حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

گردآوری: سیدابوالفضل فاضلیان

به نام خدا

با شروع پاندمی کرونا که منجر به تعطیلی آموزش حضوری در مراکز آموزشی گردید و آموزش مجازی به اشکال مختلف به عنوان یک شیوه آموزش به طور جدی معرفی شد، بر آن شدم برای آن دسته از دانش‌آموزانی که به صورت صحیحِ آموزش مجازی دسترسی ندارند و همکارانی که بستر مناسبی برای تدریس مجازی در اختیار نداشتند، مجموعه‌ای شامل فیلم و جزوه برای درس حسابان۲ آماده کنم تا شاید در آن ایام سخت کمکی هر چند ناچیز به آموزش مفهومی ریاضیات و گسترش عدالت آموزشی شده باشد. آن دوران تمام شد ولی دیگر آموزش‌های تلفیقی و ترکیبی جای آموزش‌های سنتی را گرفت و فصلی جدید در امر آموزش گشوده شد.

با توجه به حجم بالای کار و تهیه همزمان فیلم و جزوه برای این درس و درس‌های دیگر قطعاً اشتباهاتی در جزوه وجود دارد که از علاقه‌مندان پوزش‌می‌طلبم و خوشحال می‌شوم با شناسه شاد بنده به آدرس @seyedfazelian در میان بگذارند تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح شود.

همانطور که خواهید دید جزوه به صورت جلسه‌ای و با قلم نوری تنظیم شده که فیلم هر جلسه در کانال آپارات https://www.aparat.com/s.a.fazelian در دسترس می‌باشد.

در پایان یادآوری می‌شوم استفاده از این جزوه به هرصورت مجاز و هزینه آن فقط دعا برای عاقبت بخیری نگارنده است.

سیدابوالفضل فاضلیان

۱۴۰۲/۱/۱۱

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل اول: تابع

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس اول: تبدیل نمودار تابع

جلسه اول: صفحات ۲ تا ۱۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در این درس می خواهیم عددی مانند a را در دامنه و برد تابع f اثر دهیم و تغییرات f را بررسی کنیم.

الف) انتقال افقی و عمودی:

۱- $f(x \pm a)$: برای رسم نمودار $y=f(x+a)$ نمودار f را روی محور xها a واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $y=f(x-a)$ نمودار f را روی محور xها a واحد به سمت راست منتقل کنیم. (انتقال افقی)

همچنین نقطه (x_0-a, y_0) از نمودار تابع $y=f(x+a)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y=f(x)$ است.

دامنه تابع $f(x+a)$، xهای هستند که با ثبت می شوند $f(x+a)$

عبارت $(x+a)$ اجازه ورود به f را پیدا کند. $y \leftarrow f \leftarrow x+a \leftarrow x$

$$h(x)=f(x+a) \Rightarrow h(x_0-a)=f(x_0-a+a)=f(x_0)=y_0$$

۲- $f(x) \pm a$: برای رسم نمودار $y=f(x)+a$ نمودار f را روی محور yها a واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $y=f(x)-a$ نمودار

f را روی محور yها a واحد به سمت پایین منتقل کنیم. (انتقال عمودی)

همچنین نقطه (x_0, y_0+a) از نمودار تابع $y=f(x)+a$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y=f(x)$ است.

ب) انقباض و انبساط افقی و عمودی:

۱- $f(ax)$: اگر $0<a<1$ باشد نمودار f را در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می‌کنیم. (انبساط افقی)

اگر $a>1$ باشد نمودار f را در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض می‌کنیم. (انقباض افقی)

همچنین نقطه $(\frac{x_0}{a}, y_0)$ از نمودار تابع $y=f(ax)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y=f(x)$ است.

دامنه تابع $f(ax)$، xهایی هستند که با کدام xها ضرب شده‌اند تا ax شود.

$f(ax)$

اجازه ورود به f را بده $\leftarrow ax \leftarrow x$

$y \leftarrow f$

$h(x)=f(ax) \Rightarrow h(\frac{x_0}{a})=f(a\times\frac{x_0}{a})=f(x_0)=y_0$

نکته: در حالت انبساط و انقباض افقی xها یا طول نقاط f بر a تقسیم می‌شوند.

۲- $af(x)$: اگر $0<a<1$ باشد نمودار f را در راستای محور y ها با ضریب a منقبض می‌کنیم. (انقباض عمودی)

اگر $a>1$ باشد نمودار f را در راستای محور y ها با ضریب a منبسط می‌کنیم. (انبساط عمودی)

همچنین نقطه (x_0, ay_0) از نمودار تابع $y=af(x)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y=f(x)$ است.

نکته: در حالت انبساط و انقباض عمودی y یا عرض نقاط f در a ضرب می‌شوند.

پس انعکاس:

۱- $-f(x)$: نمودار f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

۲- $f(-x)$: نمودار f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

نکته: در انبساط و انقباض‌ها اگر a منفی باشد ابتدا a را مثبت می‌گیریم و انبساط یا انقباض لازم را روی آن می‌دهیم، پس انعکاس را اعمال می‌کنیم.

ت) ترکیبی :

اگر بخواهیم نمودار تابعی به صورت $y = af(bx+c)+d$ را رسم کنیم،

اولویت تأثیرها را به صورت زیر رعایت می‌کنیم :

$$c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d$$

یعنی اول داخل پرانتز تغییرات روی x را اعمال می‌کنیم بعد بیرون پرانتز

تغییرات روی y. دقت کنید باز هم داخل پرانتز اعمال عکس حال عادی رخ

می‌دهد یعنی اول انتقال افقی (c) و بعد انبساط یا انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{b}$.

درحالی که در بیرون پرانتز اول انبساط یا انقباض با ضریب a و بعد انتقال عمودی (d)

اعمال می‌شود (به یاد دارید در اولویت اعمال اولویت ضرب و تقسیم از جمع و تفریق

بالاتر بود)

ش) تأثیر قدر مطلق :

۱- $|f|$: نمودار f را رسم می‌کنیم، قسمتی از نمودار که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

۲- $f(|x|)$: قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور yها است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور yها است نسبت به محور yها رسم می‌کنیم.

نکته : برای رسم نمودارهای تبدیل یافته کافی است تأثیرات را روی چند نقطه (نقاط شکستگی یا نقاط ابتدا و انتها یا تقاطع با محورها) اعمال کنید و با هم چند نقطه نمودار را رسم کنید.

مثال : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

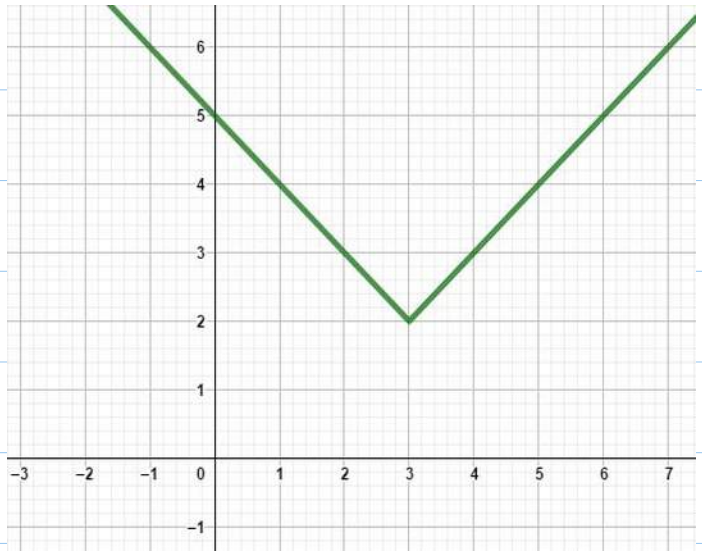
$|A| = |-A|$ یادآوری

$f(x) = |3-x| + 2$ داریم

انتقال افقی ۳ واحد به راست

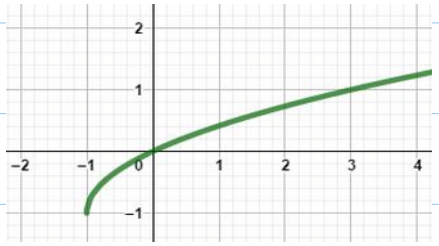
انتقال عمودی ۲ واحد به بالا

$f(x) = |-(3-x)| + 2 = |x-3| + 2$

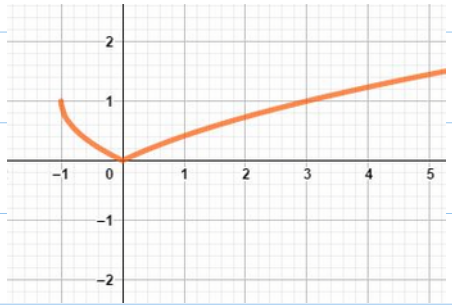


ب) $y = -|\sqrt{x+1} - 1|$

$y = \sqrt{x+1} - 1$ انتقال افقی یک واحد به چپ و انتقال عمودی یک واحد به پائین

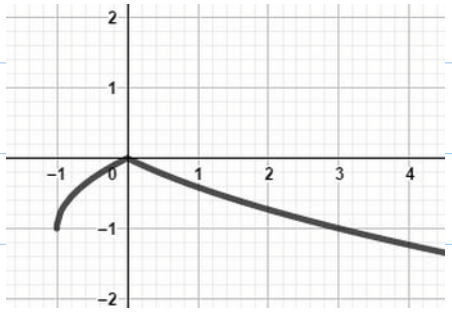


$y = |\sqrt{x+1} - 1|$



تأثیر قدرمطلق:
قسمتی که زیر محور xها است نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم

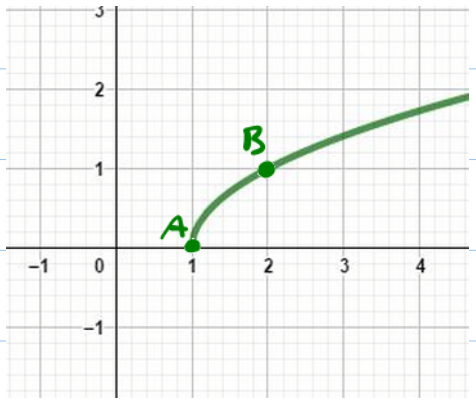
$y = -|\sqrt{x+1} - 1|$



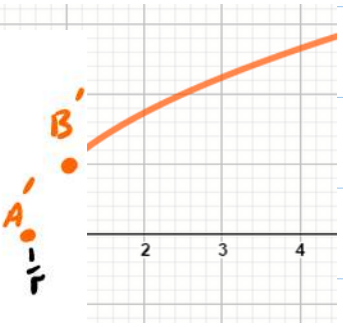
انعکاس:
نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

