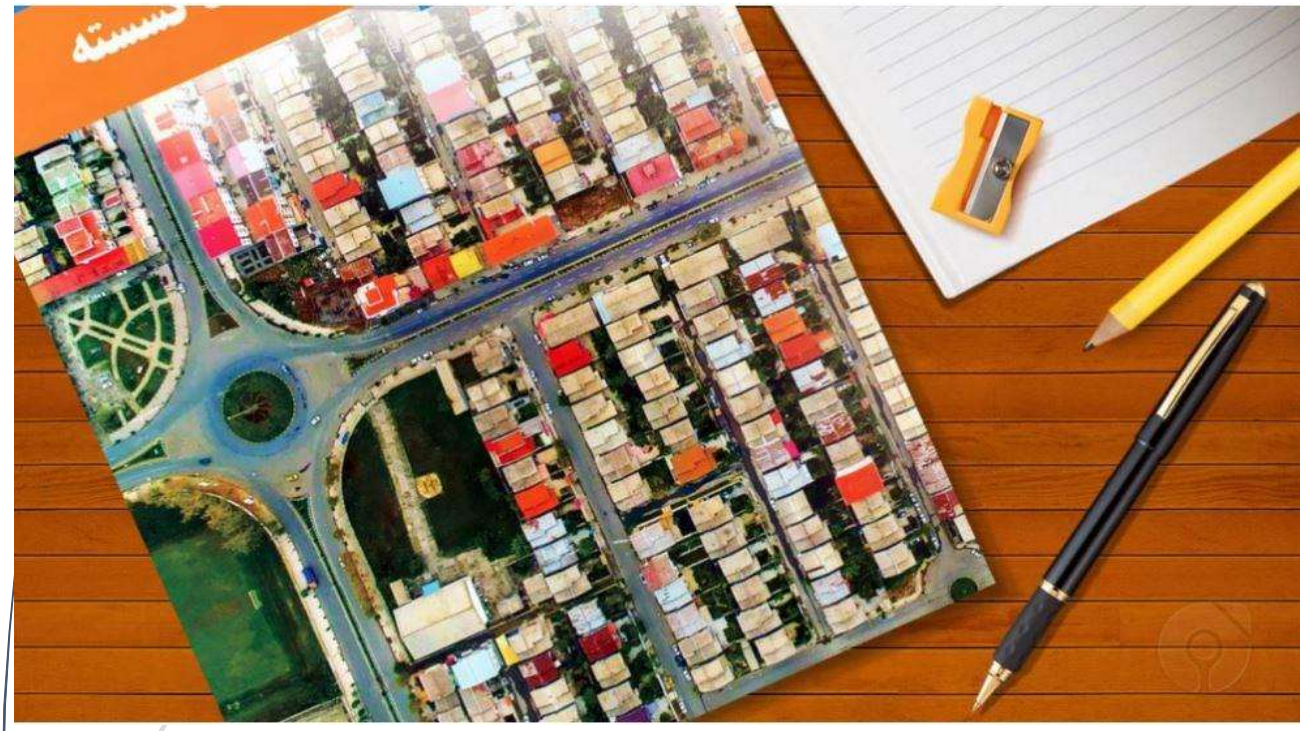
جزوه ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: گراف و مدلسازی

درس اول: معرفی گراف



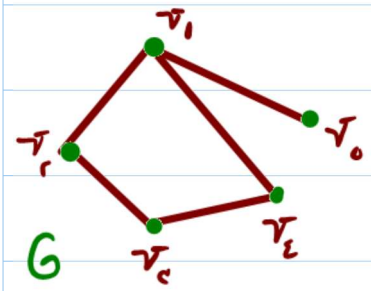
مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

درس اول معرفی گراف

تعریف گراف ساده: گراف G از مجموعه‌های $V(G)$ (مجموعه رأس‌ها) و $E(G)$ (مجموعه یال‌ها) تشکیل می‌شود، بطوریکه هر یال، یک زیرمجموعه دوعضوی مانند $\{v_1, v_2\}$ از مجموعه رأس‌ها V است.

به عبارت دیگر گراف مجموعه‌ای از نقاط و خط‌هایی است که این نقاط را به هم وصل می‌کند.

مثال:



G

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

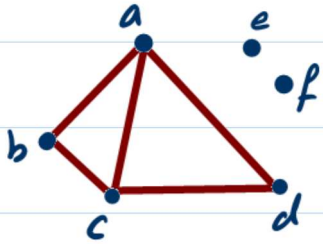
$$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$$

مرتبه و اندازه گراف:

به تعداد راس‌های یک گراف **مرتبه** آن گفته می‌شود و آن را با p نمایش می‌دهیم.

به تعداد یال‌های یک گراف **اندازه** آن گفته می‌شود و آن را با q نمایش می‌دهیم.

مثال: در گراف زیر اندازه و مرتبه را مشخص کنید.



$p = 6 \qquad q = 5$

طوقه: هرگاه ابتدا و انتهای یالی روی یک رأس باشد به آن طوقه می‌گوییم.



توجه کنید که گراف ساده، طوقه ندارد.

یال چندگانه: اگر بین دو رأس چند یال باشد به این یال چندگانه گفته می‌شود.



باز هم دقت کنید گراف ساده، یال چندگانه ندارد.

یال جهت‌دار: هرگاه روی یک یال جهت داشته باشیم به آن یال جهت‌دار گفته می‌شود.



در این صورت یال را به صورت زوج مرتب (v_1, v_2) می‌نویسیم.

گراف ساده یال جهت‌دار ندارد.

درجه رأس: به تعداد یال‌هایی که در گراف G به رأسی مانند v وصل شده‌اند، درجه رأس گفته و آن را با $deg(v)$ نشان می‌دهند.

تذکر: اگر درجه یک رأس، عددی فرد باشد به آن رأس فرد و اگر درجه آن عددی زوج باشد به آن رأس زوج می‌گوییم. اگر $deg(v)=0$ باشد یعنی هیچ یالی از رأس v نگذرد به آن رأس تنها یا ایزوله می‌گوییم.

