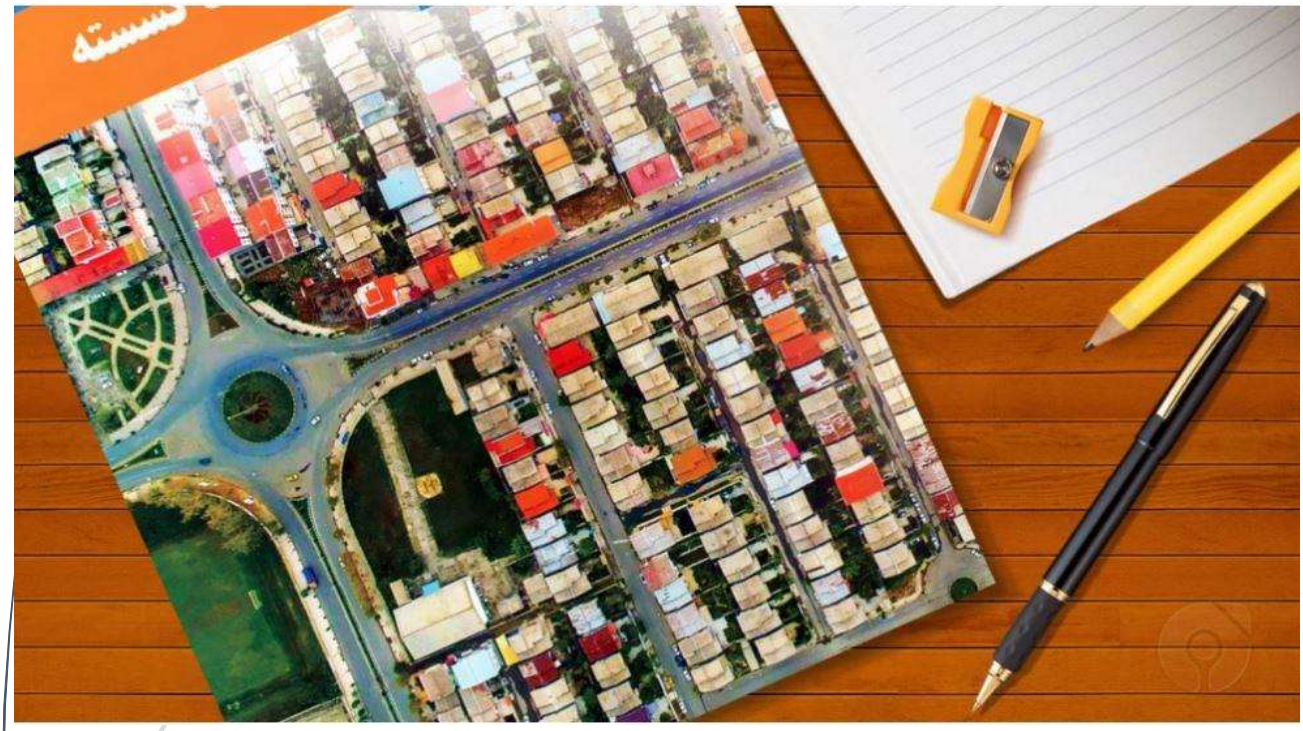
جزوه ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: ترکیبیات

درس اول: مباحثی در ترکیبیات



مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

یادآوری نکات و مفاهیم پایه در شمارش:

۱- اصل ضرب: فرض کنید انجام کاری k مرحله دارد. اگر مرحله اول را بتوان به m_1 طریق

↓

تکیه بر «و»

انجام داد، مرحله دوم را به m_2 طریق و ... مرحله k ام را به m_k طریق

انجام داد، کل کار مورد نظر را می‌توان به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق انجام داد.

۲- اصل جمع: فرض کنید بتوان کاری را از k روش انجام داد. اگر روش اول به m_1 طریق،

↓

تکیه بر «یا»

روش دوم به m_2 طریق و ... و روش kام به m_k طریق ممکن باشد و بخواهیم

فقط یکی از این k روش را انتخاب کنیم، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$

یا از روش اول یا از روش دوم یا ...

طریق وجود دارد.

مثال کنکور ریاضی ۹۹:

تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟

۱) ۹۴۸ ✓ ۲) ۹۵۲ ۳) ۹۶۸ ۴) ۹۷۲

گزینه ۲

$\boxed{9} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{1,0} = 504$

$\boxed{8} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{1,5} = 448$ ← غیر ۰ و ۵

$\Rightarrow 504 + 448 = 952$

۳ـ جایگشت :

فرض کنید n شیء متمایز داریم. به هر حالت از قرار گرفتن این اشیاء در کنار هم یک جایگشت می‌گوییم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

$$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad , \quad n! = n(n-1)(n-2)\cdots \times 1$$

مثال: a,b,c

abc bca
acb cab
bac cba

$3! = 3\times 2\times 1 = 6$

۴ـ تبدیل (ترتیب):

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارت دیگر تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن اهمیت داشته باشد را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و به آن تبدیل r شیء از n شیء متمایز گفته می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: a,b,c ← جایگشت‌های ۲تایی ← ab, ba, ac, ca, bc, cb

$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۵- ترکیب :

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می گوییم و تعداد آن را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می دهیم که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال a,b,c $\xrightarrow[\text{۲ تایی}]{\text{ترکیب های}}$ $\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$ $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

حالات خاص در رابطه ترکیب :

۱) $\binom{n}{0} = 1$ مثال $\binom{10}{0} = 1$

۲) $\binom{n}{n} = 1$ مثال $\binom{5}{5} = 1$

۳) $\binom{n}{1} = n$ مثال $\binom{7}{1} = 7$

۴) $\binom{n}{n-1} = n$ مثال $\binom{6}{5} = 6$

۵) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ مثال $\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$

۶) $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ مثال $\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3!} = 35$

۷) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ مثال $\binom{۷}{۳}=\binom{۷}{۴}$ و $\binom{۱۰}{۸}=\binom{۱۰}{۲}$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی از یک مجموعه nعضوی برابر $\binom{n}{r}$ است و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه nعضوی برابر ۲^n است پس:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n$$

مثال کنکور تجربی ۹۹:

به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری‌که دو نفر انان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۷ ۳) ۹۱ ✓ ۴) ۹۵

دو نفر را کنار بگذاریم: $\binom{۷}{۵}=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$

یکی از دو نفر را انتخاب کنیم: $\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۴}=۲\times\binom{۷}{۳}=۲\times\frac{۷\times۶\times۵}{۳!}=۲\times۳۵=۷۰$

$۲۱+۷۰=۹۱$ گزینه ۳

مثال کنکور تجربی ۹۸:

گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری‌که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۵۴ ✓ ۴) ۱۶۸

$$\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}=۷۰+\binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۲}=۷۰+\frac{۸\times۷\times۶}{۶}+\frac{۸\times۷}{۲}$$

$\binom{۸}{۴}=\frac{۸!}{۴!\times۴!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴\times۳\times۲\times۴!}=۷۰$

$=۷۰+۵۶+۲۸=۱۵۴$ گزینه ۳

مثال: دی ۹۷

اگر داشته باشیم $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{5,6,7,8,9\}$، در این صورت چند کد یا رمز ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقمِ(متمایز) از A وسه رقمِ (متمایز) از B باشد؟

$\binom{4}{2}\binom{5}{3}\times 5! = \frac{4\times3}{2}\times\frac{5\times4}{2}\times120 = 6\times10\times120 = 7200$

انتخاب از A — انتخاب از B — چیدن ۵ تایی انتخاب شده

نکته: جابجایی با تکرار

فرض کنید n شی داریم. به طریقی n_1 تای آنها از نوع اول (مثل هم)، n_2 تای آنها نوع دوم، ... n_k تای آنها از نوع k ام باشند، تعداد حالت‌های جابجایی این n شی برابر $\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$ است.

