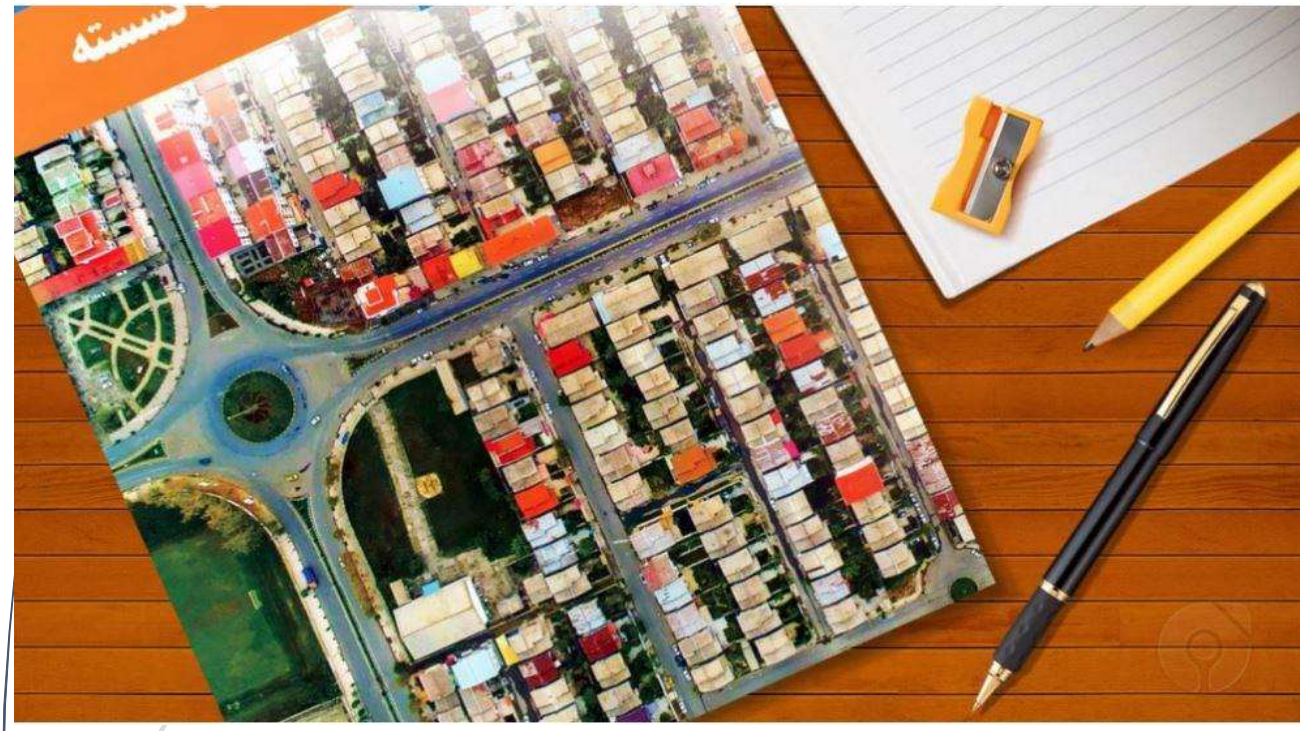
جزوه ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد



مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

درس ۱ : استدلال ریاضی

اثبات قضیه‌ها یا رد کردن فرضیه‌ها ، قاعده بازی ریاضی است .

اثبات ریاضی ، استدلال دقیقی است برای متقاعد کردن خود و دیگران .

انواع روش‌های اثبات :

۱ـ اثبات مستقیم ۲ـ اثبات به روش استنتاج (در نظر گرفتن همه حالت‌ها)

۳ـ اثبات غیر مستقیم (برهان خلف) ۴ـ اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم ارز)

قبل از شروع روش‌های اثبات درباره رد کردن فرضیه‌ها صحبت می‌کنیم .

مثال نقض : مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری یا حدس کلی نادرست است .

مثال : برای رد احکام زیر مثال نقض بیاورید.

۱ـ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 4$: باقی مانده 2^n بر ۷ همواره مربع کامل است .

$2^7 = 128 \xrightarrow[\text{بر } 7]{\text{باقی مانده}} 2$: $n = 7$

۲- عدد $2^n + 4$ به ازای هر عدد طبیعی n، اول است.

$n=5$: $2^5 + 4 = 36$ اول نیست

۳- جمع هر دو عدد گنگ، گنگ است.

$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$

۴- ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، گنگ است.

$0 \times \sqrt{2} = 0$

۵- اگر α و β دو عدد گنگ غیرصاوی باشند، $\frac{\alpha+\beta}{2\beta}$ گنگ است.

$\alpha = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{2}$

$\frac{\alpha+\beta}{2\beta} = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{2}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ گویا

۶- اگر $A \cap B = A \cap C$ باشد آنگاه $B = C$

$A = \{1, 2\}$ $B = \{1, 3\}$ $C = \{1, 4\}$

$A \cap B = A \cap C = \{1\}$ ولی $B \neq C$

تذکر: در مورد گزاره‌های شرطی که به صورت $p \Rightarrow q$ بیان می‌شوند، یک مثال نقض باید طوری باشد که p درست و q نادرست باشد. ($0 \Rightarrow 0$ در منطق گفتیم ارزش آن نادرست است.)

پس برای نشان دادن نادرستی یک گزاره پیدا کردن یک مثال کافی است ولی برای اثبات یک حکم نمی‌توانیم به مثال اکتفا کنیم و به روش‌هایی برای استدلال کردن نیاز داریم.

۱- اثبات مستقیم:

در اثبات مستقیم سعی می‌کنیم به صورت مستقیم از فرض به حکم برسیم.

مثال: ثابت کنید تفاضل مربعات دو عدد فرد متوالی، همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.

$$(2k+3)^2 - (2k+1)^2 = 4k^2+12k+9-(4k^2+4k+1) = 8k+8 = 8(k+1) = 8q$$

مثال: ثابت کنید اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

$$k = n(n+1) \Rightarrow 4k+1 = 4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

مثال: تمرین شوربر ۱۴.۱

هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^n + 1$ اول است.

ب)مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

الف) $n=3$: $2^3+1=9$ اول نیست.

ب) $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 = 2q+1$

مثال: تمرین حزاره ۱۴.۰

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف)حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

ب)هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ برقرار باشد.

الف) $(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)\times n!\times 3!}{n!\times 3!} = \frac{(n+3)!}{n!\times 3!}\times 3!$

$= \binom{n+3}{3}\times 6 = 6q$

ب) نادرست مثال نقض $x=0, y=1$: $0^2+1^2 = (0+1)^2$ یا $1=1$

۲ـ اثبات به روش استقرا :

برای اثبات قضیه با این روش، مسئله را به چند حالت که همه حالت‌ها را پوشش می‌دهد، تقسیم می‌کنیم و در هر حالت ثابت می‌کنیم که حکم نتیجه می‌شود.

تذکر : استدلال منطقی روش استقرا به این صورت است که اگر قرار باشد n حالت مختلف بررسی شود می‌توان با استفاده از هم‌ارزی :

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n \Rightarrow r) \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$

مسئله را ثابت کرد.

مثال : ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، حاصل $n^2 - 3n + 7$ همواره فرد است.

حالت اول : $n = 2k$ (زوج) $\Rightarrow n^2 - 3n + 7 = (2k)^2 - 3(2k) + 7 = 4k^2 - 6k + 7$

$$= 4k^2 - 6k + 6 + 1 = 2(\underbrace{2k^2 - 3k + 3}_{q}) + 1 = 2q + 1$$

حالت دوم : $n = 2k + 1$ (فرد) $\Rightarrow n^2 - 3n + 7 = (2k+1)^2 - 3(2k+1) + 7 =$

$$4k^2 + 4k + 1 - 6k - 3 + 7 = 4k^2 - 2k + 5$$

$$= 4k^2 - 2k + 4 + 1 = 2(\underbrace{2k^2 - k + 2}_{q}) + 1 = 2q + 1$$

تذکر: رابطه ی الگوریتم تقسیم: $a = bq + r$ $\quad ; \quad 0 \le r \le b-1$

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

اگر $r = 0$ باشد a بر b بخش پذیر است.

مثال: ثابت کنید مربع هر عدد در تقسیم بر ۴ باقی مانده‌ی برابر صفر یا یک دارد.

حالت اول: $n = 2k$ (زوج) $\quad : \quad n^2 = 4k^2 = 4q + 0$

حالت دوم: $n = 2k+1$ (فرد) $\quad : \quad n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 = 4q + 1$

مثال: ثابت کنید ضرب دو عدد طبیعی متوالی همواره زوج است.