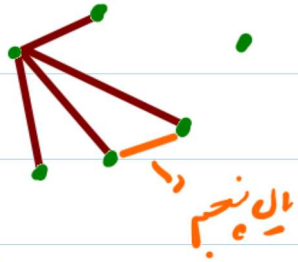
ماکسیمم و مینیمم درجه گراف : بزرگترین درجه بین درجه رأس های یک گراف را ماکسیمم درجه گفته و

آن را با نماد Δ نمایش می‌دهیم و کوچکترین درجه بین درجه رأس های یک گراف را مینیمم درجه گفته و

آن را با نماد δ نمایش می‌دهیم.

مثال: در گرافی از مرتبه ۶ ی راسی $\Delta = 5$ و گراف دارای یک راس تنها است. اگر $\delta = ?$

باشد. گراف چند راس از درجه ۲ دارد؟ ۱) ۵ ۲) ۱ ✓ ۳) ۲ ۴) ۳



دو رأس مجاور : راس های u و v را همسایه یا مجاوری گوئیم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند.

یعنی $uv \in E$.

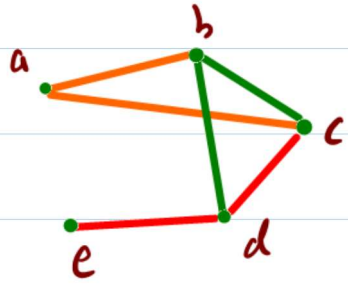
همسایگی یک رأس : مجموعه همسایه‌های رأس v در گراف G را با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم و به آن

همسایگی باز رأس v می‌گوئیم و اگر خود رأس v را به $N_G(v)$ اضافه کنیم به مجموعه

حاصل همسایگی بسته رأس v می‌گوئیم و آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم.

مثال: در گراف G از مرتبه ۵ می‌دانیم $N_G(a)=\{b,c\}$ و $N_G(b)=\{a,c,d\}$ و $N_G(d)=\{e,c,b\}$

و رأسی از درجه ۱ دارد. در این صورت رأس c با چند رأس مجاور است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) نمی‌توان گفت

دو رأس مجاور: هرگاه راسی وجود داشته باشد که هر دو رأس به آن وصل باشند.

دنباله گرافی: اگر درجه‌های رأس‌های یک گراف را از بزرگ به کوچک بنویسیم به آن دنباله گرافی می‌گوییم.

نکته: همیشه $d_1 \le p-1$ است. چون حداکثر درجه یک راس زمانی بدست می‌آید که آن راس به همه $p-1$ رأس دیگر وصل باشد. دقت کنید اگر $d_1 = p-1$ باشد، d_2 حداقل برابر ۱ می‌تواند باشد و اگر k رأس از درجه $p-1$ داشته باشیم باید $d_k \ge 1$ باشد.

مثال: کدام گزینه یک دنباله گرافی است؟

۱) ۲,۲,۳,۴,۵ ۲) ۲,۳,۴,۵,۶,۶,۶ ۳) ۲,۲,۳,۴,۵,۵ ✓ ۴) ۲,۲,۳,۴,۵,۵,۵

۱) $p=5$ ، $5 \le 4$ ✗ $5=5$

۲) $p=7$ و $d_2 \ge 4$ ✗ $5=2$: تا درجه ۶ داریم $\Rightarrow$ ۴ تا

۴) $p=۶$, یک راس درجه ۵ داریم $\Rightarrow$ یک δ : $\delta=۲$ ∴

قضیه : فرض کنید G گرافی از مرتبه p با مجموعه رأس‌های $V=\{v_1,\dots,v_p\}$ و اندازه q باشد آنگاه

$$\sum_{i=1}^{p} deg(v_i) = deg(v_1)+deg(v_2)+\dots+deg(v_p) = ۲q$$

اثبات : همه یال‌ها را حذف می‌کنیم. در حال حاضر مجموع درجه‌ها برابر صفر است. یکی یکی یال‌های گراف را اضافه می‌کنیم. با اضافه کردن یال اول، دو راس درجه یک می‌شوند پس مجموع درجه‌ها برابر ۲ می‌شود.

دوباره یالی دیگر اضافه می‌کنیم مجموع درجه‌ها ۲ می‌شود. با اضافه کردن هر یال، به مجموع درجه‌ها ۲ واحد اضافه می‌شود. پس مجموع درجه‌ها دو برابر تعداد یال‌ها می‌شود. ☐

نتیجه مهم : تعداد راس‌های فرد هر گراف زوج است. مثلاً گرافی با درجات : ۱,۲,۳,۴,۲,۴ وجود ندارد چون ۳ تا درجه فرد در بین درجه‌ها وجود دارد.

مثال : درجه‌های گرافی به صورت : ۱,۲,۳,۴,۴,۵,۵,n است. n چه اعدادی ممکن است باشد؟

۲ تا راس درجه ۵ داریم: $۲=k$ پس $۵\geq ۲$ $\longrightarrow$ ① $۵\geq n$ ، $۵\geq ۵$ ، $۵\geq p-۱=۶-۱=۵$

یعنی ② $۲\geq n$ است. ①,② $\rightarrow$ $۵\geq n\geq ۲$

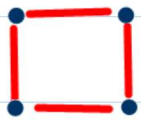
فقط سه رأس فرد داریم پس نمی‌تواند ۱ یا ۳ باشد. : $n=2,4$ اگر

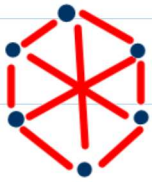
با ۴ رأس فرد، ۵ دیگر نباید ۲ باشد. : $n=5$ اگر

پس $n=4$ است.

گراف ۲-منتظم : گرافی که درجه همه رأس‌های آن برابر ۲ باشد.

مثال : ۶منتظم مرتبه ۶ ۲منتظم مرتبه ۴





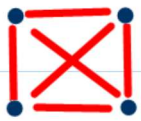
نکته : در گراف ۲-منتظم مرتبه p همواره : $2q=2p$ داریم.