ب) $y=\sqrt{2x-1}+1$

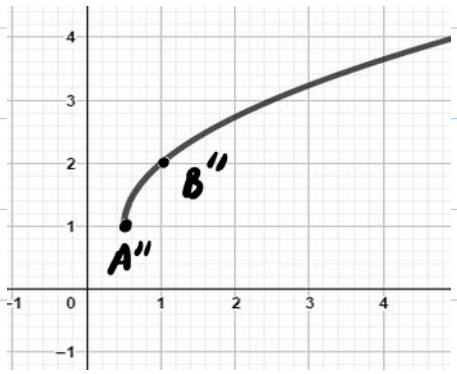
$y=\sqrt{x-1}$ انتقال افقی یک واحد به راست



$y=\sqrt{2x-1}$ انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$

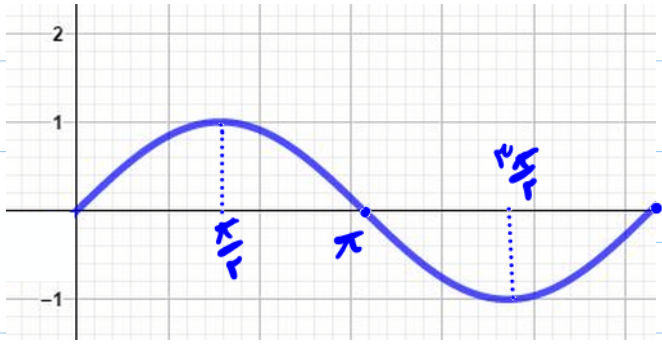


$y=\sqrt{2x-1}+1$ انتقال عمودی یک واحد به بالا

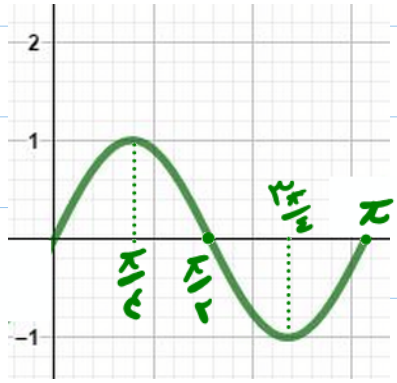


ج) $y=|2\sin 2x-1|$ $[0,\pi]$

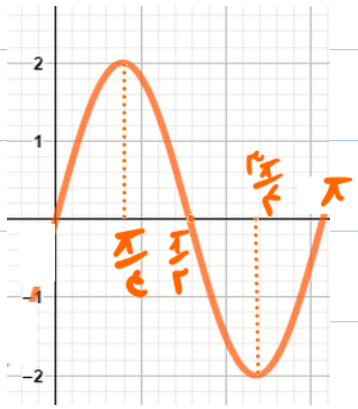
$y=\sin x$



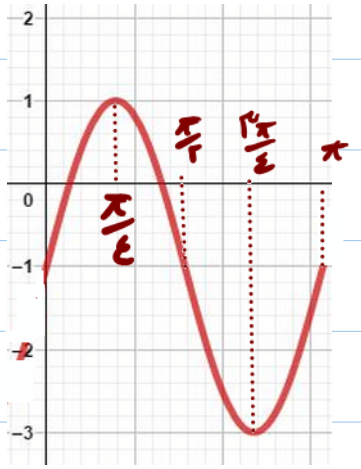
$y = \sin 2x$ انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$



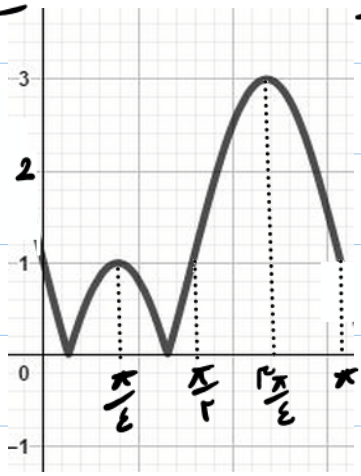
$y = 2\sin 2x$ انبساط عمودی با ضریب ۲



$y = 2\sin 2x - 1$ انتقال عمودی یک واحد پایین

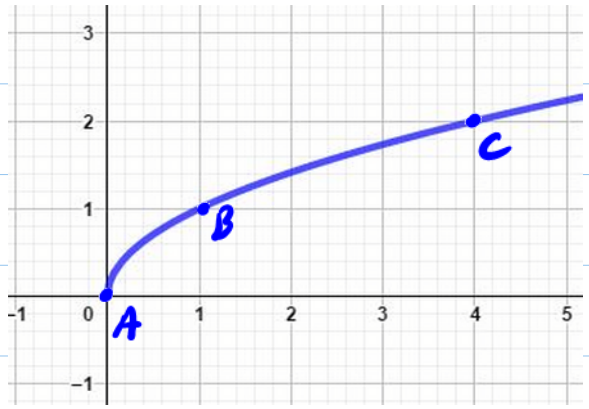


$y = |2\sin 2x - 1|$ تأثیر قدرمطلق: قسمتی که زیر محور xها است قرینه می‌کنیم.

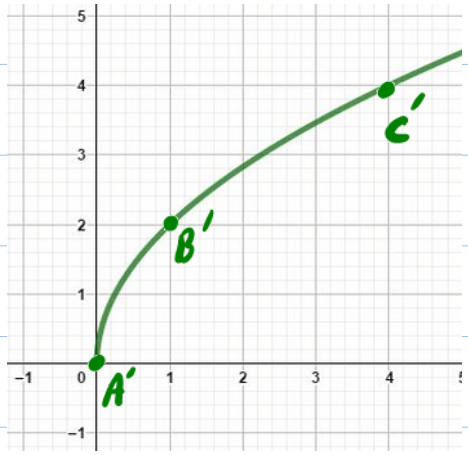


ث) $f(x) = -2\sqrt{x} + 1$

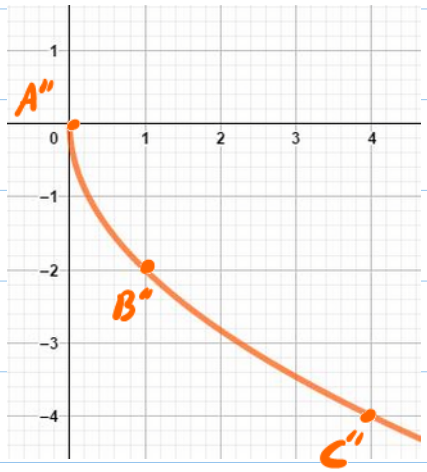
$y = \sqrt{x}$



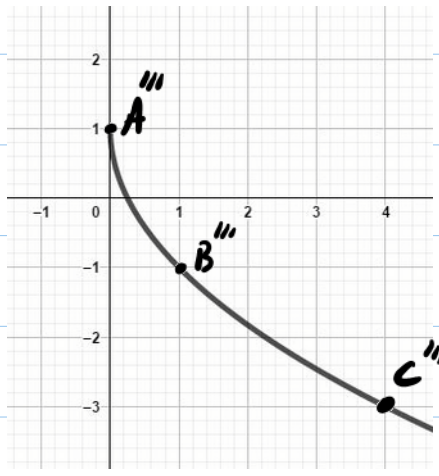
$y = 2\sqrt{x}$ انبساط عمودی با ضریب ۲



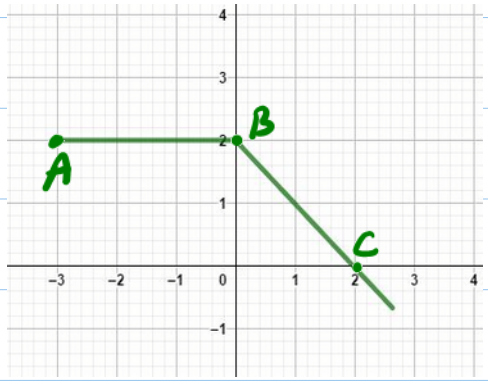
$y = -2\sqrt{x}$ انعکاس نسبت به محور xها



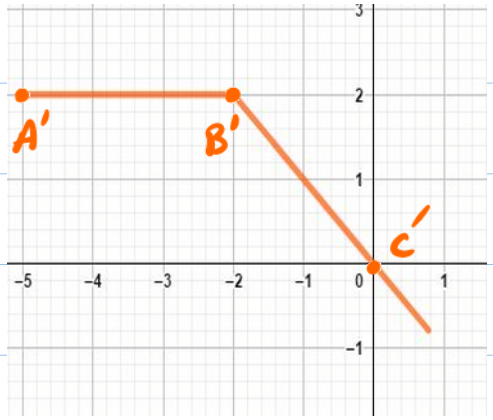
$f(x) = -2\sqrt{x} + 1$ انتقال محور یک واحد به



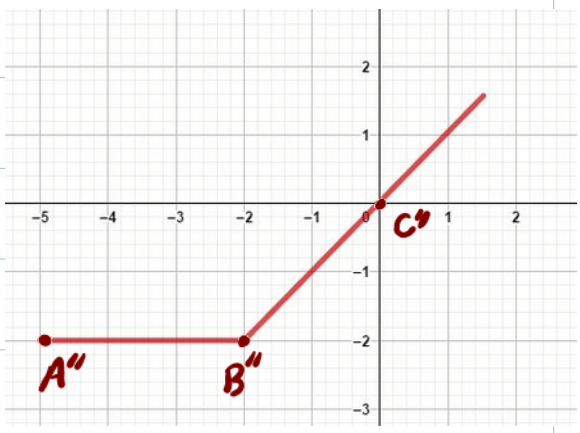
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=1-f(x+2)$ را رسم کنید.



