیم.

مثال: ثابت کنید تفاضل مربعات دو عدد فرد متوالی، همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.

$$(2k+3)^2 - (2k+1)^2 = 4k^2+12k+9-(4k^2+4k+1) = 8k+8 = 8(k+1) = 8q$$

مثال: ثابت کنید اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

$$k = n(n+1) \Rightarrow 4k+1 = 4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

مثال: تمرین شوربر ۱۴.۱

هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^n + 1$ اول است.

ب)مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

الف) $n=3$: $2^3+1=9$ اول نیست.

ب) $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 = 2q+1$

مثال: تمرین حزار ۱۴۰۰

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف)حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

ب)هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ برقرار باشد.

الف) $(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)\times n!\times 3!}{n!\times 3!} = \frac{(n+3)!}{n!\times 3!}\times 3!$

$= \binom{n+3}{3}\times 6 = 6q$

ب) نادرست مثال نقض $n=0, y=1$: $0^2+1^2 = (0+1)^2$

۲ـ اثبات به روش استقرا :

برای اثبات قضیه با این روش، مسئله را به چند حالت که همه حالت‌ها را پوشش می‌دهد، تقسیم می‌کنیم و در هر حالت ثابت می‌کنیم که حکم نتیجه می‌شود.

تذکر : استدلال منطقی روش استقرا به این صورت است که اگر قرار باشد n حالت مختلف بررسی شود می‌توان با استفاده از هم ارزی :

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n \Rightarrow r) \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$

مسئله را ثابت کرد.

مثال : ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، حاصل $n^2 - 3n + 7$ عددی فرد است.

حالت اول : $n = 2k$ (زوج) $\Rightarrow n^2 - 3n + 7 = (2k)^2 - 3(2k) + 7 = 4k^2 - 6k + 7$

$$= 4k^2 - 6k + 6 + 1 = 2(\underbrace{2k^2 - 3k + 3}_{q}) + 1 = 2q + 1$$

حالت دوم : $n = 2k + 1$ (فرد) $\Rightarrow n^2 - 3n + 7 = (2k+1)^2 - 3(2k+1) + 7 =$

$$4k^2 + 4k + 1 - 6k - 3 + 7 = 4k^2 - 2k + 5$$

$$= 4k^2 - 2k + 4 + 1 = 2(\underbrace{2k^2 - k + 2}_{q}) + 1 = 2q + 1$$

تذکر: رابطه یا الگوریتم تقسیم: $a = bq + r$ $\Leftrightarrow$ $0 \le r \le b-1$

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

اگر $r = 0$ باشد a بر b بخش‌پذیر است.

مثال: ثابت کنید مربع هر عدد در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر صفر یا یک دارد.

حالت اول: $n = \overset{\text{زوج}}{2k}$: $n^2 = 4k^2 = 4q + 0$

حالت دوم: $n = \overset{\text{فرد}}{2k+1}$: $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 = 4q + 1$

مثال: ثابت کنید ضرب دو عدد طبیعی متوالی همواره زوج است.

حالت اول: $n = \overset{\text{زوج}}{2k}$: $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2q$

حالت دوم: $n = \overset{\text{فرد}}{2k+1}$: $n(n+1) = (2k+1)(\underbrace{2k+2}_{2(k+1)}) = 2(\underbrace{2k+1)(k+1)}_{q}) = 2q$

مثال: با استفاده از روش استقرا ثابت کنید، مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر یک دارد.

$$(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = \underbrace{4k(k+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی زوج است}}+1 = 4\times 2q+1 = 8q+1$$

مثال: ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی همواره بر ۶ بخش پذیر است.

اگر n را بر ۳ تقسیم کنیم باقی‌مانده ۰، ۱ یا ۲ می‌شود پس سه حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $n=3q$: $n(n+1)(n+2) = \underbrace{3q(3q+1)(3q+2)}_{k} = 3k$

حالت دوم: $n=3q+1$: $n(n+1)(n+2) = (3q+1)(3q+2)\underbrace{(3q+3)}_{3(q+1)}$

$$= \underbrace{3(3q+1)(3q+2)(q+1)}_{k} = 3k$$

حالت سوم: $n=3q+2$: $n(n+1)(n+2) = (3q+2)\underbrace{(3q+3)}_{3(q+1)}(3q+4)$

$$= \underbrace{3(3q+2)(q+1)(3q+4)}_{k} = 3k$$

مثال: اگر n امین جمله‌ی طبیعی و $\overbrace{\frac{n(n+1)}{2}}^{A}$ زوج باشد؛ $n=4q$ یا $n=4q+3$

حالت اول: $n=2k$ (زوج) : $A = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = \underbrace{k(2k+1)}_{\text{زوج}}$ (زوج) ← زوج است

$\Rightarrow k=2q \Rightarrow n=2(2q)=4q$

حالت دوم: $n=2k+1 : A=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(2k+1)\overbrace{(2k+2)}^{2(k+1)}}{2}=\underbrace{\overbrace{(2k+1)}^{\text{فرد}}\overbrace{(k+1)}^{\text{زوج}}}_{\text{زوج}}$ (زوج)

$(k+1)$ باید زوج باشد پس k فرد است یعنی $k=2q+1$ پس:

$n=2(2q+1)+1=4q+2+1=4q+3$

۳- اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست است (به آن فرض خلف می‌گوییم). با استفاده از قوانین منطقی، قضایا و بدیهی‌ای از استدلال‌های درست به یک نتیجه غیرممکن یا متضاد با فرض می‌رسیم. پس فرض نادرست بودن حکم باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

تذکر: در اثبات مستقیم از درستی فرض به درستی حکم می‌رسیم ($p\Rightarrow q$). در برهان خلف از نادرستی حکم به نادرستی فرض می‌رسیم ($\sim q\Rightarrow \sim p$). در منطق دیدیم که

$(p\Rightarrow q)\equiv(\sim q\Rightarrow \sim p)$

مثال : نوری ری ۱۴۰۰

اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است.

فرض خلف : فرض کنید $\alpha-\beta$ گنگ نباشد یعنی گویا باشد . می دانیم جمع دو عدد گویا ، گویا است پس $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=2\alpha$ گویا است پس α هم گویا است ⁂

ولی فرض مسأله این بود که α گنگ است . پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

مثال: شهریور ۱۴۰۰

ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

فرض کنید r یک عدد گویا و α یک عدد گنگ است . نشان می دهیم $(r+\alpha)$ گنگ است .

فرض خلف : فرض کنید $(r+\alpha)$ گنگ نباشد یعنی $(r+\alpha)$ گویا باشد .

می دانیم تفاضل دو عدد گویا ، گویا است پس : $(r+\alpha)-r=\alpha$ گویا است یعنی $\alpha\in\mathbb{Q}$ ⁂

ولی فرض مسأله این بود که α گنگ است . پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

مثال: نهایی شهریور ۱۴۰۱

a_1، a_2، a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1، b_2، b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

فرض خلف: فرض کنیم $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی فرد باشد. پس هر سه عامل باید فرد باشند. درنتیجه مجموع آن‌ها هم باید فرد باشد. ✗

اما با توجه به فرض مسئله مجموع آن‌ها صفر شود (زیرا b_1, b_2, b_3 همان a_1, a_2, a_3 با ترتیب دیگری هستند) $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)=0$ است

پس فرض خلف باطل و حکم مسئله اثبات می‌شود.

مثال: ثابت کنید اگر مربع عددی طبیعی و ۳ مضرب ۵ باشد، مربع هم مضرب ۵ است.

فرض خلف: n مضرب ۵ نباشد. در این صورت n در تقسیم بر ۵، باقی مانده‌ای بین ۱ تا ۴ دارد، یعنی: $n=5q+r \quad ; \quad 1 \le r \le 4$

$$n^2=(5q+r)^2=25q^2+10qr+r^2=5\underbrace{(5q^2+2qr)}_{k}+r^2=5k+r^2$$

پس n^2 مضرب ۵ نیست $\not\vdots$ در حالی که طبق فرض n^2 مضرب ۵ بود. پس فرض خلف باطل و حکم سئوال ثابت می‌شود.

مثال: فرض کنید n عددی طبیعی و $3n-2$ عددی فرد باشد. ثابت کنید n هم فرد است.

فرض خلف: n فرد نباشد یعنی زوج باشد:

$$n=2k \Rightarrow 3n-2=3(2k)-2=6k-2=2(3k-1)=2q \quad \not\vdots$$

این یعنی $3n-2$ زوج است درصورتی که فرض سئوال گفته بود فرد است. پس فرض خلف باطل و حکم سئوال ثابت می‌شود.

مثال: می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ هم گنگ است.

فرض خلف: فرض کنید $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ گنگ نباشد یعنی گویا باشد:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=a\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{3}=a-\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3=a^2-2a\sqrt{2}+2$$

$$\Rightarrow 2a\sqrt{2}=a^2-1 \Rightarrow \sqrt{2}=\frac{a^2-1}{2a} \begin{matrix}\to \text{گویا}\\ \to \text{گویا}\end{matrix} \Rightarrow \sqrt{2}\in\mathbb{Q} \quad \not\vdots$$

که خلاف گنگ بودن $\sqrt{2}$ است. پس فرض خلف باطل و حکم مسأله ثابت می‌شود.

مثال: ثابت کنید حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، همواره گنگ است.

اگر x عدد گویای ناصفر و a گنگ باشد و ax گویا باشد (فرض خلف) آنگاه

$$\frac{1}{x}\cdot(ax) = a \in \mathbb{Q} \quad \text{ضرب دو گویا}$$

معکوس هر گویا ($\frac{1}{x}$) گویا (ax) گویا

مثال: ثابت کنید معکوس هر عدد گنگ، گنگ است.

اگر a گنگ باشد باید ثابت کنیم $\frac{1}{a}$ هم گنگ است.

فرض خلف: فرض کنید $\frac{1}{a}$ گنگ نباشد پس گویاست یعنی:

$$\frac{1}{a} = \frac{p}{q} \Rightarrow a = \frac{q}{p} \quad \because\ p,q \in \mathbb{Z},\ p\neq 0, q\neq 0$$

این یعنی a گویاست که تناقض با فرض مسأله است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

مثال: اگر f در $x=a$ پیوسته و g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

فرض خلف: $(f+g)$ در $x=a$ پیوسته باشد. چون تفاضل دو تابع پیوسته، پیوسته است پس:

$$(f+g)-f = g \quad \text{پیوسته} \quad \text{پیوسته} \quad \text{پیوسته} \quad \therefore$$

در فرض مسأله اشاره شده که g ناپیوسته است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۴- اثبات بازگشتی:

گاهی اوقات می‌خواهیم حکم P را ثابت کنیم ولی نمی‌دانیم به چه شکل باید از فرض‌ها به P برسیم نامشخص است ولی می‌توانیم از خود P کمک بگیریم و با استفاده از عملیات جبری گزاره‌ها هم‌ارز با P پیدا کنیم تا به یک رابطه همواره درست برسیم چون همه گزاره‌ها ارزش یکسان دارند و ترکیب‌ها دوشرطی است، پس درستی P ثابت می‌شود.

مثال: برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$.

$$a^2+b^2+1 \geq ab+a+b \xLeftrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2 \geq 2ab+2a+2b$$

$$\Leftrightarrow a^2+a^2+b^2+b^2+1+1-2ab-2a-2b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(a^2-2ab+b^2)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(a-1)^2}_{+}+\underbrace{(b-1)^2}_{+}+\underbrace{(a-b)^2}_{+}\geq 0 \qquad \text{همواره درست :}$$

مثال: نهایی خرداد ۹۸

ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست .

اگر دو عدد a و b نامنفی باشند حکم به این صورت است : $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

اثبات : $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} a+b\geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geq 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0 \qquad \text{همواره درست :}$$

مثال: نهایی شهریور ۹۸

برای هر سه عدد حقیقی x,y,z ثابت کنید: $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2xz$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2)\geq 0$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0$ همواره درست

مثال: نهایی ری ۹۸

به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a>0$ آن‌گاه $a+\frac{1}{a} \geq 2$.

$a+\frac{1}{a} \geq 2 \overset{\times a>0}{\Leftarrow} a^2+1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2-2a+1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$ همواره درست

مثال: خوارزمی ۹۹

اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$.

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2 \overset{\times xy>0}{\Leftarrow} x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ همواره درست

مثال: نهایی خوارزمی ۱۴۰۰

به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن ها است.

$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} \overset{\times 2}{\Leftarrow} 2xy \leq x^2+y^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2-2xy+y^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2$ همواره درست

مثال: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $a^2+ab+b^2 \geq 0$

$$a^2+ab+b^2 \geq 0 \iff \underbrace{a^2+ab+\frac{b^2}{4}}_{\text{مربع کامل}}+\frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\iff \underbrace{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2}_{+}+\underbrace{\frac{3b^2}{4}}_{+} \geq 0 \quad \text{همواره درست}$$

مثال: برای اثبات درستی گزاره «اگر a,b هم‌علامت باشند $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}$» با استفاده از گزاره‌های هم‌ارز به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(a-b)^2 \geq 0$ ۲) $(a+b)^2 \geq 0$ ۳) $(a-b)^2+(a+b)^2 \geq 0$ ۴) $(a+b)^2+a^2+b^2 \geq 0$

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \iff \frac{a^3+b^3}{a^2b^2} \geq \frac{a+b}{ab}$$

$$\xleftarrow{\times(a^2b^2)} \underbrace{a^3+b^3}_{\text{اتحاد اول}} \geq (a+b)(ab) \iff (a+b)(a^2-ab+b^2) \geq (a+b)(ab)$$

$$\xleftarrow{\div(a+b)} a^2-ab+b^2 \geq ab \iff a^2-2ab+b^2 \geq 0$$

$$\iff (a-b)^2 \geq 0 \quad \text{بدیهی}$$

درس ۲ : بخش‌پذیری در اعداد صحیح

بخش اول : رابطه‌ی عاد کردن

تعریف : فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند بطوری‌که $a \neq 0$ باشد. می‌گوییم a، عدد b را عاد می‌کند (یا شمرد) و می‌نویسیم $a \mid b$ هرگاه عدد صحیحی چون q وجود داشته باشد که $aq = b$

تذکر: اگر $a \mid b$ آنگاه b بر a بخش‌پذیر است. اگر در تشخیص درستی یا نادرستی یک رابطه‌ی عاد کردن تردید کردید، آن را نوشته در جلوی عددهای سمت چپ خانه تا به یک گزینه تبدیل شود. اگر حاصل عددی صحیح شد، رابطه‌ی عاد کردن درست است در غیر این صورت، نادرست است.

مانند : $-3 \mid 36 \rightarrow \frac{36}{-3} = -12$ $\quad$ $4 \mid 8 \rightarrow \frac{8}{4} = 2$

$7 \nmid 15 \Leftarrow \frac{15}{7} \notin \mathbb{Q}$ $\quad$ $7 \mid 15 \rightarrow \frac{15}{7} \notin \mathbb{Q}$ $\quad$ $-5 \mid -75 \rightarrow \frac{-75}{-5} = 15$

مثال : درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $1 \mid 5$ $\quad$ $\frac{5}{1} = 5 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ درست

۲) $-1 \mid 7$ $\quad$ $\frac{7}{-1} = -7 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ درست

۳) $11 \mid 11$ $\quad \frac{11}{11}=1$ درست

۴) $2 \mid 0$ $\quad \frac{0}{2}=0$ درست

۵) $0 \mid 21$ $\quad \frac{21}{0}=$ تعریف نشده نادرست

۶) $2^8 \mid 2^5$ $\quad \frac{2^5}{2^8}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8} \notin \mathbb{Q}$ نادرست

۷) $3^6 \mid 3^7$ $\quad \frac{3^7}{3^4}=3^3=81$ درست

مثال: چند عدد صحیح مانند a وجود دارد که عدد -4 را می‌شمارد؟

۱) ۲ $\quad$ ۲) ۴ $\quad$ ۳) ۶ $\quad$ ۴) ۴ $\quad$ ۵) ۶

$\frac{-4}{a} \in \mathbb{Q}$: $a \mid -4 \Rightarrow aq=-4$

a می‌تواند اعداد : ± 1 , ± 2 , ± 4 باشد. پس گزینه ۴ درست است.

ویژگی‌های عاد کردن :

۱) $\pm 1 \mid a$ زیرا هر عددی بر ۱ و ۱- بخش‌پذیر است.

۲) $a \mid a$, $-a \mid a$, $a \mid -a$, $-a \mid -a$

۳) $a \mid 0$ ولی $0 \nmid a$. قرارداد : $0 \mid 0$ (عدد صفر هیچ عدد صحیحی غیر از خودش را نمی‌شمارد.)

۴) اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $m\le n$ آنگاه $a^m \mid a^n$.

اثبات : $a^m \mid a^n$ درست است زیرا عددی صحیح مانند $q=a^{n-m}$ وجود دارد به :

$$a^n = a^{n-m} \times a^m$$

چون $m\le n$ پس $n-m\ge 0$ است و توان a منفی نمی‌شود .

۵) $a\mid b \Rightarrow a\mid mb$: یعنی اگر a ، b را بشمارد آنگاه هر ضرب صحیح b را هم می‌شمارد.

اثبات : $a\mid b \Rightarrow aq=b \xrightarrow{\times m} bm=aqm \Rightarrow bm=aq' \Rightarrow a\mid bm$

مثال : $۲\mid ۶\times ۴$ و $۲\mid ۶\times ۱۰$ $\Rightarrow ۲\mid ۲۱۶$

۶) $a\mid b \xRightarrow{n\in\mathbb{N}} a\mid b^n$

اثبات : اگر در رابطه‌ی m را b^{n-1} قرار دهیم ، درستی اثبات می‌شود .

۷) $a\mid b \iff ak\mid bk$

اثبات رفت : $a\mid b \Rightarrow aq=b \xrightarrow{\times k} bk=akq \Rightarrow ak\mid bk$

اثبات برگشت : $ak\mid bk \Rightarrow bk=akq \xrightarrow{\div k} b=aq \Rightarrow a\mid b$

۸) $a|b \Rightarrow a^m | b^m$

اثبات: $a|b \Rightarrow aq=b \xrightarrow[m]{\text{به توان}} b^m = a^m \times \underbrace{q^m}_{q'} \Rightarrow b^m = a^m \times q' \Rightarrow a^m | b^m$

۹) $a|b \Rightarrow a|-b, -a|b, -a|-b$

اثبات: $a|b \Rightarrow aq=b \xrightarrow{\times(-1)} -aq=-b \Rightarrow a\underbrace{(-q)}_{q'}=-b \Rightarrow a|-b$

۱۰) $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$ (خاصیت تعدی)

اثبات: $\begin{cases} a|b \Rightarrow aq=b \\ b|c \Rightarrow bq'=c \end{cases} \xrightarrow{\times q'} aqq'=bq'=c \Rightarrow aq''=c \Rightarrow a|c$

۱۱) $a|b \overset{b\neq 0}{\Rightarrow} |a| \leq |b|$

اثبات: چون $b\neq 0$ پس $q\neq 0$ پس $|q| \geq 1$ ($q \in \mathbb{Z}$)

$a|b \Rightarrow aq=b$

$1 \leq |q| \xrightarrow{\times|a|} |a| \leq |a||q| = |aq| = |b| \Rightarrow |a| \leq |b|$

۱۲) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$

اثبات: $\begin{cases} a|b \Rightarrow aq=b \\ a|c \Rightarrow aq'=c \end{cases} \overset{\pm}{\Rightarrow} a(q \pm q') = b \pm c \Rightarrow a|b \pm c$

۱۳) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|mb \pm nc$ (ترکیب خطی b و c)

اثبات:

$a|b \Rightarrow a|mb$

$a|c \Rightarrow a|nc$

$\Rightarrow a|mb \pm nc$

۱۴) $a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$

اثبات:

$a|b \Rightarrow aq = b$

$c|d \Rightarrow cq' = d$

$\overset{\times}{\Rightarrow} (a\times c)(qq') = bd \Rightarrow ac|bd$

$qq' = q''$

۱۵) $a|1 \Rightarrow a = \pm 1$

اثبات:

$a|1 \Rightarrow aq = 1,\ q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a = q = 1 \\ a = q = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1$

۱۶) $a|b \wedge b|a \Rightarrow a = \pm b$

اثبات:

$a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$

$b|a \Rightarrow |b| \leq |a|$

$\Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

۱۷) اگر p اول باشد، $a|p$ نتیجه $a = \pm 1$ یا $a = \pm p$.