مثال : در یک گراف ۴-منتظم داریم $q=4p-8$. مرتبه و اندازه گراف را بدست آورید.

$$\begin{cases} q=4p-8 \\ 4p=2q \rightarrow q=2p \end{cases} : \quad 2p=4p-8 \Rightarrow p=8 \Rightarrow q=16$$

گراف کامل : به گرافی که هر دو رأس آن مجاور باشند، گراف کامل k_p می‌گوییم.

k_1 :  k_2 :  k_3 : 

k_4 :  k_5 : 

نکته : درجه هر رأس در k_p، برابر $p-1$ است. پس گراف k_p، $(p-1)$منتظم است و تعداد یال‌ها در k_p برابر $\frac{p(p-1)}{2}=\binom{p}{2}$ است.

مثال: با کم کردن ۴۴ یال از یک گراف کامل، گراف ۴-منتظم بدست می‌آید. مرتبه گراف را بیابید.

$$\frac{p(p-1)}{2} - 44 = q = 2p \quad : \quad 4p = 2q \Rightarrow 2p = q$$

$$\xrightarrow{\times 2} p(p-1) - 88 = 4p \Rightarrow p^2 - 5p - 88 = 0 \rightarrow (p-11)(p+8) = 0$$

$$\rightarrow p = 11$$

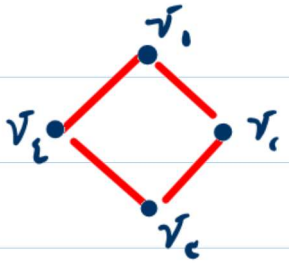
مکمل گراف: مکمل گراف G که آن را با $\bar{G}$ نشان می‌دهیم گرافی است که مجموعه رأس‌های آن همان مجموعه رأس‌های G است و دو رأس در $\bar{G}$ مجاور هستند هرگاه در G مجاور نباشند.

نکته:

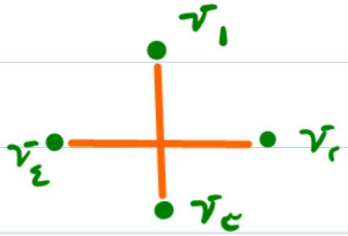
1) $q(G) + q(\bar{G}) = \binom{p}{2}$

2) $deg_G(v) + deg_{\bar{G}}(v) = p - 1$

مثال:



G



$\bar{G}$

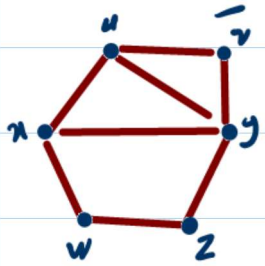
زیرگراف: گراف H را یک زیرگراف از گراف G می‌نامیم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$

مسیر: اگر u, v دو رأس از گراف G باشند یک مسیر از u به v دنباله‌ای از رأس‌های دو به دو متمایز

در حالت کلی از u شروع و به v ختم می‌شود و هر رأس متوالی را این دنباله جا دهند. طول یک مسیر برابر

تعداد یال‌های این مسیر (که یکی کمتر از تعداد رأس‌های مسیر است) تعریف می‌کنیم.

مثال: در گراف مقابل همه مسیرها از u به v را بنویسید و طول آن‌ها را مشخص کنید.



uv : طول ۱

uyv : طول ۲

uxyv : طول ۳

uxwzyv : طول ۵

گراف P_n : گرافی که تنها از یک مسیر به n رأسی تشکیل شده باشد را مسیر n رأسی می‌نامیم و با P_n نمایش می‌دهیم.

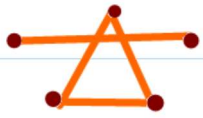
P_2 : 

P_4 : 

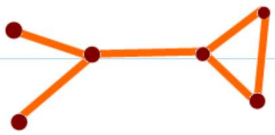
نکته: P_n گرافی از مرتبه n و اندازه $(n-1)$ است.

گراف همبند: گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

مثال:



ناهمبند

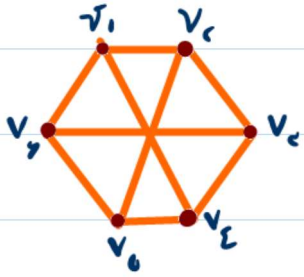


همبند

نکته: اگر G گرافی از مرتبه p با $\delta \geq \frac{p-1}{2}$ باشد آنگاه G گرافی همبند است.

دور: یک دور به طول m ($m \geq 3$) در گراف G دنباله‌ای شامل $m+1$ راس مانند $v_1 v_2 \dots v_m v_1$ است به طوری که m رأس به جز v_1 تا v_m دو به دو متمایزند و هر دو راس متوالی در این دنباله مجاورند.

مثال: همه دورهای به طول ۴ در گراف ۴-مستطیل مرتبه ۶ را بنویسید.



پاسخ:
$v_1 v_2 v_5 v_4 v_1$ $\quad$ $v_2 v_3 v_6 v_5 v_2$
$v_1 v_2 v_3 v_6 v_4 v_1$ $\quad$ $v_3 v_6 v_5 v_4 v_3$
$v_1 v_3 v_6 v_5 v_4 v_1$ $\quad$ $v_4 v_5 v_6 v_3 v_2 v_1$
⋮
۶ تا جواب صفحی

گراف C_n: گرافی که شکل از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را دور n رأسی گوییم و با C_n نمایش می‌دهیم.



مثال: تعریف ۱.۴

در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه ، مرتبه) می نامیم.

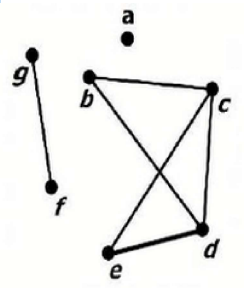
ب) گرافی را همبند می‌نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر ، یال) وجود داشته باشد.

پ) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G)+q(\overline{G})$ برابر با ($n(n-1)$ ، $\frac{n(n-1)}{2}$) است.

ت) گراف C_n تنها یک (دور ، مسیر) n رأسی دارد.

مثال: تعریف ۱.۴

گراف G (شکل مقابل) را در نظر بگیرید:



الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) دوری به طول ۴ بنویسید.

پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از راس b بنویسید.

ت) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.