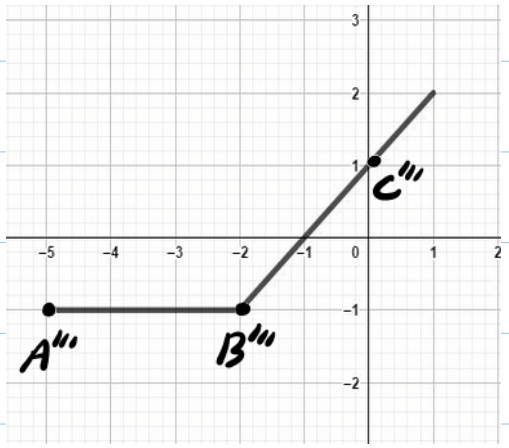
$y=f(x+2)$ انتقال افقی ۲ واحد چپ



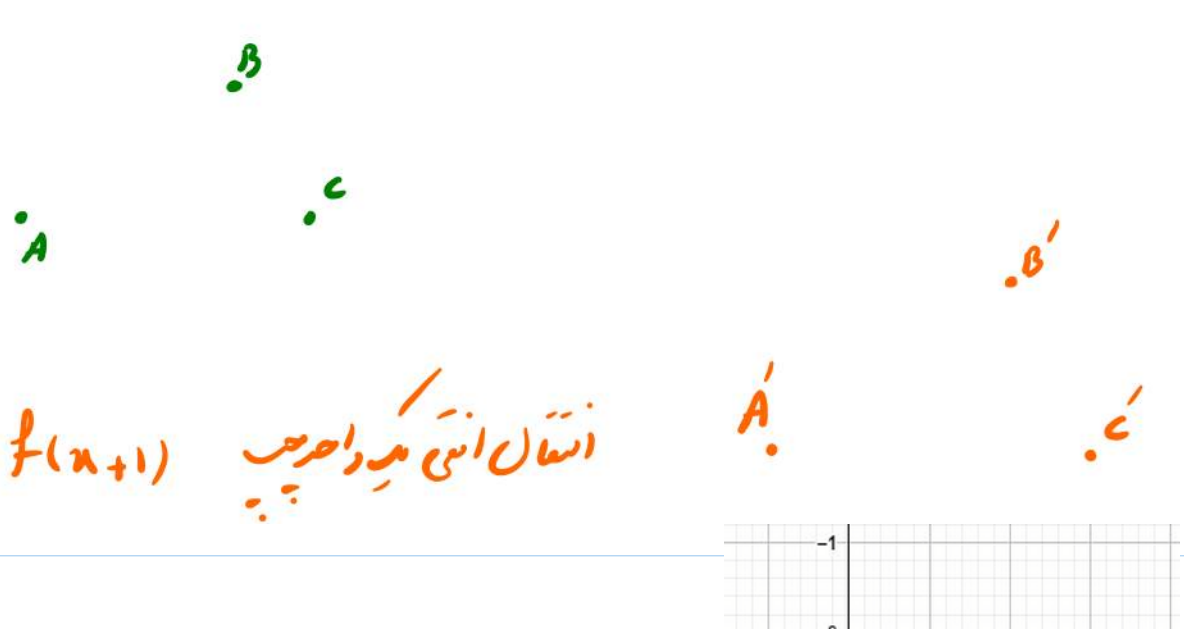
$y=-f(x+2)$ انعکاس نسبت به محور xها



$y=1-f(x+2)$ انتقال عمودی یک واحد بالا

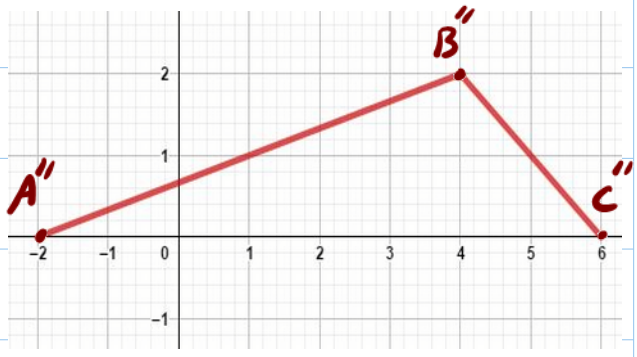


مثال : نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر است. نمودار $y=3f(\frac{1}{2}x+1)$ را رسم کنید.

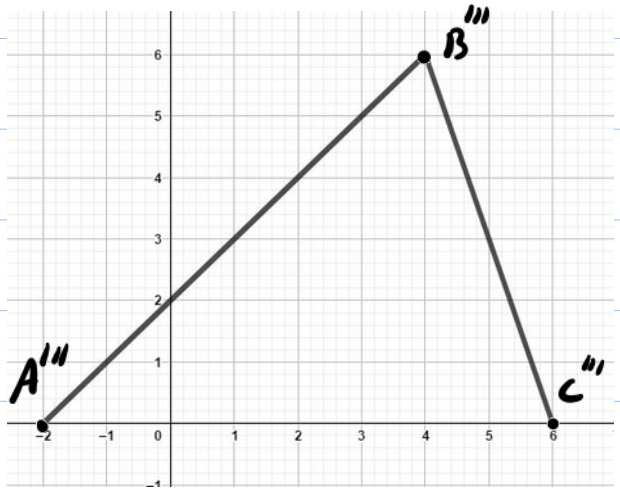


$y=f(x+1)$ انتقال افقی به اندازه ۱ واحد چپ

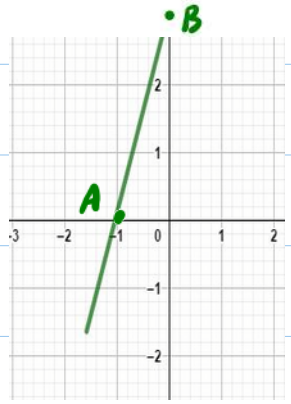
$y=f(\frac{1}{2}x+1)$ انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$



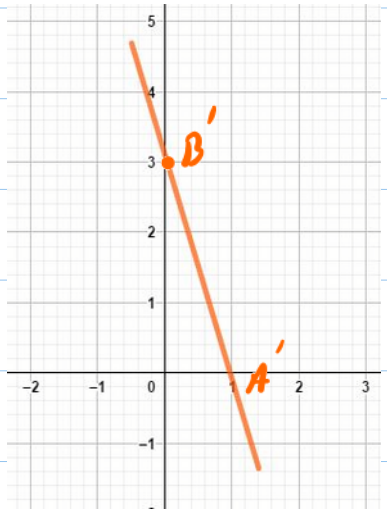
$y=3f(\frac{1}{2}x+1)$ انبساط عمودی با ضریب ۳



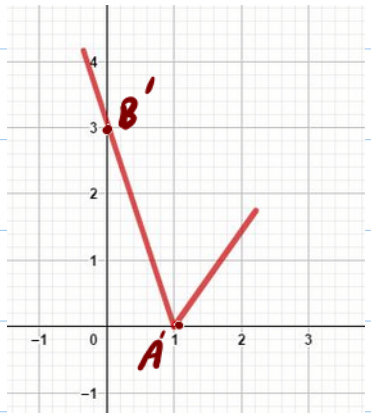
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=|f(-x)|-2$ را رسم کنید.



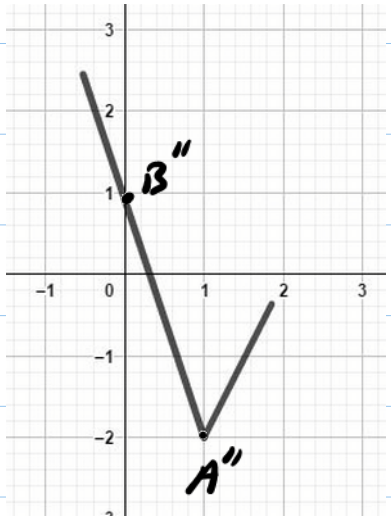
$y=f(-x)$ انعکاس: قرینه‌ت به محور yها



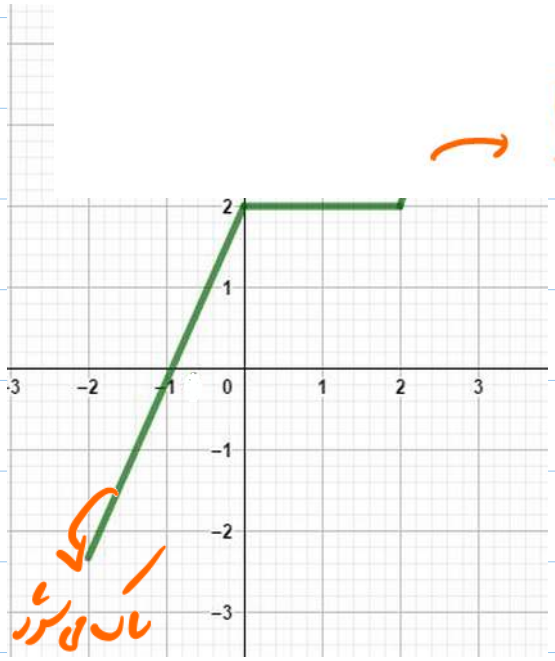
$y=|f(-x)|$ تأثیر قدرمطلق: قسمت‌هایی که زیر محور x است قرینه می‌شود.



$y=|f(-x)|-2$ انتقال عمودی ۲ واحد پایین



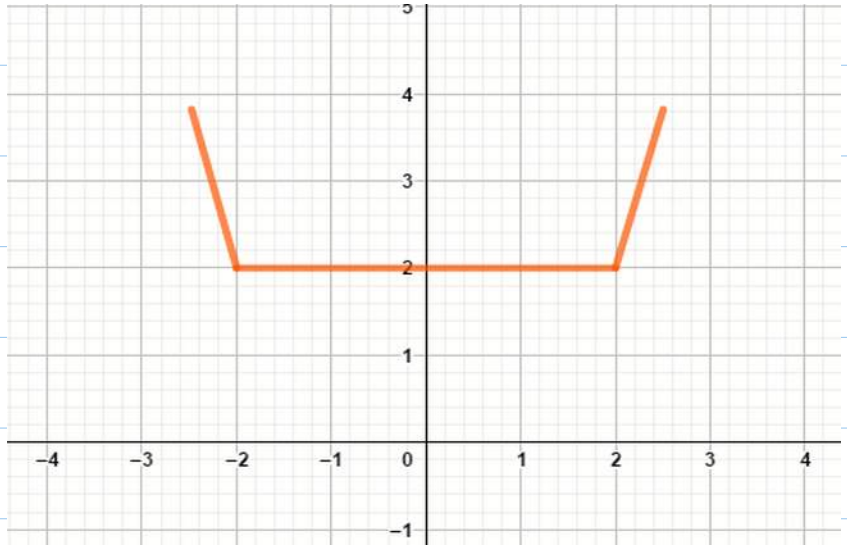
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ را رسم کنید.



قرینه‌ها نسبت به محور y ها ←

نمای شکل

$y=f(|x|)$



مثال: ضابطه نقاط نمودار تابع f را در نظر می‌گیریم. پس نمودار به دست آمده را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن رسم شده را بیابید.

$$f\left(\frac{x}{2}\right) \longrightarrow f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Rightarrow y=f\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

مثال: نمودار تابع $g(x)=2f(3x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم. سپس طول و عرض نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن بدست آمده است را بنویسید.

$$2f(3(x-1)) = 2f(3x-3)$$

$$\rightarrow 2f(3x-3)+2$$

عرض‌ها ↑ ضرب‌ها ↑

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left(2f(3(2x)-3)+2\right) = f(6x-3)+1$$

$$\Rightarrow \quad h(x)=f(6x-3)+1$$

مثال: منحنی تابع $y=|x-2|$ را سه واحد به چپ انتقال داده و قرینه شکل حاصل را نسبت به محور yها تعیین می‌کنیم و با ضریب $\frac{1}{2}$ انبساط محوری می‌دهیم. سپس قرینه آن را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم، معادله منحنی جدید را بدست آورید.