مثال: خرداد ۹۸

با ارقام ۵, ۴, ۴, ۳, ۲, ۲, ۲, ۱, ۱, ۱ چند عدد ۹رقمی می توان نوشت.

$\frac{9!}{2!\times3!\times2!} = \frac{9\times8\times7!}{2\times3\times2\times2} = 3\times7!$

مثال: خرداد۹۸

۶ دانش آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند کنارهم دریک ردیف قرارگیرند ، به طوری که :

الف) به صورت یک در میان قرار بگیرند. $6!\times5!$

ب) همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند. $5!\times7!$ (۵ یازدهم، ۶ دوازدهم)

ج) یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند. $10!\times2! = 2!\times(9+1)!$ (۲ خاص‌ها، ۱۰ یعنی ۹ بدون خاص‌ها + ۱ خاص‌ها)

مثال: شهریور ۹۸

۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که:

الف) همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند.

ب)هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.

ج) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

الف) $(5+1)! \times 4! = 6! \times 4!$ (ریاضی‌ها به‌عنوان یک بلوک با فیزیک‌ها جایگشت می‌کنند)

ب) $7! \times 4!$ (فیزیک‌ها بین خودشان و بین ریاضی‌ها جایگشت می‌کنند) $\times$ $5! \times 4!$ (ریاضی‌ها بین خودشان)

مثال: دی ۹۸

با حروف کلمه «می سی سی پی» چند جایگشت ۸ حرفی با معنا یا بی معنا می‌توان نوشت؟

$$\frac{8!}{4! \times 2! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = 840$$

(س ۲ تا، ی ۲ تا)

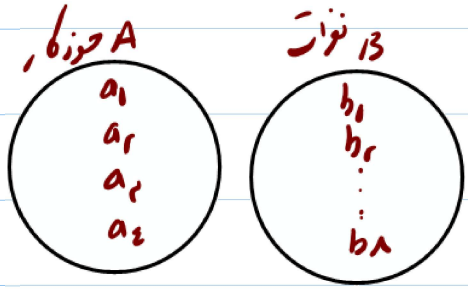
نکته: تعداد توابع یک به یک از مجموعه m عضوی A به مجموعه k عضوی B که $m \leq k$ برابر است با:

$$P(k,m) = (k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$$

اثبات آن را با مثال زیر بررسی می‌کنیم.

مثال وزارتی ۹۹ :

به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟(به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم.)



حوزه‌کار a_1 را از نظر تئوری می‌توان به هرکدام از ۸ تا توانایی داد.

حوزه‌کار a_2 را به هرکدام از ۷ تا توانایی باقی‌مانده و ....

به این طریق اصل ضرب $8 \times 7 \times 6 \times 5$ حالت برای انجام این کار را در نظر دارد.

و یا فرمول جایگشت به همین جواب می‌رسیم: $(8)_4 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5$

مثال: شهریور ۹۹

تعداد تابع‌های یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی چند تا است؟

$$(6)_3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

مثال: شهریور ۹۹

هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق، سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟

$$\frac{8!}{3! \times 4! \times 1!}$$

نکته: فرض کنید A مجموعه‌ای m عضوی و B مجموعه‌ای n عضوی باشد. در این صورت تعداد توابع از A به B



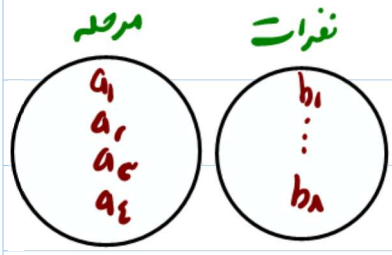
برابر n^m است.

زیرا: a_i ها را به هرکدام از b_j ها می‌توان نسبت داد پس کل حالت‌ها

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m \text{ بار}} = n^m$$

مثال: کنکور ۹۹

۸نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)



حل مسئله معادل یافتن تعداد توابع از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی است که برابر 8^4 است.

مثال: دی ۹۹

با ارقام ۴، ۳، ۷، ۸، ۶ چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت که:

الف) اعداد زوج کنار هم باشند.

ب) اعداد فرد کنار هم باشند.

الف) $3! \times (2+1)! = 3! \times 3! = 36$ (۳ زوج‌ها، ۲ و ۴ و ۶ بسته‌ها)

ب) $2! \times (3+1)! = 2! \times 4! = 48$ (۲ فرد‌ها، ۳ و ۷ و ۸ بسته‌ها)

مثال: خوارزمی ۱۴۰۰

می‌خواهیم با حروف «ب» و «ج» و ارقام ۱،۲،۴،۵،۶،۸ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است:

الف) تعداد رمزهایی که هر یک از آن‌ها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد.

ب) تعداد رمزهایی که در آن‌ها حروف کنار هم باشند.

الف) $2! \times 6!$ (۲ حرف‌ها، ۶ عدد‌ها)

ب) $2! \times (6+1)! = 2! \times 7! = 10080$ (۲ حرف‌ها، ۶ عدد‌ها، ۷ بسته‌ها)

مثال: دی ۱۴۰۱

می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم . اگر بخواهیم هر نفر روبه روی برادرش بنشیند ، این کار را به چند روش می توان انجام داد؟

هر دو برادری که مقابل هم می‌نشینند را یک دسته می‌گیریم پس ۴ دسته داریم و تعداد جابجایی‌ها $4!$ می‌شود.

از طرفی در هر دسته دو برادر مقابل هم، جابجایی $2!$ دارند پس: $4! \times (2!)^4$

مثال: شهریور ۱۴۰۰

می‌خواهیم ۲۰ نفر را به ۴ گروه ۵ نفره تقسیم کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

$$\frac{20!}{5!\,5!\,5!\,5!}$$

حل معادله سیاله خطی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

فرض کنید n داریم و k متغیر مثل x_i داریم. برای جداسازی نیاز به $k-1$ خط داریم. تکرار جواب‌ها برابر تکرار جایگشت‌های n داریم و $k-1$ خط می‌شود. طبق رابطه جایگشت با تکرار داریم:

$$\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$$



که همگی بیان با ترکیب $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

قضیه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$.