الف) $\Delta = 3$, $\delta = 0$ ب) bcedb پ) bcde, bdec, bced

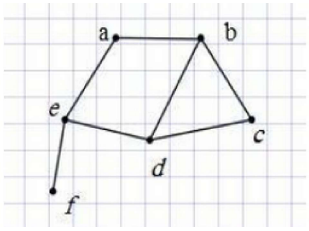
ت) $N_G(f) = \{g\}$

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱) گراف ۳-منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست. درست $5 \times 3 \neq 2q$

۲) تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است. نادرست

مثال نهایی خرداد ۹۸



شکل مقابل نمودارگراف G می باشد.

الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید.

ج) مجموع درجه های رأس های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید.

الف) $p=6, q=7$ ب) $N_G(b)=\{a,d,c\}$

ج) $q(G)+q(\overline{G})=\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2}=15 \Rightarrow 7+q(\overline{G})=15 \Rightarrow q(\overline{G})=8$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} deg_{\overline{G}} v_i = 2q = 16$

مثال: نهایی شهریور ۹۸

گراف G با مجموعه راس های $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعه یال های زیر در نظر بگیرید:

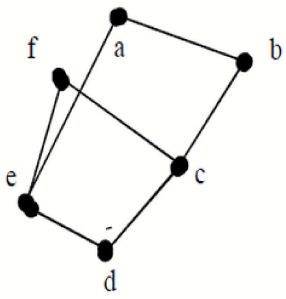
$E=\{ab,bc,cd,ed,ae,cf,ef\}$

الف)نمودار گراف را رسم کنید.

ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید.

ج)یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.

الف)



ب) $N_G[b]=\{a,c,b\}$

ج) baefcd

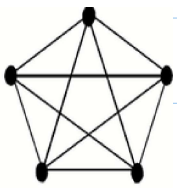
مثال: نهایی شهریور ۹۸

یک گراف ۵ راسی غیر تهی k–منتظم رسم کنید به طوری که:

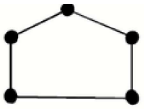
الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

الف

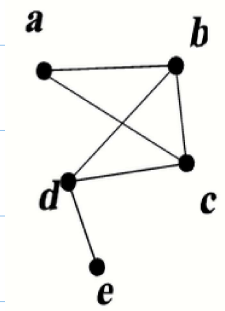


ب



مثال: نهایی دی ۹۸

گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) اندازه گراف را تعیین کنید.

پ) مجموعه همسایگی بسته رأس b را بنویسید.

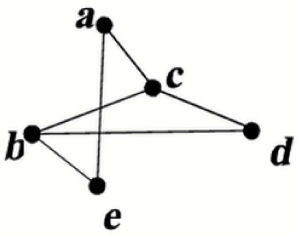
ت) اگر $N_G(d)=\{e,x,b\}$ باشد، x کدام رأس است؟

الف) $\delta=1$ ب) $q=6$ پ) $N_G[b]=\{a,c,d,b\}$

ت) $x=c$

مثال: نهایی دی ۹۸

گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

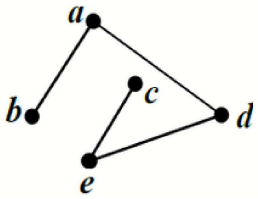


الف) دوری به طول ۵ مشخص کنید.

ب) مکمل گراف G را رسم کنید.

الف) acdbea

ب)



مثال: نهایی خرداد ۹۹

درگراف G، درجه رأس v برابر با ۹ است و درجه رأس v در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

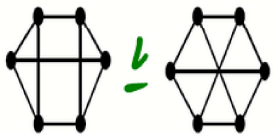
$\deg_G(v)+\deg_{\overline{G}}(v)=p-1 \Rightarrow 9+12=p-1 \Rightarrow p=22$

مثال: نهایی خرداد ۹۹

گراف G، ۶ رأسی ۳- منتظم است.

الف) اندازه گراف G را بیابید.

ب) نمودار گراف G را رسم کنید.

الف) $pr = 2q \Rightarrow 6 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9$ ب) 

مثال: نهایی خرداد ۹۹

ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

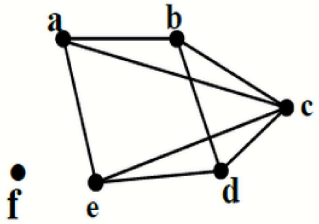
اثبات :

فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ از طرفی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2q$ و $\sum_{v \in B} \deg(v) = 2k$ زوج‌اند.

لذا $\sum_{v \in A} \deg(v) = 2q - 2k$ باید زوج باشد. می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد.

مثال: نهایی شهریور ۹۹

گراف G به صورت مقابل رسم شده است.به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) $\Delta(G)$, $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) سه دور به طول ۳ بنویسید.

پ) ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟

ت) $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید.

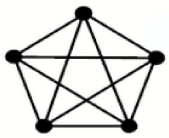
ث) آیا گراف G همبند است؟

الف) $\Delta = 4$, $\delta = 0$ ب) $abca$, $bcdb$, $ecde$

پ) $\deg_{\bar{G}}(f) = 6 - 1 = 5 = 5$ ت) $N_{\bar{G}}(e) = \{a, c, d\}$ ث) خیر

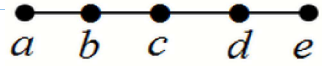
مثال: نهایی شهریور ۹۹

گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.

$q = \binom{p}{2} \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 10 \Rightarrow p(p-1) = 20 \rightarrow p = 5$ 

مثال: نهایی شهریور ۹۹

گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.



abcd , bcde

مثال: نهایی شهریور ۹۹

هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آن‌ها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آن‌ها هر کدام دقیقاً با دو نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

$\sum_{i=1}^{7} \deg v_i = 2q \Rightarrow 6\times 2 + \deg v_7 = 2q \Rightarrow \deg v_7 = 2q - 12 = 2k$

درجه رأس هفتم نمی‌تواند فرد باشد.

مثال: نهایی دی ۹۹

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) مرتبه گراف نشان دهنده تعداد رأس‌های گراف می‌باشد.

ب) اگر یک یال، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را طوقه می‌نامیم.