$f(x+3)$: $\quad y=|x+3-2|=|x+1|$

$f(-x+2)$: $y=|-x+1|$

$2f(-x+3)$: $y=2|-x+1|$

$-2f(-x+4)$: $y=-2|-x+1|=-2|1-x|$

مثال: با انجام متوالی کدام گزینه، نمودار $y=f(x)$ تبدیل به نمودار تابع $y=-\frac{1}{4}(1-x)$ می‌شود؟

۱) انتقال یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور عرض‌ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی

✓ ۲) انتقال یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور عرض‌ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای محوری

۳) انتقال یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور عرض‌ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی

۴) انتقال یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور عرض‌ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای محوری

گزینه ۲

$y=-\frac{1}{4}(1-x)$

- $-\frac{1}{4}$: انقباض محوری با ضریب $\frac{1}{4}$ / قرینه نسبت به محور xها
- $(1-x)$: قرینه نسبت به محور yها / انتقال افقی یک واحد چپ

مثال: کنکور ریاضی ۹۹

قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

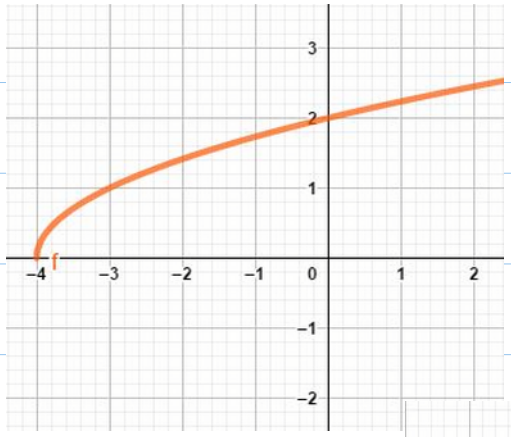
۱) $x=1$

$f(-x)$: $y=\sqrt{-x}$

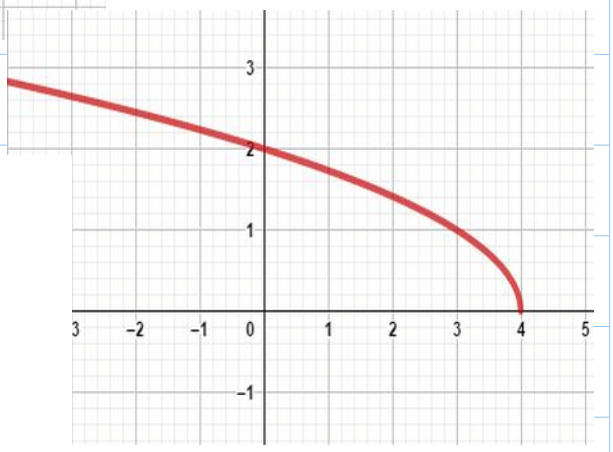
$f(-(x-4))$: $y=\sqrt{-(x-4)}=\sqrt{-x+4}=\sqrt{4-x}$

$y=\sqrt{4+x}$

۴ واحد به چپ

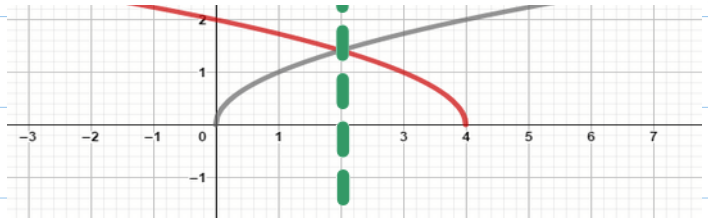


$y=\sqrt{4-x}$ انعکاس: قرینه نسبت به محور yها



$x=2$

$y=\sqrt{4-x}$



$y=\sqrt{x}$

قرینه $x=2$

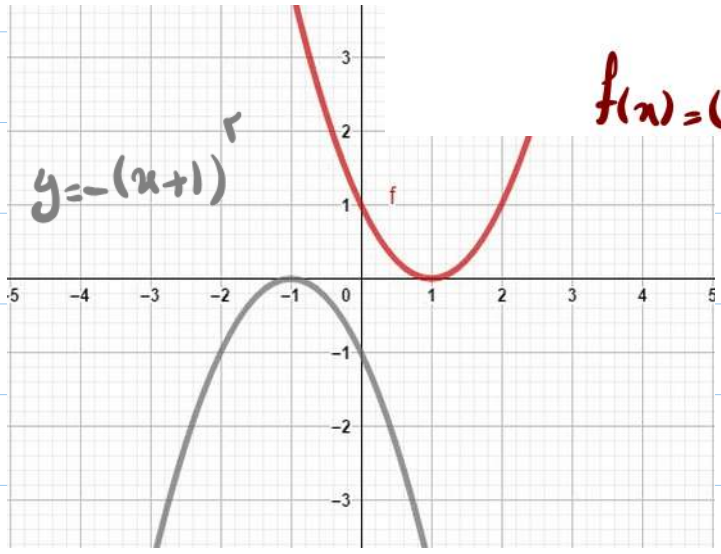
مثال: کنکور ریاضی ۹۹ (خارج)

ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

۱) ۲ ، ۰ ۲) ۱ ، −۱ ۳) ۲ ، −۱ ۴) ۱ ، −۲

$\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$ $\quad -y=(-x-1)^2=(x+1)^2$

$\Rightarrow y=-(x+1)^2 \xrightarrow{+4} g(x)=-(x+1)^2+4$



$f(x)=g(x) \Rightarrow (x-1)^2=-(x+1)^2+4 \rightarrow (x-1)^2+(x+1)^2=4$

روش تشریحی $\Rightarrow x^2-2x+1+x^2+2x+1=4 \rightarrow 2x^2+2=4 \rightarrow 2x^2=2$

$x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$ طول نقاط تلاقی : گزینه ۲

مثال: کنکور تجربی ۹۹

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $4\sqrt{15}$ ۲) $6\sqrt{7}$ ۳) $4\sqrt{17}$ ۴) $6\sqrt{10}$

$g(x)=\sqrt{x-12}+2$

$f(x)=g(x) \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{x-12}+2 \xrightarrow[2]{\text{به توان}} x=(x-12)+4\sqrt{x-12}+4$

$8=4\sqrt{x-12} \xrightarrow{\div 4} 2=\sqrt{x-12} \xrightarrow[2]{\text{به توان}} 4=x-12 \Rightarrow x=16$

$f(16)=\sqrt{16}=4$ نقطه برخورد $A(16,4)$

$OA=\sqrt{16^2+4^2}=\sqrt{256+16}=\sqrt{272}=\sqrt{16\times 17}=4\sqrt{17}$

گزینه ۳

مثال: کنکور تجربی ۹۹ (خارج)

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x\;;(x>1)$، مفروض است. قرینهٔ نمودار آن نسبت به محور xها را، ۱۶ واحد در امتداد محور yها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $4\sqrt{5}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$

قرینه‌ی نسبت به محور xها : $-f(x) = -(x-1)^2 + 1$

انتقال عمودی ۱۶ واحد بالا : $g(x) = -(x-1)^2 + 1 + 16 = -(x-1)^2 + 17$

$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 - 1 = -(x-1)^2 + 17$

$\Rightarrow 2(x-1)^2 = 18 \xrightarrow{\div 2} (x-1)^2 = 9$

$\Rightarrow x - 1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 3 \to x = 4 \\ x - 1 = -3 \to x = -2 \end{cases}$ غ ق ق

نقطه‌ی برخورد $A(4, 8)$ $\quad f(4) = (4-1)^2 - 1 = 8$

$OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$ گزینه ۱

نکته : گاهی اوقات مقصات نقطه‌ای روی $f(x)$ داده می‌شود و مقصات نقطه متناظر با آن در $af(bx+c)+d$ خواسته می‌شود. در این حالت تمام مواردی که برای رسم نمودار

این بار می‌خواهیم روی نقطه داده شده اعمال می‌کنیم. همچنین برای تأثیر b و c می‌گوییم، همگونی $y=bx+c$ را بدست آوردیم.

مثال: نقطه $A(-1,2)$ روی نمودار $y=f(x)$ است. نقطه متناظر با آن روی نمودار $y=4f(2x-5)-7$ کدام است؟ $A'(a,b)$ است. $a-b$ کدام است؟

۱) -2 ✓۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

$$t=2x-5 \Rightarrow t+5=2x \xrightarrow{\div 2} x=\frac{t+5}{2} \xrightarrow{-1} \frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2=a$$

$$b=2\times 4-7=-1 \Rightarrow A'(2,-1) \longrightarrow a-b=2-(-1)=3$$

گزینه ۲

نکته: در تابع $y=af(bx+c)+d$، a و d روی برد و b و c روی دامنه f تأثیرگذارند.

مثال: اگر دامنه تابع $y=f(x)$ بازه $(-5,14)$ باشد دامنه تابع $y=f(3x+4)$ را بیابید.

$$f(3x+4)$$
$$14 \quad 14$$
$$x \rightarrow 3x+4 \rightarrow f$$
$$-5 \quad -5$$

$$-5 < 3x+4 < 13 \xrightarrow{-4} -9 < 3x < 9$$

$$\xrightarrow{\div 3} -3 < x < 3$$

$$D_{f(3x+4)} = (-3, 3)$$

مثال: اگر دامنه تابع f بازه $(-2, 4)$ باشد، دامنه تابع $g(x) = 3f(x+1) - 1$ را بیابید.

دامنه

$$-2 < f(x) < 4 \longrightarrow -2 < f(x+1) < 4 \xrightarrow{\times 3} -6 < 3f(x+1) < 12$$

$$\xrightarrow{-1} -7 < 3f(x+1) - 1 < 11 \Rightarrow -7 < g(x) < 11$$

$$R_{g(x)} = (-7, 11)$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

قسمت اول: تابع درجه سوم

جلسه دوم: صفحات ۱۳ تا ۱۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

توابع چند جمله‌ای :

توابعی که ضابطه آن‌ها به صورت $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ است و در آن a_n تا a_0 اعداد حقیقی و $a_n \neq 0$ است، تابع چند جمله‌ای درجه n نامیده می‌شود.

دقت کنید توان x ها باید اعداد حسابی باشند. بیشترین توان x ها درجه چند جمله‌ای است.

مثال : کدام‌یک از توابع زیر چند جمله‌ای است ؟

الف) $f(x)=\frac{1}{x}$ نیست

ب) $g(x)=4x^2+\sqrt{5}x-1$ هست (تابع درجه دوم)

پ) $k(x)=\sqrt{x+2}$ نیست

ت) $q(x)=7x+\frac{1}{2}$ هست (تابع خطی)

ث) $p(x)=\omega$ هست (ثابت)

ج) $k(x)=x^{\frac{1}{4}}+4x$ نیست

نکته: توابع خطی و همانی، ثابت و درجه دوم، همگی تابع چندجمله‌ای هستند.

$y=ax+b$ $y=x$ $y=c$ $y=ax^2+bx+c$

نکته: دامنه تمام توابع چندجمله‌ای $\mathbb{R}$ است. همچنین برد تمام توابع چندجمله‌ای از درجه فرد هم $\mathbb{R}$ است.

تابع چندجمله‌ای درجه سوم:

هر تابع با ضابطه $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ که در آن $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$ باشد را یک تابع چندجمله‌ای درجه سوم می‌نامیم.