اثبات:

$a|p \overset{p\text{ اول}}{\Rightarrow} aq = p$ $\begin{cases} q = \pm 1 \Rightarrow a = \pm p \\ q = \pm p \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$

۱۸) $a|b \wedge m \leq n \Rightarrow a^m | b^n$

اثبات:

$a|b \rightarrow a^m | b^m \overset{(*)}{\Rightarrow} a^m | b^m \times b^{n-m} \Rightarrow a^m | b^n$

b^{n-m}: $n-m$ بار در b ضرب شده

مثال: برای رد احکام زیر مثال نقض بیاورید.

الف) $a|bc \Rightarrow a|b$ یا $a|c$ — $6|3\times4$ ولی $6\nmid3$ و $6\nmid4$

ب) $a|b+c \Rightarrow a|c$ یا $a|b$ — $2|5+3$ ولی $2\nmid5$ و $2\nmid3$

پ) $a|b \wedge c|d \Rightarrow a+c|b+d$ — $3|12$ و $4|8$ ولی $5\nmid20$

مثال: نهایی خرداد ۹۹

اگر $n\in N$، $n|9k+7$ و $n|7k+6$، ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$.

$a|9k+7 \xrightarrow{\times7} a|63k+49$

$a|7k+6 \xrightarrow{\times9} a|63k+54$

$\Rightarrow a|63k+54-(63k+49)$

$\Rightarrow a|5 \Rightarrow a=1 \vee a=5$

مثال: نهایی دی ۹۷

اگر $a>1$، $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

$a|9k+4 \xrightarrow{\times5} a|45k+20$

$a|5k+3 \xrightarrow{\times9} a|45k+27$

$\Rightarrow a|7 \xrightarrow{a>1} a=7$

مثال: نهایی شهریور ۹۹

فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a|3n+4$ و $a|2n+3$. نشان دهید $a=1$.

$a|3n+4 \xrightarrow{\times2} a|6n+8$

$a|2n+3 \xrightarrow{\times3} a|6n+9$

$\Rightarrow a|1 \Rightarrow a=\pm1 \xrightarrow{a\in\mathbb{N}} a=1$

مثال: تمرین درس ۱.۴

اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $5 \mid 4k+1$ ، ثابت کنید $25 \mid 16k^2+28k+6$.

$5 \mid 4k+1 \longrightarrow 25 \mid 16k^2+8k+1$

$5 \mid 4k+1 \longrightarrow 25 \mid 20k+5$

$+ \Rightarrow 25 \mid 16k^2+28k+6$

مثال: اگر $5 \mid 4k+1$ ، $3 \mid 5k-1$ ثابت کنید $15 \mid 5k^2+k-1$.

$\begin{cases} 5 \mid 4k+1 \\ 3 \mid 5k-1 \end{cases} \Rightarrow 15 \mid 20k^2+k-1$

$\begin{cases} 15 \mid 20k^2+k-1 \\ 15 \mid 15k^2 \end{cases} \Rightarrow 15 \mid 5k^2+k-1$

بدیهی

مثال: اگر دو عدد $m+1$ ، m^2-2 همواره بر a بخش‌پذیر باشند، a چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

$\begin{cases} a \mid m+1 \xrightarrow{\times m} a \mid m^2+m \\ a \mid m^2-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid m+2 \\ a \mid m+1 \end{cases} \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$

مثال: اگر $3a \mid b$ ، $b^2 \mid c$ نشان دهید $a \mid c^5$.

$a \mid a \Rightarrow a \mid 3a$ ، $3a \mid b \xrightarrow{\text{تعدی}} a \mid b \Rightarrow a \mid b^2$

$a \mid b^2$ ، $b^2 \mid c \Rightarrow a \mid c \Rightarrow a \mid c^5$

مثال: همه عددهای طبیعی n را بیابید که $n \mid 2^{n+1}$.

$n=1 : 1 \mid 4$ ✓ ، $n=2 : 2 \mid 8$ ✓ ، $n=3 : 3 \mid 16$ ×

$n=4$: $24 \mid 42$ ✗ , $n=5$: $120 \mid 64$ ✗

چون رشته a_n سریعتر از 2^{n+1} رشد می‌کند طبق درستی $(a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|)$

نمی‌تواند درست باشد. پس فقط برای $n=1,2$ درست است.

بخش دوم : ب.م.م و ک.م.م

همانطور که در بخش قبل دیدیم اگر بنویسیم $a \mid b$ یعنی a شمارنده b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است.

مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲ و ۱۸ را در نظر بگیرید :

مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۱۲ $= \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۱۸ $= \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

مجموعه مقسوم‌علیه‌های مشترک ۱۲ و ۱۸ $= \{1, 2, 3, 6\}$

در این میان عدد ۶ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۸ است و می‌نویسیم :

$$(12, 18) = 6$$

تعریف ب.م.م : عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a, b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نباشند) و می‌نویسیم $d = (a, b)$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $d \mid a \wedge d \mid b$

ب) $\forall m > 0 \; ; \; m \mid a \wedge m \mid b \Rightarrow d \geq m$

روش یافتن ب.م.م دو یا چند عدد :

عددها را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم. ضرب عوامل مشترک با توان کوچکتر ب.م.م آن‌هاست.

مثال: ب.م.م ۷۲ و ۶۰ را بیابید.

$72 = 2^3 \times 3^2$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$\Rightarrow (60,72) = 2^2 \times 3 = 12$

ویژگی‌های ب.م.م :

۱) عملیات در ب.م.م بی‌تأثیر است یعنی : $(-a,-b) = (-a,b) = (a,-b) = (a,b)$

۲) $a|b \Rightarrow (a,b) = |a|$ (کوچکتر)

اثبات : شرط اول : $|a|a , |a|b$ زیرا : $|a|a, a|b \Rightarrow |a|b$

شرط دوم : $\forall m>0 : m|a \wedge m|b \overset{?}{\Rightarrow} |a| \geq m$ (بدین)

$m|a \rightarrow mq = a \Rightarrow |m| \leq |a| \xrightarrow{m>0} m \leq |a|$

۳) اگر $(a,b) = 1$ باشد می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.

مثال: اگر $p \neq q$ ، p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p,q) = 1$.

فرض خلف $(p,q) = d \neq 1 \Rightarrow d|p, d|q \Rightarrow d = p \wedge d = q \Rightarrow p = q$ ⁂

پس $d = 1$.

۴) اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ آنگاه :

$$(a,p) = \begin{cases} 1 & p \nmid a \\ p & p \mid a \end{cases}$$.

اثبات : اگر p عددی اول باشد این فقط دو مقسوم علیه مثبت او p را دارد.

حالت اول : اگر $p \nmid a$ طبق ویژگی ۲ داریم $(a,p)=p$.

حالت دوم : اگر $p \mid a$ باید ثابت کنیم $(a,p)=1$. فرض کنید $d=(a,p)$ پس $d \mid p$ و $d \mid a$

چون p اول است از $d \mid p$ داریم $d=1$ یا $d=p$. ولی $d=p$ نمی‌شود چون

طبق فرض $d=p \mid a$ که با $d \mid a$ در تناقض است. پس $d=1$.

۵) $(ka,kb)=|k|(a,b)$

مثال : $(75,35) = 5(15,7) = 5\times 1 = 5$

$(220,80) = 20(11,4) = 20\times 1 = 20$

مثال : a,b نسبت به هم اول‌اند. ثابت کنید $3a+2b$, $7a+5b$ هم نسبت به هم اول‌اند.

$$(7a+5b,\ 3a+2b)=d \Rightarrow \begin{matrix} d \mid 7a+5b \\ d \mid 3a+2b \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 3(7a+5b)-7(3a+2b) \\ d \mid 2(7a+5b)-5(3a+2b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid b \\ d \mid -a \Rightarrow d \mid a \end{cases}$$ پس d مقسوم علیه مشترک a و b است ولی a,b نسبت به هم اول‌اند پس $d=1$.

مثال : نهایی دی ۹۹

اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(5a+4, 2a+3)$ را به دست آورید.

$= d$

$$\begin{matrix} d \mid 5a+4 \\ d \mid 2a+4 \end{matrix} \Rightarrow d \mid -2(5a+4)+5(2a+4) \Rightarrow d \mid -10a-8+10a+15 \Rightarrow d \mid 7$$

$$\Rightarrow d=1 \text{ یا } d=7$$

مثال: کنکور ۹۹ خارج از کشور:

در مجموعهٔ اعداد طبیعی اگر $d = (3n^2 - 2n + 6, 3n + 5)$ و $d \neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۷ ۴) ۵۳

$d \mid 3n^2 - 2n + 6$

$d \mid 3n + 5 \Rightarrow d \mid n(3n+5) = 3n^2 + 5n$

$\Rightarrow d \mid 3n^2 + 5n - (3n^2 - 2n + 6) = 7n - 6$

$d \mid 7n - 6 \wedge d \mid 3n + 5 \Rightarrow d \mid 35 + 18$

$\Rightarrow d \mid 54 \Rightarrow d = 54$

ک.م.م دو عدد:

مضرب‌های طبیعی دو عدد ۱۲ و ۱۸ را در نظر بگیرید:

مضارب طبیعی ۱۲ $= \{12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots\}$

مضارب طبیعی ۱۸ $= \{18, 36, 54, 72, \dots\}$

مضارب طبیعی مشترک $= \{36, 72, \dots\}$

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد را ب.م.م می‌گوییم.

تعریف ک.م.م: عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $c = [a, b]$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $a \mid c$ و $b \mid c$

ب) $\forall m > 0 ;\ a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m$

روش یافتن ک.م.م دو یا چند عدد:

اعداد را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم. ک.م.م برابر ضرب عوامل مشترک و غیرمشترک با توان بیشتر است.

مثال: $[60, 72]$ را بیابید. $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $72 = 2^3 \times 3^2 \Rightarrow [60, 72] = 2^3 \times 3^2 \times 5$

ویژگی‌های ک.م.م :

۱- $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$ (بزرگتره)

مثال : $(11,44)=11$, $[11,44]=44$

اثبات : $a|b \Rightarrow a||b|$, $b||b|$ (بدیهی)

شرط اول : $b||b|$

شرط دوم : $\forall m>0 : a|m, b|m \overset{?}{\Rightarrow} |b|\leq m$

زیرا $b|m \Rightarrow |b|\leq|m| \overset{m>0}{\Rightarrow} |b|\leq m$

۲- عملیات ک.م.م با تأثیرات : $[-a,-b]=[a,-b]=[-a,b]=[a,b]$

۳- $[ka,kb]=|k|[a,b]$

۴- $(a,b)=1 \Rightarrow [a,b]=|ab|$

مثال : ثابت کنید هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند.

$m\in Z : (m,m+1)=d \Rightarrow d|m \wedge d|m+1 \Rightarrow d|(m+1)-m \Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$

مثال: ثابت کنید هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اول اند.

$m\in Z : (2m+1,2m+3)=d \Rightarrow d|2m+1 \wedge d|2m+3 \Rightarrow d|2 \Rightarrow d=1$ (فرد بودن)

مثال: نهایی دی ۹۸

فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^3]$ را به دست آورید.

$21a^2=3\times7\times a^2$, $35a^3=5\times7\times a^3 \Rightarrow [21a^2,35a^3]=3\times7\times5\,a^3=105a^3$

مثال: نهایی خرداد ۱۴۰۰

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a \mid b$ آن گاه عدد .....a..... . شمارنده عدد .....b..... است.

ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با .....2m..... است.

2×4

مثال: حاصل عبارت را بدست آورید.

m^2

۱) $([m^2, m], m^5) = m^2$

۲) $(4m+1, 4m+2) = 1$ — در کتاب درسی آمده.

۳) $[m^7, (m^2, m^3)] = |m^7|$ (m^2)

۴) $[(72, 48), 120]$: $24 \mid 120 \Rightarrow [24, 120] = 120$ (24)

۵) $([4a^2, 18a^4], (12a, 24a^2)) = 2|a|$ ($18|a^4|$, $2|a|$)

مثال: کنکور ۹۹

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها است. اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، تفاضل آن دو عدد، کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۶

$[a,b] = 60(a,b)$, $a+b = 136$

$d = (a,b)$ درباره a' و b' : $\begin{cases} d \mid a \to a'd = a \\ d \mid b \to b'd = b \end{cases}$ قرارمی دهیم a' و b'

$(a',b') = 1$, $[a,b] = |ab'|d$

$\Rightarrow a'b' = 60$, $a'd + b'd = 136 = 8 \times 17 \Rightarrow a'+b' = 17$ $d = 8$

a': 5 , 12

$b - a = 12 \times 8 - 5 \times 8 = 96 - 40 = 56$

بخش سوم : الگوریتم تقسیم

از نوشته به یاد داریم : آزمایش درستی تقسیم : $a = bq + r$

a مقسوم ، b مقسوم‌علیه ، q خارج‌قسمت ، r باقی‌مانده

قضیه تقسیم : اگر a عدد صحیح و b عدد طبیعی باشد در این صورت اعداد صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند بطوریکه $a = bq + r$ ، $0 \leq r < b$

مثال : خارج‌قسمت و باقی‌مانده تقسیم -74 را بر 6 بیابید.

نکته : $q = [\frac{a}{b}]$: شروع می‌کنیم

$q = [\frac{-74}{6}] = [-12/4] = -13 \Rightarrow -74 = 6(-13) + 4$

-78

مثال : خارج‌قسمت و باقی‌مانده تقسیم -25 را بر 7 بیابید.

$q = [\frac{-25}{7}] = [-3/5] = -4 \Rightarrow -25 = 7(-4) + 3$

-28

مثال : در هر قسمت r و q را بیابید.

الف) $a = 27 \quad b = -7$

$q = [\frac{27}{-7}] = [-3/8] = -4 \Rightarrow 27 = -7(-4) - 1 = -7(-4) + (-7) + 7 = -7(-4+1) + 7 = -7(-3) + 7$

r q

ب) $a = -37 \quad b = -5$

$q = [\frac{-37}{-5}] = [7/4] = 7 \Rightarrow -37 = -5(7) - 2 = -5(7) + (-5) + 5 = -5(7+1) + 3 = -5(8) + 3$

r q

مثال: نهایی خرداد ۹۸

اگر باقی مانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $5n-3m$ بر ۱۳ را بدست آورید.

$m=13q+2 \Rightarrow 3m=13(3q)+6$

$n=13q'+9 \Rightarrow 5n=13(5q')+45$

$\Rightarrow 5n-3m=13(5q'-3q)+45-6$

$\Rightarrow 5n-3m=13q''+39=13q''+13\times 3$

$\Rightarrow 5n-3m=13(q''+3)=13k+5$ ✓

مثال: نهایی خرداد ۹۹

اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این‌صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را به دست آورید.

$a=4q+3 \Rightarrow 2a+3=2(4q+3)+3=8q+9=8q+8+1=8(q+1)+1$

$\Rightarrow 2a+3=8q'+1$ ✓

مثال: نهایی شهریور ۱۴۰۱

اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۴۲ بیابید.

$a=6q+3 \xrightarrow{\times 7} 7a=42q+21$

$a=7q'+5 \xrightarrow{\times 6} 6a=42q'+30$

$\xrightarrow{(-)} a=42(q-q')+21-30$

$\Rightarrow a=42q''+(-9)$

مضرب مثبت از مقسوم‌علیه را اضافه یا کم می‌کنیم:

$\Rightarrow a=42q''-42+42-9=42(q''-1)+33 \Rightarrow a=42k+33$ ✓

مثال: نهایی دی ۹۹

اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2a-5b)$ بر ۱۷ را بیابید.

$a=17q+5$

$b=17q'+3 \Rightarrow 2a-5b=2(17q+5)-5(17q'+3)=17(2q-5q')+10-15$

$=17q''-5=17q''-17+17-5=17(q''-1)+12$ ✓

مثال: اگر a عددی صحیح و فرد باشد، $b \mid a+2$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد a^2+b^2+4 بر ۸ را بیابید.

$a=2k+1 \Rightarrow b \mid 2k+4 \Rightarrow bq=2k+4 \Rightarrow b=2k'+1$ (فرد هر فرد)

$a^2+b^2+4=(2k+1)^2+(2k'+1)^2+4=4k^2+4k+1+4k'^2+4k+1+4$

$=4k(k+1)+4k'(k+1)+6=8n+8n'+6=8(n+n')+6$

($4k(k+1)$: $2n$ ، $4k'(k+1)$: $2n'$)

$=8q+6 \hookrightarrow 4$

مثال: نهایی ری ۱۴۰۰

اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

$a=bq+r : \ 0 \le r < b \Rightarrow a-bq=r : \begin{matrix} n \mid a \\ n \mid b \end{matrix} \Rightarrow n \mid a-bq$

$\Rightarrow n \mid r$

مثال: بزرگترین عددی که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۱۶، چهار برابر مکعب خارج قسمت می‌شود، کدام است؟

۱) ۵۷۶ ۲) ۴۲۶ ۳) ۴۵۶ ۴) ۱۲۰

$a=116q+4q^3 \quad 0 \le 4q^3 < 116 \Rightarrow q^3 < 29 \Rightarrow q < \sqrt[3]{29}$

$\Rightarrow q < 3,\ldots$

$a_{max}=116\times 3+4\times 3^3=456$ گزینه ۳

افراز مجموعه اعداد صحیح با رابطه تقسیم :

می‌دانیم در تقسیم بر ۲، باقی‌مانده ممکن است ۰ یا ۱ شود. پس مجموعه $\mathbb{Z}$ را می‌توانیم به دو دسته

$\mathbb{Z}$

$2k$	$2k+1$

افراز کنیم :

به طور مشابه در تقسیم بر ۳، باقی‌مانده ممکن است ۰ یا ۱ یا ۲ شود. پس مجموعه $\mathbb{Z}$ را می‌توانیم

$\mathbb{Z}$

$3k$	$3k+1$	$3k+2$

به سه دسته افراز کنیم :

و در حالت کلی در تقسیم بر m، مجموعه $\mathbb{Z}$ به m دسته افراز می‌شود :

$\mathbb{Z}$

mk	$mk+1$	$mk+2$	...	$mk+(m-1)$

مثال: نهایی شهریور ۹۹

ثابت کنید اگر $p>3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ $(k\in W)$ نوشته می‌شود.

هر p را بر ۶ تقسیم کنیم :

۱) $p=6k+0=2(3k)=2q$

۲) $p=6k+1$ ✓

۳) $p=6k+2=2(3k+1)=2q$

۴) $p=6k+3=3(2k+1)=3q$

۵) $p=6k+4=2(3k+2)=2q$

۶) $p=6k+5$ ✓

مثال: نهای شوبدر ۱۴۰۰

اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

$a=3k \Rightarrow$ a بر ۳ بخش‌پذیر

$a=3k+1 \Rightarrow a+2=3k+1+2 \Rightarrow a+2=3k+3=3q$: $a+2$ بر ۳ بخش‌پذیر

$a=3k+2 \Rightarrow a+4=3k+2+4=3k+6=3q$: $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر

مثال: اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3 \mid n^3-n$.