پ) دو یال را مجاور می‌نامیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها را به هم متصل کند.

ت) تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی زوج است.

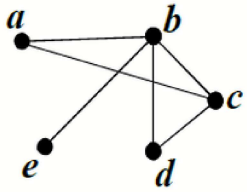
مثال: نهایی دی ۹۹

گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید.

الف) درجه رأس e در گراف مکمل G چند است؟

ب) تمام دورهای موجود در گراف G را بنویسید.

پ) $\Delta(G)$ را مشخص کنید.



الف) $1 + \deg_{\bar{G}} e = 5 - 1 = 4 \Rightarrow \deg_{\bar{G}} e = 3$

ب) abdca , abca , bdcb

پ) $\Delta = 4$

مثال: نهایی دی ۹۹

الف) گراف k - منتظم را تعریف کنید.

ب) گراف P_7 را رسم کنید.

پ) آیا گراف‌های C_n منتظم هستند؟

الف) گرافی که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشد

ب)

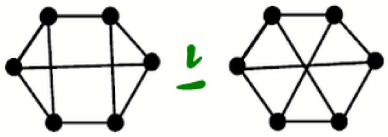


پ) بله

مثال: نهایی شهریور ۱۴۰۰

گراف G، ۳- منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.

$3p=2q$ ، $q=2p-4$ $\Rightarrow$ $3p=2(2p-4) \Rightarrow p=6$



مثال: نهایی خرداد ۱۴۰۱

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

الف) اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس ...فرد..... می‌نامیم.

ب) گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد، هیچ یالی نداشته باشد، گراف ...تهی..... می‌نامیم.

پ) تعداد یال‌های گراف K_4 ، برابر با $\frac{4\times 3}{2}=6$ است.

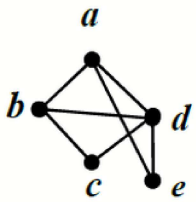
ت) گراف G را همبند... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

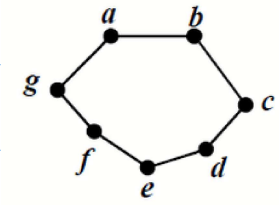
مثال: نهایی خرداد ۱۴۰۱

به سوالات زیر کوتاه پاسخ دهید.

الف) گراف C_7 را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید.

ب) در گراف شکل زیر، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.





الف) abcdef

ب) $N_G(c) = \{b, d\}$

مثال: تمرین شوربر ۱۴.۱

با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

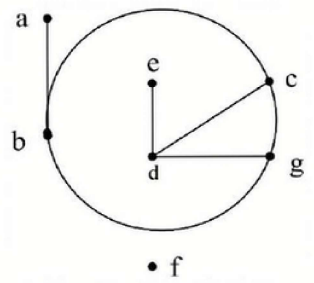
الف) یک مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید.

ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

پ) درجهٔ رأس a را در گراف $\overline{G}$ تعیین کنید.

ت) آیا گراف G همبند است؟ (با ذکر دلیل)

ث) $N_G[f]$ را بنویسید.



الف) abgc ب) bcdgb پ) $\deg_{\overline{G}}(a) + 1 = 7 - 1 \Rightarrow \deg_{\overline{G}}(a) = 5$

ت) خیر ث) $N_G[f] = \{f\}$

مثال:

علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکهٔ اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفرِ دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دونفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

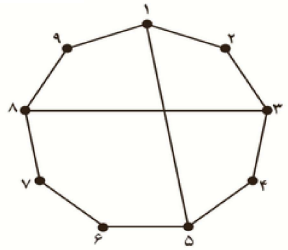
الف) حداکثر یال در گراف جهت دار ۲۰ = ۵×۴ = $P(5,2)$ است. درحالت با شرط نباشد: 2^{20}

ب) حداکثر یال در گراف ساده $\frac{20}{2} = 10$ = $P(5,2)/2$ است. درحالت با شرط نباشد 2^{10}

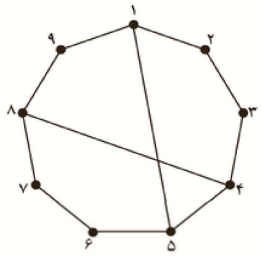
مثال: یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به‌طوری‌که:

الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱ ← دور به طول ۹
۱۲۳۴۵۱ ← دور به طول ۵
۱۵۶۷۸۹۱ ← دور به‌طول ۶
۱۲۳۸۷۶۵۱ ← دور به طول ۷



۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱ ← دور به طول ۹
۱۲۳۴۵۱ ← دور به طول ۵
۱۵۶۷۸۹۱ ← دور به‌طول ۶
۱۲۳۴۸۷۶۵۱ ← دور به طول ۸

مثال:

فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq K$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است. درست

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K+1$ است. نادرست : P_2 : $k=\delta=1$ مسیری به طول ۲ ندارد