حالت اول: $n = 2k$ (زوج) $\quad : \quad n(n+1) = 2k(\underbrace{2k+1}_{q}) = 2q$

حالت دوم: $n = 2k+1$ (فرد) $\quad : \quad n(n+1) = (2k+1)(\underbrace{2k+2}_{2(k+1)}) = 2(\underbrace{2k+1)(k+1}_{q}) = 2q$

مثال: با استفاده از روش مستقیم ثابت کنید، مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی مانده‌ای برابر ۱ دارد.

$$(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = \underbrace{4k(k+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی زوج است}}+1 = 4\times 2q+1 = 8q+1$$

مثال: ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی همواره بر ۶ بخش پذیر است.

اگر n را بر ۳ تقسیم کنیم باقی‌مانده ۰، ۱ یا ۲ می‌شود پس سه حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $n=3q$: $n(n+1)(n+2) = \underbrace{3q(3q+1)(3q+2)}_{k} = 3k$

حالت دوم: $n=3q+1$: $n(n+1)(n+2) = (3q+1)(3q+2)\underbrace{(3q+3)}_{3(q+1)}$

$$= \underbrace{3(3q+1)(3q+2)(q+1)}_{k} = 3k$$

حالت سوم: $n=3q+2$: $n(n+1)(n+2) = (3q+2)\underbrace{(3q+3)}_{3(q+1)}(3q+4)$

$$= \underbrace{3(3q+2)(q+1)(3q+4)}_{k} = 3k$$

مثال: اگر n امین عدد طبیعی زوج باشد، $\overbrace{\frac{n(n+1)}{2}}^{A}$ را بر حسب q بنویسید $n=4q$ یا $n=4q+2$

حالت اول: $n=2k$ (زوج) : $A = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = \underbrace{k(2k+1)}_{\text{زوج}}$ (زوج) (زوج) (زوج)

$\Rightarrow k=2q \Rightarrow n=2(2q)=4q$

حالت دوم: $n=2k+1$: $A=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(2k+1)\overbrace{(2k+2)}^{2(k+1)}}{2}=\underbrace{\overbrace{(2k+1)}^{\text{فرد}}\overbrace{(k+1)}^{\text{زوج}}}_{\text{زوج}}$ (زوج)

$(k+1)$ باید زوج باشد پس k فرد است فرض $k=2q+1$ پس:

$n=2(2q+1)+1=4q+2+1=4q+3$

۳- اثبات بخر مستقیم (برهان خلف)

در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست است (به آن فرض خلف می‌گوییم). با استفاده از قوانین منطقی، قضایا و دنباله‌ای از استدلال‌های درست به یک نتیجه نادرست یا متضاد با فرض می‌رسیم. پس فرض نادرست بودن حکم باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

تذکر: در اثبات مستقیم از درستی فرض به درستی حکم می‌رسیم ($p\Rightarrow q$). در برهان خلف از نادرستی حکم به نادرستی فرض می‌رسیم ($\sim q\Rightarrow \sim p$). در منطق دیدیم که

$$(p\Rightarrow q)\equiv(\sim q\Rightarrow \sim p)$$

مثال : نوبری ۱۴۰۰

اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است.

فرض خلف : فرض کنید $\alpha-\beta$ گنگ نباشد یعنی گویا باشد . می دانیم جمع دو عدد گویا ، گویا است پس $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=2\alpha$ گویا است پس α هم گویا است ⁂

ولی فرض مسأله این بود که α گنگ است . پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می شود.

مثال: شهریور ۱۴۰۰

ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

فرض کنید r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است . نشان می دهیم $(r+x)$ گنگ است .

فرض خلف : فرض کنید $(r+x)$ گنگ نباشد یعنی $(r+x)$ گویا باشد .

می دانیم تفاضل دو عدد گویا ، گویا است پس : $x=(r+x)-r$ گویا است یعنی $x\in\mathbb{Q}$ ⁂

ولی فرض مسأله این بود که x گنگ است . پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

مثال: نهایی شهریور ۱۴۰۱

a_1، a_2، a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1، b_2، b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

فرض خلف: فرض کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی فرد باشد. پس هر سه عامل باید فرد باشند. درنتیجه مجموع آن‌ها هم باید فرد باشد. ✗

اما با توجه به فرض مسئله مجموع آن‌ها صفر شود (زیرا b_1, b_2, b_3 همان a_1, a_2, a_3 به ترتیب دیگر هستند) یعنی $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)=0$ است.

پس فرض خلف باطل و حکم مسئله ثابت می‌شود.

مثال: ثابت کنید اگر مربع یک عدد طبیعی بر ۵ بخش‌پذیر باشد، خود عدد هم بر ۵ بخش‌پذیر است.

فرض خلف: n بر ۵ بخش‌پذیر نباشد. در این صورت n در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده‌ای بین ۱ تا ۴ دارد، یعنی: $1 \le r \le 4$: $n=5q+r$.

$$n^2=(5q+r)^2=25q^2+10qr+r^2=5(\underbrace{5q^2+2qr}_{k})+r^2=5k+r^2$$

پس n^2 مضرب ۵ نیست $\Rightarrow$ در حالی که طبق فرض n^2 مضرب ۵ بود. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

مثال: فرض کنید n عددی طبیعی و $3n-2$ عددی فرد باشد. ثابت کنید n هم فرد است.

فرض خلف: n فرد نباشد یعنی زوج باشد:

$n=2k \Rightarrow 3n-2 = 3(2k)-2 = 6k-2 = 2(3k-1) = 2q$ $\Rightarrow$ زوج

این یعنی $3n-2$ زوج است درصورتی که فرض مسئله بود فرد است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

مثال: می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{4}+\sqrt{2}$ هم گنگ است.

فرض خلف: فرض کنید $\sqrt{4}+\sqrt{2}$ گنگ نباشد یعنی گویا باشد:

$\sqrt{2}+\sqrt{4} = a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{4} = a-\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 = a^2 - 2a\sqrt{2} + 2$

$\Rightarrow 2a\sqrt{2} = a^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a^2-1}{2a} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ گویا / گویا

که خلاف فرض گویا بودن $\sqrt{2}$ است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

مثال: ثابت کنید حاصل ضرب هر عدد گویای غیر صفر در یک عدد گنگ، همواره گنگ است.

اگر x عدد گویای غیر صفر و a گنگ باشد و ax گویا باشد (فرض خلف) آنگاه

$$x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)(ax) = a \in \mathbb{Q}$$

(معکوس هر گویا) (گویا) (ضرب دو گویا) (گویا)

مثال: ثابت کنید معکوس هر عدد گنگ، گنگ است.

اگر a گنگ باشد باید ثابت کنیم $\frac{1}{a}$ هم گنگ است.

فرض خلف: فرض کنید $\frac{1}{a}$ گنگ نباشد پس گویا است. پس:

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \frac{b}{a} \quad a,b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0, b \neq 0$$

این یعنی a گویا است که تناقض با فرض مسأله است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

مثال: اگر f در $x=a$ پیوسته و g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

فرض خلف: $(f+g)$ در $x=a$ پیوسته باشد. چون تفاضل دو تابع پیوسته، پیوسته است پس:

$$(f+g)-f = g \quad \text{پیوسته} \quad \text{پیوسته} \quad \text{پیوسته}$$

در فرض مساله اشاره شده که g ناپیوسته است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۴- اثبات بازگشتی:

گاهی اوقات می‌خواهیم حکم P را ثابت کنیم ولی نمی‌دانیم به چه شکل باید از فرض‌ها به P برسیم. نامشخص است ولی می‌توانیم از خود P کمک بگیریم و با استفاده از عملیات جبری گزاره‌ها هم‌ارز با P پیدا کنیم تا به یک رابطه همواره درست برسیم. چون همه گزاره‌ها ارزش یکسان دارند و ترکیب‌ها روشمند است، پس درستی P ثابت می‌شود.

مثال: برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$.

$$a^2+b^2+1 \geq ab+a+b \overset{\times 2}{\iff} 2a^2+2b^2+2 \geq 2ab+2a+2b$$

$$\iff a^2+a^2+b^2+b^2+1+1-2ab-2a-2b \geq 0$$

$\Leftrightarrow (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(a^2-2ab+b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(a-1)^2}_{+}+\underbrace{(b-1)^2}_{+}+\underbrace{(a-b)^2}_{+} \geq 0$: همواره درست

مثال: نهایی خرداد ۹۸

ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست .

اگر دو عدد a و b نامنفی باشند حکم به این صورت است : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

اثبات : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$: همواره درست

مثال: نهایی شهریور ۹۸

برای هر سه عدد حقیقی x,y,z ثابت کنید: $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$

$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2xz$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2) \geq 0$

$\Leftarrow$ $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0$ همواره درست

مثال: نهایی ری ۹۸

به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a>0$ آن‌گاه $a+\frac{1}{a} \geq 2$.

$a+\frac{1}{a} \geq 2 \overset{\times a>0}{\Leftarrow} a^2+1 \geq 2a \Leftarrow a^2-2a+1 \geq 0 \Leftarrow (a-1)^2 \geq 0$ همواره درست

مثال: خوارزمی ۹۹

اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$.

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2 \Leftarrow \frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2 \overset{\times xy>0}{\Leftarrow} x^2+y^2 \geq 2xy \Leftarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0$

$\Leftarrow (x-y)^2 \geq 0$ همواره درست

مثال: نهایی خوارزمی ۱۴۰۰

به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن ها است.

$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} \overset{\times 2}{\Leftarrow} 2xy \leq x^2+y^2 \Leftarrow 0 \leq x^2-2xy+y^2$

$\Leftarrow 0 \leq (x-y)^2$ همواره درست

مثال: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $a^2+ab+b^2 \geq 0$

$$a^2+ab+b^2 \geq 0 \iff \underbrace{a^2+ab+\frac{b^2}{4}}_{\text{مربع کامل}}+\frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\iff \underbrace{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2}_{+}+\underbrace{\frac{3b^2}{4}}_{+} \geq 0 \quad \text{همواره درست}$$

مثال: برای اثبات درستی گزاره «اگر a,b هم‌علامت باشند $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}$» با استفاده از گزاره‌های هم‌ارز به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(a-b)^2 \geq 0$ ۲) $(a+b)^2 \geq 0$ ۳) $(a-b)^2+(a+b)^2 \geq 0$ ۴) $(a+b)^2+a^2+b^2 \geq 0$

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \iff \frac{a^3+b^3}{a^2b^2} \geq \frac{a+b}{ab}$$

$$\overset{\times(a^2b^2)}{\iff} a^3+b^3 \geq (a+b)(ab) \iff (a+b)(a^2-ab+b^2) \geq (a+b)(ab)$$

حتماً مثبت

$$\overset{\div(a+b)}{\iff} a^2-ab+b^2 \geq ab \iff a^2-2ab+b^2 \geq 0$$

$$\iff (a-b)^2 \geq 0 \quad \text{بدیهی}$$

درس ۲ : بخش‌پذیری در اعداد صحیح

بخش اول : رابطه‌ی عاد کردن

تعریف : فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند بطوری که $a \neq 0$ باشد. می‌گوییم a، عدد b را عاد می‌کند (یا شمرد) و می‌نویسیم $a \mid b$ هرگاه عدد صحیحی چون q وجود داشته باشد که $aq = b$

(یا b مضربی از a)

تذکر: اگر $a \mid b$ گفته شود b بر a بخش‌پذیر است. اگر در تشخیص درستی یا نادرستی یک رابطه عاد کردن تردید کردید، آن را نوشته و در جای خالی عددهای مناسب بگذارید تا به یک گزاره تبدیل شود. اگر حاصل عددی صحیح شد، رابطه عاد کردن درست است در غیر این صورت، نادرست است.

مانند :

$-۳ \mid ۳۶ \rightarrow \frac{۳۶}{-۳} = -۱۲$ $\qquad$ $۴ \mid ۸ \rightarrow \frac{۸}{۴} = ۲$

$۷ \mid ۱۵ \Rightarrow \frac{۱۵}{۷} \notin \mathbb{Q}$ $\qquad$ $-۵ \mid -۷۵ \rightarrow \frac{-۷۵}{-۵} = ۱۵$

مثال : درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $۱ \mid ۵$ $\qquad$ $\frac{۵}{۱} = ۵$ $\qquad$ درست

۲) $-۱ \mid ۷$ $\qquad$ $\frac{۷}{-۱} = -۷$ $\qquad$ درست

۳) $11 \mid 11$ $\frac{11}{11}=1$ درست

۴) $2 \mid 0$ $\frac{0}{2}=0$ درست

۵) $0 \mid 21$ $\frac{21}{0}=$ تعریف نشده نادرست

۶) $2^8 \mid 2^5$ $\frac{2^5}{2^8}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}\notin \mathbb{Q}$ نادرست

۷) $3^6 \mid 3^7$ $\frac{3^7}{3^4}=3^3=81$ درست

مثال: چند عدد صحیح مانند a وجود دارد که عدد -4 را می‌شمارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

$a \mid -4 \Rightarrow aq=-4$: $\frac{-4}{a}\in \mathbb{Q}$

a می‌تواند اعداد ± 1 و ± 2 و ± 4 باشد. پس گزینه ۴ درست است.

ویژگی‌های شمارگرد:

۱) $a \mid \pm 1$ زیرا هر عددی بر ۱ و ۱- بخش‌پذیر است.

۲) $a \mid a$ ، $a \mid -a$ ، $-a \mid a$ ، $-a \mid -a$

۳) $a \mid 0$ ولی $0 \nmid a$. قدر دار: $0 \mid 0$ (هر صفر، هیچ عدد صحیحی غیر از خودش را نمی‌شمارد.)

۴) اگر $m,n \in \mathbb{N}$ و $m \leq n$ آنگاه $a^m \mid a^n$.

اثبات : $a^m \mid a^n$ درست است زیرا عددی صحیح مانند $q = a^{n-m}$ وجود دارد که :

$$a^n = a^{n-m} \times a^m$$

چون $m \leq n$ پس $n-m \geq 0$ است و توان a منفی نمی‌شود .

۵) $a \mid b \Rightarrow a \mid mb$: یعنی اگر a ، b را بشمارد آنگاه هر مضرب صحیح b را هم می‌شمارد.

اثبات : $a \mid b \Rightarrow aq = b \xrightarrow{\times m} bm = aqm \Rightarrow bm = aq' \Rightarrow a \mid bm$

مثال : $۲ \mid ۶ \times ۴$ و $۲ \mid ۶ \times ۱۰ \Rightarrow ۲ \mid ۶$

۶) $a \mid b \xRightarrow{n \in \mathbb{N}} a \mid b^n$

اثبات : اگر در درستی m را b^{n-1} قرار دهیم ، درستی اثبات می‌شود .

۷) $a \mid b \iff ak \mid bk$

اثبات درست : $a \mid b \Rightarrow aq = b \xrightarrow{\times k} bk = akq \Rightarrow ak \mid bk$

اثبات برگشت : $ak \mid bk \Rightarrow bk = akq \xrightarrow{\div k} b = aq \Rightarrow a \mid b$

۸) $a|b \Rightarrow a^m|b^m$

اثبات : $a|b \Rightarrow aq=b \xrightarrow{\text{به توان } m} b^m = a^m \times \underbrace{q^m}_{q'} \Rightarrow b^m = a^m \times q' \Rightarrow a^m|b^m$

۹) $a|b \Rightarrow a|-b, -a|b, -a|-b$

اثبات : $a|b \Rightarrow aq=b \xrightarrow{\times(-1)} -aq=-b \Rightarrow a\underbrace{(-q)}_{q'}=-b \Rightarrow a|-b$

۱۰) $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$ (خاصیت تعدی)

اثبات : $\begin{cases} a|b \Rightarrow aq=b \\ b|c \Rightarrow bq'=c \end{cases} \xrightarrow{\times q'} aqq'=bq'=c \Rightarrow aq''=c \Rightarrow a|c$

۱۱) $a|b \overset{b\neq 0}{\Rightarrow} |a| \leq |b|$

اثبات : چون $b\neq 0$ پس $q\neq 0$ پس $|q| \geq 1$ ($q \in \mathbb{Z}$)

$a|b \Rightarrow aq=b$

$1 \leq |q| \xrightarrow{\times|a|} |a| \leq |a||q| = |aq| = |b| \Rightarrow |a| \leq |b|$

۱۲) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$

اثبات : $\begin{cases} a|b \Rightarrow aq=b \\ a|c \Rightarrow aq'=c \end{cases} \overset{\pm}{\Rightarrow} a(q \pm q') = b \pm c \Rightarrow a|b \pm c$

۱۳) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|mb \pm nc$ (ترکیب خطی b, c)

اثبات:

$a|b \Rightarrow a|mb$

$a|c \Rightarrow a|nc$

$\Rightarrow a|mb \pm nc$

۱۴) $a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$

اثبات:

$a|b \Rightarrow aq = b$

$c|d \Rightarrow cq' = d$

$\overset{\times}{\Rightarrow} (a \times c)(qq') = bd \Rightarrow ac|bd$ ($qq' = q''$)

۱۵) $a|1 \Rightarrow a = \pm 1$

اثبات:

$a|1 \Rightarrow aq = 1, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a = q = 1 \\ a = q = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1$

۱۶) $a|b \wedge b|a \Rightarrow a = \pm b$

اثبات:

$a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$

$b|a \Rightarrow |b| \leq |a|$

$\Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

۱۷) اگر p اول باشد، $a|p$ تنها به ازای $a = \pm 1$ یا $a = \pm p$.