$x_i \geq 0$

نتیجه: تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

$x_i \geq 1$

اثبات: اگر $y_i = x_i - 1$ آنگاه:

$$x_i \geq 1 \Rightarrow x_i - 1 \geq 0 \Rightarrow y_i \geq 0$$

با تغییر متغیر معادله را می‌نویسیم: ($-k$ به دو طرف اضافه می‌کنیم)

$$x_1 - 1 + x_2 - 1 + \dots + x_k - 1 = n - k$$

$\Rightarrow \quad y_1 + \dots + y_k = n-k \;,\; y_i \geq 0 \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{n-k+k-1}{k-1}$

$= \binom{n-1}{k-1}$ ☑

مثال ری ۹۷ :

به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد ؟

جواب مسئله معادل جواب‌های طبیعی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4 = 8$ است .

$\binom{n-1}{k-1} = \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = \frac{7\times 6\times 5}{6} = 35$

نکته : در اکثر سوالات ما با سه شرط‌های برای متغیرها قرار می‌دهند . ابتدا همه آن‌ها را به صورت بزرگتر مساوی نوشته (مثلاً اگر $x_i > 4$ باشد چون x_i صحیح است پس معادل $x_i \geq 5$ است.)

پس تغییر متغیر می‌دهیم تا متغیر جدید صحیح و نامنفی شود (مثلاً $x_i \geq 5 \Rightarrow x_i - 5 \geq 0 \Rightarrow y_i \geq 0$)

در آخر هرجا با حرف‌هایی که از متغیرها کم کرده‌ایم از سمت راست هم کم می‌کنیم و معادله جدید را حل می‌کنیم .

نکته : اگر متغیری ضریب غیر یک داشت در حالت‌های مختلف $x_i = 0$ و $x_i = 1$ و ... تا جایی که سمت راست منفی نشود ، مسئله را حل می‌کنیم و جواب‌های بدست آمده را با هم جمع می‌کنیم .

مثال: خرداد ۹۸

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+....+x_5=10$ با شرط $x_i>0 \ , i=2,3,4,5$ را محاسبه کنید.

$x_i>0 \Rightarrow x_i \geq 1 \qquad i=2,3,4,5$

$\Rightarrow x_i-1 \geq 0 \rightarrow y_i \geq 0 \ , \ x_1 \geq 0$: برای x_1 فقط شرط صحیح و نامنفی را داریم

پس ۴ـ را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$\Rightarrow \quad x_1+x_2-1+x_3-1+x_4-1+x_5-1=10-4$

$\Rightarrow x_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6 \Rightarrow$ تعداد جواب $=\binom{6+5-1}{5-1}=\binom{10}{4}$

مثال: شهریور ۹۸

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+....+x_6=12$ با شرط $x_5 \geq 4 \ , \ x_1>2$ را محاسبه کنید.

$x_1>2 \Rightarrow x_1 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad x_1-3 \geq 0 \Rightarrow y_1 \geq 0$

$x_5 \geq 4 \Rightarrow x_5-4 \geq 0 \Rightarrow y_5 \geq 0$

به دو طرف معادله ۷ـ را اضافه می کنیم:

$x_1-3+x_2+x_3+x_4+x_5-4+x_6=12-7$

$y_1+x_2+x_3+x_4+y_5+x_6=5 \Rightarrow$ تعداد جواب $=\binom{6+5-1}{6-1}=\binom{10}{5}$

مثال: وزارد ۹۹ :

به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.

$x_1 + \dots + x_5 = 11 \quad , \quad x_1 \geq 2 \quad , \quad x_5 > 4$

$x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 - 2 \geq 0 \rightarrow y_1 \geq 0$

$x_5 > 4 \Rightarrow x_5 \geq 5 \rightarrow x_5 - 4 \geq 0 \Rightarrow y_5 \geq 0$

به‌روش تعدیه ۶ ـ اضافه می‌کنم :

$x_1 - 2 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 4 = 11 - 6$

$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \Rightarrow$ تعداد جواب $= \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$

مثال: دی ۹۹

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 17$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آن که $x_5 = 2$, $x_2 > 2$ باشند.

$x_2 > 2 \Rightarrow x_2 \geq 3 \Rightarrow x_2 - 3 \geq 0 \Rightarrow y_2 \geq 0$

به‌روش ۴ ـ اضافه می‌کنم :

$x_1 + x_2 - 3 + x_3 + x_4 + 2 + x_6 = 17 - 3$

$x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 12 \Rightarrow$ تعداد جواب $= \binom{12+5-1}{5-1} = \binom{16}{4}$

مثال: شهریور ۱۴۰۱

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله زیر را با شرایط داده شده به‌دست آورید.

$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9 \qquad (x_5 = 2 \text{ و } 1 \leq i \leq 4 \text{ و } x_i \geq 0)$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 9 \Rightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7$

فقط دوحالت برای x_2 داریم :

اگر $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$

اگر $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + 2 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$

$\Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= 36 + 10 = 46$

مثال: ری ۱۴.۱

به چند روش می توان از بین ۵ نوع گل ۱۶شاخه گل انتخاب کرد به طوریکه ، از گل نوع سوم فقط۳ شاخه واز گل نوع چهارم دست کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش ازچهارشاخه انتخاب کنیم؟

$x_1 + \dots + x_5 = 16 \quad , \quad x_3 = 3 \; , \; x_4 \geq 3 \; , \; x_5 > 4$

$x_4 \geq 3 \Rightarrow x_4 - 3 \geq 0 \Rightarrow y_4 \geq 0$

$x_5 > 4 \Rightarrow x_5 \geq 5 \Rightarrow x_5 - 5 \geq 0 \Rightarrow y_5 \geq 0$

جواب: ۸- اضافه می کنیم :

$x_1 + x_2 + \overset{x_3}{3} + x_4 - 3 + x_5 - 5 = 16 - 8$

$x_1 + x_2 + y_4 + y_5 = 8 - 3 - 5 = 0 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3}$

$= \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$

مثال: معادله سیاله زیر را حل کنید

$$x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=3 \qquad x_i\geq 0\ ,\ 1\leq i\leq 4$$

حل:

$$\begin{cases} x_2=0\Rightarrow x_1+0+x_3+x_4=3\Rightarrow x_1+x_3+x_4=3\Rightarrow \binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10 \\ x_2=1\Rightarrow x_1+1+x_3+x_4=3\Rightarrow x_1+x_3+x_4=2\Rightarrow \binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6 \\ x_2=4\Rightarrow x_1+2+x_3+x_4=3\Rightarrow x_1+x_3+x_4=1\Rightarrow \binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3 \\ x_2=9\Rightarrow x_1+3+x_3+x_4=3\Rightarrow x_1+x_3+x_4=0\Rightarrow \binom{0+3-1}{3-1}=\binom{2}{2}=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ تعداد کل جواب‌ها $=10+6+3+1=20$

مربع‌های لاتین

تعریف مربع لاتین $n \times n$: یک جدول مربعی $n \times n$ که هر سطر و هر ستون آن با اعداد 1 تا n پر شده باشد به گونه‌ای که در هیچ سطر آن و هیچ ستون آن عدد تکراری نباشد را یک مربع لاتین می‌گوییم. به هریک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.

مثال: یک مربع لاتین 4×4 :

۱	۲	۳
۲	۴	۱
۴	۱	۲

نکته: در یک مربع لاتین L که روی مجموعه X تعریف می‌شود، هر خانه یا درایه شامل عضوی از X است، به طوری که هر سطر L یک جایگشت از X و هر ستون L هم یک جایگشت از X است.