۱) $n=3k \Rightarrow 3 \mid n \Rightarrow 3 \mid n(n^2-1) \Rightarrow 3 \mid n^3-n$

۲) $n=3k+1 \Rightarrow n-1=3k \Rightarrow 3 \mid n-1 \Rightarrow 3 \mid (n-1)n(n+1) \Rightarrow 3 \mid n^3-n$

۳) $n=3k+2 \Rightarrow n+1=3k+3=3(k+1) \Rightarrow 3 \mid n+1 \Rightarrow 3 \mid (n+1)n(n-1)$

$\Rightarrow 3 \mid n^3-n$

تمرین: ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر ۳! بخش‌پذیر است.

درس ۲: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

تعریف: دو عدد صحیح a و b را به پیمانه عدد طبیعی m، هم‌نهشت می‌گوییم هرگاه $m \mid a-b$.

به بیان دیگر اختلاف آن‌ها بر m بخش‌پذیر باشد.

به زبان ریاضی: $\forall a,b \in \mathbb{Z},\ a \overset{m}{\equiv} b \iff m \mid a-b$

مثال: $۲۵ \overset{۷}{\equiv} ۱۱$: $۲۵-۱۱=۱۴=۷\times۲$ $\qquad$ $۷ \overset{۵}{\equiv} -۳$: $۷-(-۳)=۱۰=۵\times۲$

نگاهی دیگر به هم‌نهشتی: دو عدد a و b را به پیمانه m هم‌نهشت می‌گوییم، هرگاه باقی‌مانده آن‌ها در تقسیم بر m یکسان باشد.

مثلاً: همگی در تقسیم بر ۷، باقی‌مانده ۴ دارند: $۲۵ \overset{۷}{\equiv} ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۴۲ \overset{۷}{\equiv} ۷۴ \overset{۷}{\equiv} -۱۰$

در واقع فرم کلی اعداد را به $7k+4$ است.

تعریف کلاس همنهشتی: مجموعه همه اعداد صحیح که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m، برابر r باشد را کلاس یا دسته هم‌نهشتی r به پیمانه m می‌نامیم و آن را به صورت $[r]_m$ نمایش می‌دهیم پس:

$$[r]_m = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = mk + r\}$$

با توجه به مفهوم هم‌نهشتی، همه‌ی عددهای هر کلاس با هم، هم‌نهشتند.

مثال: در تقسیم به ۵، اعداد به ۵ جمله‌ی افرازی شوند. هرکدام از جمله‌ها، یک کلاس هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۵ هستند:

$$[0]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k\} = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$
$$[1]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k+1\} = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$
$$[2]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k+2\} = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$
$$[3]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k+3\} = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$
$$[4]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k+4\} = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$$

مثال: کدام عدد، عضوی از $[9]_{14}$ است؟ ۱) ۹۷ ۲) ۹۸ ۳) ۹۹ ۴) ۱۰۰

$$[9]_{14} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 14k+9\}$$

گزینه ۴: $100 \overset{14}{\equiv} 9$ ، $98 \overset{14}{\equiv} 7$ ، $99 \overset{14}{\equiv} 8$ ، $97 \overset{14}{\equiv} 6$

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

اثبات:
$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid a+c-b-c \Rightarrow m \mid a+c-(b+c)$$
$$\Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c$$
$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid a-c-b+c \Rightarrow m \mid a-c-(b-c) \Rightarrow a-c \overset{m}{\equiv} b-c$$

۱۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

اثبات: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid c(a-b) \Rightarrow m \mid ca-cb$

$\Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

۱۳) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \xrightarrow{\times q} m \mid (a-b)q$

با توجه به رابطه زیر:

$$a^n - b^n = (a-b)\underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})}$$

$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$. توجه: عکس این رابطه برقرار نیست

۱۴) $a \overset{m}{\equiv} b,\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d,\ ac \overset{m}{\equiv} bd$

اثبات: $m \mid a-b,\ m \mid c-d \Rightarrow m \mid a-b+c-d \Rightarrow m \mid (a+c)-(b+d)$

$\Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+d$

$m \mid a-b \xRightarrow{\times c} m \mid \underbrace{ac-bc}_{①}$, $m \mid c-d \xrightarrow{\times b} m \mid \underbrace{bc-bd}_{②}$

$\overset{①,②}{\Rightarrow} m \mid ac-bd \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$

۱۵) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$

اثبات: $a \overset{m}{\equiv} b,\ mt \overset{m}{\equiv} mk \xRightarrow{\pm} a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$

۶) $a \overset{m}{\equiv} b \;,\; n \mid m \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

اثبات: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \;\wedge\; n \mid m \overset{\text{قوی}}{\Rightarrow} n \mid a-b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

۷) $a \overset{m}{\equiv} b \;,\; b \overset{n}{\equiv} c \xrightarrow{(m,n)=d} a \overset{d}{\equiv} c$

اثبات:

$d \mid m \;,\; m \mid a-b \Rightarrow d \mid a-b$

$d \mid n \;,\; n \mid b-c \Rightarrow d \mid b-c$

$\Rightarrow d \mid a-b+(b-c) \Rightarrow d \mid a-c \Rightarrow a \overset{d}{\equiv} c$

۸) $ac \overset{m}{\equiv} bc \;,\; (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

اگر $(c,m)=1$ باشد داریم این صورت $ac \overset{m}{\equiv} bc \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$.

۹) اگر باقی‌مانده a بر m، برابر r باشد داریم: $a \overset{m}{\equiv} r$.

اثبات: $a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m \mid a-r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$

نکته: هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی هم‌نهشت با عدد a به پیمانه m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را بدست آوریم.

مثال: $۲۹۶ \overset{11}{\equiv} 10$ $\qquad$ $-۱ \overset{11}{\equiv} ۲۹۶$

مثال: باقی‌مانده تقسیم $۱۵ + ۳ \times ۲۷^{۱۰۰}$ را بر ۱۴ بیابید.

$۵ \overset{14}{\equiv} ۱۸ \overset{14}{\equiv} ۱۵ + ۳ \times ۲۷^{۱۰۰} \xrightarrow{+15} ۳ \times ۲۷^{۱۰۰} \overset{14}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\div 3} ۲۷^{۱۰۰} \overset{14}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان } ۱۰۰} ۲۷ \overset{14}{\equiv} ۱$

مثال دی ۹۷ : مطلوبست باقی ماندهٔ تقسیم عدد $A = (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰$ بر عدد ۷ .

$۱۲ \equiv -۱ \pmod{۷} \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۴} \times ۱۲ \equiv ۱۰۰۰^{۱۴} \equiv -۱ \pmod{۷}$

$۱۰۰۰ \equiv ۶ \equiv -۱ \pmod{۷}$

$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۴} \times ۱۲ + ۱۰ \equiv -۲ \equiv ۵ \pmod{۷}$

مثال شهریور ۹۸ : باقی مانده تقسیم $(۲۷)^{۷} + ۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

$۲۷ \equiv ۱ \pmod{۱۳} \rightarrow (۲۷)^{۷} + ۱۹ \equiv ۲۰ \equiv ۷ \pmod{۱۳}$

مثال دی ۹۸ : باقی مانده تقسیم $۱۳^{۲۲}$ را بر ۱۷ به دست آورید.

$۱۳ \equiv -۴ \pmod{۱۷} \Rightarrow ۱۳^{۲} \equiv ۱۶ \equiv -۱ \pmod{۱۷} \Rightarrow ۱۳^{۲۲} \equiv -۱ \equiv ۱۶ \pmod{۱۷}$

مثال خرداد ۹۹ : باقی‌مانده تقسیم $۷^{۳۰}$ بر ۱۵ را به دست آورید.

$۷^{۲} = ۴۹ \equiv ۴ \pmod{۱۵} \Rightarrow ۷^{۴} \equiv ۱۶ \equiv ۱ \pmod{۱۵} \xrightarrow{\text{به توان } ۷} ۷^{۲۸} \equiv ۱ \pmod{۱۵} \xleftarrow{\times ۷^{۲}}$

$۷^{۳۰} \equiv ۴۹ \equiv ۴ \pmod{۱۵}$

نکته : برای یافتن باقی‌مانده تقسیم یک عدد با توان بزرگ بر ۱۵ از این روش کمک می‌گیریم.

مثال شهریور ۹۹ : رقم یکان عدد $(۷ + ۲^{۱۱})$ را به دست آورید.

$۲^{۵} \equiv ۲ \pmod{۱۰} \xrightarrow{\text{به توان } ۲} ۲^{۱۰} \equiv ۲^{۲} \equiv ۴ \pmod{۱۰} \xleftarrow{\times ۲^{۲}} ۲^{۱۱} \equiv ۸ \pmod{۱۰} \xrightarrow{+۷} ۲^{۱۱} + ۷ \equiv ۱۵ \equiv ۵ \pmod{۱۰}$

مثال: ثابت کنید اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آنگاه $a \overset{m}{\equiv} b$ و برعکس.

اثبات رفت: فرض می‌کنیم باقی‌مانده تقسیم a و b بر m برابر r باشد ثابت می‌کنیم $a \overset{m}{\equiv} b$.

$$a = mq + r,\ b = mq' + r \Rightarrow a - b = m(q - q') \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

اثبات برگشت: فرض کنید $a \overset{m}{\equiv} b$، باقی‌مانده تقسیم a بر m، r است باید ثابت کنیم باقی‌مانده تقسیم b بر m، r است.

$$a - b = mk,\ a = mq + r \Rightarrow mq + r - b = mk \Rightarrow b = mq - mk + r$$
$$\Rightarrow b = m(q - k) + r \Rightarrow b = mq' + r$$

مثال دی ۹۹: باقی‌مانده تقسیم $(۳۸^{۳۶} + ۱۹)$ را بر ۴ به دست آورید.

$$۳۸ \overset{۴}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳۸^{۲} \overset{۴}{\equiv} ۴ \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳۸^{۳۶} \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳۸^{۳۶} + ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳$$

مثال خرداد ۱۴۰۰: باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱$ را بر ۷ بیابید.

$$۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۰۰^{۲۵} \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ \overset{۷}{\equiv} -۹$$
$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۲$$

مثال شهریور ۱۴۰۰: اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(۹a + ۶)$ را به دست آورید.

$$۴a - ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳a - ۵ \Rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۲۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

نکته: بسط دوجمله‌ای خیام:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

مثال: ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a,b \in \mathbb{Z}$ داریم : $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

با توجه به بسط جمله اول تمام جملات بعد از آن فاکتور ab را دارند می‌توانیم بنویسیم :

$$(a+b)^n - a^n - b^n = abq \Rightarrow a^n + b^n - (a+b)^n = abq$$

$$\Rightarrow a^n + b^n \overset{ab}{\equiv} (a+b)^n$$

مثال : ثابت کنید عدد $۱۲^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۲۳^{۵۱}$ بر عدد ۱۴۲ بخش پذیر است.

طبق نکته بالا : $(۱۱+۱۲)^{۵۱} \overset{۱۱\times۱۲}{\underset{=۱۴۲}{\equiv}} ۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱} \Rightarrow ۲۳^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱} \overset{۱۴۲}{\equiv} ۰$

مثال : رقم یکان $A = ۱! + ۲! + \cdots + ۵۰۰!$ را بیابید.

$$A \overset{۱۰}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۴ + ۰ + ۰ + \cdots + ۰ = ۱۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

نکته : بسط عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 a_1 a_0}$ در مبنای ده به صورت زیر است :

$$A = ۱۰^{n-1} \times a_{n-1} + ۱۰^{n-2} \times a_{n-2} + \cdots + ۱۰^2 a_2 + ۱۰ a_1 + a_0$$

مثال : $۲۳۷۵ = ۲\times۱۰^3 + ۳\times۱۰^2 + ۷\times۱۰ + ۵$

مثال شوروی ۱۴۰۱: ثابت کنید باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ ، برابراست با باقیماندهٔ تقسیمِ مجموع ارقام آن عدد بر ۹ .

عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 a_0}$ را بسط دهیم و در هم ضرب بینهایت ۹ به جای ۱۰

توان ۱۰ ، یک را قرار دهیم : ($۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۱ \rightarrow ۱۰^n \overset{۹}{\equiv} ۱$)

$$A = a_{n-1} \times ۱۰^{n-1} + a_{n-2} \times ۱۰^{n-2} + \cdots + a_0 \overset{۹}{\equiv} a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0$$

مثال : یک قاعده‌ی بری یافتن باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۱۰ و ۱۱ بنابراین .

$A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_0 \overset{2}{\equiv} a_{n-1} \times 0 + \dots + a_0 = a_0$ $\quad (10 \overset{2}{\equiv} 0 \to 10^k \overset{2}{\equiv} 0)$

$A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_0 \overset{5}{\equiv} a_{n-1} \times 0 + \dots + a_0 = a_0$ $\quad (10 \overset{5}{\equiv} 0 \to 10^k \overset{5}{\equiv} 0)$

$A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_0 \overset{10}{\equiv} a_{n-1} \times 0 \dots + a_0 = a_0$

$A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_0 \overset{3}{\equiv} a_{n-1} \times 1 + a_{n-2} \times 1 + \dots + a_0$ $\quad (10 \overset{3}{\equiv} 1 \to 10^k \overset{3}{\equiv} 1)$

$= a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0$

$A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_0 \overset{11}{\equiv} a_{n-1} - a_{n-2} + \dots - a_1 + a_0$ $\quad (10 \overset{11}{\equiv} -1 \to \begin{cases} 10^k \overset{11}{\equiv} 1 & k \text{ زوج} \\ 10^k \overset{11}{\equiv} -1 & k \text{ فرد} \end{cases})$

پس برای یافتن باقی‌مانده تقسیم بر ۱۱ ، بین ارقام از راست یکی در میان + و - قرار می‌دهیم

مثال: $7461 \overset{11}{\equiv} 1 - 6 + 4 - 7 = -9 \overset{11}{\equiv} 2$

کاربرد همنشتی در یافتن روز هفته برحسب تاریخ :

فرض کنید بدانیم یکی از روزهای سال، چندشنبه است . با هم‌نشتی می‌توانیم تعیین کنیم که هر تاریخ دیگر چندشنبه می‌شود . به این صورت که جدول گسترده روز شروع را شناخته فرض می‌کنیم . اختلاف روزهای

دو تاریخ را مدبت می کردیم و آن را به پیمانه ۷ هم نهشت می گرفتیم. عدد حاصل از روی جدول چند شنبه بودن روز خواسته شده را مشخص می کند. دقت کنید اگر تاریخ جلوتر را داشتیم و خواستیم تاریخ عقب تر را مدبت کنیم، باید تعداد روزهای اختلاف را منفی بگیریم.

مثال: اگر شانزدهم آذرماه، سه شنبه باشد، چهاردهم اسفندماه سال چند شنبه است؟

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱شنبه	۲شنبه	۳شنبه	۴شنبه	۵شنبه	۶شنبه	۷شنبه

مناظر شنبه ⟵ $(۳۰-۱۶)+۳۰+۳۰+۱۴ = ۸۸ \equiv ۴ \pmod 7$

(باقی مانده آذر) + (دی) + (بهمن) + (اسفند)

مثال: خرداد ۱۴۰۱

اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
شنبه	۱شنبه	۲شنبه	۳شنبه	۴شنبه	۵شنبه	جمعه

$۲۹+۳۰+۳۰+۳۰+۱۲ = ۱۴۱$

(مهر) (آذر) (دی) (بهمن)

مناظر ۵شنبه $۱۴۱ \equiv ۵ \pmod 7$

مثال: اگر ۲۲ بهمن در یک سال پنج شنبه باشد، ۳ خرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۵شنبه	جمعه	شنبه	۱شنبه	۲شنبه	۳شنبه	۴شنبه

$۲۲+۳۰+۳۱\times۳+۳۱\times۴+(۴-۳۱) = -(۲۲+۱۲۰+۹۳+۲۸) \equiv -(۱+۱+۲+۰) \equiv -۴ \equiv ۳ \pmod 7$

(بهمن) (دی) (آبان) (مهر) (خرداد)

مناظر چهارشنبه

معادله هم‌نهشتی :

معادله به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادله هم‌نهشتی می‌نامیم.

کی صحیح

نکته : شرط لازم و کافی برای یک معادله هم‌نهشتی جواب داشته باشد این است که $(a,m) \mid b$.

روش حل معادله هم‌نهشتی :

با استفاده از ویژگی‌های هم‌نهشتی ضریب x را حذف کرده و با استفاده از تعریف هم‌نهشتی یک جواب عمومی برای معادله می‌یابیم. به این صورت که ضریبی مناسب از پیمانه را به سمت راست اضافه یا کم می‌کنیم به طوری که سمت راست بر ضریب x بخش‌پذیر باشد. سپس دو طرف را بر ضریب x می‌کنیم. دقت کنید با تقسیم دو طرف هم‌نهشتی بر یک عدد باید پیمانه هم بر ب.م.م پیمانه و ضریب x تقسیم شود.

مثال : معادلات هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

۱) $7x \overset{14}{\equiv} 2 \Rightarrow 7x \overset{14}{\equiv} 2+2\times14 = 28 \xrightarrow{\div 7} x \overset{14}{\equiv} 4 \Rightarrow x = 14k+4$

۲) $۴۳۴x \overset{۱۱}{\equiv} ۶۸$

اول ضرایب را کوچک می‌کنیم:

$۴۳۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۴-۴+۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$, $۶۸ \overset{۱۱}{\equiv} ۸-۶=۲$

$۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲+۴\times۱۱=۴۶ \Rightarrow x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow x=۱۱k+۷$

مثال خودرار ۱۴۰۰ : معادله $۷x \overset{۴}{\equiv} ۱$ را حل کنید.

$۷x \overset{۴}{\equiv} ۱+۵\times۴=۲۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۲۱ \overset{\div ۷}{\Rightarrow} x \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow x=۴k+۳$

مثال ری ۹۹ : معادله هم‌نهشتی $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰+۱۲=۳۲ \overset{(۸,۱۲)=۴}{\Longrightarrow} x \overset{\frac{۱۲}{۴}}{\equiv} ۴ \Rightarrow x=۳k+۴$ $\quad \div ۸$

مثال ری ۹۷ : معادله همنهشتی $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳$ را حل و جواب عمومی آن را بدست آورید.

$۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳-۷=۶ \overset{\div ۳}{\Rightarrow} x \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow x=۷k+۲$

مثال: معادله $۶x \overset{۹}{\equiv} ۵$ را حل کنید.

$(۶,۹)=۳ \nmid ۵$ جواب ندارد

معادلات سیاله خطی:

به معادله $ax+by=c$ که ضرایب a,b,c و متغیرات x,y عدد صحیح هستند معادله سیاله خطی گوییم.

شرط جواب داشتن معادله سیاله این است که $(a,b) \mid c$

روش حل معادله سیاله خطی :

معادله $ax+by=c$ را به دو صورت می‌توان به یک معادله‌هم‌نهشتی تبدیل کرد :

$$\begin{cases} ax-c=-by \Rightarrow ax \overset{b}{\equiv} c \\ by-c=-ax \Rightarrow by \overset{a}{\equiv} c \end{cases}$$

حال یکی از معادلات هم‌نهشتی را حل کرده (معمولاً معادله‌ای که ضرایب کوچکتر است)

و جواب یکی از مجهولات را می‌یابیم. با جای‌گذاری در معادله اصلی جواب دیگر را بدست می‌آوریم.