مانند:

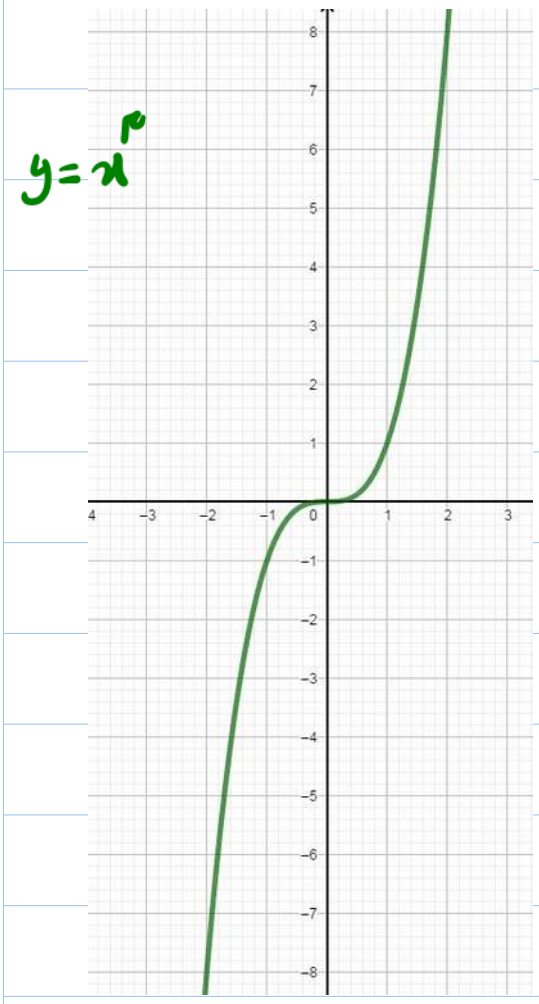
$$f(x)=2x^3-\frac{1}{4}x^2+\sqrt{5}x+\pi$$

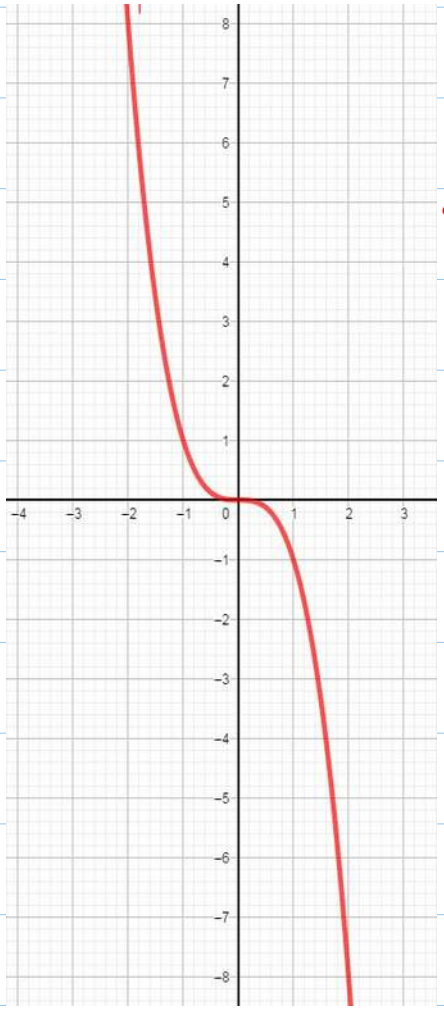
$$g(x)=8x^3+1 \quad , \quad h(x)=5x^3-7x^2$$

نمودار توابع $y=x^3$ و $y=-x^3$

x	-1	0	1	2
$y=x^3$	-1	0	1	8

x	-1	0	1	2
$y=-x^3$	1	0	-1	-8





هر دو نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن اند

تذکر: برای رسم توابع درجه سوم از قوانین انتقال برای رسم نمودارها کمک می‌گیریم.

مثال: نمودار تابع $f(x)=x^4+4x^3+4x+5$ را رسم کنید.

$1+4$

باید تابع درجه سوم را به صورت $y=k(x-a)^4+b$ در آوریم.

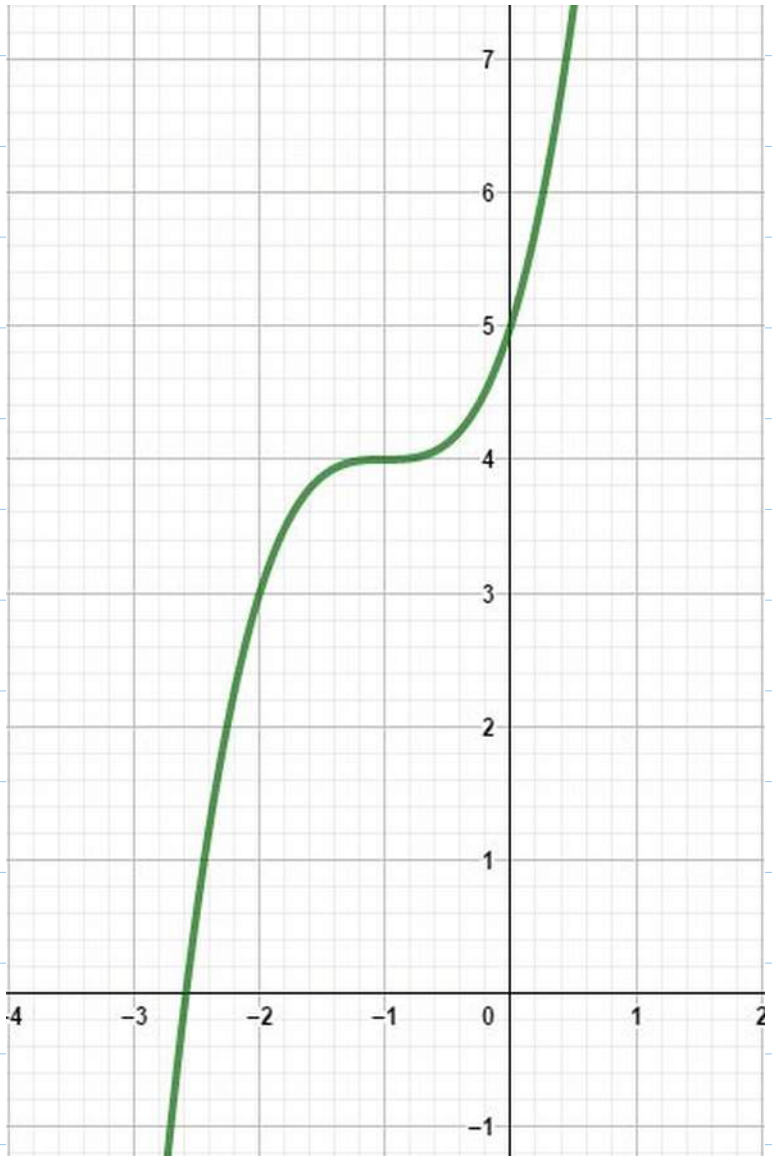
یادآوری: اتحاد مکعب دوجمله‌ای:

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+4ab^3+b^4$$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 4 = (x+1)^3 + 4$

اتحاد

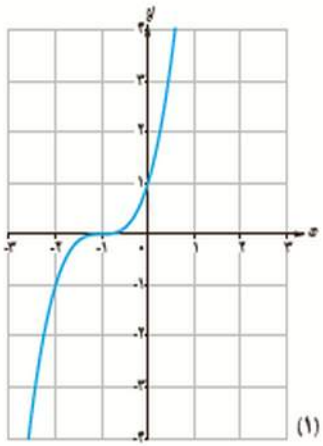
نمودار $y = x^3$ را چهار واحد به سمت بالا و یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

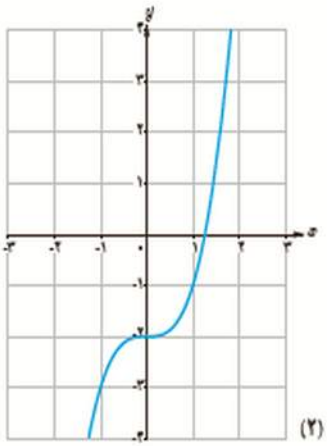


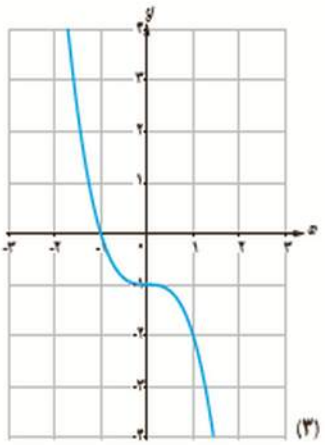
کار در کلاس

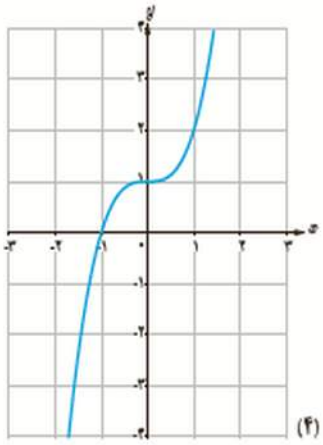
به کمک نمودار تابع $y=x^3$، ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

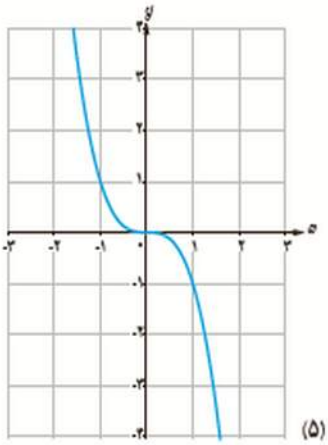
الف) $y=(x-1)^3+2$ ۶
ب) $y=(x-2)^3$ ۹
پ) $y=-x^3+1$ ۸
ت) $y=(x+1)^3-1$ ۷
ث) $y=-x^3$ ۵
ج) $y=(x+1)^3$ ۱
ج) $y=x^3+1$ ۴
ح) $y=-x^3-1$ ۳
خ) $y=x^3-2$ ۲

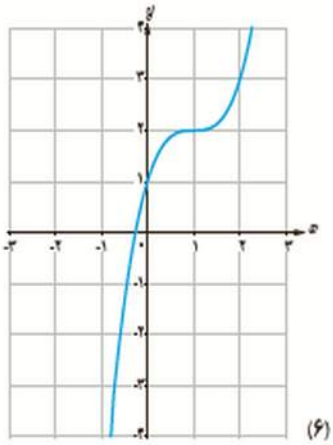

(۱)

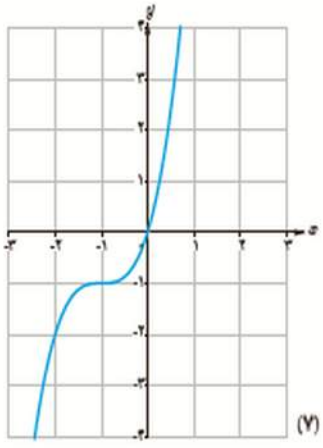

(۲)

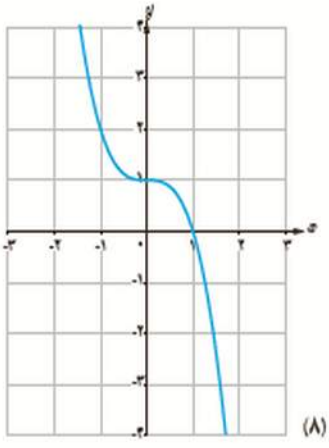

(۳)

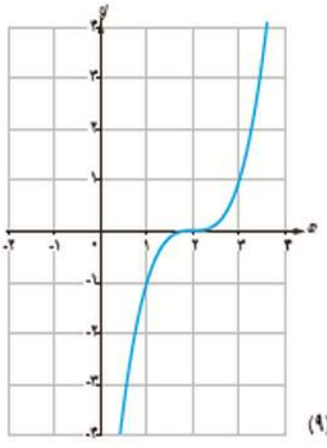

(۴)


(۵)


(۶)


(۷)


(۸)


(۹)

نکته : در توابع درجه سوم به صورت $y=k(x-a)^3+b$ ، نقطه (a,b) مرکز تقارن است. می‌توان از این نقطه در رسم سریع نمودار توابع درجه سوم کمک گرفت.