مربع لاتین چرخشی :

همگاه در سطر اول اعداد 1 تا n را بنویسیم و در سطر دوم، اعداد سطر اول را یکی به راست ببریم و هر آنچه در خانه اول سطر دوم قرار می‌گیرد به همین ترتیب تا سطر n ام عمل کنیم، به مربع لاتین برشت رسیده

مربع لاتین چرخشی می‌گویند.

مثال: یک مربع لاتین چرخشی 5×5 بسازید.

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	٤
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	٤	۵	۱

مثال: شهریور ۹۹ :

یک مربع لاتین چرخشی ۴×۴ بنویسید.

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

حل :

نکته: برای هر عدد طبیعی n، مربع لاتین $n \times n$ وجود دارد.

ساختن مربع لاتین از روی مربع لاتین دیگر

۱) تعویض جای سطرها یا ستون‌ها

۲) جابجایی روی اعداد. مثلاً جابجایی ۱، ۲، ۳، ۴ را روی ۴، ۲، ۱، ۳ اعمال می‌کنیم $1 \to 4,\ 2 \to 1,\ 3 \to 2,\ 4 \to 3$

مثال: خارج ۱۴۰۱

مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اِعمال جایگشت $\begin{matrix}۱\to۳\\۲\to۲\\۳\to۴\\۴\to۱\end{matrix}$ مربع لاتین B را به دست آورید.

$$A=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۳&۴&۱&۲\\\hline ۲&۱&۴&۳\\\hline ۱&۲&۳&۴\\\hline ۴&۳&۲&۱\\\hline\end{array}$$

حل:

$$B=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۴&۱&۳&۲\\\hline ۲&۳&۱&۴\\\hline ۳&۲&۴&۱\\\hline ۱&۴&۲&۳\\\hline\end{array}$$

مثال: ری ۹۹

مربع لاتین A را در نظر بگیرید.

با اِعمال یک جایگشت روی درآیه های مربع لاتین A ، مربع لاتین B را تولید کنید.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲&۱&۳\\\hline ۳&۲&۱\\\hline ۱&۳&۲\\\hline\end{array}$$

حل:

$$\begin{matrix}۱\to۳\\۲\to۱\\۳\to۲\end{matrix}\qquad B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱&۳&۲\\\hline ۲&۱&۳\\\hline ۳&۲&۱\\\hline\end{array}$$

تذکر: از روی یک مربع لاتین $n \times n$ می‌توانیم با جابجایی، مربع لاتین‌های دیگری بدست آوریم.

مثال: خوارزمی ۹۹

مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اِعمال یک جایگشت بر روی ۱،۲،۳،۴ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۱ → ۲
۲ → ۴
۳ → ٤
٤ → ۱

۴	۲	۱	۴
۱	۴	۴	۲
۴	۱	۲	۴
۱	۲	۴	۴

تعریف دو مربع لاتین متعامد:

فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند و از کنار هم قرار دادن زوج‌های نظیر این دو مربع مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک زوج مرتب باشد که مولفه اول آن از A و مولفه دوم از B باشد. اگر هیچ دو تا از این زوج‌های مرتب با هم برابر نباشند، می‌گوییم A و B متعامدند.

مثال ری ۹۷ :

دومربع لاتین متعامد ۳×۳ را بنویسید. (دلیل متعامد بودن آنها را بیان کنید.)

حل :

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

→

۱۳	۲۱	۳۲
۲۲	۳۳	۱۱
۳۱	۱۲	۲۳

مثال: ری ۹۸

بررسی کنید، آیا دو مربع لاتین ۳×۳ روبه‌رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

حل: بله - زیرا جفت تکراری نداریم ←

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

مثال: وزارر ۹۹

در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

الف)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

ب)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

الف)

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

متعامد زیرا عدد در هیچ خانه‌ای تکراری نداریم.

ب)

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

متعامد نیستند زیرا عدد در هیچ خانه‌ای تکراری نداریم.

مثال: خرداد ۱۴۰۰

مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را B نام‌گذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

$A=$

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

حل:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$\Rightarrow$ $B=$

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

$AB\Rightarrow$

۲۱	۳۳	۱۲
۱۲	۲۱	۳۳
۳۳	۱۲	۲۱

متعامد نیستند زیرا عدد در هیچ خانه‌ای تکراری داریم.

مثال: شهریور ۱۴۰۰

الف) تمام مربع‌های لاتین ۲×۲ را بنویسید.

ب) آیا دو مربع لاتین ۲×۲ متعامد وجود دارد؟ دلیل بیاورید.

الف)

۲	۱
۱	۲

۱	۲
۲	۱

ب)

۲۱	۱۲
۱۲	۲۱

متعامد نیستند.

نکته: اگر $n=6,12$ باشد دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد و برای سایر اعداد طبیعی n دو مربع لاتین متعامد وجود دارد.

نکته: در مربع لاتین $n\times n$، هر یک از اعداد 1 تا n دقیقاً در هر خانه نوشته می‌شوند.

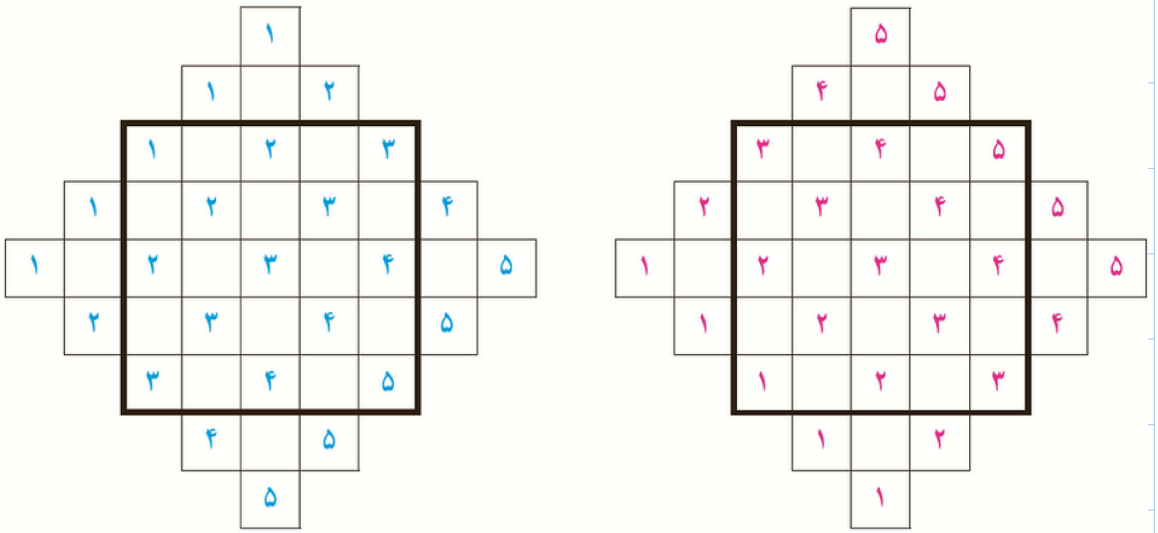
نکته: اگر مربع‌های لاتین A و B متعامد باشند و مربع لاتین B' از جابجایی یک جایگشت روی اعضای B به دست آمده باشد آنگاه A و B' هم متعامدند.