مثال: معادله سیاله $5x+7y=57$ را حل کنید.

$$7y \overset{5}{\equiv} 57 \quad : \quad 7 \overset{5}{\equiv} 2,\ 57 \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 2y \overset{5}{\equiv} 2 \overset{\div 2}{\Rightarrow} y \overset{5}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow y=5k+1 \Rightarrow 5x+7(5k+1)=57 \Rightarrow 5x+35k+7=57$$

$$\Rightarrow 5x=50-35k \Rightarrow x=10-7k$$

مثال دی ۱۴۰۰ : معادله سیاله $6x+7y=185$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

$$6x \overset{7}{\equiv} 185,\ 185=7\times 25+24 \Rightarrow 6x \overset{7}{\equiv} 24 \overset{\div 6}{\Rightarrow} x \overset{7}{\equiv} 4$$

$$x=7k+4 \Rightarrow 6(7k+4)+7y=185 \Rightarrow 7y=185-24-42k$$

$$\Rightarrow y=-6k+25$$

مثال شهریور ۹۹ : معادله سیاله $۲x + ۵y = ۱۹$ را حل کنید.

$۲x \overset{۵}{\equiv} ۱۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\div ۲} x \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow x = ۵k+۲$

$\Rightarrow ۲(۵k+۲) + ۵y = ۱۹ \Rightarrow ۵y = -۱۰k + ۱۹ - ۴$

$\Rightarrow y = -۲k + ۳$

مثال ری ۹۸ : جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $۹x + ۱۳y = ۷$ را به دست آورید.

$۱۳y \overset{۹}{\equiv} ۷ \;,\; ۱۴ \overset{۹}{\equiv} ۴ \;,\; ۷ \overset{۹}{\equiv} ۱۶ \Rightarrow ۴y \overset{۹}{\equiv} ۱۶ \xrightarrow{\div ۴} y \overset{۹}{\equiv} ۴$

$\Rightarrow y = ۹k+۴ \Rightarrow ۹x + ۱۳(۹k+۴) = ۷ \Rightarrow ۹x = ۷ - ۱۱۷k - ۵۲$

$\Rightarrow x = -۱۳k - ۵$

مثال شهریور ۱۴۰۱ :

دانش آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعا ۴۲ امتیاز کسب کرده است .(پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.)

این دانش آموز به چه صورت هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟

$۵x + ۳y = ۴۲ \Rightarrow ۵x \overset{۳}{\equiv} ۴۲ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x = ۳k$

$\Rightarrow ۵(۳k) + ۳y = ۴۲ \Rightarrow ۳y = -۱۵k + ۴۲$

$\Rightarrow y = -۵k + ۱۴$

$k=۰ \begin{cases} x=۰ \\ y=۱۴ \end{cases} \quad k=۱ \begin{cases} x=۳ \\ y=۹ \end{cases} \quad k=۲ \begin{cases} x=۶ \\ y=۴ \end{cases}$

مثال: به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰ تومان را با اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

$۲۰۰۰x + ۵۰۰y = ۲۹۰۰ \xrightarrow{\div ۱۰۰} ۲x + ۵y = ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹ \overset{۵}{\equiv} ۴$

$\Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow x = ۵k+۲ \;,\; y = -۲k + ۵$

$k=۰ \begin{cases} x=۲ \\ y=۵ \end{cases} \quad k=۱ \begin{cases} x=۷ \\ y=۳ \end{cases} \quad k=۲ \begin{cases} x=۱۲ \\ y=۱ \end{cases}$

جزوه ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: گراف و مدلسازی

درس اول: معرفی گراف



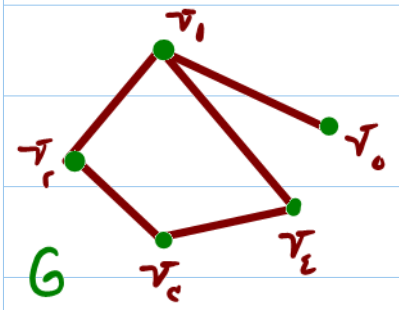
مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

درس اول معرفی گراف

تعریف گراف ساده : گراف G از مجموعه‌های $V(G)$ (مجموعه رأس‌ها) و $E(G)$ (مجموعه یال‌ها) تشکیل می‌شود، بطوریکه هر یال، یک زیرمجموعه دوعضوی مانند $\{v_i, v_j\}$ از مجموعه رأس‌ها V است.

به عبارت دیگر گراف مجموعه‌ای از نقاط و خط‌هایی است که این نقاط را به هم وصل می‌کند.

مثال :



G

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

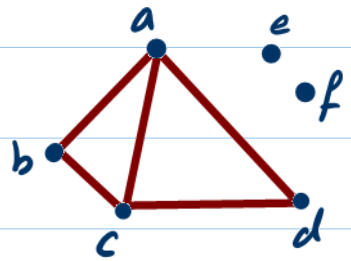
$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$

مرتبه و اندازه گراف :

به تعداد رأس‌های یک گراف **مرتبه** آن گفته می‌شود و آن را با p نمایش می‌دهیم.

به تعداد یال‌های یک گراف **اندازه** آن گفته می‌شود و آن را با q نمایش می‌دهیم.

مثال: در گراف زیر اندازه و مرتبه را مشخص کنید.



$p = 6 \qquad q = 5$

طوقه: هرگاه ابتدا و انتهای یالی روی یک رأس باشد به آن طوقه می‌گوییم.



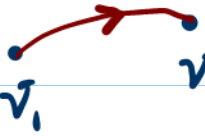
توجه کنید که گراف ساده، طوقه ندارد.

یال چندگانه: اگر بین دو رأس چند یال باشد به این یال چندگانه گفته می‌شود.



باز هم دقت کنید گراف ساده، یال چندگانه ندارد.

یال جهت‌دار: هرگاه روی یک یال جهت داشته باشیم به آن یال جهت‌دار گفته می‌شود.



در این صورت یال را به صورت زوج مرتب (v_1, v_2) می‌نویسیم.

گراف ساده یال جهت‌دار ندارد.

درجه رأس: به تعداد یال‌هایی که در گراف G به رأسی مانند v وصل شده‌اند، درجه رأس گفته و آن را با $deg(v)$ نشان می‌دهند.

تذکر: اگر درجه یک رأس، بردی فرد باشد به آن راس فرد و اگر درجه آن بردی زوج باشد به آن رأس زوج می‌گوییم. اگر $deg(v)=0$ باشد یعنی هیچ یالی از رأس v نگذرد به آن راس تنها یا ایزوله می‌گوییم.

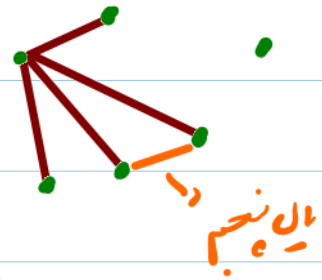
ماکسیمم و مینیمم درجه گراف : بزرگترین درجه بین درجه رأس های یک گراف را ماکسیمم درجه گفته و

آن را با نماد Δ نمایش می‌دهیم و کوچکترین درجه بین درجه رأس های یک گراف را مینیمم درجه گفته و

آن را با نماد δ نمایش می‌دهیم.

مثال: در گرافی از مرتبه 6 ی راس $\Delta = 5$ و $\delta = 2$ گراف دارای یک راس تنها است. اگر $E = 8$

باشد. گراف چند راس از درجه 2 دارد؟ ۱) ۵ ۲) ۱ ✓ ۳) ۲ ۴) ۳



دو رأس مجاور : راس های u و v را همسایه یا مجاوری گوییم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند.

یعنی $uv \in E$.

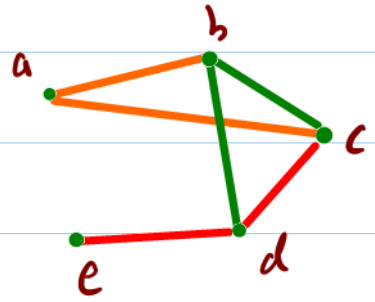
همسایگی یک رأس : مجموعه همسایه‌های رأس v در گراف G را با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم و به آن

همسایگی باز رأس v می‌گوییم و اگر خود رأس v را به $N_G(v)$ اضافه کنیم به مجموعه

حاصل همسایگی بسته رأس v می‌گوییم و آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم.

مثال: در گراف G از مرتبه ۵ می‌دانیم $N_G(a)=\{b,c\}$ و $N_G(b)=\{a,c,d\}$ و $N_G(d)=\{e,c,b\}$

و رأسی از درجه ۱ دارد. در این صورت رأس c با چند رأس مجاور است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) نمی‌توان گفت

دو رأس مجاور: هرگاه راسی وجود داشته باشد که هر دو رأس به آن وصل باشند.

دنباله گرافی: اگر درجه‌های رأس‌های یک گراف را از بزرگ به کوچک بنویسیم به آن دنباله گرافی می‌گوییم.

نکته: همیشه $d_1 \le p-1$ است. چون حداکثر درجه یک راس زمانی به‌دست می‌آید که آن راس به همه $p-1$ رأس دیگر وصل باشد. دقت کنید اگر $d_1 = p-1$ باشد، $d_2 \ge 1$ خواهد بود، زیرا نمی‌تواند باشد و اگر k رأس از درجه $p-1$ داشته باشیم باید $d_k \ge 1$ باشد.

مثال: کدام گزینه یک دنباله گرافی است؟

۱) ۲, ۲, ۴, ۴, ۵ ۲) ۲, ۲, ۴, ۴, ۵, ۶, ۶, ۶ ۳) ۲, ۲, ۴, ۴, ۵, ۵ ✓ ۴) ۲, ۲, ۴, ۴, ۵, ۵, ۵

۱) $p=5$ ، $5 \le 4$ ✗ $5=5$

۲) $p=7$ و $d_2 \ge 4$: $5=2$ ✗ d_2 حداقل ۴ تا درجه داریم

۴) $p=6$, $\delta_G(v)=4$: درجه ۵ داریم $\Rightarrow$ $\forall v$ درجه ≥ 5 ∴

قضیه : فرض کنید G گرافی از مرتبه p با مجموعه رأس‌های $V=\{v_1,\dots,v_p\}$ و اندازه q باشد آنگاه

$$\sum_{i=1}^{p} deg(v_i) = deg(v_1)+deg(v_2)+\dots+deg(v_p) = 2q$$

اثبات : همه یال‌ها را حذف می‌کنیم. در حال حضر مجموع درجه‌ها برابر صفر است. یکی یکی یال‌های گراف را اضافه می‌کنیم. با اضافه کردن یال اول، دو رأس درجه یک می‌شوند پس مجموع درجه‌ها برابر ۲ می‌شود.

دوباره یالی دیگر اضافه می‌کنیم مجموع درجه‌ها ۲ می‌شود. با اضافه کردن هر یال، ۲ به مجموع درجه‌ها اضافه می‌شود. پس مجموع درجه‌ها دو برابر تعداد یال‌ها می‌شود. ☐

نتیجه هم : تعداد رأس‌های فرد هر گراف زوج است. مثلاً گرافی با درجات : ۱، ۲، ۳، ۴، ۴ وجود ندارد چون ۳ تا درجه فرد در بین درجه‌ها وجود دارد.

مثال : درجه‌های گرافی به صورت : $x, 2, 3, 4, 5, 5$ است. x چه اعدادی ممکن است باشد؟

۲ رأس درجه ۵ داریم: $2 \geq 1$ پس $x \geq 2$ ① $\Longrightarrow$ $5 \geq x$ ① $\Longrightarrow$ $5 \geq 5$ (۱) $\Longrightarrow$ $5 \geq p-1 = 6-1$

یعنی $x \geq 2$ است. ②

①, ② $\Longrightarrow$ $5 \geq x \geq 2$

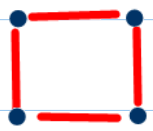
نقطه سه رأس خود دارد پس نمی‌تواند ۱ یا ۲ باشد. : $n=2,4$ if

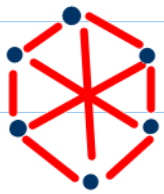
با ۴ رأس فرق، ۵ دیگر بنابراین ۲ باشد. : $n=5$ if

پس $n=4$ است.

گراف ۲-منتظم : گرافی که درجه همه رأس‌های آن برابر ۲ باشد.

مثال : ۶-منتظم مرتبه ۶ ۲-منتظم مرتبه ۴





نکته : در گراف r-منتظم مرتبه p همواره : $pr=2q$ داریم.

مثال : در یک گراف ۴-منتظم داریم $q=4p-8$. مرتبه و اندازه گراف را بدست آورید.

$$\begin{cases} q=4p-8 \\ 4p=2q \rightarrow q=2p \end{cases} \quad : \quad 2p=4p-8 \Rightarrow p=8 \Rightarrow q=16$$

گراف کامل : به گرافی که هر دو رأس آن مجاور باشند، گراف کامل k_p می‌گوییم.

k_1 : k_2 :  k_3 : 

k_4 :  k_5 : 

نکته : درجه هر رأس در k_p برابر $p-1$ است. پس گراف k_p، $(p-1)$-منتظم است و تعداد یال‌ها در k_p برابر $\frac{p(p-1)}{2}=\binom{p}{2}$ است.

مثال: با کم کردن ۴۴ یال از یک گراف کامل، گراف ۴-منتظم بدست می‌آید. مرتبه گراف را بیابید.

$$\frac{p(p-1)}{2} - 44 = q = 2p \quad : \quad 4p = 2q \Rightarrow 2p = q$$

$$\xrightarrow{\times 2} p(p-1) - 88 = 4p \Rightarrow p^2 - 5p - 66 = 0 \rightarrow (p-11)(p+6) = 0$$

$$\rightarrow p = 11$$

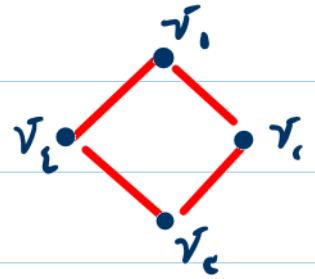
مکمل گراف: مکمل گراف G که آن را با $\bar{G}$ نشان می‌دهیم گرافی است که مجموعه رأس‌های آن همان مجموعه رأس‌های G است و دو رأس در $\bar{G}$ مجاور هستند هرگاه در G مجاور نباشند.

نکته:

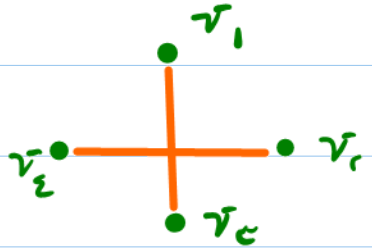
1) $q(G) + q(\bar{G}) = \binom{p}{2}$

2) $\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1$

مثال:



G



$\bar{G}$

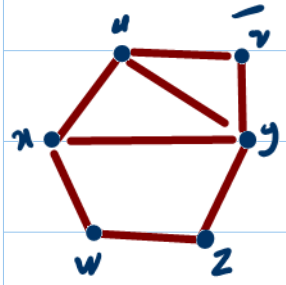
زیرگراف: گراف H را یک زیرگراف از گراف G می‌نامیم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$

مسیر: اگر u و v دو رأس از گراف G باشند یک مسیر از u به v دنباله‌ای از رأس‌های دو به دو متمایز

در گراف است که از راس شروع و به آخر ختم می‌شود و هر راس را تنها یک بار در این دنباله جای دهد. طول یک مسیر برابر

تعداد یال‌های این مسیر (که یکی کمتر از تعداد راس‌های مسیر است) تعریف می‌کنیم.

مثال: در گراف مقابل همه مسیرها از u به v را بنویسید و طول آن‌ها را مشخص کنید.



طول ۱ : uv

طول ۲ : uyv

طول ۳ : $uxyv$

طول ۵ : $uxwzyv$

گراف P_n : گرافی که تنها از یک مسیر به روی تشکیل شده باشد را مسیر به روی گویند و با P_n نمایش می‌دهیم.

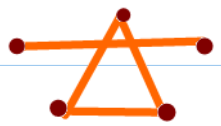
P_2 : 

P_4 : 

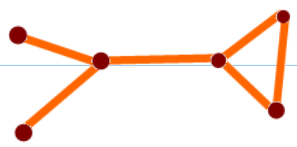
نکته: P_n گرافی از مرتبه n و اندازه $(n-1)$ است.

گراف همبند: گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

مثال:



ناهمبند

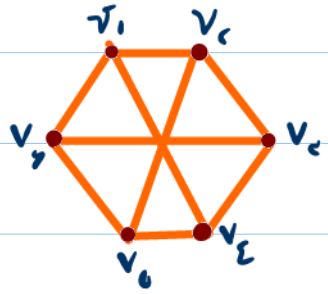


همبند

نکته: اگر G گرافی از مرتبه p با $\delta \geq p-1$ باشد آنگاه G گرافی همبند است.

دور: یک دور به طول m ($m \geq 3$) در گراف G دنباله‌ای شامل $m+1$ راس مانند $v_1 v_2 \dots v_m v_1$ است به طوری که m رأس به تا به تا دو به دو متمایز و هر دو راس متوالی در این دنباله مجاورند.

مثال: همه دورهای به طول ۶ در گراف ۴-منتظم مرتبه ۶ را بنویسید.



$v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_1$

$v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_1$

$v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_1$

$v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_1$

پرواضح است: $v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_1 v_2$

$v_3 v_4 v_5 v_6 v_1 v_2 v_3$

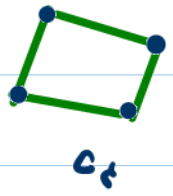
$v_4 v_5 v_6 v_1 v_2 v_3 v_4$

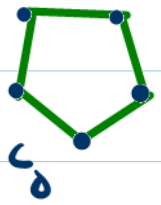
$v_5 v_6 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$

$v_6 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6$

۶ تا ۶ صفحی

گراف C_n: گرافی که شامل یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را دور n رأسی می‌نامیم.





مثال: تمرینی ۱.۴

در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

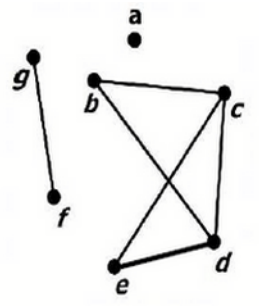
الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه ، مرتبه) می نامیم.

ب) گرافی را همبند می‌نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر ، یال) وجود داشته باشد.

پ) اگر G یک گراف nرأسی باشد، مقدار $q(G)+q(\overline{G})$ برابر با ($n(n-1)$ ، $\frac{n(n-1)}{2}$) است.

ت) گراف C_n تنها یک (دور ، مسیر) nرأسی دارد.

مثال: تمرینی ۱.۴



گراف G(شکل مقابل) را در نظر بگیرید:

الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$را مشخص کنید.

ب) دوری به طول ۴ بنویسید.

پ) دو مسیر به طول۳با شروع از راس b بنویسید .

ت) $N_G(f)$را با اعضا مشخص کنید.

الف) $\Delta = 4$, $\delta = 0$ ب) bcedb پ) bcde, bdec, bced

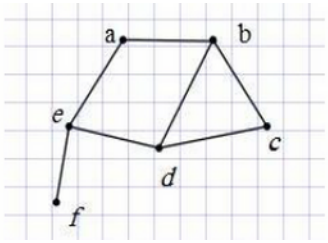
ت) $N_G(f) = \{g\}$

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱) گراف ۳-منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست. درست $5 \times 3 \neq 2q$

۲) تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است. نادرست

مثال نهایی خرداد ۹۸



شکل مقابل نمودارگراف G می باشد.

الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید.

ج) مجموع درجه های رأس های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید.

الف) $p=6, q=7$ ب) $N_G(b)=\{a,d,c\}$

ج) $q(G)+q(\overline{G})=\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2}=15 \Rightarrow 7+q(\overline{G})=15 \Rightarrow q(\overline{G})=8$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} deg_{\overline{G}} v_i = 2q = 16$

مثال: نهایی شهریور ۹۸

گراف G با مجموعه راس های $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعه یال های زیر در نظر بگیرید:

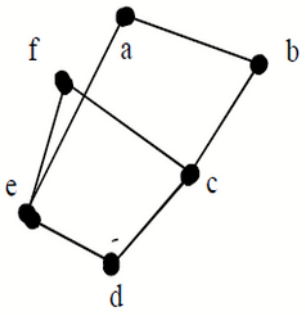
$E=\{ab,bc,cd,ed,ae,cf,ef\}$

الف)نمودار گراف را رسم کنید.

ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید.

ج)یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.

الف)



ب) $N_G[b]=\{a,c,b\}$

ج) baefcd

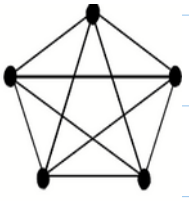
مثال: نهایی شهریور ۹۸

یک گراف ۵ راسی غیر تهی $k-$منتظم رسم کنید به طوری که:

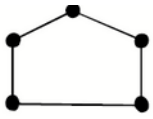
الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

الف

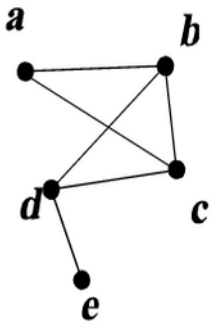


ب



مثال: نهایی دی ۹۸

گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) اندازه گراف را تعیین کنید.

پ) مجموعه همسایگی بسته رأس b را بنویسید.

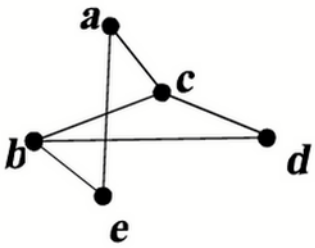
ت) اگر $N_G(d)=\{e,x,b\}$ باشد، x کدام رأس است؟

الف) $\delta=1$ ب) $q=6$ پ) $N_G[b]=\{a,c,d,b\}$

ت) $x=c$

مثال: نهایی دی ۹۸

گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

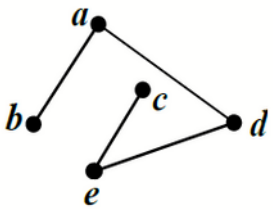


الف) دوری به طول ۵ مشخص کنید.

ب) مکمل گراف G را رسم کنید.

الف) acdbea

ب)



مثال: نهایی خرداد ۹۹

درگراف G، درجه رأس v برابر با ۹ است و درجه رأس v در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

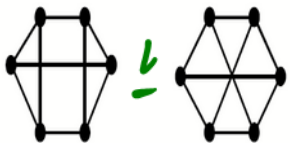
$\deg_G(v)+\deg_{\overline{G}}(v)=p-1 \Rightarrow 9+12=p-1 \Rightarrow p=22$

مثال: نهایی خرداد ۹۹

گراف G، ۶ رأسی ۳- منتظم است.

الف) اندازه گراف G را بیابید.

ب) نمودار گراف G را رسم کنید.

الف) $p\gamma = \gamma q \Rightarrow 6\times 4 = \gamma q \Rightarrow q = 9$ ب) 

مثال: نهایی خرداد ۹۹

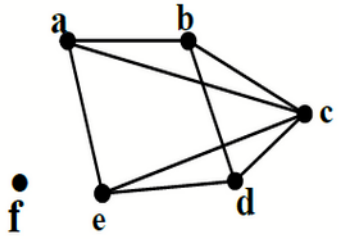
ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات :

فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = \sum_{v\in A} \deg(v) + \sum_{v\in B} \deg(v)$ از طرفی $\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = 2q$ و $\sum_{v\in B} \deg(v) = 2k$ زوج‌اند لذا $\sum_{v\in A} \deg(v) = 2q - 2k$ باید زوج باشد. می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد.

مثال: نهایی شهریور ۹۹

گراف G به صورت مقابل رسم شده است.به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) $\Delta(G)$, $\delta(G)$را مشخص کنید.

ب) سه دور به طول ۳ بنویسید.

پ) ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟

ت) $N_G(e)$را با اعضا بنویسید.

ث) آیا گراف G همبند است؟

الف) $\Delta = 4$, $\delta = 2$ ب) abca , bcdb , ecde

پ) $\deg_{\bar{G}}(f) = 6-1 = 5 = \Delta$ ت) $N_G(e) = \{a, c, d\}$ ث) خیر

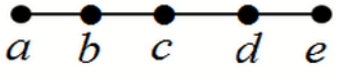
مثال: نهایی شهریور ۹۹

گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.

$q = \binom{p}{2} \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 10 \Rightarrow p(p-1) = 20 \rightarrow p = 5$ 

مثال: نهایی شهریور ۹۹

گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.



abcd , bcde

مثال: نهایی شهریور ۹۹

هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آن‌ها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آن‌ها هر کدام دقیقاً با دو نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

$\sum_{i=1}^{7} \deg v_i = 2q \Rightarrow 6\times 2 + \deg v_7 = 2q \Rightarrow \deg v_7 = 2q - 12 = 2k$

درجه رأس هفتم نمی‌تواند فرد باشد.

مثال: نهایی دی ۹۹

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) مرتبه گراف نشان دهنده تعداد رأس‌های ..... گراف می‌باشد.

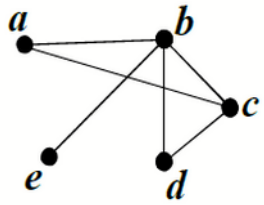
ب) اگر یک یال، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را ..... می‌نامیم.

پ) دو یال را ..... می‌نامیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها را به هم متصل کند.

ت) تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی ..... است.

مثال: نهایی دی ۹۹

گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید.



الف) درجه رأس e در گراف مکمل G چند است؟

ب) تمام دورهای موجود در گراف G را بنویسید.

پ) $\Delta(G)$ را مشخص کنید.

الف) $1 + \deg_{\overline{G}} e = 5 - 1 = 4 \Rightarrow \deg_{\overline{G}} e = 3$

ب) abdca , abca , bdcb

پ) $5 = 4$

مثال: نهایی دی ۹۹

الف) گراف k - منتظم را تعریف کنید.

ب) گراف P_7 را رسم کنید.

پ) آیا گراف‌های C_n منتظم هستند؟

الف) گرافی که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشد

ب)

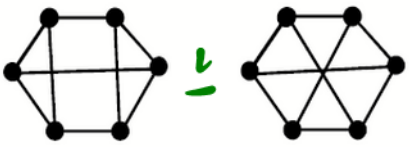


پ) بله

مثال: نهایی شهریور ۱۴۰۰

گراف G، ۳- منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.

$3p=2q$ و $q=2p-4$ $\Rightarrow$ $3p=2(2p-4)$ $\Rightarrow$ $p=6$



مثال: نهایی خرداد ۱۴۰۱

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

الف) اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس ...فرد..... می‌نامیم.

ب) گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد، هیچ یالی نداشته باشد، گراف ...تهی..... می‌نامیم.

پ) تعداد یال‌های گراف K_4 ، برابر با $\frac{4\times3}{2}=6$ است.

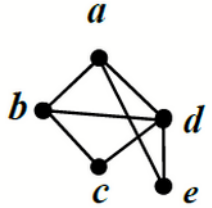
ت) گراف G را ...همبند... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

مثال: نهایی خرداد ۱۴۰۱

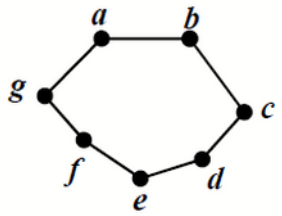
به سوالات زیر کوتاه پاسخ دهید.

الف) گراف C_7 را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید.

ب) در گراف شکل زیر، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.



الف)



abcdef

ب) $N_G(c) = \{b, d\}$

مثال: نمای شهودی ۱۴.۱

با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

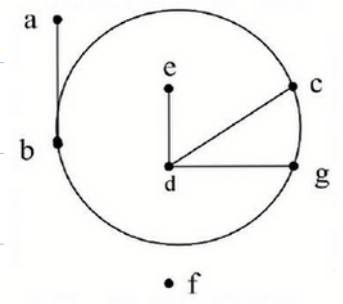
الف) یک مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید.

ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

پ) درجهٔ رأس a را در گراف $\overline{G}$ تعیین کنید.

ت)آیا گراف G همبند است ؟ (با ذکر دلیل)

ث) $N_G[f]$ را بنویسید.



الف) abgc ب) bcdgb پ) $\deg_{\overline{G}}(a) + 1 = 7 - 1$

$\Rightarrow \deg_{\overline{G}}(a) = 5$

ت) خیر ث) $N_G[f] = \{f\}$

مثال:

علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکهٔ اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفرِ دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دونفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

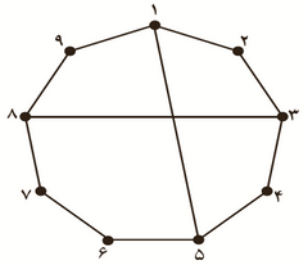
الف) حداکثر یال در گراف ساده $5 \times 4 = 20$ است. درحالت با شرط نباشه: 2^{20}

ب) حداکثر یال در گراف ساده $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ است. درحالت با شرط نباشه 2^{10}

مثال: یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به‌طوری‌که :

الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱ → دور به طول ۹
۱۲۳۴۵۱ → دور به طول ۵
۱۵۶۷۸۹۱ → دور به‌طول ۶
۱۲۳۸۷۶۵۱ → دور به طول ۷



۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱ → دور به طول ۹
۱۲۳۴۵۱ → دور به طول ۵
۱۵۶۷۸۹۱ → دور به‌طول ۶
۱۲۳۴۸۷۶۵۱ → دور به طول ۸

مثال:

فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq K$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است. درست

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K+1$ است. نادرست : P_2 :

$k = \delta = 1$ ●——● مسیری به طول ۲ ندارد

اثبات الف) راس دلخواه x_1 را در نظر می‌گیریم. حتماً x_1 به رأس دیگری مثل x_2 وصل خواهد بود زیرا

در غیر این صورت $\delta = 0$ خواهد بود. x_2 هم به رأسی غیر از x_1 مثل x_3 وصل خواهد بود زیرا در غیر این صورت

$\delta = 1$ خواهد شد. حتماً x_3 به رأسی غیر از x_1 و x_2 مثل x_4 وصل خواهد بود زیرا در غیر این صورت حداکثر متوالی

دو خواهد بود. این روند تا رأس x_k ادامه دارد که با استدلال مشابه حتماً باید به رأس جدیدی

مثل x_{k+1} وصل باشد پس مسیر $x_1 x_2 x_3 \dots x_k x_{k+1}$ یک مسیر به طول k در گراف داریم.

جزوه ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: گراف و مدلسازی

درس دوم: احاطه گری



مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

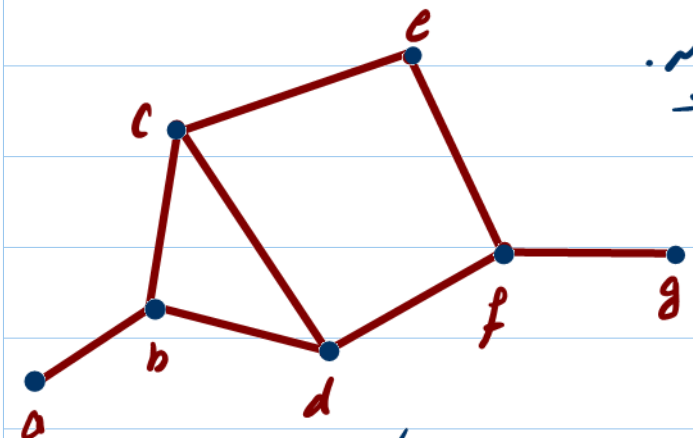
درس دوم: مدل‌سازی با گراف و احاطه‌گری

تعریف: یک رأس u از گراف G توسط رأس v احاطه می‌شود هرگاه $u=v$ یا $uv \in E$ (یعنی یالی از u به v وصل شده باشد).

مفهوم بالا را برای یک زیرمجموعه از مجموعه رأس‌های گراف G تعریف می‌کنیم.

تعریف مجموعه احاطه‌گر: فرض کنید V مجموعه راس‌های گراف G و $D \subseteq V$. D را یک مجموعه احاطه‌گر G می‌نامیم هرگاه هر رأس گراف G یا متعلق به D باشد یا حداقل با یکی از رأس‌های D مجاور باشد.

مثال: برای گراف زیر یک مجموعه احاطه‌گر بنویسید.



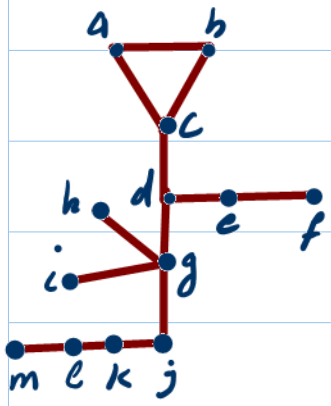
$D_1 = \{b, f\}$

$D_2 = \{a, c, e, f\}$

تعریف مجموعه احاطه‌گر مینیم: یک مجموعه احاطه‌گر گراف G را مجموعه احاطه‌گر مینیم می‌نامیم هرگاه در بین مجموعه‌های احاطه‌گر G کمترین تعداد عضو را داشته باشد. تعداد عضوهای این مجموعه احاطه‌گر را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر: یک مجموعه احاطه گر مینیمم از گراف G را یک γ-مجموعه هم می گوییم.

مثال: یک مجموعه احاطه گر مینیمم برای گراف زیر بنویسید.



$D=\{c,e,g,l\}$

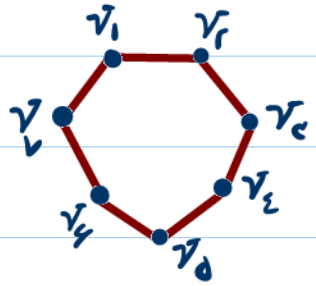
مثال: وزارت ۹۸

گراف C_7 را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف)یک مجموعه احاطه گر ۴ عضوی بنویسید.

ب) عدد احاطه گری C_7 را به دست آورید.

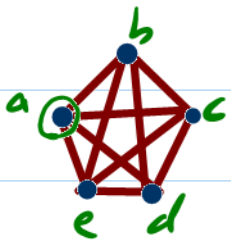
ج)دو مجموعه احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.



الف $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$

ب و ج $D_1=\{v_1, v_4, v_5\}$
$D_2=\{v_2, v_4, v_6\}$
$\Rightarrow \gamma(G)=4$

نکته: در هر گراف کامل هر رأس می تواند یک مجموعه احاطه گر گراف باشد زیرا هر رأس با $(n-1)$ رأس دیگر وصل است، بنابراین عدد احاطه گری هر گراف کامل یک است.



$D=\{a\}$

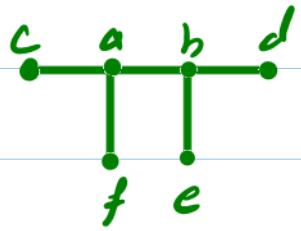
مثال خودار ۹۹ :

گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید، به طوری که:

الف) مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

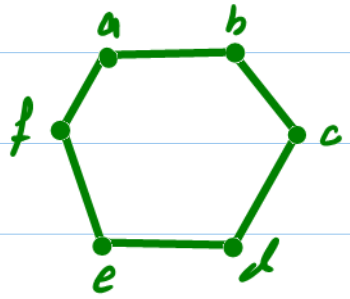
ب) بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

الف)



$D = \{a, b\}$

ب)



$D_1 = \{a, d\}$ $D_2 = \{f, c\}$

$D_3 = \{e, b\}$

مثال: نهایی خودار ۱۴۰۰

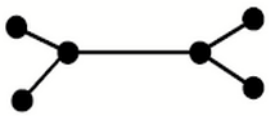
الف) یک گراف ۶ رأسی که γ – مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید.

ب) یک گراف ۶ رأسی که γ – مجموعه آن با اندازه دو باشد، رسم کنید.

الف)



ب)

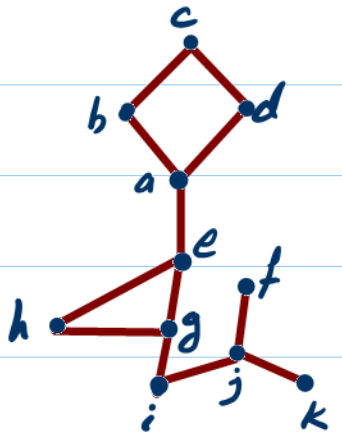


تعریف احاطه‌گر مینیمال :

یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است هرگاه با حذف هریک از رأس‌های آن دیگر مجموعه احاطه‌گر نباشد.

تذکر: برای بررسی مینیمال بودن باید تک تک اعضا را حذف کنیم و ببینیم که مجموعه احاطه‌گر نباشد. اگر حتی با حذف یک عضو مجموعه احاطه‌گر بماند آن مجموعه احاطه‌گر مینیمال نخواهد بود.

مثال: یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای گراف زیر بنویسید.



$D=\{c,e,i,f,k\}$

اگر c حذف شود: $\{e,i,f,k\}$ احاطه‌گر نیست.

اگر e حذف شود: $\{c,i,f,k\}$ احاطه‌گر نیست.

اگر i حذف شود: $\{c,e,f,k\}$ احاطه‌گر نیست.

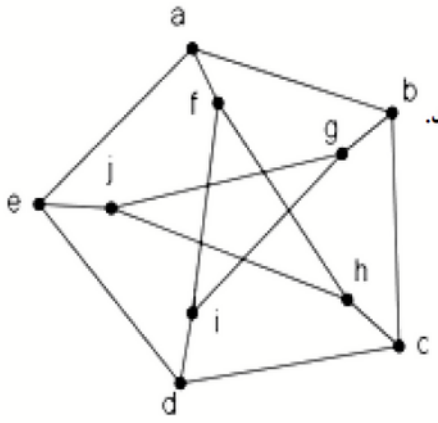
اگر f حذف شود $\{c,e,i,k\}$ احاطه‌گر نیست.

اگر k حذف شود $\{c,e,i,f\}$ احاطه‌گر نیست.

مثال خرداد ۹۸

الف)ثابت کنید هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را میتوان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد ؟

ب)در گراف روبرو یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.



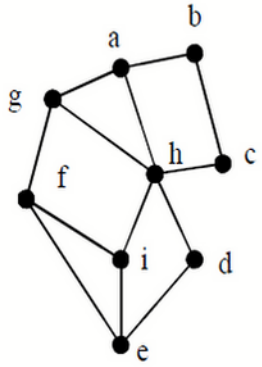
الف) اگر $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر غیر مینیمال باشد در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آن‌ها مجموعه احاطه‌گر باقی می‌ماند. به عضوی مانند a_i را از نظر می‌گیریم.

اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه‌گر باقی بماند آن را حذف می‌کنیم. در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس ها انجام می‌دهیم.

ب) $A = \{h, g, f, i, j\}$

مثال: شهریور ۹۸

در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال انتخاب کنید ؛ سپس با حذف برخی از راس ها،آن را به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید.



غیر مینیمال $= \{a, h, f, b\}$

با حذف رئوس a، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال به دست می‌آید.

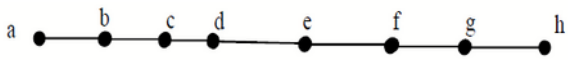
مثال: شهریور ۹۸

الف) گراف P_8 را رسم کنید.

ب)یک γ–مجموعه از آن را مشخص کنید.

ج)یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.

الف



ب $\{a, d, g\}$

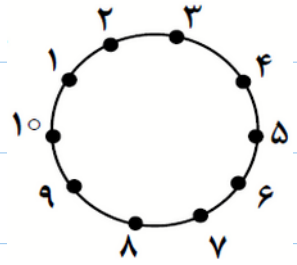
ج $\{a, d, e, h\}$

مثال: دی ۱۴۰۰

گراف C_{10} را رسم کنید.

الف) یک γ – مجموعه از آن را مشخص کنید.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی از آن را تعیین نمایید.