اثبات:

$a|p \Rightarrow aq = p$ (اول) $\begin{cases} q = \pm 1 \Rightarrow a = \pm p \\ q = \pm p \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$

۱۸) $a|b \wedge m \leq n \Rightarrow a^m | b^n$

اثبات:

$a|b \rightarrow a^m | b^m \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} a^m | b^m \times b^{n-m} \Rightarrow a^m | b^n$

($n-m$ عددی طبیعی)

مثال: برای رد احکام زیر مثال نقض بیاورید.

الف) $a|bc \Rightarrow a|b$ یا $a|c$ — $6|3\times4$ ولی $6\nmid3$ و $6\nmid4$

ب) $a|b+c \Rightarrow a|c$ یا $a|b$ — $2|5+3$ ولی $2\nmid5$ و $2\nmid3$

پ) $a|b$ و $c|d \Rightarrow a+c|b+d$ — $5|15$ ولی $3\nmid12$ و $9\nmid4$

مثال: نهایی خرداد ۹۹

اگر $n\in N$، $n|9k+7$ و $n|7k+6$، ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$.

$a|9k+7 \xrightarrow{\times7} a|63k+49$

$a|7k+6 \xrightarrow{\times9} a|63k+54$

$\Rightarrow a|63k+54-(63k+49)$

$\Rightarrow a|5 \Rightarrow a=1 \vee a=5$

مثال: نهایی دی ۹۷

اگر $a>1$، $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

$a|9k+4 \xrightarrow{\times5} a|45k+20$

$a|5k+3 \xrightarrow{\times9} a|45k+27$

$\Rightarrow a|7 \xrightarrow{a>1} a=7$

مثال: نهایی شهریور ۹۹

فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a|3n+4$ و $a|2n+3$. نشان دهید $a=1$.

$a|3n+4 \xrightarrow{\times2} a|6n+8$

$a|2n+3 \xrightarrow{\times3} a|6n+9$

$\Rightarrow a|1 \Rightarrow a=\pm1 \xrightarrow{a\in N} a=1$

مثال: نمای فرار ۱.۴

اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $5 \mid 4k+1$ ، ثابت کنید $25 \mid 16k^2+28k+6$.

$5 \mid 4k+1 \longrightarrow 25 \mid 16k^2+8k+1$ $+ \Rightarrow 25 \mid 16k^2+28k+6$

$5 \mid 4k+1 \longrightarrow 25 \mid 20k+5$

مثال: اگر $5 \mid 4k+1$, $3 \mid 5k-1$ ثابت کنید $15 \mid 5k^2+k-1$.

$\begin{cases} 5 \mid 4k+1 \\ 3 \mid 5k-1 \end{cases} \Rightarrow 15 \mid 20k^2+k-1$ $\qquad$ $\begin{cases} 15 \mid 20k^2+k-1 \\ 15 \mid 15k^2 \end{cases} \Rightarrow 15 \mid 5k^2+k-1$

بدیهی

مثال: اگر دو عدد $m+1$, m^2-2 همواره بر a بخش‌پذیر باشند، a چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر $\quad$ ۲) ۱ $\quad$ ۳) ۲ $\quad$ ۴) بیشتر از ۲

$\begin{cases} a \mid m+1 \xrightarrow{\times m} a \mid m^2+m \\ a \mid m^2-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid m+2 \\ a \mid m+1 \end{cases} \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$

مثال: اگر $3a \mid b$, $b^2 \mid c$ نشان دهید $a \mid c^5$.

$a \mid a \Rightarrow a \mid 3a$, $3a \mid b \overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} a \mid b \Rightarrow a \mid b^2$

$a \mid b^2$, $b^2 \mid c \Rightarrow a \mid c \Rightarrow a \mid c^5$

مثال: همه عددهای طبیعی n را بیابید که $n \mid 2^{n+1}$.

$n=1 : 1 \mid 4$ ✓ , $n=2 : 2 \mid 8$ ✓ , $n=3 : 3 \mid 16$ ×

$n=4 : 24 \mid 42 \times$, $n=8 : 120 \mid 64 \times$

چون ریشه n ام سره‌ترین 2^{n+1} است پس n ای که طبق دیفی $(|a|\mid|b| \Rightarrow a\mid b)$

نمی‌تواند درست باشد. پس فقط برای $n=1,2$ درست است.

بخش دوم : ب.م.م و ک.م.م

همانطور که در بخش قبل دیدیم اگر بنویسیم $a\mid b$ یعنی a شمارنده b است یا b بر a بخش‌پذیر است و

این یعنی a مقسوم‌علیه b است.

مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲ و ۱۸ را در نظر بگیرید:

مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی = مجموعه شمارنده‌ها

مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۱۲ $= \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۱۸ $= \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

مجموعه مقسوم‌علیه‌های مشترک ۱۲ و ۱۸ $= \{1, 2, 3, 6\}$

در این میان عدد ۶ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۸ است و می‌نویسیم:

$$(12,18) = 6$$

تعریف ب.م.م : عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a, b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر

نیستند) و می‌نویسیم $d=(a,b)$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $d\mid a \wedge d\mid b$

ب) $\forall m>0 ; m\mid a \wedge m\mid b \Rightarrow d \geq m$

روش یافتن ب.م.م دو یا چند عدد :

عددها را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم. ضرب عوامل مشترک با توان کوچکتر ب.م.م آن‌هاست.

مثال: ب.م.م ۷۲ و ۶۰ را بیابید.

$72 = 2^3 \times 3^2$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$\Rightarrow (60, 72) = 2^2 \times 3 = 12$

ویژگی‌های ب.م.م :

۱) عدد صفر در ب.م.م بی‌تأثیر است یعنی : $(-a,-b) = (-a,b) = (a,-b) = (a,b)$

۲) $a \mid b \Rightarrow (a,b) = \overrightarrow{|a|}$ کوچکتره

اثبات : شرط اول : زیرا : $|a| \mid a$, $|a| \mid b$ بدیهی

شرط دوم : $\forall m>0 : m \mid a \wedge m \mid b \overset{?}{\Rightarrow} |a| \geq m$

$m \mid a \rightarrow mq = a \Rightarrow |m| \leq |a| \xrightarrow{m>0} m \leq |a|$

۳) اگر $(a,b) = 1$ باشد می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.

مثال: اگر $p \neq q$ ، p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p,q) = 1$.

فرض خلف $(p,q) = d \neq 1 \Rightarrow d \mid p, d \mid q \Rightarrow d = p \wedge d = q \Rightarrow p = q$ ⁂

پس $d = 1$.

۴) اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ آنگاه : $(a,p) = \begin{cases} 1 & p \nmid a \\ p & p \mid a \end{cases}$.

اثبات : اگر p عددی اول باشد این فقط دو مقسوم علیه مثبت اول p را دارد.

حالت اول : اگر $p \mid a$ طبق ویژگی ۲ داریم $(a,p)=p$.

حالت دوم : اگر $p \nmid a$ باید ثابت کنیم $(a,p)=1$. فرض کنید $d=(a,p)$ پس $d \mid p$ و $d \mid a$

چون p اول است نیز $d \mid p$ داریم $d=1$ یا $d=p$. ولی $d=p$ نمی‌تواند چون $p \nmid a$

طبق فرض $p \nmid a$ که با $d \mid a$ در تناقض است. پس $d=1$.

۵) $(ka,kb)=|k|(a,b)$

مثال : $(75,45)=5(15,7)=5\times 1=5$

$(220,80)=20(11,4)=20\times 1=20$

مثال : a,b نسبت به هم اول‌اند. ثابت کنید $3a+2b$ و $7a+5b$ هم نسبت به هم اول‌اند.

$$(7a+5b,3a+2b)=d \Rightarrow \begin{matrix} d \mid 7a+5b \\ d \mid 3a+2b \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 3(7a+5b)-7(3a+2b) \\ d \mid 2(7a+5b)-5(3a+2b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid b \\ d \mid -a \Rightarrow d \mid a \end{cases}$$ پس d مقسوم علیه مشترک a و b است ولی a,b نسبت به هم اول‌اند پس $d=1$.