نکته: اگر A یک مربع لاتین باشد و با اعمال جایگشت روی A، مربع لاتین B به دست آید آنگاه A و B متعامد نیستند.

ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ فرد

مثال گام‌به‌گام: دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۵ بسازیم. مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

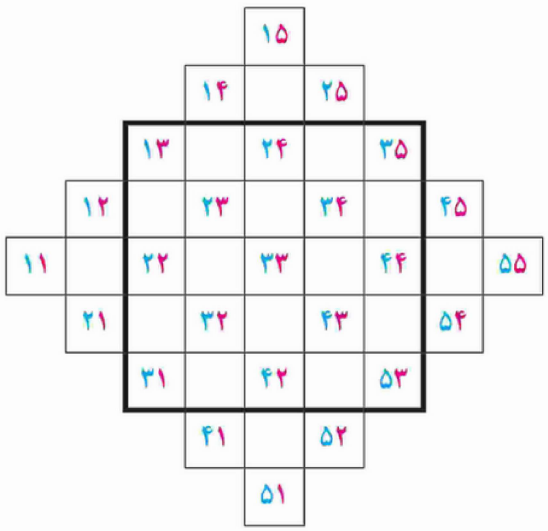
۱ اعداد ۱، ۲، ... و ۵ با نظمی خاص (به نحوهٔ چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.



الف)

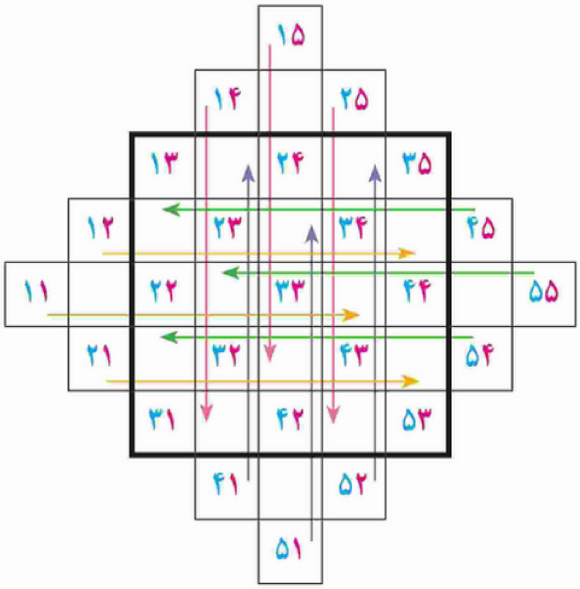
ب)

۲ از کنار هم قرار دادن اعداد متناظر از شکل‌های (الف) و (ب) شکل زیر به‌دست می‌آید که در آن عدد دورقمی تکراری وجود ندارد.



۳ حال مربع پررنگِ ۵ × ۵ وسط، در شکل مرحلهٔ ۲ را در نظر بگیرید (شکل زیر) و با انتقال اعداد خارج از این مربع به داخل آن با روش زیر مربع مقابل را پر کنید.

۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳



الف) در هر کدام از مربع‌های سمت چپ، ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.

ب) در هر کدام از مربع‌های سمت راست، ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.

پ) در هر کدام از مربع‌های بالا، ۵ خانه به پایین انتقال دهید.

ت) در هر کدام از مربع‌های پایین، ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

۴ حال دو مربع ۵ × ۵ بکشید و در یکی از آنها اعداد سمتِ چپ در مربع مرحلهٔ قبل و در دیگری اعداد سمتِ راست را قرار دهید. دو مربع لاتین حاصل متعامد خواهند بود.

۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

حل مسئله با استفاده از سرچ های لاکسین

مثال: شهریور ۹۸

قرار است چهار مدرس T_1, T_2, T_3, T_4 در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس C_1, C_2, C_3, C_4 به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقا یک جلسه تدریس کند ،برای این منظور برنامه ریزی نمایید.

حل:

کلاس‌ها \ جلسه	۱	۲	۳	۴
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4
C_2	T_4	T_1	T_2	T_3
C_3	T_3	T_4	T_1	T_2
C_4	T_2	T_3	T_4	T_1

مثال خرداد ۹۹:

قرار است سه کارگر W_1, W_2, W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخ‌ریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.

ماشین

	W_1	W_2	W_3
روز اول	1	3	2
روز دوم	3	2	1
روز سوم	2	1	3

$= A$

نوع الیاف

	W_1	W_2	W_3
روز اول	2	1	3
روز دوم	3	2	1
روز سوم	1	3	2

$= B$

$\Rightarrow$ جمع

	W_1	W_2	W_3
روز اول	12	31	23
روز دوم	33	22	11
روز سوم	21	13	32

مثال: خرداد ۹۸

اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هریک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هرکت با هر پیراهن نیزدقیقاً یکبارمورداستفاده قراربگیرد ،چگونه می توانند این کار را ا نجام دهند؟

حل:

کت

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

و

پیراهن

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۲	۱	۳
B	۱	۳	۲
C	۳	۲	۱

⇒

باهم

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱۲	۲۱	۳۳
B	۳۱	۱۳	۲۲
C	۲۳	۳۲	۱۱

مثال: ۵ گروه شنبده باز T_1 تا T_5 قرارست در ۵ روز متوالی در ۵ مکان مختلف با ۵ برنامه اجرا کنند. برنامه‌ای ارائه کنید بطوریکه هرگروه در هرمکان و در هر روز دقیقاً یک برنامه اجرا کند.

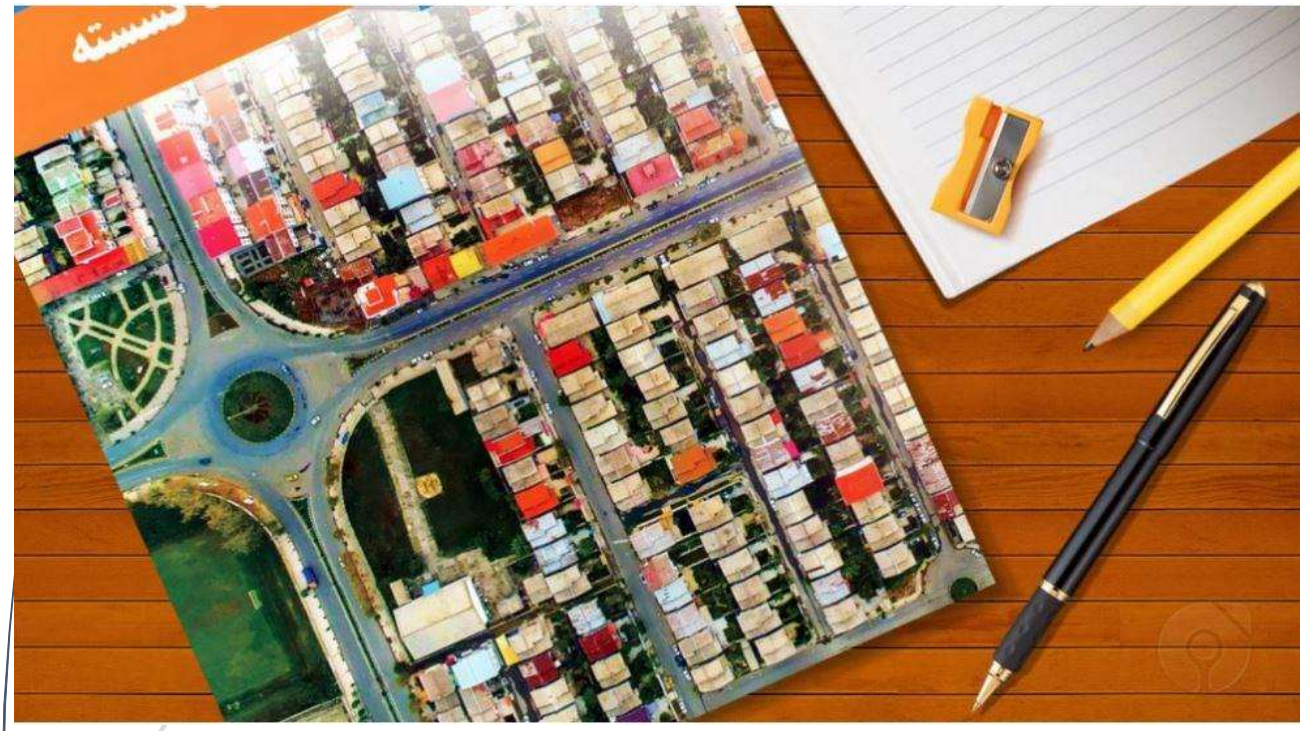
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
شنبه	۱	۲	۴	۴	۵
۱شنبه	۵	۱	۲	۳	۴
۲شنبه	۴	۵	۱	۲	۳
۳شنبه	۳	۴	۵	۱	۲
۴شنبه	۲	۳	۴	۵	۱