الف $D = \{1, 4, 7, 10\}$

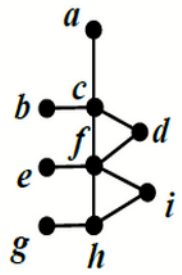
ب $D = \{1, 4, 5, 7, 9\}$

مثال: خزار ۱۴۰۱

گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف) یک γ – مجموعه مشخص کنید.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.



الف $D = \{c, h, e\}$ ب $D = \{g, c, i, e\}$

نکته: هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. اما عکس آن همواره درست نیست.

تعریف یک نماد: برای نوشتن جزء صحیح عدد x از $\lceil x \rceil$ استفاده می‌کنیم و آن را سقف x می‌خوانیم،

یعنی: $\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

مثلاً: $\lceil 4 \rceil = 4$, $\lceil 4.7 \rceil = 5$

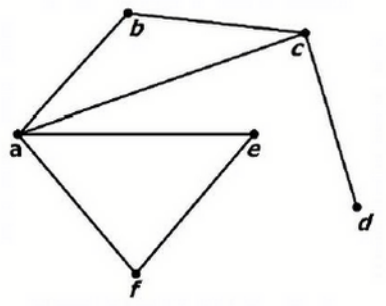
قضیه: در گراف G از مرتبه p با ماکسیمم درجه Δ داریم: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil$.

یعنی $\left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پائین برای $\gamma(G)$ است، یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر باشد.

نتیجه: برای گراف‌های C_n، P_n داریم: $\gamma = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

مثال ری ۱۴.۱:

عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



$p=6,\ \Delta=4$

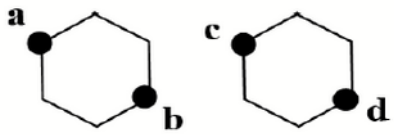
$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{6}{4+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{6}{5} \right\rceil = 2 \Rightarrow \gamma(G) \geq 2$, $D=\{a,d\}$

پس $\gamma(G)=2$.

مثال ری ۱۴.۱:

یک گراف ۲-منتظم ۱۲ راسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{2+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{12}{3} \right\rceil = \lceil 4 \rceil = 4$



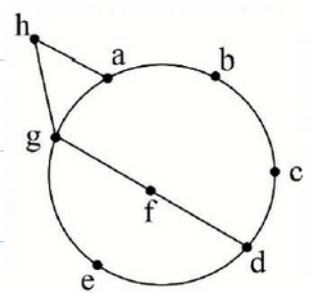
$D=\{a,b,c,d\}$

مثال: شوربر ۱۴.۱

با توجه به گراف (G) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص کنید.

ب)یک مجموعهٔ احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



(G)

الف $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\Delta}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta}{\delta} \right\rceil = ۲ \Rightarrow \gamma(G) \geq ۲$ $D = \{g, c\}$

ب $D = \{h, d, b\}$

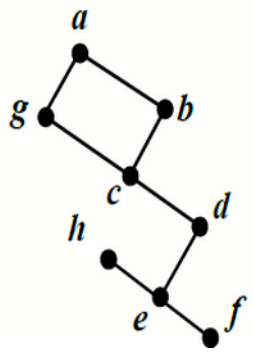
مثال: شوربر ۱۴.۱

در یک گراف از مرتبهٔ ۸ با $\Delta = ۳$ ، حداقل چند رأس برای احاطه همه رئوس لازم است؟

$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\Lambda}{۳+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Lambda}{۴} \right\rceil = ۲$

مثال: خزار ۱۴.۱

عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه حل، تعیین کنید.

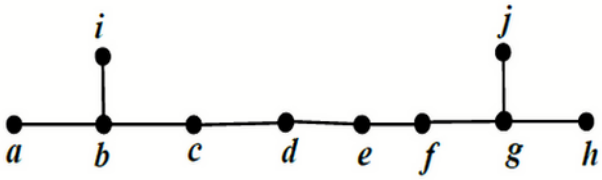


$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\Lambda}{۳+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Lambda}{۴} \right\rceil = ۲ \Rightarrow \gamma(G) \geq ۲$, $D = \{a, c, e\}$

پس : $\gamma(G) = ۳$

مثال: ری ۱۴۰۰

عدد احاطه‌گری گراف G (شکل مقابل) را با ارائه راه حل، تعیین کنید.



$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{10}{4} \right\rceil = 3 \Rightarrow \gamma(G) \leq 3$ ، $D = \{b, e, g\}$

$\Rightarrow \gamma(G) = 3$

مثال: ری ۱۴۰۰

درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

الف) هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است. نادرست

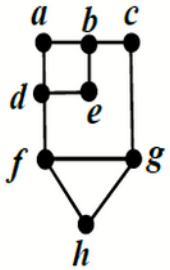
ب) اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد آن‌گاه $\gamma(G) > \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$. نادرست

پ) در گراف P_n عدد احاطه‌گری برابر با $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است. درست

ت) $\lceil ۳/۴۸ \rceil = ۴$. درست

مثال: شهریور ۱۴۰۰

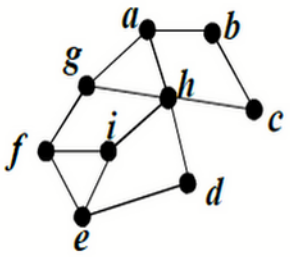
در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\Delta}{\Delta+1} \right\rceil = 2$ ، $D = \{b, f\} \Rightarrow \gamma(G) = 2$ ، $D_{minimal} = \{a, e, c, h\}$

مثال: خرداد ۱۴۰۰

در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

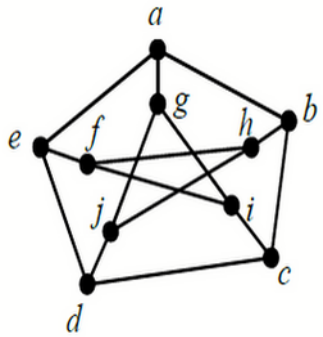


$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{9}{5+1} \right\rceil = 2$ ، $D = \{h, b, f\} \Rightarrow \gamma(G) = 3$

$D_{minimal} = \{a, c, i, d\}$

مثال: خرداد ۹۹

عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



$\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{10}{4+1} \right\rceil = 2 \Rightarrow \gamma(G) \leq 2$ ، $D = \{g, h, d\}$

$\Rightarrow \gamma(G) = 2$

مثال: دی ۹۸

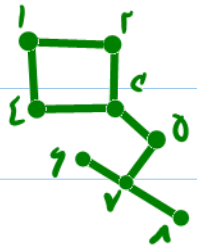
اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه گراف باشد،

الف) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است.

ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.

الف) $\chi(C_{10}) = \left\lceil \frac{10}{2+1} \right\rceil = 4$

ب)



$\chi(G) \geq \left\lceil \frac{8}{2+1} \right\rceil = 2$, $D = \{1,2,7\}$

$\Rightarrow \chi(G) = 2$

جزوه ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: ترکیبیات

درس اول: مباحثی در ترکیبیات



مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

یادآوری نکات و مفاهیم پایه در شمارش :

۱- اصل ضرب : فرض کنید انجام کاری k مرحله دارد. اگر مرحله اول را بتوان به m_1 طریق

یا

تکیه بر «و»

انجام داد، مرحله دوم را به m_2 طریق و ... مرحله k ام را به m_k طریق

انجام داد، کل کار مورد نظر را می‌توان به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق انجام داد.

۲- اصل جمع : فرض کنید بتوان کاری را از k روش انجام داد. اگر روش اول به m_1 طریق،

یا

تکیه بر «یا»

روش دوم به m_2 طریق و ... و روش k ام به m_k طریق ممکن باشد و بخواهیم

فقط یکی از این k روش را انتخاب کنیم، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$

یا از روش اول یا از روش دوم یا ...

طریق وجود دارد.

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟

۱) ۹۴۸ ✓ ۲) ۹۵۲ ۳) ۹۶۸ ۴) ۹۷۲

گزینه ۲

$\boxed{9} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{1,0} = 504$

$\boxed{8} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{1,5} = 448$

$\Rightarrow 504 + 448 = 952$

بخش‌پذیر بر ۵

۳ـ جایگشت :

فرض کنید n شیء متمایز داریم. به هر حالت از قرار گرفتن این اشیاء در کنار هم یک جایگشت می‌گوییم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز $n!$ است.

$$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad , \quad n! = n(n-1)(n-2)\cdots \times 1$$

مثال: a,b,c $\quad$ abc bca acb cab bac cba $\quad$ $3! = 3\times 2\times 1 = 6$

۴ـ تبدیل (ترتیب):

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارت دیگر تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن اهمیت داشته باشد را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و به آن تبدیل r شیء از n شیء متمایز گفته می‌شود و از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: $a,b,c \xrightarrow{\text{جایگشت‌های ۲تایی}} ab, ba, ac, ca, bc, cb$ $\quad$ $P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۵- ترکیب :

به هر انتخاب r تایی از n شیء متمایز که در آن ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می گوییم و تعداد آن ها را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می دهیم که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال a,b,c $\xrightarrow[\text{۲ تایی}]{\text{ترکیب های}}$ $\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$ $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

حالات خاص در رابطه ترکیب :

۱) $\binom{n}{0} = 1$ مثال $\binom{10}{0} = 1$

۲) $\binom{n}{n} = 1$ مثال $\binom{0}{0} = 1$

۳) $\binom{n}{1} = n$ مثال $\binom{7}{1} = 7$

۴) $\binom{n}{n-1} = n$ مثال $\binom{6}{5} = 6$

۵) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ مثال $\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$

۶) $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ مثال $\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3!} = 35$

۷) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ مثال $\binom{۷}{۳} = \binom{۷}{۴}$ یا $\binom{۱۰}{۸} = \binom{۱۰}{۲}$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی از یک مجموعه nعضوی برابر $\binom{n}{r}$ است و تعداد زیرمجموعه‌های

یک مجموعه nعضوی برابر ۲^n است پس: $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\cdots+\binom{n}{n} = ۲^n$

مثال کنکور تجربی ۹۹:

به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری‌که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۷ ۳) ۹۱ ✓ ۴) ۹۵

دو نفر را کنار بگذاریم $\binom{۷}{۵} = \binom{۷}{۲} = \frac{۷\times۶}{۲} = ۲۱$

یکی از دو نفر انتخاب شود $\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۴} = ۲\times\binom{۷}{۳} = ۲\times\frac{۷\times۶\times۵}{۳!} = ۲\times۳۵ = ۷۰$

گزینه ۳ $۲۱ + ۷۰ = ۹۱$

مثال کنکور تجربی ۹۸:

گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری‌که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۵۴ ✓ ۴) ۱۶۸

$\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶} = \binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۲} = ۷۰ + \frac{۸\times۷}{۲} + \frac{۸\times۷\times۶}{۶}$

$\frac{۸!}{۴!\times۴!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴\times۳\times۲\times۴!} = ۷۰$

گزینه ۳ $= ۷۰ + ۵۶ + ۲۸ = ۱۵۴$

مثال: دی ۹۷

اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$، در این صورت چند کد یا رمز ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقمِ(متمایز) از A وسه رقمِ (متمایز) از B باشد؟

$\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۳}\times ۵! = \frac{۴\times ۳}{۲}\times\frac{۵\times ۴}{۲}\times ۱۲۰ = ۶\times ۱۰\times ۱۲۰ = ۷۲۰۰$

$\binom{۵}{۳}$: انتخاب ۳ تا از ۵ تا — $\binom{۴}{۲}$: انتخاب ۲ تا از ۴ تا — $۵!$: چیدن ۵ تا انتخاب شده

نکته: جابجایی با تکرار

فرض کنید n شیء داریم. به طوری که n_1 تای آنها از نوع اول (مثل هم)، n_2 تای آنها نوع دوم، ... و n_k تای آنها از نوع k-ام باشند، تعداد حالت‌های جابجایی این n شیء برابر $\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\dots\times n_k!}$ است.

مثال: خرداد ۹۸

با ارقام ۵, ۴, ۴, ۲, ۳, ۲, ۲, ۱, ۱, ۱ چند عدد ۹رقمی می توان نوشت.

$\frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۲!} = \frac{۹\times ۸\times ۷!}{۶\times ۳\times ۲\times ۲} = ۳\times ۷!$

۹!: کل رقم‌ها — ۲!: رقم‌های تکراری ۲ — ۳!: رقم‌های تکراری ۱ — ۲!: رقم‌های تکراری ۴

مثال: خرداد ۹۸

۶ دانش آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند کنارهم دریک ردیف قرارگیرند ، به طوری که :

الف) به صورت یک در میان قرار بگیرند. $۵!\times ۶!$

ب) همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند. $۵!\times(۱+۶)! = ۵!\times ۷!$

(۵!: جابجایی یازدهم‌ها — (۱+۶)!: یک یازدهم‌ها + ۶ دوازدهم‌ها)

ج) یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند. $۲!\times(۹+۱)! = ۲!\times ۱۰!$

(۲!: جابجایی خاص‌ها — (۹+۱)!: ۱ خاص‌ها + ۹ دانش‌آموز بدون خاص‌ها)

مثال: شهریور ۹۸

۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که:

الف) همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند.

ب)هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.

ج) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

الف

$$4! \times 4! \times (5+1)! = 4! \times 4! \times 6!$$

(4! × 4!: فیزیک‌ها با هم به ریاضی‌ها؛ (5+1)!: فیزیک‌ها به ریاضی‌ها)

ب

$$4! \times 5! \times 4!$$

(4!: فیزیک‌ها؛ 5!: ریاضی‌ها؛ 4!: بین ریاضی‌ها)

ج

$$4! \times 4! \times (4+1)! = 4! \times 4! \times 7!$$

(4!: خاص‌ها؛ 4!: فیزیک‌ها با بقیه خاص‌ها؛ (4+1)!: خاص‌ها به بقیه)

مثال: دی ۹۸

با حروف کلمه «می سی سی پی» چند جایگشت ۸ حرفی با معنا یا بی معنا می‌توان نوشت؟

$$\frac{8!}{4! \times 2! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = 840$$

(8!: همه؛ 4!: ی‌ها؛ 2!: س‌ها؛ 2!: م‌ها)

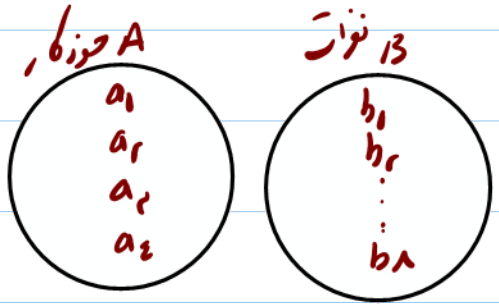
نکته: تعداد توابع یک به یک از مجموعه m عضوی A به مجموعه k عضوی B که $m \leq k$ برابر است با:

$$P(k,m) = (k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$$

اثبات آن را با مثال زیر بررسی می کنیم.

مثال وزارت ۹۹ :

به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟(به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم.)



حوزه کار a_1 را از نظر شیوه‌ی کار می‌توان به هرکدام از ۸ نوع

بدهیم. حوزه کار a_2 را به هرکدام از ۷ نوع باقی‌مانده و ....

پس طبق اصل ضرب $8 \times 7 \times 6 \times 5$ حالت برای انجام این کار داریم.

و با فرمول پایین هم به همین جواب می‌رسیم: $(8)_4 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5$

مثال: کنکور ۹۹

تعداد تابع‌های یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی چند تا است؟

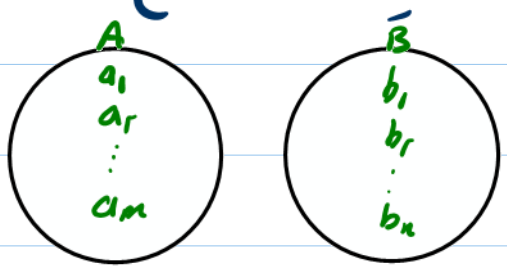
$$(6)_3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

مثال: کنکور ۹۹

هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق، سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟

$$\frac{8!}{3! \times 4! \times 1!}$$

نکته: فرض کنید A مجموعه‌ای m عضوی و B مجموعه‌ای n عضوی باشد. در این صورت تعداد توابع از A به B



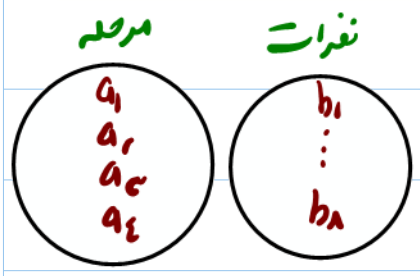
برابر n^m است.

زیرا: a_1 ها را به هرکدام از b_1 تا b_n می‌توان نسبت داد پس کل حالت‌ها

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m \text{ بار}} = n^m$$

مثال: شهریور ۹۹

۸نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)



حل مسائل این قسمت از مبحث تعداد توابع از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی است که برابر 8^4 است.

مثال: دی ۹۹

با ارقام ۴، ۳، ۷، ۸، ۶ چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت که:

الف) اعداد زوج کنار هم باشند.

ب) اعداد فرد کنار هم باشند.

الف) $4! \times (2+1)! = 4! \times 4!$ (جای زوج‌ها: ۴ و ۲، ۷ / جای زوج‌ها: ۴! / جای فرد و زوج: (۲+۱)!)

ب) $2! \times (3+1)! = 2! \times 4!$ (جای فردها: ۲! / جای فرد و زوج: (۳+۱)! / جای فردها: ۳ و ۵ و ۶)

مثال: خرداد ۱۴۰۰

می‌خواهیم با حروف «ب» و «ج» و ارقام ۱،۲،۴،۵،۶،۸ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است:

الف) تعداد رمزهایی که هر یک از آن‌ها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد.

ب) تعداد رمزهایی که در آن‌ها حروف کنار هم باشند.

ب) $2! \times (6+1)! \times 2! = 2! \times 7! \times 2!$ (جای حروف: ۲! / جای فرد و زوج: (۶+۱)! / جای حروف: ۲! / جای ارقام: ۷!)

الف) $2! \times 6! \times 2!$ (جای حروف: ۲! / جای ارقام: ۶! / جای حروف: ۲!)

مثال: دی ۱۴۰۱

می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم . اگر بخواهیم هر نفر روبه روی برادرش بنشیند ، این کار را به چند روش می توان انجام داد؟

هر دو برادری که مقابل هم می‌نشینند را یک دسته می‌گیریم پس ۴ دسته داریم و تعداد جابجایی‌ها $4!$ می‌شود.

از طرفی در هر دسته دو برادر مقابل هم، ۲! جابجایی دارند پس : $4! \times (2!)^4$

مثال: شهریور ۱۴۰۰

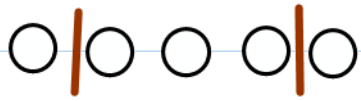
می‌خواهیم ۲۰ نفر را به ۴ گروه ۵ نفره تقسیم کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

$$\frac{20!}{5!5!5!5!}$$

حل معادله سیاله خطی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

فرض کنید n داریم و k متغیر مثل x_i داریم. برای جداسازی نیاز به $k-1$ خط داریم. تکرار جواب‌ها برابر تعداد جایگشت‌های n دایره و $k-1$ خط می‌شود. طبق رابطه جایگشت با تکرار داریم:

$$\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$$



که همگی به ترکیب $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

قضیه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$.