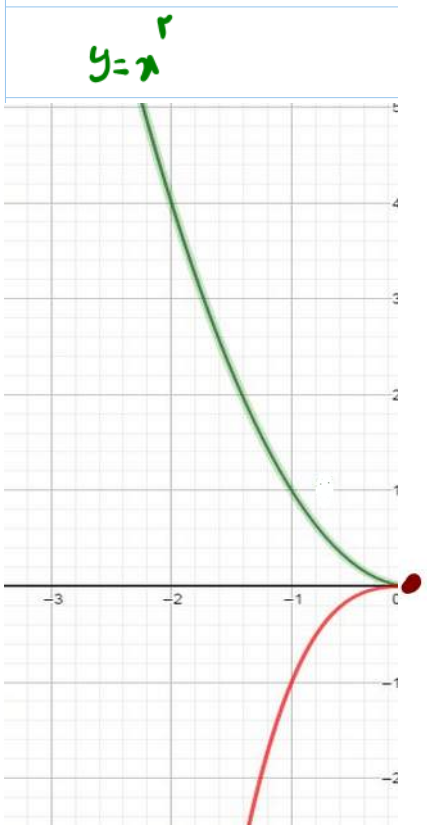
مثال : نمودار تابع $y=-(x-1)^3+2$ را رسم کنید.

پایه : $y=-x^3$

مرکز تقارن $(1,2)$



مقایسه نمودارهای $y=x^3$ و $y=x^2$:



$y=x^3$

۱- دو نمودار در نقاط $(1,1)$ و $(0,0)$ متقاطع‌اند.

۲- برای $x>1$ ، $y=x^3$ بالای $y=x^2$ است.

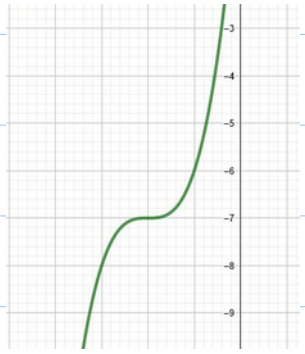
۳- برای $0<x<1$ و $x<0$ نمودار $y=x^2$ بالای $y=x^3$ است.

مثال: نمودار تابع $y=x^3+6x^2+12x+1$ از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

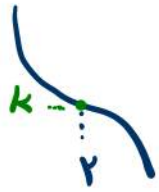
$y=x^3+3\times2x^2+3\times(2)^2x+8-8+1=(x+2)^3-7$ مرکز تقارن $(-2,-7)$

اتحاد

از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.



مثال: نمودار تابع $g(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ به شکل زیر است. مقدار a و b را بیابید.



مرکز تقارن $(2,k)$

در برخی: ضریب x^3 منفی یک

از روی نمودار: $g(x)=-(x-2)^3+k=-(x^3+3x^2(-2)+3x(-2)^2+(-2)^3)+k$

$g(x)=-x^3+6x^2-12x+8+k=-x^3+ax^2+bx+c$

$\begin{cases}a=6\\b=-12\end{cases}$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

قسمت دوم: توابع صعودی و نزولی

جلسه سوم: صفحات ۱۵ تا ۱۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

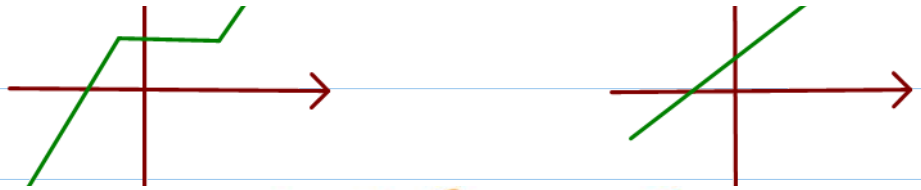
تعریف تابع صعودی :

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$f(x_2) \geq f(x_1)$ آنگاه تابع f را تابع صعودی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع صعودی ، با افزایش x ، y افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

مثال :



با حرکت از چپ به راست هیچگاه پائین نمی‌رویم

تعریف تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$f(x_2) > f(x_1)$ آنگاه تابع f را تابع اکیداً صعودی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع اکیداً صعودی ، با افزایش x ، y هم افزایش می‌یابد.

مثال :

با حرکت از چپ به راست همواره بالا می‌رویم.

تعریف تابع نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$f(x_2) \leq f(x_1)$ آنگاه تابع f را تابع نزولی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع نزولی، با افزایش x ها y کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

مثال:

با حرکت از چپ به راست هیچگاه بالا نمی‌رویم

تعریف تابع اکیداً نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$f(x_2) < f(x_1)$ آنگاه تابع f را تابع اکیداً نزولی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع اکیداً نزولی، با افزایش x، y کاهش می‌یابد.

مثال:

با حرکت از چپ به راست همواره پائین می‌رویم

نکته: هر تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و هر تابع اکیداً نزولی، نزولی هم هست.

ولی عکس این مطلب درست نیست.

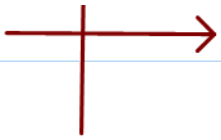
مثال: تابع $y=[x]$ صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.



نکته: اگر با افزایش x، y ثابت بماند می‌گوییم تابع ثابت است. تابع ثابت هم صعودی است

و هم نزولی.

مثال:



تعریف تابع اکیداً یکنوا: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی

باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعه A اکیداً یکنوا است.

تعریف تابع یکنوا: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم

تابع f روی مجموعه A یکنوا است.

نکته : اگر در تابعی با افزایش x و حرکت از چپ به راست روی نمودار، y گاهی ادامه افزایش و گاهی ادامه کاهش یابد، این تابع را **غیر یکنوا** می گوییم.

دقت کنید ممکن است تابعی روی دامنه اش غیر یکنوا باشد ولی روی زیر مجموعه هایی از دامنه اش یکنوا باشد.

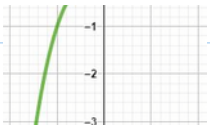
بررسی یکنوایی توابع معروف :

۱) $y = x^2$

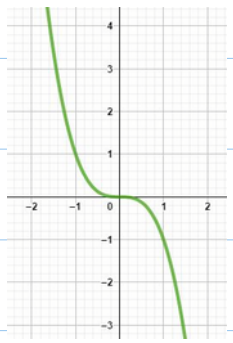
غیر یکنوا ولی در $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی

۲) $y = x^4$

اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

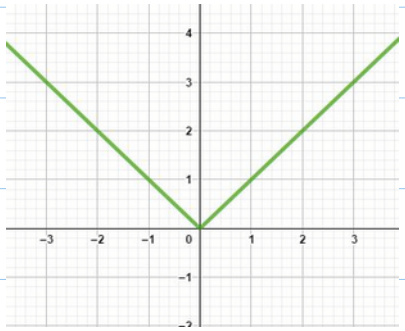


۳) $y = -x^4$



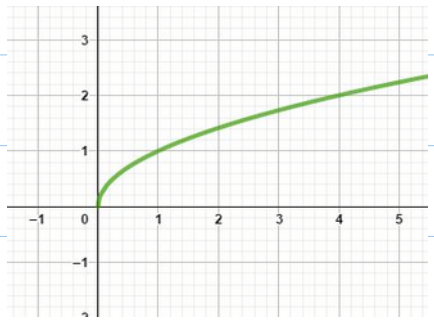
اکیداً یکنوا (اکیداً نزولی)

۴) $y=|x|$



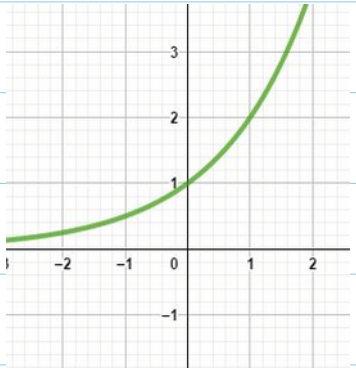
نزولی
ولی در $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی
و در $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی

۵) $y=\sqrt{x}$



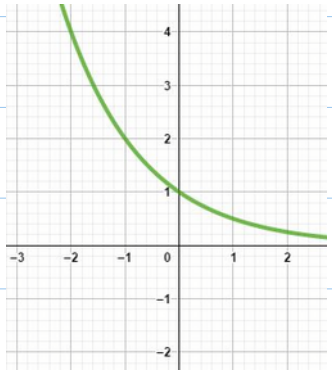
اکیداً نزولی (اکیداً صعودی)

۶) $y=a^x \quad (a>1)$



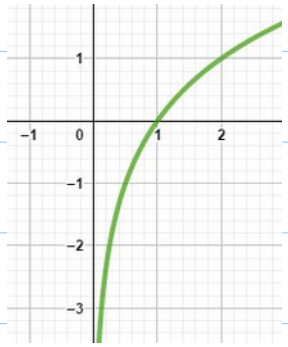
اکیداً نزولی (اکیداً صعودی)

۷) $y=a^x \quad (0<a<1)$



اکیداً نزولی (اکیداً نزولی)

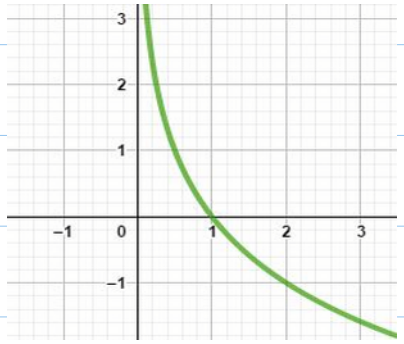
۸) $y=\log_a^x \quad (a>1)$



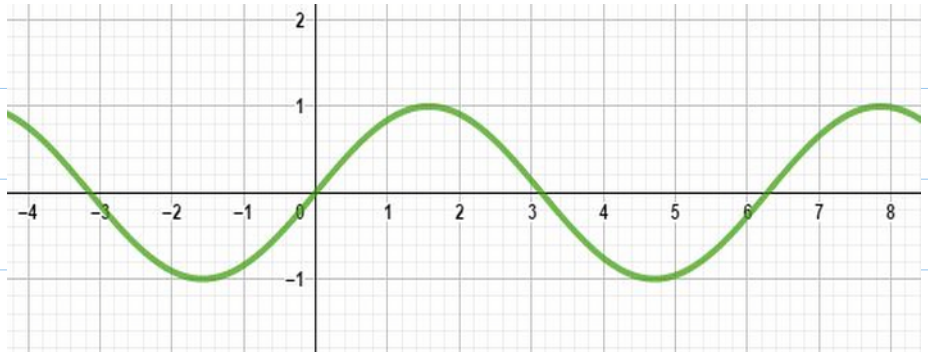
اکیداً نزولی (اکیداً صعودی)