جزوه ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: ترکیبیات

درس دوم: روش‌هایی برای شمارش



مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

اصل شمول و طرد

تعداد اعضای مجموعه‌ای مانند A را با نماد $|A|$ نشان می‌دهیم. شاید بارها دیده باشید که در ریاضی ۱ داشتیم را

اصل شمول و عدم شمول (طرد) می‌گوید: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

در واقع $A \cup B$ برابر است با تعداد اعضایی که در A یا در B هستند یا به زبان دیگر حداقل یکی از ویژگی‌های A یا B را دارند.

این اصل برای سه مجموعه A، B و C به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

تذکر: متمم مجموعه A را با A' یا $\bar{A}$ نشان می‌دهیم.

نتایج مهم: اگر S مجموعه مرجع و A و B در S باشند داریم:

۱) $|\bar{A}| = |S| - |A|$ — ویژگی A را ندارند

۲) $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$ (دمورگان) — نه ویژگی A نه ویژگی B

۳) $|A - B| = |A| - |A \cap B|$ — فقط ویژگی A ، $|B - A| = |B| - |A \cap B|$ — فقط ویژگی B

نقطه کلیدی

۴) $|A-B|+|B-A| = |A|+|B|-2|A\cap B|$

مثال ری ۱۴۰۱ :

چند عضو از مجموعه $S=\{n\in N \mid ۱\le n\le ۶۳۰\}$ نه بر ۳و نه بر۵ بخشپذیرند؟

یادآوری: تعداد اعضای از مجموعه $A=\{1,2,..,n\}$ که بر k بخش پذیرند (مضرب k هستند) برابر $\left[\frac{n}{k}\right]$ است.

بر۳ بخش پذیر
$|\overrightarrow{A}| = \left[\frac{۶۳۰}{۳}\right] = ۲۱۰$ ، بر۵ بخش پذیر $|\overrightarrow{B}| = \left[\frac{۶۳۰}{۵}\right] = ۱۲۶$

هم بر۳ هم بر۵
$|A\cap B| = \left[\frac{۶۳۰}{۳\times ۵}\right] = ۴۲$

$|\overline{A\cup B}| = |S|-|A\cup B| = |S|-|A|-|B|+|A\cap B| = ۶۳۰-۲۱۰-۱۲۶+۴۲ = ۴۳۶$

مثال: ری ۱۴۰۰

از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰, ($1\le n\le ۳۰۰$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر است ولی بر ۵ بخش‌پذیر نیست؟

بر۴ بخش پذیر
$|\overrightarrow{A}| = \left[\frac{۳۰۰}{۴}\right] = ۷۵$

هم بر۴ هم بر۵
$|A\cap B| = \left[\frac{۳۰۰}{۲۰}\right] = ۱۵$

$|A-B| = |A|-|A\cap B| = ۷۵-۱۵ = ۶۰$

مثال: هزار ۱۴۰۰

در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفرفوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

نکته: نتیجه ۴) برای سه مجموعه به شکل زیر است:

$$|A-(B\cup C)| = |A| - |A\cap(B\cup C)| = |A| - |(A\cap B)\cup(A\cap C)|$$

(از اصل عمومی طرد و طرد)

$$= |A| - (|A\cap B| + |A\cap C| - |A\cap B\cap C|)$$

$$\Rightarrow |A-(B\cup C)| = |A| - |A\cap B| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

تعداد درایه‌های A که فقط بر ... بخش‌پذیرند

حل سوال:

فقط فوتبال $= |F| - |F\cap T| - |F\cap B| + |F\cap B\cap T| = 16 - 8 - 6 + 4 = 10$

فقط والیبال $= |T| - |F\cap T| - |T\cap B| + |F\cap B\cap T| = 11 - 5 - 6 + 4 = 4$

فقط بسکتبال $= |B| - |F\cap B| - |T\cap B| + |F\cap B\cap T| = 9 - 4 - 6 + 4 = 3$

جواب $= 10 + 4 + 3 = 17$

مثال: هزار ۹۹

در بین اعداد طبیعی مانند n، به طوری که $1 \le n \le 100$، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش‌پذیر است؟

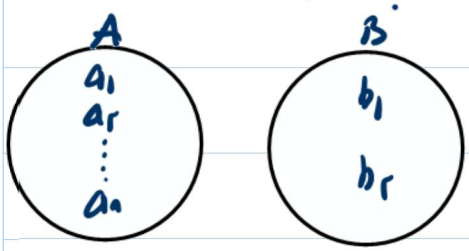
$$|A| = \left[\frac{100}{6}\right] = [16,6] = 16 \quad , \quad |B| = \left[\frac{100}{10}\right] = 10 \quad , \quad |A\cap B| = \left[\frac{100}{30}\right] = 3$$

کسر ۰٫۶ ۳۰ ۳۰

$$|A\cup B| = 16 + 10 - 3 = 23$$

تعریف تابع پوشا: اگر برد تابع f برابر هم دامنه‌اش باشد می‌گوییم تابع پوشا است. به عبارت دیگر تابع $f: A \to B$ پوشا است هرگاه به ازای هر عضوی مثل b از B حداقل a ای از A باشد که $f(a)=b$.

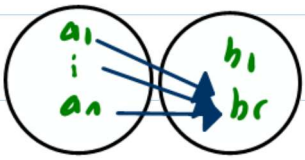
مثال: چند تابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه ۲ عضوی وجود دارد؟



برای حل این سوال حالت‌هایی که تابع پوشا نیست را پیدا نموده و از تعداد توابع ساخته شده کم می‌کنیم.