$x_i \geq 0$

نتیجه: تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

$x_i \geq 1$

اثبات: اگر $y_i = x_i - 1$ آنگاه:

$$x_i \geq 1 \Rightarrow x_i - 1 \geq 0 \Rightarrow y_i \geq 0$$

با تغییر متغیر معادله را می‌نویسیم: (k به دو طرف اضافه می‌کنیم.)

$$x_1 - 1 + x_2 - 1 + \dots + x_k - 1 = n - k$$

$\Rightarrow \quad y_1 + \dots + y_k = n-k \;,\; y_i \geq 0 \overset{\text{طبق قضیه}}{\Rightarrow}$ تعداد جواب $= \binom{n-k+k-1}{k-1}$

$= \binom{n-1}{k-1}$ ■

مثال ری ۹۷ :

به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد ؟

جواب مسئله معادل جواب های طبیعی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4 = 8$ است .

$\binom{n-1}{k-1} = \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$

نکته : در اکثر سوالات معادله سعی شرط هایی برای متغیرها قرار می دهند . ابتدا همه آن ها را به صورت بزرگتر مساوی نوشته (مثلاً اگر $x_i > 4$ باشد چون x_i صحیح است پس معادل $x_i \geq 5$ است .)

پس تغییر متغیر می دهیم تا متغیر جدید صحیح و نامنفی شود (مثلاً $x_i \geq 5 \Rightarrow x_i - 5 \geq 0 \Rightarrow y_i \geq 0$)

در آخر حل یا جواب هایی که از متغیرها کم کرده ایم را دوباره به آن ها اضافه می کنیم و معادله جدید را حل می کنیم .

نکته : اگر متغیری ضریب غیر یک داشت در حالت های مختلف $x_i = 0, x_i = 1, x_i = 2$ و ... تا جایی که بیشتر از مجموع نشود ، مسئله را حل می کنیم و جواب های به دست آمده را با هم جمع می کنیم .

مثال: خرداد ۹۸

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + ... + x_5 = 10$ با شرط $x_i > 0 \ , i = 2,3,4,5$ را محاسبه کنید.

$x_i > 0 \Rightarrow x_i \geq 1 \qquad i = 2,3,4,5$

$\Rightarrow x_i - 1 \geq 0 \rightarrow y_i \geq 0 \ , \ x_1 \geq 0$: برای x_1 فقط شرط صحیح و نامنفی را داریم

پس ۴ - را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 - 1 + x_3 - 1 + x_4 - 1 + x_5 - 1 = 10 - 4$

$\Rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \Rightarrow$ تعداد جواب $= \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$

مثال: شهریور ۹۸

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + ... + x_6 = 12$ با شرط $x_5 \geq 4 \ , \ x_1 > 2$ را محاسبه کنید.

$x_1 > 2 \Rightarrow x_1 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 3 \geq 0 \Rightarrow y_1 \geq 0$

$x_5 \geq 4 \Rightarrow x_5 - 4 \geq 0 \Rightarrow y_5 \geq 0$

به دو طرف معادله ۷ - را اضافه می کنیم:

$x_1 - 3 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 4 + x_6 = 12 - 7$

$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5 \Rightarrow$ تعداد جواب $= \binom{6-1+5}{6-1} = \binom{10}{5}$

مثال: وزارد ۹۹ :

به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.

$x_1 + \dots + x_5 = 11 \quad , \quad x_1 \geq 2 \quad , \quad x_5 > 4$

$x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 - 2 \geq 0 \rightarrow y_1 \geq 0$

$x_5 > 4 \Rightarrow x_5 \geq 5 \rightarrow x_5 - 4 \geq 0 \Rightarrow y_5 \geq 0$

به دو طرف معادله ۶- اضافه می‌کنیم :

$x_1 - 2 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 4 = 11 - 6$

$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \Rightarrow$ تعداد جواب $= \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$

مثال: دی ۹۹

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 17$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آن که $x_5 = 2$, $x_2 > 2$ باشند.

$x_2 > 2 \Rightarrow x_2 \geq 3 \Rightarrow x_2 - 3 \geq 0 \Rightarrow y_2 \geq 0$

به دو طرف ۳ - اضافه می‌کنیم :

$x_1 + x_2 - 3 + x_3 + x_4 + 2 + x_6 = 17 - 3$ ($x_5 \rightarrow 2$)

$x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 12 \Rightarrow$ تعداد جواب $= \binom{12+5-1}{5-1} = \binom{16}{4}$

مثال: شهریور ۱۴۰۱

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله زیر را با شرایط داده شده به‌دست آورید.

$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9 \qquad (x_5 = 2 \text{ و } 1 \leq i \leq 4 \text{ و } x_i \geq 0)$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 9 \Rightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7$

فقط دوحالت برای x_2 داریم :

اگر $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9\times 8}{2} = 36$

اگر $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + 2 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$

$\Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= 36 + 10 = 46$

مثال: ری ۱۴.۱

به چند روش می توان از بین ۵ نوع گل ۱۶شاخه گل انتخاب کرد به طوریکه ، از گل نوع سوم فقط۳ شاخه واز گل نوع چهارم دست کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش ازچهارشاخه انتخاب کنیم؟

$x_1 + \dots + x_5 = 16 \quad , \quad x_3 = 3 \; , \; x_4 \geq 3 \; , \; x_5 > 4$

$x_4 \geq 3 \Rightarrow x_4 - 3 \geq 0 \Rightarrow y_4 \geq 0$

$x_5 > 4 \Rightarrow x_5 \geq 5 \Rightarrow x_5 - 5 \geq 0 \Rightarrow y_5 \geq 0$

به‌جای x_4 قرار می‌دهیم $y_4 + 3$ و به‌جای x_5 قرار می‌دهیم $y_5 + 5$:

$x_1 + x_2 + y_4 + 3 + x_4 - 4 + x_5 - 5 = 16 - 3$

$x_1 + x_2 + y_4 + y_5 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{4} = \frac{8\times 7\times 6}{6} = 56$

مثال: هندسه معادله زیر را حل کنید

$$x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=3 \qquad x_i\geq 0\ ,\ 1\leq i\leq 4$$

حل:

$$\begin{cases} x_2=0\Rightarrow x_1+0+x_3+x_4=3\Rightarrow x_1+x_3+x_4=3\Rightarrow \binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10 \\ x_2=1\Rightarrow x_1+1+x_3+x_4=3\Rightarrow x_1+x_3+x_4=2\Rightarrow \binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6 \\ x_2=4\Rightarrow x_1+2+x_3+x_4=3\Rightarrow x_1+x_3+x_4=1\Rightarrow \binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3 \\ x_2=9\Rightarrow x_1+3+x_3+x_4=3\Rightarrow x_1+x_3+x_4=0\Rightarrow \binom{0+3-1}{3-1}=\binom{2}{2}=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ تعداد کل جواب‌ها $=10+6+3+1=20$

مربع‌های لاتین

تعریف مربع لاتین $n \times n$: یک جدول مربعی $n \times n$ که هر سطر و هر ستون آن با اعداد $1, 2, \dots, n$ به گونه‌ای پر شده باشد که در هیچ سطر آن و هیچ ستون آن عدد تکراری نباشد را یک مربع لاتین می‌گوییم. به هریک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.

مثال: یک مربع لاتین 4×4 :

۱	۲	۳
۲	۴	۱
۴	۱	۲

نکته: در یک مربع لاتین n که روی مجموعه X تعریف می‌شود، هر خانه یا درایه شامل عضوی از X است، به طوری که هر سطر n تایی از X و هر ستون n هم یک جایگشت از X است.

مربع لاتین چرخشی :

همگی در سطر اول اعداد 1 تا n را بنویسیم و در سطر دوم، اعداد سطر اول را یکی به راست ببریم و عدد آخر را در خانه اول سطر دوم قرار دهیم و همین ترتیب تا سطر nام عمل کنیم، به مربع لاتین مورد نظر می‌رسیم.

مربع لاتین چرخشی می‌گویند.

مثال: یک مربع لاتین چرخشی 5×5 بسازید.

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	٤
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	٤	۵	۱

مثال کنکور ۹۹ :

یک مربع لاتین چرخشی ۴ × ۴ بنویسید.

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

حل :

نکته: برای هر عدد طبیعی n، مربع لاتین n×n وجود دارد.

ساختن مربع لاتین از روی مربع لاتین دیگر

۱) تعویض جای سطرها یا ستون‌ها

۲) جابجایی روی اعداد. مثلاً جابجایی ۱و۲و۳و۴ داریم ۴!=۲۴ راه

مثال: خرداد ۱۴۰۱

مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اِعمال جایگشت $\begin{matrix}۱\to۳\\۲\to۲\\۳\to۴\\۴\to۱\end{matrix}$ مربع لاتین B را به دست آورید.

$$A=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۳&۴&۱&۲\\\hline ۲&۱&۴&۳\\\hline ۱&۲&۳&۴\\\hline ۴&۳&۲&۱\\\hline\end{array}$$

حل:

$$B=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۴&۱&۳&۲\\\hline ۲&۳&۱&۴\\\hline ۳&۲&۴&۱\\\hline ۱&۴&۲&۳\\\hline\end{array}$$

مثال: دی ۹۹

مربع لاتین A را در نظر بگیرید.

با اِعمال یک جایگشت روی درآیه های مربع لاتین A ، مربع لاتین B را تولید کنید.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲&۱&۳\\\hline ۳&۲&۱\\\hline ۱&۳&۲\\\hline\end{array}$$

حل:

$$B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱&۳&۲\\\hline ۲&۱&۳\\\hline ۳&۲&۱\\\hline\end{array}$$

$\begin{matrix}۱\to۳\\۲\to۱\\۳\to۲\end{matrix}$

تذکر: از روی یک مربع لاتین $n \times n$ می‌توانیم با جابجایی، مربع لاتین‌های دیگری بدست آوریم.

مثال: خرداد ۹۹

مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اِعمال یک جایگشت بر روی ۱،۲،۳،۴ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۱ → ۲
۲ → ۴
۳ → ٤
٤ → ۱

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۴	۲
۴	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۴

تعریف دو مربع لاتین متعامد:

فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند و از کنار هم قرار دادن زوج‌های نظیر این دو مربع مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک زوج مرتب باشد که مولفه اول آن از A و مولفه دوم از B باشد. اگر هیچ دو تا از این زوج‌های مرتب با هم برابر نباشند، می‌گوییم A و B متعامدند.

مثال ری ۹۷ :

دومربع لاتین متعامد ۳×۳ را بنویسید. (دلیل متعامد بودن آنها را بیان کنید.)

حل :

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

→

۱۴	۲۱	۳۲
۲۲	۳۴	۱۱
۴۱	۱۲	۲۴

مثال: ری ۹۸

بررسی کنید، آیا دو مربع لاتین ۳×۳ روبه‌رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

حل: بله - زیرا جفت تکراری نداریم

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

مثال: وزارر ۹۹

در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

الف)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

ب)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

الف)

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

متعامد نیستند زیرا عدد دورقمی تکراری نداریم.

ب)

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

متعامد نیستند زیرا عدد دورقمی تکراری داریم.

مثال: خردار ۱۴۰۰

مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را B نام‌گذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

$A=$

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

حل:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$\Rightarrow$ $B=$

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

$AB\Rightarrow$

۲۱	۳۳	۱۲
۱۲	۲۱	۳۳
۳۳	۱۲	۲۱

متعامد نیستند زیرا عدد دورقمی تکراری داریم.

مثال: شریف ۱۴۰۰

الف) تمام مربع‌های لاتین ۲×۲ را بنویسید.

ب) آیا دو مربع لاتین ۲×۲ متعامد وجود دارد؟ دلیل بیاورید.

الف)

۲	۱
۱	۲

۱	۲
۲	۱

ب)

۲۱	۱۲
۱۲	۲۱

متعامد نیستند.

نکته: اگر $n=4,7,8,9,\dots$ باشد دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد و به ازای سایر اعداد طبیعی n دو مربع لاتین متعامد وجود دارد.

نکته: در مربع لاتین $n\times n$، هر یک از اعداد 1 تا n دقیقاً در هر خانه نوشته می‌شوند.

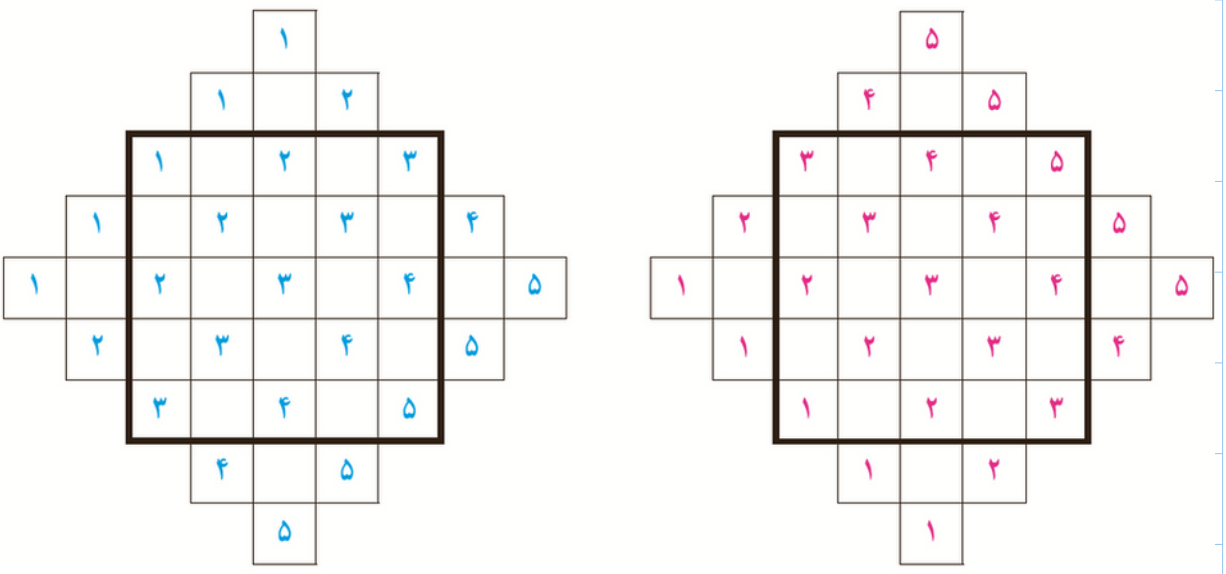
نکته: اگر مربع‌های لاتین A و B متعامد باشند و مربع لاتین C از اعمال یک جایگشت روی اعضای B به دست آمده باشد آنگاه A و C هم متعامدند.

نکته: اگر A یک مربع لاتین باشد و با اعمال جایگشت روی A، مربع لاتین B به دست آید آنگاه A و B متعامد نیستند.

ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ فرد :

مرحلهٔ گام‌به‌گام ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۵ به‌ازای $n=5$. مراحل زیر را انجام می‌دهیم :

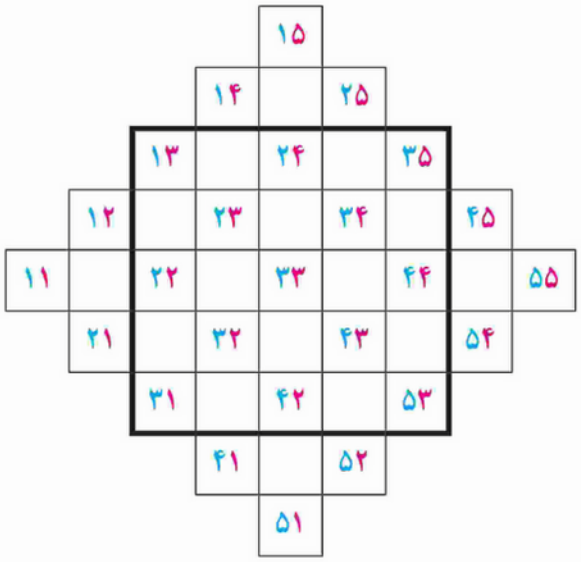
۱ اعداد ۱، ۲، ... و ۵ با نظمی خاص (به نحوهٔ چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.



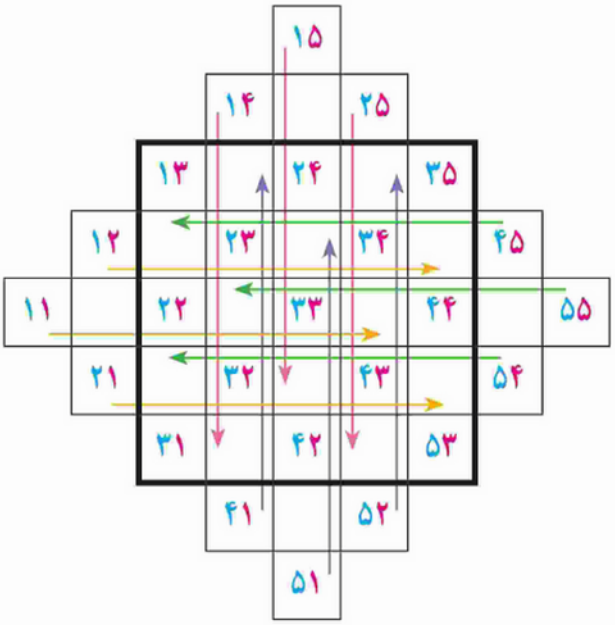
الف)

ب)

۲ از کنار هم قرار دادن اعداد متناظر از شکل‌های (الف) و (ب) شکل زیر به‌دست می‌آید که در آن عدد دورقمی تکراری وجود ندارد.



۳ حال مربع پررنگِ ۵ × ۵ وسط، در شکل مرحلهٔ ۲ را در نظر بگیرید (شکل زیر) و با انتقال اعداد خارج از این مربع به داخل آن با روش زیر مربع مقابل را پر کنید.



۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

الف) در هر کدام از مربع‌های سمت چپ، ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.

ب) در هر کدام از مربع‌های سمت راست، ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.

پ) در هر کدام از مربع‌های بالا، ۵ خانه به پایین انتقال دهید.

ت) در هر کدام از مربع‌های پایین، ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

۴ حال دو مربع ۵ × ۵ بکشید و در یکی از آنها اعداد سمتِ چپ در مربع مرحلهٔ قبل و در دیگری اعداد سمتِ راست را قرار دهید. دو مربع لاتین حاصل متعامد خواهند بود.

۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

حل مسئله با استفاده از مربع های لاتین

مثال: شهریور ۹۸

قرار است چهار مدرس T_1, T_2, T_3, T_4 در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس C_1, C_2, C_3, C_4 به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقا یک جلسه تدریس کند ،برای این منظور برنامه ریزی نمایید.

حل:

کلاس‌ها \ جلسه	۱	۲	۳	۴
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4
C_2	T_4	T_1	T_2	T_3
C_3	T_3	T_4	T_1	T_2
C_4	T_2	T_3	T_4	T_1

مثال خرداد ۹۹:

قرار است سه کارگر W_1, W_2, W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخ‌ریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.

ماشین

	W_1	W_2	W_3
روز اول	1	3	2
روز دوم	3	2	1
روز سوم	2	1	3

$= A$

نوع الیاف

	W_1	W_2	W_3
روز اول	2	1	3
روز دوم	3	2	1
روز سوم	1	3	2

$= B \Rightarrow$

جواب

	W_1	W_2	W_3
روز اول	12	31	23
روز دوم	33	22	11
روز سوم	21	13	32

مثال: خرداد ۹۸

اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هریک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هرکت با هر پیراهن نیزدقیقاً یکبارمورداستفاده قراربگیرد ،چگونه می توانند این کار را ا نجام دهند؟

حل: باهم

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳۳	۲۱	۱۲
B	۲۲	۱۳	۳۱
C	۱۱	۳۲	۲۳

پیراهن

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳	۱	۲
B	۲	۳	۱
C	۱	۲	۳

و

کت

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳	۲	۱
B	۲	۱	۳
C	۱	۳	۲

مثال: ۵ گروه شنبده باز T_1 تا T_5 قرارست در ۵ روز متوالی در ۵ مکان مختلف با ۵ برنامه اجرا کنند. برنامه ای ارائه کنید بطوریکه هرگروه در هرمکان و در هر روز دقیقاً یک بار برنامه اجرا کند.