مثال : تمرین درس ۹۹

اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(3a+2,5a+4)$ را به دست آورید.

"d

$$\begin{matrix} d \mid 5a+4 \\ d \mid 2a+4 \end{matrix} \Rightarrow d \mid -2(5a+4)+5(2a+4) \Rightarrow d \mid -10a-8+10a+15 \Rightarrow d \mid 7$$

$$\Rightarrow d=1 \text{ یا } d=7$$

مثال: کنکور ۹۹ خارج از کشور:

در مجموعهٔ اعداد طبیعی اگر $d = (3n+5, 3n^2-2n+6)$ و $d \neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۷ ۴) ۵۳

$d \mid 3n^2-2n+6$

$d \mid 3n+5 \Rightarrow d \mid \overbrace{3n^2+5n}^{n(3n+5)}$

$\Rightarrow d \mid 3n^2+5n-(3n^2-2n+6) = 7n-6$

$d \mid 7n-6 \wedge d \mid 3n+5 \Rightarrow d \mid 35+18$

$\Rightarrow d \mid 54 \Rightarrow d = 54$

ک.م.م دو عدد:

مضرب‌های طبیعی دو عدد ۱۲ و ۱۸ را در نظر بگیرید:

مضارب طبیعی ۱۲ $= \{12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots\}$

مضارب طبیعی ۱۸ $= \{18, 36, 54, 72, \dots\}$

مضارب طبیعی مشترک $= \{36, 72, \dots\}$

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد برابر ۳۶ می‌شود.

تعریف ک.م.م: عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم:

$c = [a, b]$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $a \mid c, b \mid c$

ب) $\forall m > 0 ; a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m$

روش یافتن ک.م.م دو یا چند عدد:

اعداد را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم. ک.م.م برابر ضرب عوامل مشترک و غیرمشترک با توان بیشتر است.

مثال: $[60, 72]$ را بیابید. $72 = 2^3 \times 3^2$, $60 = 2^2 \times 3 \times 5 \Rightarrow [60, 72] = 2^3 \times 3^2 \times 5$

ویژگی‌های ک.م.م :

۱- $a|b \Rightarrow [a,b] = |b|$ (بزرگتره)

مثال : $[11,44] = 44$ و $(11,44) = 11$

اثبات : $a|b \Rightarrow a||b|$, $b||b|$: شرط اول (بدیهی)

شرط دوم : $\forall m>0 : a|m, b|m \overset{?}{\Rightarrow} |b| \le m$

زیرا $b|m \Rightarrow |b| \le |m| \overset{m>0}{\Rightarrow} |b| \le m$

۲- عملیات در ک.م.م با تأثیرات : $[-a,-b] = [a,-b] = [-a,b] = [a,b]$

۳- $[ka, kb] = |k|[a,b]$

۴- $(a,b)=1 \Rightarrow [a,b] = |ab|$

مثال : ثابت کنید هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند.

$m \in \mathbb{Z} : (m, m+1) = d \Rightarrow d|m \wedge d|m+1 \Rightarrow d|(m+1)-m \Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$

مثال: ثابت کنید هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اول اند.

$m \in \mathbb{Z} : (2m+1, 2m+3) = d \Rightarrow d|2m+1 \wedge d|2m+3 \Rightarrow d|2 \Rightarrow d=1$ (فرد بودن نتیجه)

مثال: نهایی ۹۸

فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[35a^3, 21a^2]$ را به دست آورید.

$21a^2 = 3 \times 7 \times a^2$, $35a^3 = 5 \times 7 \times a^3 \Rightarrow [21a^2, 35a^3] = 3 \times 7 \times 5\, a^3 = 105a^3$

مثال: نهایی خرداد ۱۴۰۰

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a \mid b$ آن گاه عدد .....a..... شمارنده عدد .....b..... است.

ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با .....2m..... است.

$6m^3 = 2 \times 3 \times m^3$

مثال: حاصل هریک را بدست آورید.

m^2

۱) $([m^2, m], m^5) = m^2$

۲) $(3m+1, 3m+2) = 1$ دو عدد متوالی هستند.

۳) $[m^7, (m^2, m^3)] = |m^7|$ (m^2)

۴) $[(72, 48), 120]$: $24 \mid 120 \Rightarrow [24, 120] = 120$ ($(72,48) = 24$)

۵) $([4a^2, 8a^4], (2a, 24a^2)) = 2|a|$ ($[4a^2, 8a^4] = 8|a^4| = 8a^4$, $(2a, 24a^2) = 2|a|$)

مثال: سراسری ۹۹

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها است. اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، تفاضل آن دو عدد، کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۶

$[a,b] = 60(a,b)$, $a+b = 136$

$d = (a,b)$ درباره a', b' : $\begin{cases} d \mid a \to a'd = a \\ d \mid b \to b'd = b \end{cases}$ $(a', b') = 1$, $[a,b] = |a'b'|d$

a', b' : عوامل

$\Rightarrow a'b' = 60$, $a'd + b'd = 136 = 8 \times 17 \Rightarrow a' + b' = 17$ $d = 8$

$a' = 5$, $b' = 12$

$b - a = 12 \times 8 - 5 \times 8 = 96 - 40 = 56$

بخش سوم : الگوریتم تقسیم

از گذشته به یاد داریم : آزمایش درستی تقسیم : $a=bq+r$

مقسوم علیه
مقسوم
خارج قسمت
باقی مانده

قضیه تقسیم : اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت اعداد صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می شوند بطوریکه $a=bq+r$ ، $0 \le r < b$

مثال : خارج قسمت و باقی مانده تقسیم -74 را بر 6 بیابید .

نکته : شروع می کنیم : $q=[\frac{a}{b}]$

$$q=[\frac{-74}{6}]=[-12,6]=-13 \Rightarrow -74=6(-13)+4$$

مثال : خارج قسمت و باقی مانده تقسیم -25 را بر 7 بیابید .

$$q=[\frac{-25}{7}]=[-3,5]=-4 \Rightarrow -25=7(-4)+3$$

مثال : در هر قسمت r و q را بیابید .

الف) $a=27 \quad b=-7$

$$q=[\frac{27}{-7}]=[-3,8]=-4 \Rightarrow 27=-7(-4)-1$$

$$-1+7+(-7)=-7(-4)+(-7)$$

$$27=-7(-3)+6=-7(-4+1)+6$$

ب) $a=-37 \quad b=-5$

$$q=[\frac{-37}{-5}]=[7,4]=7 \Rightarrow -37=-5(7)-2$$

$$-2+5+(-5)=-5(7)+(-5)$$

$$-37=-5(8)+3=-5(7+1)+3$$

مثال: نهایی خرداد ۹۸

اگر باقی مانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $5n-3m$ بر ۱۳ را بدست آورید.

$m=13q+2 \Rightarrow 3m=13(3q)+6$

$n=13q'+9 \Rightarrow 5n=13(5q')+45$

$\Rightarrow 5n-3m=13(5q'-3q)+45-6$

$\Rightarrow 5n-3m=13q''+39=13q''+13\times 3$

$\Rightarrow 5n-3m=13(q''+3)=13k+0$ ✓

مثال: نهایی خرداد ۹۹

اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این‌صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را به دست آورید.

$a=4q+3 \Rightarrow 2a+3=2(4q+3)+3=8q+9=8q+8+1=8(q+1)+1$

$\Rightarrow 2a+3=8q'+1$ ✓

مثال: نهایی شهریور ۱۴۰۱

اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۴۲ بیابید.

$a=6q+3 \xrightarrow{\times 7} 7a=42q+21$

$a=7q'+5 \xrightarrow{\times 6} 6a=42q'+30$

$\xrightarrow{(-)} a=42(q-q')+21-30$

$\Rightarrow a=42q''+(-9)$

مضرب مثبت از مقسوم‌علیه را اضافه، کم می‌کنیم:

$\Rightarrow a=42q''-42+42-9=42(q''-1)+33 \Rightarrow a=42k+33$ ✓

مثال: نهایی دی ۹۹

اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2a-5b)$ بر ۱۷ را بیابید.

$a=17q+5$

$b=17q'+3 \Rightarrow 2a-5b=2(17q+5)-5(17q'+3)=17(2q-5q')+10-15$

$=17q''-5=17q''-17+17-5=17(q''-1)+12$ ✓

مثال: اگر a عددی صحیح و فرد باشد، $b \mid a+2$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد a^2+b^2+4 بر ۸ را بیابید.