A_1: b_1 پوشانده نشود.

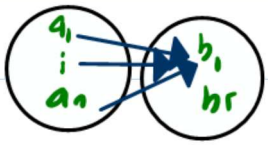
$|A_1| = 1$ ← زیرا



فقط همین حالت

A_2: b_2 پوشانده نشود

$|A_2| = 1$



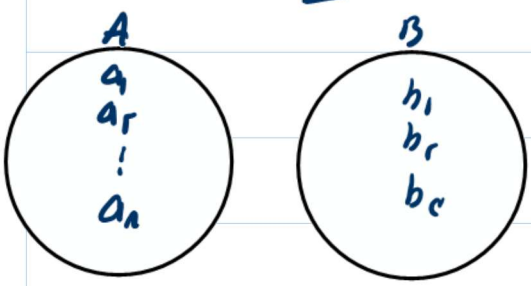
فقط همین حالت

$A_1 \cap A_2$: هم b_1 و هم b_2 پوشانده نشود ← هیچ حالتی نداریم ← $|A_1 \cap A_2| = 0$

تعداد کل توابع از A به B برابر 2^n است. (زیرا برای هر عضو A دو حالت داریم یا b_1 یا b_2 را می‌گیرد.)

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1 \cup A_2| = 2^n - \underbrace{(1+1-0)}_{|A_1|+|A_2|-|A_1 \cap A_2|} = 2^n - 2$$

مثال: تعداد توابع پوشا از مجموعه n عضوی به مجموعه ۴ عضوی را می‌شمارید.



راه‌حل مثال بالا: راه‌کناری می‌زنیم:

$|A_1| = 2^n$ ← زیرا a_iها در حالت تناظر با b_1ها چهار راه دارند

b_1 پوشیده نشود

$|A_2| = 2^n$ و $|A_3| = 2^n$

b_2 پوشیده نشود — b_3 پوشیده نشود

$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| = 1$

b_1 و b_2 پوشیده نشود فقط یک حالت که همه به b_3 بروند.

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

در کل هم 3^n تابع داریم (هر عضو A سه حالت دارد) پس $|S| = 3^n$.

$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

b_1 پوشیده نشود — b_2 پوشیده نشود — b_3 پوشیده نشود

$= 3^n - (2^n + 2^n + 2^n - 1 - 1 - 1 + 0)$

$= 3^n - 3 \times 2^n + 3$

مثال خودرو ۱۴۰۱ :

به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟

تذکر مهم : سوالاتی مثل سوال فوق اگر اشیاء متمایز باشند از توابع پوشا و اگر اشیاء یکسان باشند از قضیه سیم قابل حل هستند. سوال فوق به دلیل مشخص نکردن تمایز یا عدم تمایز سیب‌ها دچار ابهام است لذا به هر دو مدل حل می‌پردازیم که حالت سیب‌های متمایز را حل می‌کنیم.

حل این مساله معادل یافتن توابع پوشا از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی است.

$$\text{تعداد حالات} = 3^5 - 3\times 2^5 + 3 = 243 - 96 + 3 = 150$$

مثال: خودرو ۱۴۰۰

الف) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

ب) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟

الف)
$$3^4 - 3\times 2^4 + 3 = 36$$

ب)
$$(8)_4 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 8\times 7\times 6\times 5 = 1680$$

اصل لانه کبوتری:

فرض کنید در یک کلاس ۱۴ دانش آموز حضور دارند. آیا ممکن است ماه تولد همگی متفاوت باشد؟

جواب خیر است زیرا چون آن دقت یک سال باید ۱۴ ماه داشته باشد. پس حداقل ماه تولد دو نفر یکی است. البته ممکن است همه در یک ماه هم متولد شده باشند ولی در بدترین شرایط آن چیزی که به صورت قطعی می توانیم بگوییم این است که حداقل ۲ نفر در یک ماه متولد شده اند.

اصل لانه کبوتری:

اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $n<m$ همه کبوترها در آن لانه ها قرار بگیرند، در این صورت لانه ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال: ثابت کنید در بین ۶ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می شود که باقیمانده ۵ هم نسبت هستند.

زمانی دو عدد باقیمانده ۵ هم نسبت اند که باقیمانده هر دو در تقسیم بر ۵ یکی باشد. یک عدد در تقسیم بر ۵ یکی از باقیمانده های $\{0,1,2,3,4\}$ را دارد. پس ۵ لانه داریم و ۶ عدد (کبوتر) پس طبق اصل لانه کبوتری

چون 5×6 بین حداقل ۲ عدد در تقسیم بر ۵ هم باقی می‌مانند.

مثال: ثابت کنید در هر گراف ساده از مرتبه p ($p \geq 2$) حداقل دو رأس وجود دارد که درجه آن‌ها برابر باشد.

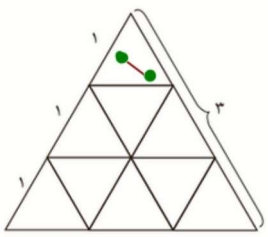
درجه‌ها از ۰ تا $p-1$ تغییر کند. p حالت داریم. لانه را در دو حالت حل می‌کنیم:

۱) گراف رأس تنها نداشته باشد پس درجه‌ها از ۱ تا $p-1$ تغییر کند پس $p-1$ حالت داریم و p رأس. پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ رأس درجه یکسان دارند.

۲) گراف رأس تنها داشته باشد پس درجه‌ها از ۰ تا $p-2$ تغییر کند (زیرا اگر رأس از درجه $p-1$ ندارد) پس باز هم $p-1$ حالت داریم با p رأس.

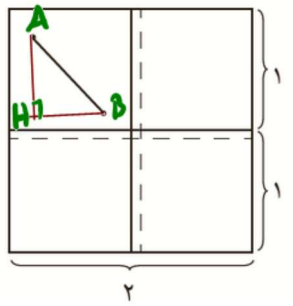
تذکر: از مثال بالا می‌توان نتیجه گرفت در هر جمع ۶ نفره حداقل ۲ نفر تعداد دوست‌های یکسان دارند زیرا گراف ۶ رأسی را در نظر می‌گیریم. اگر دو نفر دوست باشند آن‌ها را با یال به هم وصل می‌کنیم. درجه هر رأس تعداد دوستان هر فرد را نشان می‌دهد.

مثال: یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصلهٔ آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.



۹ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ داریم. ۱۰ نقطه داریم و ۹ مثلث. طبق اصل لانه‌کبوتری دارای یک از مثلث‌ها حداقل دو نقطه قرار می‌گیرد. فاصله هر دو نقطه درون این مثلث متساوی‌الاضلاع از اول ضلع کمتر است. پس فاصله این دو نقطه کمتر از یک است.

مثال: ۵ نقطه درون مربعی به ضلع ۲ قرار دارند. ثابت کنید فاصله حداقل دو نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ می‌شود.



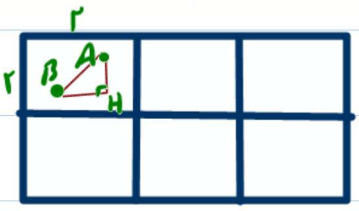
مربع را به ۴ مربع به ضلع یک تقسیم می‌کنیم.