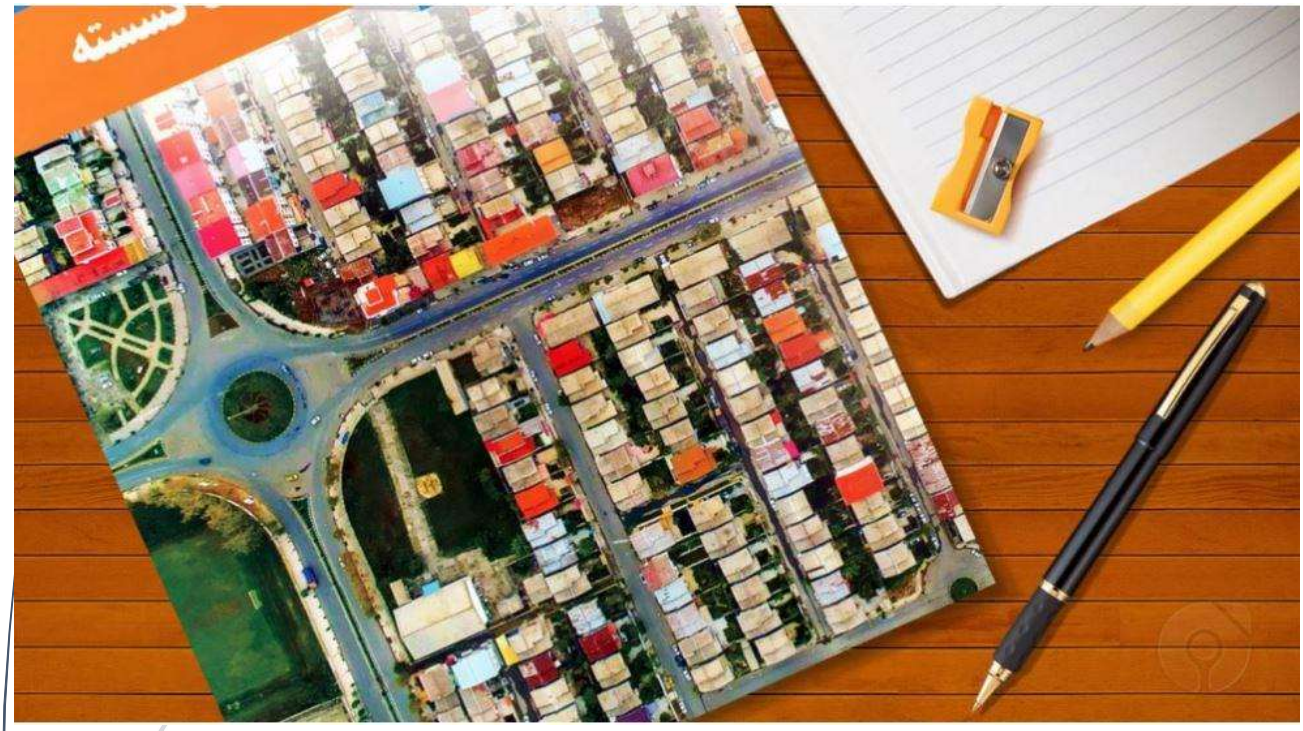
اثبات الف) راس دلخواه v_1 را در نظر می‌گیریم. حتماً v_1 به راس دیگری مثل v_2 وصل خواهد بود زیرا در غیر این صورت $\delta=0$ خواهد بود. v_2 هم به راس غیر از v_1 مثل v_3 وصل خواهد بود زیرا در غیر این صورت $\delta=1$ خواهد شد. حتماً v_3 به راس غیر از v_2 و v_1 مثل v_4 وصل خواهد بود زیرا در غیر این صورت حداکثر متوازی δ خواهد بود. این روند تا راس v_k ادامه دارد که با استدلال مشابه حتماً باید به راس جدیدی مثل v_{k+1} وصل باشد پس مسیر $v_{k+1}v_k\dots v_2v_1$ که مسیر به طول k در گراف داشت.

جزوه ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: گراف و مدلسازی

درس دوم: احاطه گری



مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

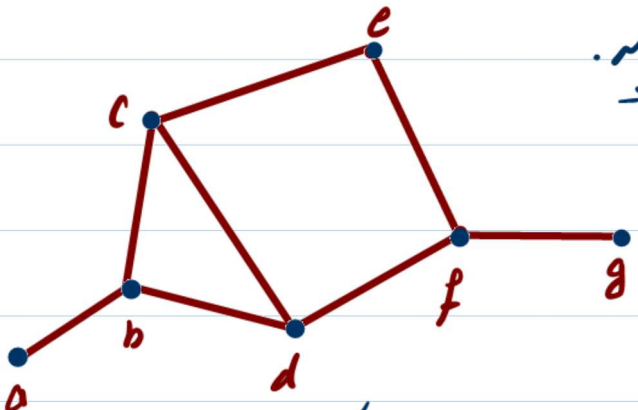
درس دوم: مدل‌سازی با گراف و احاطه‌گری

تعریف: یک رأس u از گراف G توسط رأس v احاطه می‌شود هرگاه $u=v$ یا $uv \in E$ (یعنی یالی از u به v وصل شده باشد).

مفهوم بالا را برای یک زیرمجموعه از مجموعه رأس‌های گراف G تعریف می‌کنیم.

تعریف مجموعه احاطه‌گر: فرض کنید V مجموعه راس‌های گراف G و $D \subseteq V$. D را یک مجموعه احاطه‌گر G می‌نامیم هرگاه هر رأس گراف G یا متعلق به D باشد یا حداقل با یکی از رأس‌های D مجاور باشد.

مثال: برای گراف زیر یک مجموعه احاطه‌گر بنویسید.



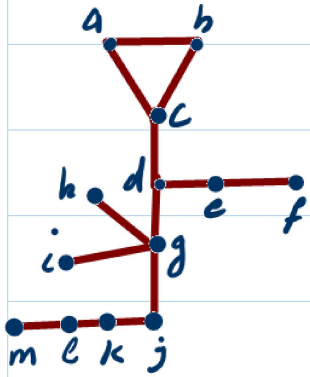
$D_1 = \{b, f\}$

$D_2 = \{a, c, e, f\}$

تعریف مجموعه احاطه‌گر مینیم: یک مجموعه احاطه‌گر گراف G را مجموعه احاطه‌گر مینیم می‌نامیم هرگاه در بین مجموعه‌های احاطه‌گر G کمترین تعداد عضو را داشته باشد. تعداد اعضای این مجموعه احاطه‌گر را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر: یک مجموعه احاطه گر مینیمم از گراف G را یک γ- مجموعه هم می نویسند.

مثال: یک مجموعه احاطه گر مینیمم برای گراف زیر بنویسید.



$D = \{c, e, g, l\}$

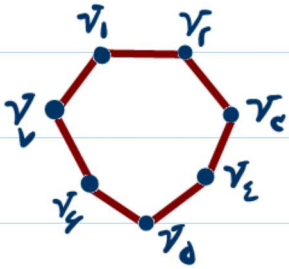
مثال: وزارت ۹۸

گراف C_V را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف)یک مجموعه احاطه گر ۴ عضوی بنویسید.

ب) عدد احاطه گری C_V را به دست آورید.

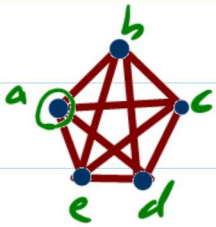
ج)دو مجموعه احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.