$a=2k+1 \Rightarrow b \mid 2k+3 \Rightarrow bq=2k+3 \Rightarrow b=2k'+1$ (فرد، فرد)

$a^2+b^2+4=(2k+1)^2+(2k'+1)^2+4=4k^2+4k+1+4k'^2+4k+1+4$

$=4k(k+1)+4k'(k+1)+6=8n+8n'+6=8(n+n')+6$

$=8q+6 \rightarrow 6$

مثال: نوع ری ری ۱۴۰۰

اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

$a=bq+r : 0 \le r < b \Rightarrow a-bq=r : \begin{matrix} n \mid a \\ n \mid b \end{matrix} \Rightarrow n \mid a-bq$

$\Rightarrow n \mid r$

مثال: بزرگترین عددی که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۱۶، چهار برابر مکعب خارج قسمت می‌شود، کدام است؟

۱) ۵۷۶ ۲) ۴۲۶ ۳) ۴۵۶ ۴) ۱۲۰

$a=116q+4q^3 \quad 0 \le 4q^3 < 116 \Rightarrow q^3 < 29 \Rightarrow q < \sqrt[3]{29}$

$\Rightarrow q < 3/\dots$

$a_{max}=116\times 3+4\times 3^3=456$ گزینه ۳

افراز مجموعه اعداد صحیح با رابطه تقسیم :

می‌دانیم در تقسیم بر ۲، باقی‌مانده ممکن است ۰ یا ۱ شود. پس مجموعه $\mathbb{Z}$ را می‌توانیم به دو دسته افراز کنیم:

$\mathbb{Z}$

$2k$	$2k+1$

به طور مشابه در تقسیم بر ۳، باقی‌مانده ممکن است ۰ یا ۱ یا ۲ شود. پس مجموعه $\mathbb{Z}$ را می‌توانیم به سه دسته افراز کنیم:

$\mathbb{Z}$

$3k$	$3k+1$	$3k+2$

و در حالت کلی در تقسیم بر m، مجموعه $\mathbb{Z}$ به m دسته افراز می‌شود:

$\mathbb{Z}$

mk	$mk+1$	$mk+2$	...	$mk+(m-1)$

مثال: نهایی شهریور ۹۹

ثابت کنید اگر $p>3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ $(k\in W)$ نوشته می‌شود.

هر p را بر ۶ تقسیم کنیم:

۱) $p=6k+0=2(3k)=2q$

۲) $p=6k+1$ ✓

۳) $p=6k+2=2(3k+1)=2q$

۴) $p=6k+3=3(2k+1)=3q$

۵) $p=6k+4=2(3k+2)=2q$

۶) $p=6k+5$ ✓

مثال: نهای شوبیر .. ۱۴

اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

$a=3k \Rightarrow$ a بر ۳ بخش‌پذیر

$a=3k+1 \Rightarrow a+2=3k+1+2 \Rightarrow a+2=3k+3=3q$: $a+2$ بر ۳ بخش‌پذیر

$a=3k+2 \Rightarrow a+4=3k+2+4=3k+6=3q$: $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر

مثال: اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3 \mid n^3-n$.

۱) $n=3k \Rightarrow 3 \mid n \Rightarrow 3 \mid n(n^2-1) \Rightarrow 3 \mid n^3-n$

۲) $n=3k+1 \Rightarrow n-1=3k \Rightarrow 3 \mid n-1 \Rightarrow 3 \mid (n-1)n(n+1) \Rightarrow 3 \mid n^3-n$

۳) $n=3k+2 \Rightarrow n+1=3k+3=3(k+1) \Rightarrow 3 \mid n+1 \Rightarrow 3 \mid (n+1)n(n-1)$

$\Rightarrow 3 \mid n^3-n$

تمرین: ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر ۳! بخش‌پذیر است.

درس ۴: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

تعریف: دو عدد صحیح a و b را به پیمانه عدد طبیعی m، هم‌نهشت می‌گوییم هرگاه $m \mid a-b$.

به بیان دیگر اختلاف آن‌ها مضرب m باشد.

به زبان ریاضی: $\forall a,b \in \mathbb{Z},\ a \overset{m}{\equiv} b \iff m \mid a-b$

مثال: $۲۵ \overset{۷}{\equiv} ۱۱$: $۲۵-۱۱=۱۴=۷\times۲$ $\qquad$ $۷ \overset{۵}{\equiv} -۳$: $۷-(-۳)=۱۰=۵\times۲$

نگاهی دیگر به هم‌نهشتی: دو عدد a و b را به پیمانه m هم‌نهشت می‌گوییم، هرگاه باقی‌مانده آن‌ها در تقسیم بر m یکی باشد.

مثلاً: همگی در تقسیم بر ۷، باقی‌مانده ۴ دارند: $-۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۷۴ \overset{۷}{\equiv} ۳۲ \overset{۷}{\equiv} ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۲۵$

در واقع فرم کلی اعداد به $۷k+۴$ است.

تعریف کلاس هم‌نهشتی: مجموعه همه اعداد صحیح که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m، برابر r باشد را کلاس یا دسته هم‌نهشتی r به پیمانه m می‌نامیم و آن را به صورت $[r]_m$ نمایش می‌دهیم پس: $[r]_m = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = mk+r\}$

باتوجه به مفهوم هم نهشتی ، همه عددهای هر کلاس با هم، هم نهشتند.

مثال: در تقسیم به ۵ ، اعداد به ۵ مجموعه افرازی شوند . هرکدام از مجموعه‌ها ، یک کلاس هم نهشتی

به پیمانه ۵ هستند :

$$[0]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k\} = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$
$$[1]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k+1\} = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$
$$[2]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k+2\} = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$
$$[3]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k+3\} = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$
$$[4]_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k+4\} = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$$

مثال: کدام عدد، عضوی از $[9]_{14}$ است؟ ۱) ۹۷ ۲) ۹۸ ۳) ۹۹ ۴) ۱۰۰

$$[9]_{14} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 14k+9\}$$

گزینه ۴ $\quad 9 \overset{14}{\equiv} 100$ ، $99 \overset{14}{\equiv} 8$ ، $98 \overset{14}{\equiv} 7$ ، $97 \overset{14}{\equiv} 6$

ویژگی‌های هم نهشتی:

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

اثبات: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid a+c-b-c \Rightarrow m \mid a+c-(b+c)$

$\Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c$

$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid a-c-b+c \Rightarrow m \mid a-c-(b-c) \Rightarrow a-c \overset{m}{\equiv} b-c$

۱۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

اثبات: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid c(a-b) \Rightarrow m \mid ca-cb$

$\Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

۱۳) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \xrightarrow{\times q} m \mid (a-b)q$

با توجه به رابطه زیر:

$a^n - b^n = (a-b)\underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})}$

$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$. توجه: عکس این رابطه برقرار نیست

۱۴) $a \overset{m}{\equiv} b \,,\, c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \,,\, ac \overset{m}{\equiv} bd$

اثبات: $m \mid a-b \,,\, m \mid c-d \Rightarrow m \mid a-b+c-d \Rightarrow m \mid (a+c)-(b+d)$

$\Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+d$

$m \mid a-b \xRightarrow{\times c} m \mid \underset{①}{ac-bc} \,,\, m \mid c-d \xrightarrow{\times b} m \mid \underset{②}{bc-bd}$

$\overset{①,②}{\Rightarrow} m \mid ac-bd \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$

۱۵) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$

اثبات: $a \overset{m}{\equiv} b \,,\, mt \overset{m}{\equiv} mk \xRightarrow{\pm} a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$

۶) $a \overset{m}{\equiv} b \;,\; n \mid m \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

اثبات: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \;\wedge\; n \mid m \overset{\text{قوی}}{\Rightarrow} n \mid a-b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

۷) $a \overset{m}{\equiv} b \;,\; b \overset{n}{\equiv} c \overset{(m,n)=d}{\Longrightarrow} a \overset{d}{\equiv} c$

اثبات:

$d \mid m \;,\; m \mid a-b \Rightarrow d \mid a-b$

$d \mid n \;,\; n \mid b-c \Rightarrow d \mid b-c$

$\Rightarrow d \mid a-b+(b-c) \Rightarrow d \mid a-c$

$\Rightarrow a \overset{d}{\equiv} c$

۸) $ac \overset{m}{\equiv} bc \;,\; (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

اگر $(c,m)=1$ باشد داریم این صورت $ac \overset{m}{\equiv} bc \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$.