۵ نقطه داریم و ۴ مربع. پس دارای یک از لانه‌ها (مربع‌ها) حداقل دو نقطه می‌افتد مانند A و B.

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 < 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AB < \sqrt{2}$$

مثال تمرینی ۱۴.۱

هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\sqrt{8}$ است.



مستطیل را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم. پس ۷ نقطه داریم و ۶ مربع.

پس حداقل یک لانه (مربع) که شامل دو کبوتر است. طبق فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 < 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

تمرین : نهایی شهریور ۹۸

۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۸×۶ قرار دارند ؛ نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آنها از هم ،کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.

مثال: نهایی دی ۹۸

مجموعه اعداد $A=\{1,2,3,\cdots,84\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.

لانه‌ها را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$\{1,84\}, \{2,83\}, \{3,82\}, \cdots, \{42,44\}$

پس تعداد لانه‌ها ۴۲ تا خواهد شد و تعداد کبوترها ۴۳ تا. پس طبق اصل لانه‌کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان ۸۵ است.

مثال: نهایی دی ۱۴۰۰

ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است؟

برای اینکه مجموع دو عدد زوج باشد، هر دو عدد یا باید زوج باشند و یا هر دو فرد. بنابراین تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است. پس حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد بود.

حل تمرین کتاب درسی صفحه ۸۴

۱۳ مجموعهٔ اعداد $A=\{1, 5, 9, 13, \ldots, 77, 81, 85\}$ را که به‌صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

۱۳ اعداد مجموعه $A=\{1, 5, \ldots 81, 85\}$ را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم : (افراز مجموعه A به ۱۲ زیرمجموعه)

$\{45\}, \{41,49\}, \{37,53\}, \{33,57\}, \{29,61\}, \{25,65\}, \{21,69\}, \{17,73\}, \{13,77\}, \{9,81\}, \{5,85\}, \{1\}$

چون مجموع عدد ۱ و همین طور عدد ۴۵ با هیچ‌کدام از اعداد داخل مجموعه A، برابر ۹۰ نمی‌شوند، لذا هر کدام از آنها را در یک دسته مجزا قرار دادیم.

دسته‌ها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر می‌گیریم، بنابراین ۱۲ لانه داریم و می‌خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آنها انتخاب کنیم. در بدترین شرایط از هر لانه یک عدد برداریم، پس ۱۲ عدد انتخاب شد و یک انتخاب دیگر مانده که آن را از یکی از لانه‌های موجود غیر از لانه‌های یک عضوی، چون قبلاً عدد درون آن را برداشته‌ایم، انتخاب می‌کنیم. پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

۱۵ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری‌که مختصات نقطهٔ وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

۱۵ هر نقطه به‌صورت زوج مرتب (a,b) دارای دو مؤلفه اول و دوم است که با توجه به زوج یا فرد بودن هر کدام از مؤلفه‌ها، در یکی از دسته‌های زیر قرار می‌گیرد :

	a	b
دسته ۱	زوج	زوج
دسته ۲	زوج	فرد
دسته ۳	فرد	زوج
دسته ۴	فرد	فرد

اگر هر دسته را به‌عنوان لانه و هر نقطه را به‌عنوان کبوتر در نظر بگیریم، در این صورت ۴ لانه و ۵ کبوتر داریم، که طبق اصل لانه کبوتری، لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۲ نقطه از این ۵ نقطه، با توجه به زوج یا فرد بودن مختصاتشان، مانند هم هستند. از طرفی چون مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است و مجموع دو عدد فرد، نیز عددی زوج می‌باشد، پس جمع مؤلفه‌های اول آنها و همچنین جمع مؤلفه‌های دوم آنها زوج است و بر ۲ بخش‌پذیرند. بنابراین مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح است.

تقسیم اصل لانه کبوتری :

مثال اول که چاه تولد ۱۳ دانش آموز کلاس شما را در نظر بگیرید . اگر یک نفر اضافه شود حتی ۱۴ دانش آموز را نیز داشته باشیم نمی توانیم بطور قطع سه نفر را در یک ماه متولد شده اند؟ جواب چیزیست زیرا در بدترین حالت ۱۲ نفر در ۱۲ ماه مختلف متولد شده اند و دو نفر باقی مانده هم در دو ماه از ۱۲ ماه قرار می گیرند. پس حداکثر ۲ نفر در یک ماه می شوند. و اگر تعداد را اضافه کنیم تا ۲۵ نفر برسیم، دوتا ۱۲ ماه کامل پر می شوند و یکی باقی می ماند. پس حداقل ۳ نفر در یک ماه متولد شده اند. به عبارت دیگر چون $25 > 2\times12$ لانه ای هست که حداقل $2+1=3$ کبوتر دارد.

تقسیم اصل لانه کبوتری : فرض کنید m کبوتر در n لانه باشند. اگر $m > kn$ باشد، لانه ای وجود دارد که در آن حداقل $k+1$ کبوتر قرار گرفته باشد.

نکته: برای یافتن k کافی است m (کبوترها) را بر n (لانه ها) تقسیم کنیم. اگر خارج قسمت k شود لانه ای با حداقل $(k+1)$ وجود دارد.

مثال: ۱۲۷ نفر در یک همایش شرکت کرده‌اند. حداقل چند نفر در یک ماه متولد شده‌اند؟

$\frac{127}{-120}\ \frac{12}{10}\ +1 \to 11$

چون $10\times12 < 127$ پس حداقل $10+1=11$ نفر در یک ماه متولد شده‌اند.

مثال: نهمی وزارت ۹۸

ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

$m=505 \qquad n=\overset{\text{ماه}}{7}\times\overset{\text{هفته}}{12}=84 \qquad \frac{505}{-504}\ \frac{84}{6} \qquad 6+1=7$

نکته: در برخی سوالات حداقل مقدار برای m (مقدار کبوترها) خواسته می‌شود. برای حل این نوع سوالات ابتدا از حداقل مقدار داده‌شده برای یک لانه استفاده کرده k را می‌یابیم. $(k+1=c)$.

حداقل مقدار برای m، $kn+1$ می‌باشد.

مثال: نهمی دی ۹۷

حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از انها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کبیسه در نظر بگیرید)

$k+1=20 \Rightarrow k=19 \Rightarrow kn+1=19\times365+1=6936$

مثال: خوارزمی ۹۹

در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟

$k+1=7 \Rightarrow k=6 \Rightarrow kn+1=6\times12+1=73$

مثال: دی ۹۹

حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آن‌ها مانند هم و غیر تکراری است؟

تعداد حالات $n = ۳۲ \times ۳۱ = ۹۹۲$ ، $k+1 = ۳ \Rightarrow k = ۲$

تعداد کبوترها $m = kn+1 = ۲ \times ۹۹۲ + ۱ = ۱۹۸۵$

مثال: خرداد ۱۴۰۰

۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$k+1 = ۵ \Rightarrow k = ۴$ ، $m = kn+1 = ۵۴ \Rightarrow ۴n+1 = ۵۴ \Rightarrow ۴n = ۵۳$

$n = \frac{۵۳}{۴} = ۱۳/۲۵ \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = [۱۳/۲۵]_{+} = ۱۴$