۹) $y=\log_a^x \quad (0<a<1)$

اکیداً نزولی (اکیداً نزولی)

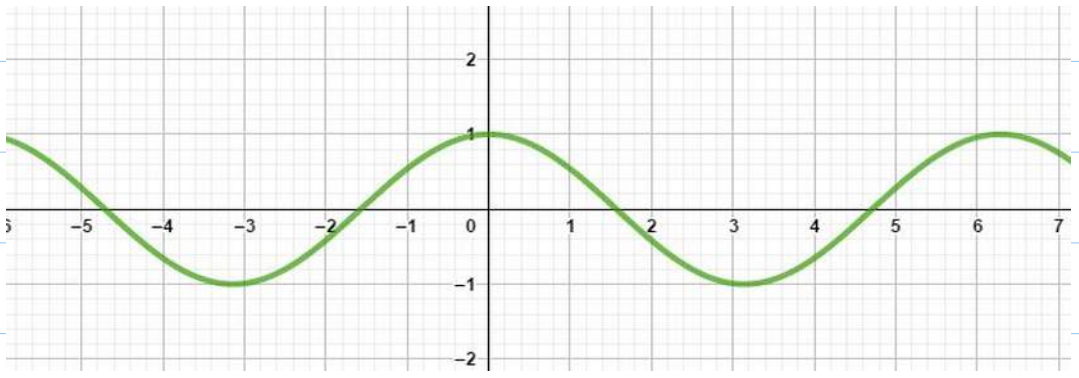


۱۰) $y=\sin x$



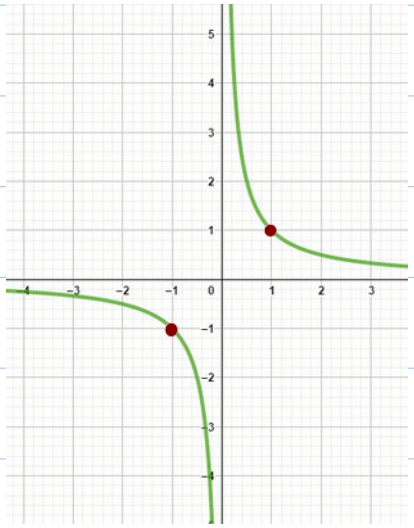
یک‌به‌یک است و می‌شود در $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ تابع اکیداً صعودی و در $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ تابع اکیداً نزولی است.

۱۱) $y=\cos x$



یک‌به‌یک است و می‌شود در $[0,\pi]$ تابع اکیداً نزولی و در $[\pi,2\pi]$ تابع اکیداً صعودی است.

۱۲) $y = \frac{1}{x}$



$-1 < 1 \rightarrow f(-1) < f(1)$

$-1 \quad 1$

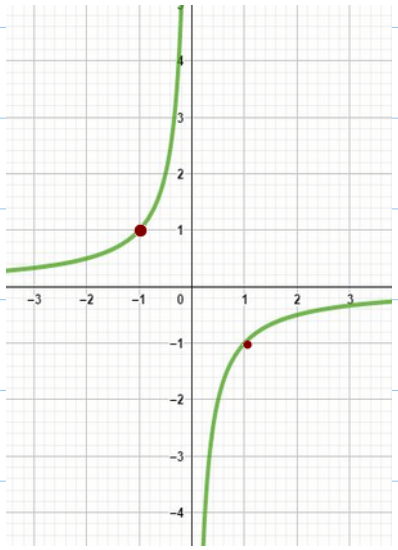
صعودی

نمودار تابع در $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ نزولی است

$x = 0$ مجانب قائم

$y = 0$ مجانب افقی

۱۳) $y = -\frac{1}{x}$



$-1 < 1 \rightarrow f(-1) > f(1)$

$-1 \quad 1$

نزولی

نمودار تابع در $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ صعودی است

$x = 0$ مجانب قائم

$y = 0$ مجانب افقی

مثال: با توجه به نمودار تابع f، یکنوایی آن را بررسی کنید.

الف)

نمودار تابع در $(-\infty, -2]$ و $(0, +\infty)$ نزولی

در $[-2, 0]$ صعودی

y برای دامنه در نظر...

ب)

یکنوا (نزولی)

ب)



اکیداً یکنوا (اکیداً نزولی)

ث)



اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

ت)



نه یکنوا

ج)



نه یکنوا

مثال: تابع $f=\{(1,2),(2,m-1),(3,7-m)\}$ صعودی است. حدود m را بیابید.

(۱) $1<2 \rightarrow f(1)\leq f(2) \Rightarrow 2\leq m-1 \Rightarrow 3\leq m$

(۲) $2<3 \rightarrow f(2)\leq f(3) \Rightarrow m-1\leq 7-m \Rightarrow 2m\leq 8 \rightarrow m\leq 4$

(۱) $\cap$ (۲) $\Rightarrow$ $3\leq m\leq 4$

مثال: تابع $f=\begin{cases} x-4 & x<-2 \\ 2 & -2\leq x<3 \\ -2x+4 & x\geq 3 \end{cases}$ روی بازه $(-\infty, a)$ صعودی است.

بیشترین مقدار برای a را محاسبه کنید.

ثابت

تابع صعودی : $(-\infty, 4)$

↓

a

اکیداً نزولی

اکیداً صعودی

$\Rightarrow a = 4$

نکته : طبق قضیه دیدیم تابع $y = ax^2 + bx + c$ روی $\mathbb{R}$ غیریکنوا است ولی

الف) $a > 0$



اکیداً نزولی در $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی در $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$

ب) $a < 0$



اکیداً صعودی در $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً نزولی در $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$

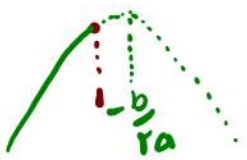
همچنین می‌توان گفت سهمی در هر بازه‌ای که راس سهمی درون آن بازه باشد غیریکنوا است.

مثال : تابع درجه دوم $f(x) = (k+2)x^2 + x$ با دامنه $(-\infty, 1]$ صعودی است.

حدود k را بیابید.

$a < 0 \Rightarrow k + 2 < 0 \Rightarrow k < -2$ (1)

$x_{\text{راس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(k+2)} \geq 1$



$$\frac{-1}{2(k+2)} - 1 \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{1}{2(k+2)} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+2k+4}{2(k+2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2k+5}{2(k+2)} \leq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-2	$+\infty$
$2k+5$	$-$	0	$+$	$+$
$2(k+2)$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2k+5}{2(k+2)}$	$+$	0	$-$	$+$

$$-\frac{5}{2} \leq k < -2 \quad (2) \Rightarrow (1) \cap (2) = -\frac{5}{2} \leq k < -2$$

مثال: تابع نمایی $y = (k^2-1)^x$ اکیداً صعودی است. حدود k را بدست آورید.

$$a > 1 \Rightarrow k^2 - 1 > 1 \Rightarrow k^2 > 2 \Rightarrow k > \sqrt{2} \text{ یا } k < -\sqrt{2}$$

قضیه:

الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a < b$.

ب) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a > b$.

اثبات : الف) چون تابع f اکیداً صعودی است پس اگر $a<b$ آنگاه $f(a)<f(b)$.

حکم — فرض

حال اگر حکس نقیض این گزاره بنویسیم اثبات زیر را می یابیم :

اگر $f(a)\leq f(b)$ آنگاه $a\leq b$ ■

ب) به عنوان تمرین، حل شود.

تذکر : پس می توان گفت اگر تابع f (اکیداً) صعودی باشد آن را از دو طرف نامساوی حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی کند ولی اگر f (اکیداً) نزولی باشد، با حذف آن از دو طرف، جهت نامساوی برعکس می شود.

مثال : اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد و $f(a^2-1)>f(3a+4)$، حدود a را بیابید.

$$f(a^2-1)>f(3a+4) \xrightarrow{f\text{ نزولی}} a^2-1<3a+4$$

$$a^2-3a-4<0 \Rightarrow (a+1)(a-4)<0 \Rightarrow -1<a<4$$

(ریشه‌ها: -1 و $+4$)

مثال: مجموعه جواب نامعادلات زیر را بیابید.

الف) $16 \geq 8^{3x-1}$ ، 2^{2x-2}

$$(2^4)^{2x-2} \geq (2^3)^{3x-1} \Rightarrow 2^{8x-8} \geq 2^{9x-3} \overset{a>1}{\underset{\text{اکیداً صعودی}}{\Longrightarrow}} 8x-8 \geq 9x-3$$

$$8x-9x \geq -3+8 \Rightarrow -x \geq 5 \Rightarrow x \leq -5 \rightarrow \text{مجموعه} = (-\infty, -5]$$

ب) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 2$ ، دامنه: $(x+1) > 0 \Rightarrow x > -1$ (۱)

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \overset{0<a<1}{\underset{\text{اکیداً نزولی}}{\Longrightarrow}} x+1 < \frac{1}{4} \rightarrow x < \frac{1}{4}-1$$

$$-1 < x < -\frac{3}{4} \rightarrow \text{مجموعه} = \left(-1, -\frac{3}{4}\right) \quad (2)\cap(1) \quad (1) \quad x < -\frac{3}{4} \quad (2)$$

پ) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2x+1} > (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{x+2}$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2x+1} > ((\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1})^{x+2} \Rightarrow (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2x+1} > (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-x-2}$$

$$\xrightarrow[\text{اکیداً نزولی}]{\overset{0<a<1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} 2x+1 < -x-2 \Rightarrow 2x+x < -2-1 \Rightarrow 3x < -3$$

$$\Rightarrow x < -1 \rightarrow \text{مجموعه} = (-\infty, -1)$$

نکته:

۱) اگر توابع f و g صعودی باشند آنگاه $g+f$ هم صعودی است.

۲) اگر توابع f و g نزولی باشند آنگاه $g+f$ هم نزولی است.

۳) اگر توابع f و g صعودی باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $g \times f$ هم صعودی است.

۴) اگر توابع f و g نزولی باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $g \times f$ هم نزولی است.

۵) اگر f صعودی باشد آنگاه $-f(x)$ نزولی است.

و اگر f نزولی باشد آنگاه $-f(x)$ صعودی است.

۶) اگر f صعودی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشد آنگاه $\frac{1}{f}$ نزولی است.