۹) اگر باقی‌مانده a بر m، برابر r باشد داریم: $a \overset{m}{\equiv} r$.

اثبات: $a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m \mid a-r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$

نکته: هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی هم‌نهشت با عدد a به پیمانه m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را برابر r در نظر بگیریم.

مثال: $۲۹۶ \overset{11}{\equiv} 10$ $\qquad$ $۲۹۶ \overset{11}{\equiv} ?$

مثال: باقی‌مانده تقسیم $۳ \times ۲۷^{100} + ۱۵$ بر ۱۴ برابر با چیست.

$۵ \overset{14}{\equiv} ۱۸ \overset{14}{\equiv} ۳ \times ۲۷^{100} + ۱۵ \xrightarrow{+۱۵} ۳ \times ۲۷^{100} \overset{14}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان } ۱۰۰} ۲۷^{100} \overset{14}{\equiv} ۱ \longrightarrow ۲۷ \overset{14}{\equiv} ۱$

مثال ری ۹۷ : مطلوبست باقی ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲+۱۰$ بر عدد ۷ .

$۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۰۰۰^{۱۴} \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۴}\times ۱۲ \overset{۷}{\equiv} -۱۲$

$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۴}\times ۱۲+۱۰ \overset{۷}{\equiv} -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵$

مثال شوبر ۹۸ : باقی مانده تقسیم $(۲۷)^{۷}+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

$۲۷ \overset{۱۴}{\equiv} ۱ \rightarrow (۲۷)^{۷}+۱۹ \overset{۱۴}{\equiv} ۲۰ \overset{۱۴}{\equiv} ۷$

مثال ری ۹۸ : باقی مانده تقسیم $۱۳^{۲۲}$ را بر ۱۷ به دست آورید.

$۱۳ \overset{۱۷}{\equiv} -۴ \Rightarrow ۱۳^{۲} \overset{۱۷}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۳^{۲۲} \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۶$

مثال خارج ۹۹ : باقی‌مانده تقسیم $۷^{۳۰}$ بر ۱۵ را به دست آورید.

$۷^{۲}=۴۹ \overset{۱۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۷^{۴} \overset{۱۵}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \overset{\text{به توان } ۷}{\Rightarrow} ۷^{۲۸} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \overset{\times ۷^{۲}}{\Rightarrow}$

$۷^{۳۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۴۹ \overset{۱۵}{\equiv} ۴$

نکته : برای یافتن باقی‌مانده توان یک عدد، باقی‌مانده‌ی آن عدد را محاسبه می‌کنیم.

مثال شوبر ۹۹ : رقم یکان عدد $(۷+۲^{۱۱})$ را به دست آورید.

$۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۷+۲^{۱۱} \overset{+۷}{\leftarrow} ۲^{۱۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \overset{\times ۲^{۲}}{\Rightarrow} ۲^{۱۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^{۳} \overset{\text{به توان } ۲}{\Rightarrow} ۲^{۶} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^{۲} \overset{\text{به توان } ۵}{\Rightarrow} ۲^{۱۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^{۵} \overset{۱۰}{\equiv} ۲$

مثال : ثابت کنید اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آنگاه $a \overset{m}{\equiv} b$ و برعکس.

اثبات رفت : فرض می‌کنیم باقی‌مانده تقسیم a بر m و b بر m هر دو برابر r باشد ثابت می‌کنیم $a \overset{m}{\equiv} b$.

$$a = mq + r,\ b = mq' + r \Rightarrow a - b = m(q - q') \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

اثبات برگشت : فرض کنید $a \overset{m}{\equiv} b$، باقی‌مانده تقسیم a بر m، r است به ثابت کنیم باقی‌مانده تقسیم b بر m، r است.

$$a - b = mk,\ a = mq + r \Rightarrow mq + r - b = mk \Rightarrow b = mq - mk + r$$
$$\Rightarrow b = m(q - k) + r \Rightarrow b = mq' + r$$

مثال دی ۹۹ : باقی مانده تقسیم $(19 + 38^{36})$ را بر ۴ به دست آورید.

$$38 \overset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow 38^2 \overset{4}{\equiv} 4 \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow 38^{36} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow 38^{36} + 19 \overset{4}{\equiv} 19 \overset{4}{\equiv} 3$$

مثال خرداد ۱۴۰۰ : باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (1000)^{25} \times 9 + 11$ را بر ۷ بیابید.

$$1000 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow 1000^{25} \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow (1000)^{25} \times 9 \overset{7}{\equiv} -9$$
$$\Rightarrow (1000)^{25} \times 9 + 11 \overset{7}{\equiv} 2$$

مثال شهریور ۱۴۰۰ : اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید.

$$4a - 7 \overset{10}{\equiv} 3a - 5 \Rightarrow a \overset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow 9a + 6 \overset{10}{\equiv} 24 \overset{10}{\equiv} 4$$

نکته : بسط دوجمله‌ای خیام :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

مثال: ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a,b \in \mathbb{Z}$ داریم : $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

با توجه به بسط دوجمله‌ای نیوتن تمام جملات بسط را داریم فاکتور ab را دارند می‌توانیم بنویسیم :

$$(a+b)^n - a^n - b^n = abq \Rightarrow a^n + b^n - (a+b)^n = abq$$

$$\Rightarrow a^n + b^n \overset{ab}{\equiv} (a+b)^n$$

مثال: ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۴۲ بخش‌پذیر است.

$$23^{51} - 11^{51} - 12^{51} \overset{142}{\equiv} 0 \Leftarrow 11^{51} + 12^{51} \overset{11\times12=142}{\equiv} (11+12)^{51}$$: طبق نکته بالا

مثال: رقم یکان $A = 1! + 2! + \cdots + 500!$ را بیابید.

$$1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 500! \overset{10}{\equiv} 1 + 2 + 6 + 4 + 0 + 0 + \cdots + 0 = 13 \overset{10}{\equiv} 3$$

نکته: باقی‌مانده عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 a_1 a_0}$ در مبنای ده به صورت زیر است :

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + 10^{n-2} \times a_{n-2} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$$

مثال : $2375 = 2\times10^3 + 3\times10^2 + 7\times10 + 5$

مثال شورو ۱۴۰۱: ثابت کنید باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ ، برابراست با باقیماندهٔ تقسیمِ مجموع ارقام آن عدد بر ۹ .

عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 a_0}$ را بسط دهیم و در هم ضرب بینهایت ۹ بخش هر

توان ۱۰ ، یک را قرار دهیم : ($10^n \overset{9}{\equiv} 1 \rightarrow 10 \overset{9}{\equiv} 1$)

$$A = a_{n-1}\times10^{n-1} + a_{n-2}\times10^{n-2} + \cdots + a_0 \overset{9}{\equiv} a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0$$

مثال : یک قاعده‌ی بری یافتن باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۱۰ و ۱۱ بیابید .

$A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_0 \overset{2}{\equiv} a_{n-1} \times 0 + \dots + a_0 = a_0$ $\quad (10 \overset{2}{\equiv} 0 \to 10^k \overset{2}{\equiv} 0)$

$A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_0 \overset{5}{\equiv} a_{n-1} \times 0 + \dots + a_0 = a_0$ $\quad (10 \overset{5}{\equiv} 0 \to 10^k \overset{5}{\equiv} 0)$

$A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_0 \overset{10}{\equiv} a_{n-1} \times 0 \dots + a_0 = a_0$

$A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_0 \overset{3}{\equiv} a_{n-1} \times 1 + a_{n-2} \times 1 + \dots + a_0$ $\quad (10 \overset{3}{\equiv} 1 \to 10^k \overset{3}{\equiv} 1)$

$= a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0$

$A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_0 \overset{11}{\equiv} a_{n-1} - a_{n-2} + \dots - a_1 + a_0$ $\quad (10 \overset{11}{\equiv} -1 \to \begin{cases} 10^k \overset{11}{\equiv} 1 & k \text{ زوج} \\ 10^k \overset{11}{\equiv} -1 & k \text{ فرد} \end{cases})$

پس برای یافتن باقی‌مانده تقسیم بر ۱۱ ، بین ارقام از راست یک در میان + و - قرار می‌دهیم

مثال: $7461 \overset{11}{\equiv} 1 - 6 + 4 - 7 = -8 \overset{11}{\equiv} 3$

کاربرد همنشتی در محاسبه روز هفته برحسب تاریخ :

فرض کنید بدانیم یکی از روزهای سال، چندشنبه است . با هم‌نشتی می‌توانیم تعیین کنیم که هر تاریخ دیگر چندشنبه می‌شود . به این صورت که جدولی تهیه کرده روز شروع را مشخص می‌کنیم . اختلاف روزهای

دو تاریخ را مدبت می کوریم و آن را به پیمانه ۷ هم نهشت می گیریم. عدد حاصل از روی جدول چند شنبه بودن روز خواسته شده را مشخص می کند. دقت کنید اگر تاریخ جلوتر را در نظر گرفتیم و خواستیم تاریخ عقب تر را مدبت کوریم، باید تعداد روزهای اختلاف را منفی بگیریم.