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
شنبه	۱	۲	۳	۴	۵
۱شنبه	۵	۱	۲	۳	۴
۲شنبه	۴	۵	۱	۲	۳
۳شنبه	۳	۴	۵	۱	۲
۴شنبه	۲	۳	۴	۵	۱

جزوه ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: ترکیبیات

درس دوم: روش‌هایی برای شمارش



مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

اصل شمول و طرد

تعداد اعضای مجموعه‌ای مانند A را با نماد $|A|$ نشان می‌دهیم. تساوی زیر که در ریاضی ۱ داشتیم را

اصل شمول و عدم شمول (طرد) می‌نامیم:

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

در واقع $A\cup B$ برابر است با تعداد اعضای A یا B هستند یا به زبان دیگر جمع تعداد عضوهای A و B را داریم.

این اصل برای سه مجموعه A، B و C به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

تذکر: متمم مجموعه A را با A' یا $\bar{A}$ نمایش می‌دهیم.

نتایج مهم: اگر S مجموعه مرجع و A و B در S باشند داریم:

۱) $|\bar{A}| = |S| - |A|$ — ویژگی A را ندارند

۲) $|\bar{A}\cap\bar{B}| = |\overline{A\cup B}| = |S| - |A\cup B|$ (دمورگان) — نه ویژگی A نه ویژگی B

۳) $|B - A| = |B| - |A\cap B|$ ، $|A - B| = |A| - |A\cap B|$

فقط ویژگی B — فقط ویژگی A

نقطه کلیدی

۴) $|A-B|+|B-A| = |A|+|B|-2|A\cap B|$

مثال ری ۱۴۰۱ :

چند عضو از مجموعه $S=\{n\in N \mid 1\le n\le 630\}$ نه بر ۳و نه بر۵ بخشپذیرند؟

یادآوری: تعداد اعضای از مجموعه $A=\{1,2,...,n\}$ که بر k بخش‌پذیرند (عدد k مستقل) برابر $\left[\frac{n}{k}\right]$ است.

$|A| = \left[\frac{630}{3}\right] = 210$ ، $|B| = \left[\frac{630}{5}\right] = 126$

$|A\cap B| = \left[\frac{630}{3\times5}\right] = 42$

$|\overline{A\cup B}| = |S|-|A\cup B| = |S|-|A|-|B|+|A\cap B| = 630-210-126+42 = 336$

مثال : ری ۱۴۰۰

از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰, $(1\le n\le 300)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر است ولی بر ۵ بخش‌پذیر نیست؟

$|A| = \left[\frac{300}{4}\right] = 75$ $|A\cap B| = \left[\frac{300}{20}\right] = 15$

$|A-B| = |A|-|A\cap B| = 75-15 = 60$

مثال : خوارزمی ۱۴۰۰

در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفرفوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

نکته: تعیم ۴) برای سه مجموعه به شکل زیر است:

$$|A-(B\cup C)| = |A| - |A\cap(B\cup C)| = |A| - |(A\cap B)\cup(A\cap C)|$$

(از اصل شمول و طرد)

$$= |A| - (|A\cap B| + |A\cap C| - |A\cap B\cap C|)$$

$$\Rightarrow |A-(B\cup C)| = |A| - |A\cap B| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

تعداد درون A

حل سوال:

به فقط دونایی $|F| - |F\cap\heartsuit| - |F\cap B| + |F\cap B\cap\heartsuit| = 16 - 6 - 4 + 4 = 10$

فقط دایی‌ها $= |\heartsuit| - |F\cap\heartsuit| - |\heartsuit\cap B| + |F\cap B\cap\heartsuit| = 11 - 5 - 6 + 4 = 4$

فقط بستنی‌ها $= |B| - |F\cap B| - |\heartsuit\cap B| + |F\cap B\cap\heartsuit| = 9 - 4 - 6 + 4 = 3$

جواب $= 10 + 4 + 4 = 18$

مثال: وزارت ۹۹

در بین اعداد طبیعی مانند n، به طوری که $1 \le n \le 100$، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش‌پذیر است؟

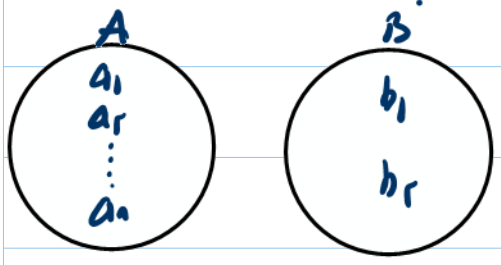
$|A| = \left[\frac{100}{6}\right] = [16,6] = 16$ ، $|B| = \left[\frac{100}{10}\right] = 10$ ، $|A\cap B| = \left[\frac{100}{30}\right] = 3$

یعنی ک.م.م ۶ و ۱۰

$|A\cup B| = 16 + 10 - 3 = 23$

تعریف تابع پوشا: اگر برد تابع f برابر هم دامنه‌اش باشد می‌گوییم تابع پوشا است. به عبارت دیگر تابع $f: A \to B$ پوشا است هرگاه به ازای هر عضوی مانند b از B حداقل یک a در A باشد که $f(a)=b$.

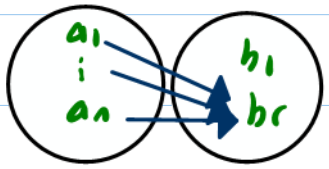
مثال: چند تابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه ۲ عضوی وجود دارد؟



برای حل این سوال حالت‌هایی که تابع پوشا نیست را پیدا نمیکنیم و از تعداد توابع ساخته شده کم می‌کنیم.

A_1: b_1 پوشانده نشود.

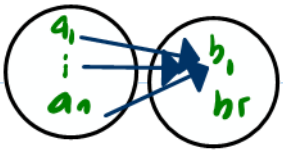
$|A_1| = 1$ ← زیرا



فقط همین حالت

A_2: b_2 پوشانده نشود

$|A_2| = 1$



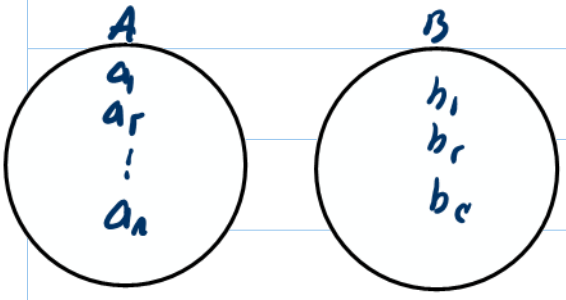
فقط همین حالت

$A_1 \cap A_2$: هم b_1 و هم b_2 پوشانده نشود ← هیچ حالتی نداریم ← $|A_1 \cap A_2| = 0$

تعداد کل توابع از A به B برابر 2^n است. (زیرا برای هر عضو A دو حالت داریم یا b_1 یا b_2 را میگیرد.)

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1 \cup A_2| = 2^n - \underbrace{(|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|)}_{|A_1 \cup A_2|} = 2^n - (1+1-0) = 2^n - 2$$

مثال: تعداد توابع پوشا از مجموعه n عضوی به مجموعه ۳ عضوی را محاسبه کنید.



راه‌کاری که داریم: $|A_1| = 2^n$ ← زیرا: a_1 ها در حالت تناظر با b_1 یا b_2 یا b_3 دارند

$|A_1|$ ← b_1 پوشیده نشود

$|A_2| = 2^n$ ← b_2 پوشیده نشود

$|A_3| = 2^n$ ← b_3 پوشیده نشود

$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| = 1$

b_1 و b_2 پوشیده نشود فقط یک حالت که همه به b_3 روند.

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

در کل هم 3^n تابع داریم (هر عضو A سه حالت دارد) پس $|S| = 3^n$.

$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

$\bar{A}_1$ ← b_1 پوشیده نشود، $\bar{A}_2$ ← b_2 پوشیده نشود، $\bar{A}_3$ ← b_3 پوشیده نشود

$$= 3^n - (2^n + 2^n + 2^n - 1 - 1 - 1 + 0)$$

$$= 3^n - 3 \times 2^n + 3$$

مثال درس ۱.۴.۱ :

به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟

تذکر مهم : سوالاتی شبیه به سوال فوق اگر اشیاء متمایز باشند از توابع پوشا و اگر اشیاء یکسان باشند از قضیه سیم

قابل حل هستند . سوال فوق به دلیل مشخص نکردن تمایز یا عدم تمایز توپ‌ها دارای ابهام است لذا به هر

دو روش حل می‌شود که ما حالت توپ‌ها متمایز را حل می‌کنیم .

حل این مساله معادل یافتن تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی است .

$$\text{تعداد حالات} = 3^5 - 3\times 2^5 + 3 = 243 - 96 + 3 = 150$$

مثال : درس ۱۴۰۰

الف) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

ب) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟

الف)
$$3^4 - 3\times 2^4 + 3 = 36$$

ب)
$$(8)_4 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 8\times 7\times 6\times 5 = 1680$$

اصل لانه کبوتری:

فرض کنید در یک کلاس ۱۴ دانش آموز حضور دارند. آیا ممکن است ماه تولد همگی متفاوت باشد؟

جواب خیر است زیرا چون آن وقت یک سال باید ۱۴ ماه داشته باشد. پس حداقل ماه تولد دو نفر یکی است. البته ممکن است همه در یک ماه هم متولد شده باشند ولی در بدترین شرایط آن چیزی که به طور قطع می توانیم بگوییم این است که حداقل ۲ نفر در یک ماه متولد شده اند.

اصل لانه کبوتری:

اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $n<m$ همه کبوترها در آن لانه ها قرار بگیرند، در این صورت لانه ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال: ثابت کنید در بین ۶ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می شود که باقیمانده ۵ هم نسبت هستند.

زمانی دو عدد به پیمانه ۵ هم نسبت اند که باقیمانده هر دو در تقسیم بر ۵ یکی باشد. یک عدد در تقسیم بر ۵ یکی از باقیمانده های $\{0,1,2,3,4\}$ را دارد. پس ۵ لانه داریم ولی ۶ عدد (کبوتر) پس طبق اصل لانه کبوتری

چون 5×6 بین حداقل ۲ عدد در تقسیم بر ۵ هم باقی می‌مانند.

مثال: ثابت کنید در هر گراف ساده از مرتبه p ($p \geq 2$) حداقل دو رأس وجود دارد که درجه‌ی آن‌ها یکی باشد.

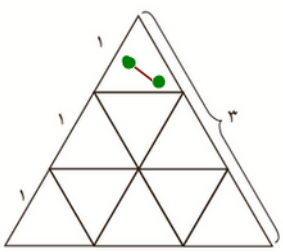
درجه‌ها از ۰ تا $p-1$ تغییر کنند. p حالت داریم. لانه را در دو حالت حل می‌کنیم:

① گراف رأس تنها نداشته باشد پس درجه‌ها از ۱ تا $p-1$ تغییر کنند پس $p-1$ حالت داریم و p رأس. پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ رأس درجه یکسان دارند.

② گراف رأس تنها داشته باشد پس درجه‌ها از ۰ تا $p-2$ تغییر کند (زیرا اگر رأس از درجه $p-1$ ندارد) پس باز هم $p-1$ حالت داریم با p رأس.

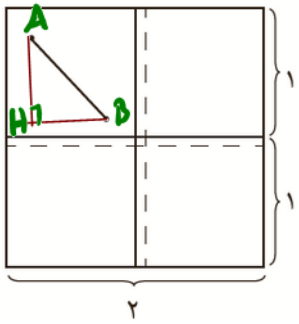
تذکر: از مثال بالا می‌توان نتیجه گرفت در هر جمع ۶ نفره حداقل ۲ نفر تعداد دوست‌های یکسان دارند زیرا گراف ۶ رأسی را در نظر می‌گیریم. اگر دو نفر دوست باشند آن‌ها را با یال به هم وصل می‌کنیم. درجه هر رأس تعداد دوستان هر فرد را نشان می‌دهد.

مثال: یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصلهٔ آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.



۹ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ داریم. ۱۰ نقطه داریم و ۹ مثلث. طبق اصل لانه‌کبوتری داخل یکی از مثلث‌ها حداقل دو نقطه قرار می‌گیرد. فاصله هر دو نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از طول ضلع کمتر است. پس فاصله این دو نقطه کمتر از یک است.

مثال: ۵ نقطه درون مربعی به ضلع ۲ قرار دارند. ثابت کنید فاصله حداقل دو نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ می‌شود.



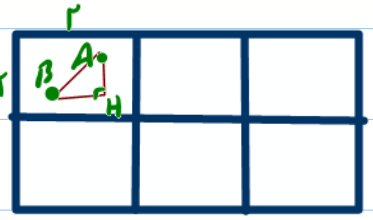
مربع را به ۴ مربع به ضلع یک تقسیم می‌کنیم.

۵ نقطه داریم و ۴ مربع. پس داخل یکی از لانه‌ها (مربع‌ها) حداقل دو نقطه می‌افتد مانند A و B.

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 < 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AB < \sqrt{2}$$

مثال نمونه دی ۱۴۰۱

هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\sqrt{8}$ است.



مستطیل را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم. پس ۷ نقطه داریم و ۶ مربع.

پس حداقل یک لانه (مربع) که شامل دو کبوتر است. طبق فرض داریم:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 < 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

تمرین : نهایی شهریور ۹۸

۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۸×۶ قرار دارند ؛ نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آنها از هم ،کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد.

مثال: نهایی دی ۹۸

مجموعه اعداد $A=\{۱,۲,۳,\cdots,۸۴\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.

لانه‌ها را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$\{۱,۸۴\}, \{۲,۸۳\}, \{۳,۸۲\}, \cdots, \{۴۲,۴۳\}$

پس تعداد لانه‌ها ۴۲ تا خواهد شد و تعداد کبوترها ۴۳ تا. پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان ۸۵ است.

مثال: نهایی دی ۱۴۰۰

ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است؟

برای اینکه مجموع دو عدد زوج باشد، هر دو عدد یا باید زوج باشند یا هر دو فرد. بنابراین تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است. پس حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد بود.

حل تمرین کتاب درسی صفحه ۸۴

۱۳ مجموعهٔ اعداد $A=\{1, 5, 9, 13, \ldots, 77, 81, 85\}$ را که به‌صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

۱۳ اعداد مجموعه $A=\{1, 5, \ldots 81, 85\}$ را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم : (افراز مجموعه A به ۱۲ زیرمجموعه)

$\{45\}, \{41,49\}, \{37,53\}, \{33,57\}, \{29,61\}, \{25,65\}, \{21,69\}, \{17,73\}, \{13,77\}, \{9,81\}, \{5,85\}, \{1\}$

چون مجموع عدد ۱ و همین طور عدد ۴۵ با هیچ‌کدام از اعداد داخل مجموعه A، برابر ۹۰ نمی‌شوند، لذا هر کدام از آنها را در یک دسته مجزا قرار دادیم.

دسته‌ها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر می‌گیریم، بنابراین ۱۲ لانه داریم و می‌خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آنها انتخاب کنیم. در بدترین شرایط از هر لانه یک عدد برداریم، پس ۱۲ عدد انتخاب شد و یک انتخاب دیگر مانده که آن را از یکی از لانه‌های موجود غیر از لانه‌های یک عضوی، چون قبلاً عدد درون آن را برداشته‌ایم، انتخاب می‌کنیم. پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

۱۵ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری‌که مختصات نقطهٔ وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

۱۵ هر نقطه به‌صورت زوج مرتب (a,b) دارای دو مؤلفه اول و دوم است که با توجه به زوج یا فرد بودن هر کدام از مؤلفه‌ها، در یکی از دسته‌های زیر قرار می‌گیرد :

	a	b
دسته ۱	زوج	زوج
دسته ۲	زوج	فرد
دسته ۳	فرد	زوج
دسته ۴	فرد	فرد

اگر هر دسته را به‌عنوان لانه و هر نقطه را به‌عنوان کبوتر در نظر بگیریم، در این صورت ۴ لانه و ۵ کبوتر داریم، که طبق اصل لانه کبوتری، لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۲ نقطه از این ۵ نقطه، با توجه به زوج یا فرد بودن مختصاتشان، مانند هم هستند. از طرفی چون مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است و مجموع دو عدد فرد، نیز عددی زوج می‌باشد، پس جمع مؤلفه‌های اول آنها و همچنین جمع مؤلفه‌های دوم آنها زوج است و بر ۲ بخش‌پذیرند. بنابراین مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح است.

تعمیم اصل لانه کبوتری :

مثال اول که چاه تولید ۱۲ دانش آموز بود را در نظر بگیرید. اگر یک نفر اضافه شود حتی ۱۲ دانش آموز را نیز داشته باشیم نمی‌توانیم بگوییم به طور قطع سه نفر در یک چاه متولد شده‌اند؟ جواب چیزی است زیرا در بدترین حالت ۱۲ نفر در ۱۲ چاه مختلف متولد شده‌اند و دو نفر بعدی نیز در دو چاه از ۱۲ چاه قرار می‌گیرند. پس حداقل ۲ نفر در یک چاه می‌شوند. و اگر تعداد را اضافه کنیم تا ۲۵ نفر برسیم، دوتا ۱۲ تایی کامل پر می‌شود و یکی باقی می‌ماند. پس حداقل ۳ نفر در یک چاه متولد شده‌اند. به عبارت دیگر چون $25 > 2\times12$ لانه‌ای هست که حداقل $2+1=3$ کبوتر دارد.

تعمیم اصل لانه کبوتری : فرض کنید m کبوتر در n لانه باشند. اگر $m > kn$ باشد، لانه‌ای وجود دارد که در آن حداقل $k+1$ کبوتر قرار گرفته باشد.

نکته: برای یافتن k کافی است m (کبوترها) را بر n (لانه‌ها) تقسیم کنیم. اگر خارج قسمت k شود لانه‌ای با حداقل $(k+1)$ وجود دارد.

مثال: ۱۲۷ نفر در یک همایش شرکت کرده‌اند. حداقل چند نفر در یک ماه متولد شده‌اند؟

$$\begin{array}{r|l} 127 & 12 \\ -120 & 10 \\ \hline 7 & \end{array} \quad 10+1 \to 11$$

چون $10\times12 < 127$ پس حداقل $10+1=11$ نفر در یک ماه متولد شده‌اند.

مثال: نهمی وزارتی ۹۸

ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

$m=505$ $\quad n=7\times12=84$ (هفته × ماه = روز) $\quad 505=6\times84+1=7$

$$\begin{array}{r|l} 505 & 84 \\ -504 & 6 \\ \hline 1 & \end{array}$$

نکته: در برخی سوالات حداقل مقدار برای m (تعداد کبوترها) خواسته می‌شود. برای حل این نوع سوالات ابتدا از حداقل مقدار داده‌شده برای یک واحد کمتر استفاده کرده k را پیدا می‌کنیم. $(k+1=c)$.

حداقل مقدار لازم m، $kn+1$ می‌باشد.

مثال: نهمی دی ۹۷

حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از انها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کبیسه در نظر بگیرید)

$k+1=20 \Rightarrow k=19 \Rightarrow kn+1=19\times365+1=6936$

مثال: وزارتی ۹۹

در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟

$k+1=7 \Rightarrow k=6 \Rightarrow kn+1=6\times12+1=73$

مثال: ری ۹۹

حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آن‌ها مانند هم و غیر تکراری است؟

n قرارداد $= 32 \times 31 = 992$, $k+1 = 3 \Rightarrow k = 2$

m قرار کبوتر $= kn+1 = 2 \times 992 + 1 = 1985$

مثال: خوارزمی ۱۴۰۰

۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$k+1 = 5 \Rightarrow k = 4$, $m = kn+1 = 54 \Rightarrow 4n+1 = 54 \Rightarrow 4n = 53$

$n = \frac{53}{4} = 13.25 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = [13.25] + 1 = 14$