الف $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$

ب و ج $D_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$
$D_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$
$\Rightarrow \gamma(G) = 3$

نکته: در هر گراف کامل هر رأس می تواند یک مجموعه احاطه گر گراف باشد زیرا هر رأس با $(n-1)$ رأس دیگر دمل است، بنابراین عدد احاطه گری هر گراف کامل یک است.



$D = \{a\}$

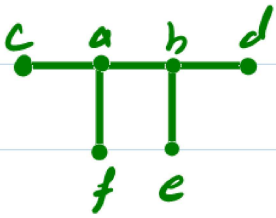
مثال خودرو ۹۹ :

گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید، به طوری که:

الف) مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

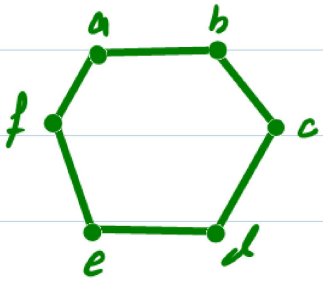
ب) بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

الف)



$D = \{a, b\}$

ب)



$D_1 = \{a, d\}$ $D_2 = \{f, c\}$

$D_3 = \{e, b\}$

مثال: نهایی خودرو ۱۴۰۰

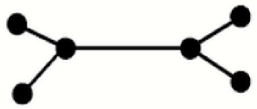
الف) یک گراف ۶ رأسی که γ – مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید.

ب) یک گراف ۶ رأسی که γ – مجموعه آن با اندازه دو باشد، رسم کنید.

الف)



ب)

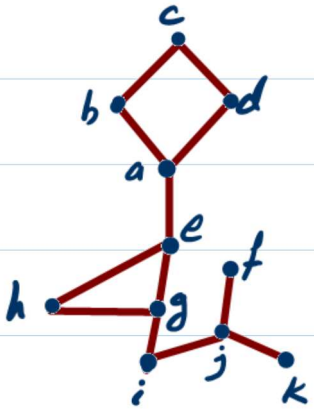


تعریف احاطه‌گر مینیمال :

یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است هرگاه با حذف هریک از رأس‌های آن دیگر مجموعه احاطه‌گر نباشد.

نکته: برای بررسی مینیمال بودن باید تک تک اعضا را حذف کنیم و ببینیم مجموعه احاطه‌گر نباشد. اگر حتی با حذف یک عضو مجموعه احاطه‌گر بماند آن مجموعه احاطه‌گر مینیمال نخواهد بود.

مثال: یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای گراف زیر بنویسید.



$D=\{c,e,i,f,k\}$

اگر c حذف شود: $\{e,i,f,k\}$ احاطه‌گر نیست.

اگر e حذف شود: $\{c,i,f,k\}$ احاطه‌گر نیست.

اگر i حذف شود: $\{c,e,f,k\}$ احاطه‌گر نیست.

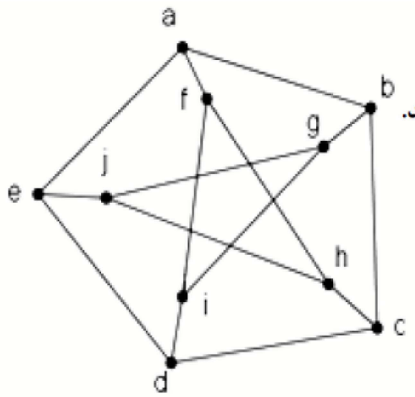
اگر f حذف شود $\{c,e,i,k\}$ احاطه‌گر نیست.

اگر k حذف شود $\{c,e,i,f\}$ احاطه‌گر نیست.

مثال خرداد ۹۸

الف) ثابت کنید هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را میتوان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد ؟

ب)در گراف روبرو یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.



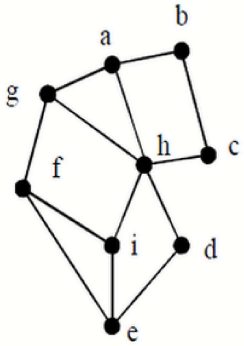
الف) اگر $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال باشد در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آن‌ها مجموعه احاطه‌گر باقی می‌ماند. پس عضوی مانند a_i را در نظر می‌گیریم.

اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه‌گر باقی بماند آن را حذف می‌کنیم. در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس‌ها انجام می‌دهیم.

ب) $A = \{h, g, f, c, i, e\}$

مثال: شهریور ۹۸

در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال انتخاب کنید ؛ سپس با حذف برخی از راس ها،آن را به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید.



غیرمینیمال $= \{a, h, f, b\}$

با حذف رئوس a، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال حاصل می‌شود.

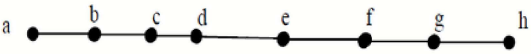
مثال: شهریور ۹۸

الف) گراف P_8 را رسم کنید.

ب) یک γ–مجموعه از آن را مشخص کنید.

ج) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.

الف)



ب) $\{a, d, g\}$

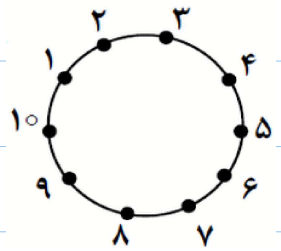
ج) $\{a, d, e, h\}$

مثال: دی ۱۴۰۰

گراف C_{10} را رسم کنید.

الف) یک γ – مجموعه از آن را مشخص کنید.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی از آن را تعیین نمایید.



الف $D=\{1,4,7,10\}$

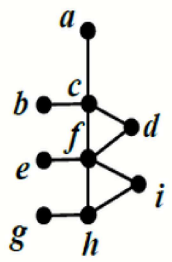
ب $D=\{1,4,5,7,9\}$

مثال: خزار ۱۴.۱

گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف) یک γ – مجموعه مشخص کنید.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.



الف $D=\{c,h,e\}$ ب $D=\{g,c,i,e\}$

نکته: هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. اما عکس آن همواره درست نیست.