مثال: اگر شانزدهم آذرماه، سه شنبه باشد، چهاردهم اسفند همان سال چند شنبه است؟

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
یک شنبه	دو شنبه	سه شنبه	چهار شنبه	پنج شنبه	جمعه	شنبه

مناظر شنبه ⟵ $۱۴ + ۳۰ + ۳۰ + (۳۰-۱۶) = ۸۸ \equiv ۴ \pmod ۷$

اسفند بهمن دی باقی مانده آذر

مثال: خوارزمی ۱۴۰۱

اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
شنبه	یک شنبه	دو شنبه	سه شنبه	چهار شنبه	پنج شنبه	جمعه

$۲۹ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۱۲ = ۱۴۱$

مهر آبان آذر دی بهمن

مناظر پنج شنبه $۱۴۱ \equiv ۵ \pmod ۷$

مثال: اگر ۲۲ بهمن در یک سال پنج شنبه باشد، ۳ خرداد همان سال چه روزی از هفته است؟

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
پنج شنبه	جمعه	شنبه	یک شنبه	دو شنبه	سه شنبه	چهار شنبه

$۲۲ + ۳۰ + ۳۱ \times ۳ + ۳۱ \times ۴ + (۳۱-۳) = ۲۲ + ۱۲۰ + ۹۳ + ۲۸$

بهمن دی بازیز تا بتان خرداد

مناظر یکشنبه $-(۲۲ + ۱۲۰ + ۹۳ + ۲۸) \equiv -(۰ + ۲ + ۱ + ۱) \equiv -۴ \equiv ۳ \pmod ۷$

معادله هم نهشتی :

معادله به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادله هم نهشتی می نامیم.

کی صحیح

نکته : شرط اینکه یک معادله هم نهشتی جواب داشته باشد این است که $(a,m) | b$.

روش حل معادله هم نهشتی :

با استفاده از ویژگی های هم نهشتی ضریب x را حذف کرده و با استفاده از تعریف هم نهشتی یک جواب عمومی برای معادله می یابیم. به این صورت که ضریبی مناسب از پیمانه را به سمت راست اضافه یا کم می کنیم به طوری که سمت راست بر ضریب x بخش پذیر باشد. پس دو طرف را بر ضریب x می کنیم. دقت کنید با تقسیم دو طرف هم نهشتی بر یک عدد باید پیمانه هم بر ب.م.م پیمانه و ضریب x تقسیم شود.

مثال : معادلات هم نهشتی زیر را حل کنید.

۱) $7x \overset{14}{\equiv} 2 \Rightarrow 7x \overset{14}{\equiv} 2+2\times14 = 28 \overset{\div 7}{\Longrightarrow} x \overset{14}{\equiv} 4 \Rightarrow x = 14k+4$

۲) $۴۳۴n \overset{۱۱}{\equiv} ۶۸$

اول ضرایب را کوچک می‌کنیم:

$۴۳۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۴-۳+۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$ ، $۶۸ \overset{۱۱}{\equiv} ۸-۶=۲$

$۵n \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۵n \overset{۱۱}{\equiv} ۲+۳\times۱۱=۳۵ \Rightarrow n \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow n=۱۱k+۷$

مثال خودار ۱۴۰۰ : معادله $۷x \overset{۴}{\equiv} ۱$ را حل کنید.

$۷n \overset{۴}{\equiv} ۱+۵\times۴=۲۱ \Rightarrow ۷n \overset{۴}{\equiv} ۲۱ \overset{\div ۷}{\Rightarrow} n \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow n=۴k+۳$

مثال ری ۹۹ : معادله هم‌نهشتی $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

$۸n \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰+۱۲=۳۲ \overset{\div ۸}{\underset{(۸,۱۲)=۴}{\Longrightarrow}} n \overset{\frac{۱۲}{۴}}{\equiv} ۴ \Rightarrow n=۳k+۴$

مثال ری ۹۷ : معادله همنهشتی $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳$ را حل و جواب عمومی آن را بدست آورید.

$۳n \overset{۷}{\equiv} ۱۳-۷=۶ \overset{\div ۳}{\Rightarrow} n \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow n=۷k+۲$

مثال: همنهشتی $۶n \overset{۹}{\equiv} ۵$ را حل کنید.

$(۶,۹)=۳ \nmid ۵$ جواب ندارد

معادلات سیاله خطی:

به معادله $ax+by=c$ که ضرایب a,b,c و مجهولات x,y عدد صحیح هستند معادله سیاله خطی می‌گوییم.

شرط جواب داشتن معادله سیاله این است که $(a,b) \mid c$

روش حل معادله سیاله خطی :

معادله $ax+by=c$ را به دو صورت می‌توان به یک معادله‌ هم‌نهشتی تبدیل کرد :

$$\begin{cases} ax-c=-by \Rightarrow ax \overset{b}{\equiv} c \\ by-c=-ax \Rightarrow by \overset{a}{\equiv} c \end{cases}$$

حال یکی از معادلات هم‌نهشتی را حل کرده (معمولاً معادله‌ای که پیمانه‌اش کوچکتر است)

و جواب یکی از مجهولات را می‌یابیم. با جای‌گذاری در معادله‌ اصلی جواب دیگر را بدست می‌آوریم.

مثال: معادله‌ سیاله $5x+7y=57$ را حل کنید.

$$7y \overset{5}{\equiv} 57 \quad : \quad 7 \overset{5}{\equiv} 2 \, , \, 57 \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 2y \overset{5}{\equiv} 2 \overset{:2}{\Rightarrow} y \overset{5}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow y=5k+1 \Rightarrow 5x+7(5k+1)=57 \Rightarrow 5x+35k+7=57$$

$$\Rightarrow 5x=50-35k \Rightarrow x=10-7k$$

مثال دی ۱۴۰۰ : معادله سیاله $6x+7y=185$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

$$6x \overset{7}{\equiv} 185 \, , \, 185=7\times 25+3 \Rightarrow 6x \overset{7}{\equiv} 23 \overset{:6}{\Rightarrow} x \overset{7}{\equiv} 4$$

$$x=7k+4 \Rightarrow 6(7k+4)+7y=185 \Rightarrow 7y=185-24-42k$$

$$\Rightarrow y=-6k+23$$

مثال شهریور ۹۹ : معادله سیاله $2x + 5y = 19$ را حل کنید.

$2x \overset{5}{\equiv} 19 \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow{\div 2} x \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow x = 5k+2$

$\Rightarrow 2(5k+2) + 5y = 19 \Rightarrow 5y = -10k + 19 - 4$

$\Rightarrow y = -2k + 3$

مثال ری ۹۸ : جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $9x + 13y = 7$ را به دست آورید.

$13y \overset{9}{\equiv} 7 \;,\; 13 \overset{9}{\equiv} 4 \;,\; 7 \overset{9}{\equiv} 16 \Rightarrow 4y \overset{9}{\equiv} 16 \xrightarrow{\div 4} y \overset{9}{\equiv} 4$

$\Rightarrow y = 9k+4 \Rightarrow 9x + 13(9k+4) = 7 \Rightarrow 9x = 7 - 117k - 52$

$\Rightarrow x = -13k - 5$

مثال شهریور ۱۴۰۱ :

دانش آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعا ۴۲ امتیاز کسب کرده است .(پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.)

این دانش آموز به چه صورت هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟

$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \overset{3}{\equiv} 42 \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x = 3k$

$\Rightarrow 5(3k) + 3y = 42 \Rightarrow 3y = -15k + 42$

$\Rightarrow y = -5k + 14$

$k=0 \begin{cases} x=0 \\ y=14 \end{cases} \quad k=1 \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases} \quad k=2 \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$

مثال: به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰ تومان را با اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

$2000x + 500y = 2900 \xrightarrow{\div 100} 20x + 5y = 29 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 29 \overset{5}{\equiv} 4$

$\Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow x = 5k+2 \;,\; y = -2k+5$

$k=0 \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \quad k=1 \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \quad k=2 \begin{cases} x=12 \\ y=1 \end{cases}$