تعریف یک نماد: برای نوشتن عدد صحیح عدد از $\lceil x \rceil$ استفاده می‌کنیم و آن را سقف x می‌خوانیم،

یعنی: $\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

مثلاً: $\lceil 4 \rceil = 4$, $\lceil 4.7 \rceil = 5$

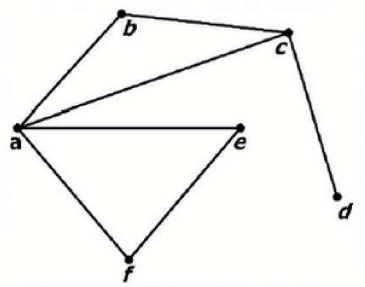
قضیه: در گراف G از مرتبه p با ماکسیمم درجه Δ داریم: $\chi(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil$.

یعنی $\left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پایین برای $\chi(G)$ است، یعنی $\chi(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر باشد.

نتیجه: برای گراف‌های C_n و P_n داریم: $\chi = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

مثال ری ۱۴.۱ :

عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



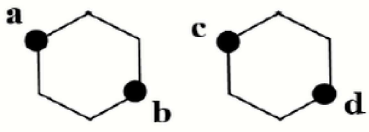
$p=6,\ \Delta=4$

$\chi(G) \geq \left\lceil \frac{6}{4+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{6}{5} \right\rceil = 2 \Rightarrow \chi(G) \geq 2$, $D=\{a,d\}$

پس $\chi(G)=2$.

مثال ری ۱۴.۱ :

یک گراف ۲-منتظم ۱۲ راسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



$\chi(G) \geq \left\lceil \frac{12}{2+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{12}{3} \right\rceil = \lceil 4 \rceil = 4$

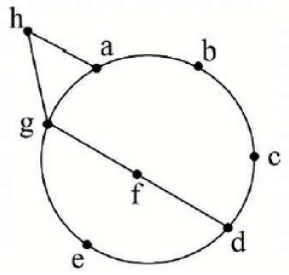
$D = \{a,b,c,d\}$

مثال: شوربر ۱۴.۱

با توجه به گراف (G) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص کنید.

ب)یک مجموعهٔ احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



(G)

الف $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\Delta}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta}{\delta} \right\rceil = ۲ \Rightarrow \gamma(G) \geq ۲$ $D = \{g, c\}$

ب $D = \{h, d, b\}$

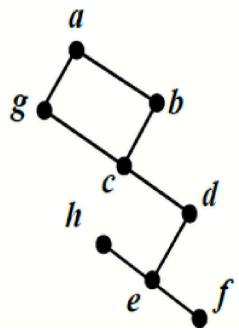
مثال: شوربر ۱۴.۱

در یک گراف از مرتبهٔ ۸ با $\Delta = ۳$ ، حداقل چند رأس برای احاطه همه رئوس لازم است؟

$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\Delta}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta}{۴} \right\rceil = ۲$

مثال: خرار ۱۴.۱

عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه حل، تعیین کنید.

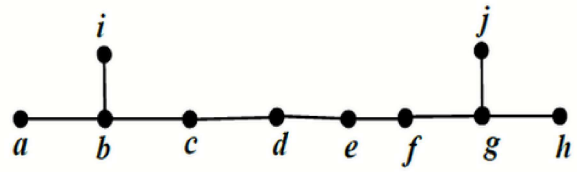


$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\Delta}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta}{۴} \right\rceil = ۲ \Rightarrow \gamma(G) \geq ۲$, $D = \{a, c, e\}$

پس : $\gamma(G) = ۳$

مثال: دی ۱۴۰۰

عدد احاطه‌گری گراف G (شکل مقابل) را با ارائه راه حل، تعیین کنید.



$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{10}{4} \right\rceil = 3 \Rightarrow \gamma(G) \leq 3$ ، $D = \{b, e, g\}$

$\Rightarrow \gamma(G) = 3$

مثال: دی ۱۴۰۰

درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

الف) هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است. نادرست

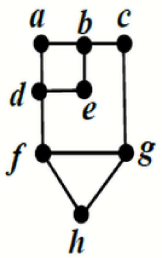
ب) اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد آن‌گاه $\gamma(G) > \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$. نادرست

پ) در گراف P_n عدد احاطه‌گری برابر با $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است. درست

ت) $\lceil ۳/۴۸ \rceil = ۴$. نادرست

مثال: شهریور ۱۴۰۰

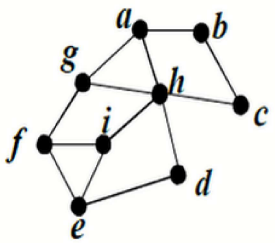
در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\Delta}{\Delta+1} \right\rceil = 2$ ، $D = \{b, f\} \Rightarrow \gamma(G) = 2$ ، $D_{minimal} = \{a, e, c, h\}$

مثال: خرداد ۱۴۰۰

در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

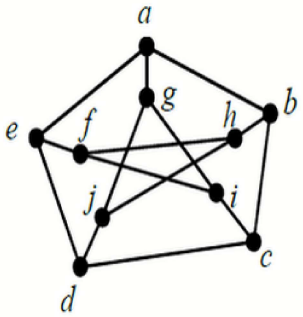


$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{9}{\delta+1} \right\rceil = 2$ ، $D = \{h, b, f\} \Rightarrow \gamma(G) = 3$

$D_{minimal} = \{a, c, i, d\}$

مثال: خرداد ۹۹

عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



$\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{10}{2+1} \right\rceil = 4 \Rightarrow \gamma(G) \leq 4$ ، $D = \{g, h, d\}$

$\Rightarrow \gamma(G) = 4$

مثال: دی ۹۸

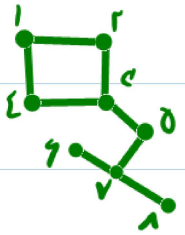
اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه گراف باشد،

الف) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است.

ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.

ب) $\chi(C_{10}) = \left[\frac{10}{2+1}\right] = 4$

ج)



$\chi(G) \geq \left[\frac{8}{2+1}\right] = 2$, $D = \{1,4,7\}$

$\Rightarrow \chi(G) = 4$