۷) اگر f نزولی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشد آنگاه $\frac{1}{f}$ صعودی است.

۸) اگر f صعودی و g نزولی باشد $g-f$ صعودی و $f-g$ نزولی است.

مثال: اگر f تابعی نزولی با مقادیر منفی باشد، کدام تابع نزولی است؟

۱) $y=2^x f(x)$ ✓ ۲) $y=\frac{f(x)}{2^x}$ ۳) $y=2^x+f(x)$ ۴) $y=2^x-f(x)$

تابع f تابعی نزولی با مقادیر منفی است. پس تابع $-f$ تابعی صعودی با مقادیر مثبت است.

همچنین تابع $y=2^x$ تابعی صعودی با مقادیر مثبت است. پس ضرب این دو تابع یعنی

$y=2^x\times(-f)=-2^x f$ تابعی صعودی است. پس $y=2^x f$ تابعی نزولی است.

مثال: اگر $f+g$ و $g-f$ توابعی نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشند، کدام تابع صعودی است؟

۱) f ۲) g ۳) $-f$ ۴) $-g$ ✓

$h=(f+g)+(g-f)=2g$ نزولی نزولی نزولی

$\Rightarrow k=-\frac{1}{2}(2g)=-g$ نزولی منفی صعودی

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

قسمت سوم: تقسیم و بخش‌پذیری

جلسه چهارم: صفحات ۱۸ تا ۲۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری :

در پایه‌های پائین‌تر با تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای آشنا شدید.

مراحل این تقسیم عبارت بودند از :

۱) استاندارد نوشتن مقسوم و مقسوم‌علیه .

۲) تقسیم جمله اول مقسوم بر جمله اول مقسوم‌علیه و نوشتن حاصل آن در خارج قسمت و ضرب آن در مقسوم‌علیه و کم کردن حاصل آن از مقسوم برای یافتن مقسوم جدید .

۳) تقسیم جمله اول مقسوم جدید بر جمله اول مقسوم‌علیه و انجام مرحله ۲ .

۴) تکرار مرحله ۳ تا جایی که درجه مقسوم جدید (همان باقی‌مانده) از درجه مقسوم‌علیه کمتر شود.

نکته : اگر درجه مقسوم n و درجه مقسوم‌علیه m باشد ($m \leq n$)، درجه خارج قسمت $n-m$ و درجه باقی‌مانده حداکثر $m-1$ خواهد بود.

مثال : چندجمله‌ای $x^4 + 2x^3 - x + 1$ را بر $x^2 - 2$ تقسیم کنید.

مقسوم

$2x^4 + 3x^3 - 1$

$-(2x^4 - 4x^2)$

$3x^3 + 4x^2 - 1$

$-(3x^3 - 6x)$

$4x^2 + 6x - 1$

$-(4x^2 - 8)$

$6x + 7$ ← باقی‌مانده

مقسوم‌علیه ← $x^2 - 2$

$2x^2 + 3x + 4$ ← خارج قسمت

$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

$\frac{3x^3}{x^2} = 3x$

$\frac{4x^2}{x^2} = 4$

روش هورنر برای تقسیم چندجمله‌ای درجه n بر درجه یک به صورت $x+a$:

این روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم :

$3x^3 + 1x^2 + 5x - 7 \quad | \quad x+2$

ضرایب یک جمله‌ای صحیح مقسوم | ریشه مقسوم‌علیه $(x+2=0)$

	3	8	5	-7
-2		-6	-4	2
	3	2	1	-9

$2 \times (-2)$ $1 \times (-2)$ $2 \times (-2)$

باقی‌مانده

خارج قسمت : $3x^2 + 2x + 1$

قضیه تقسیم (الگوریتم تقسیم) برای چندجمله‌ای‌ها:

اگر $p(x)$ و $B(x)$ چندجمله‌ای باشند و درجه $B(x)$ از صفر بزرگتر باشد، آنگاه چندجمله‌ای منحصربفرد $Q(x)$ و $R(x)$ وجود دارند بطوریکه:

$p(x)$ / $B(x)$ / $Q(x)$ / $R(x)$

$$p(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

که درآن درجه $R(x)$ از درجه $B(x)$ کمتر است.

اگر $R(x)=0$ باشد $p(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر است.

مثال: الگوریتم تقسیم را برای تقسیم $p(x)=x^4+2$ بر $B(x)=x-1$ بنویسید.

1	0	0	2	1
	1	1	1	3
1	1	1	1	$R(x)$
	$\times 1$	$\times 1$	$\times 1$	

$$Q(x) = x^3 + x + 1$$

$$x^4 + 1 = (x-1)(x^3+x+1) + 3$$

قضیه(۱): باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه یک $ax+b$ برابر $P(-\frac{b}{a})$ است. یعنی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه یک کافی است ریشه چندجمله‌ای درجه یک (مقسوم‌علیه) را به جای متغیر $P(x)$ (مقسوم) قرار دهیم.

اثبات: اگر الگوریتم تقسیم را بنویسیم، داریم:

$$P(x) = (ax+b)Q(x) + \overset{\text{خرد}}{R}$$

اگر به جای x ریشه مقسوم‌علیه ($ax+b=0 \rightarrow ax=-b \rightarrow x=-\frac{b}{a}$) را قرار دهیم داریم:

$$P(-\frac{b}{a}) = 0 \times Q(-\frac{b}{a}) + R \Rightarrow P(-\frac{b}{a}) = R \quad \blacksquare$$

مثال: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^2 - x + 1$ بر $x-2$ را بیابید.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(2) = R$$

$$P(2) = 2^5 - 4(2)^4 + 3(2)^2 - 2 + 1 = 32 - 32 + 12 - 2 + 1 = 11$$

مثال: اگر چند جمله‌ای $P(x)=3x^7-4ax-5$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد، a را بیابید.

$$x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow P(1)=0 \rightarrow P(1)=3(1)^7-4a(1)-5=0$$

$$3-4a-5=0 \rightarrow -4a=2 \rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

مثال: کنکور ریاضی ۹۴

به ازای مقداری از a چند جمله‌ای $P(x)=x^4+ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است.

کوچکترین ریشه معادله $P(x)=0$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{3}-1$ ۲) $\sqrt{5}-1$ ۳) $-\sqrt{3}-1$ ۴) $-\sqrt{5}-1$

$$x+2=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow P(-2)=0 \Rightarrow P(-2)=(-2)^4+a(-2)^3-8(-2)=0$$

$$16-8a+16=0 \rightarrow -8a=-32 \rightarrow a=4$$

$$P(x)=x^4+4x^3-8x=0 \Rightarrow x^4+4x^3-8x=(x+2)Q(x)$$

	1	4	0	-8	0
-2		1	2	-4	0
	1	2	-4	0	0

$$Q(x)=x^3+2x^2-4x+0$$

باقی‌مانده

$P(x)=(x+2)(x^3+2x^2-4x)=0 \Rightarrow (x+2)x(x^2+2x-4)=0$

$x+2=0 \rightarrow x=-2$

$x=0$

$x^2+2x-4=0 \Rightarrow x^2+2x=4 \Rightarrow x^2+2x+1=4+1 \Rightarrow (x+1)^2=5$

گزینه ۴ $\Rightarrow x+1=\pm\sqrt{5} \Rightarrow x=\sqrt{5}-1,\ x=-\sqrt{5}-1$ ✓

مثال: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $\underbrace{x^4-ax^3+x^2+b}_{P(x)}$ بر $x+1$ برابر ۹ است. اگر این چندجمله‌ای بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد، a,b را بیابید.

$x+1=0 \rightarrow x=-1 \Rightarrow P(-1)=9 \Rightarrow P(-1)=(-1)^4-a(-1)^3+(-1)^2+b=9$

$1+a+1+b=9 \Rightarrow a+b=7 \quad (1)$

$x-2=0 \rightarrow x=2 \Rightarrow P(2)=0 \Rightarrow P(2)=2^4-a(2)^3+(2)^2+b=0$

$16-8a+4+b=0 \Rightarrow -8a+b=-20 \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ -8a+b=-20 \end{cases}$ (منفی کردن)

$9a=27 \rightarrow a=3$

$3+b=7 \rightarrow b=4$

مثال: کنکور ۹۹ ریاضی خارج:

به ازای یک مقدار a، چندجمله‌ای $P(x)=2x^4+ax^3+2x^2-3x$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌مانده $P(x)$ بر $x+2$ کدام است؟

۱) -10 ۲) -8 ۳) 4 ۴) 6

$$2x-1=0 \to x=\frac{1}{2} \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^4+a\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\times\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}+\frac{1}{8}a+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0 \xrightarrow{\times 8} 1+a+4-12=0 \to a=7$$

$$P(x)=2x^4+7x^3+2x^2-3x \Rightarrow x+2=0 \to x=-2$$

$$P(-2)=2(-2)^4+7(-2)^3+2(-2)^2-3(-2)=32-56+8+6=-10$$

گزینه ۱

مثال: اگر $f(2x-1)=x^3-x$ باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-3$ را بیابید.

$$x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow f(3)=R$$

باید عددی را جای x در $f(2x-1)$ قرار دهیم که $f(3)$ به دست آید:

$2x-1=4 \Rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3$

$f(2x-1)=x-4 \xrightarrow{x=3} f(2(3)-1)=3-4 \rightarrow f(5)=-1=R$

مثال: چندجمله‌ای $p(x)=x^8+3x^7+ax^2-9$ بر $x+3$ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x+1)$ بر $x+2$ کدام است؟

۱) -14 ۲) -12 ۳) -10 ۴) -8

$x+3=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow p(-3)=0 \rightarrow p(-3)=(-3)^8+3(-3)^7+a(-3)^2-9=0$

$3^8-3^8+9a-9=0 \rightarrow 9a=9 \Rightarrow a=1 \Rightarrow p(x)=x^8+3x^7+x^2-9$

$x+2=0 \rightarrow x=-2 \Rightarrow p(-2+1)=R \Rightarrow p(-1)=R$

$p(-1)=(-1)^8+3(-1)^7+(-1)^2-9=1-3+1-9=-10$ گزینه ۳

مثال: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای‌های $p(x)+x$ و $xQ(x)$ بر $x-2$ به ترتیب ۳ و ۴ است. اگر چندجمله‌ای $kp(x)+Q^2(x)+1$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد، k کدام است؟

مقدار k کدام است؟

۱) -5 ۲) 5 ۳) -4 ۴) 4

$x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow p(2)+2=4 \Rightarrow p(2)=1$

$\rightarrow x=2 \rightarrow 2Q(2)=4 \rightarrow Q(2)=2$

$x=2 \rightarrow kp(2)+Q^2(2)+1=0$

$\Rightarrow k\times 1+(2)^2+1=0 \rightarrow k+5=0 \rightarrow k=-5$

گزینه ۱

روش یافتن باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای از درجه بزرگتر از یک:

الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم. فقط دقت کنید درجه باقی‌مانده از درجه مقسوم‌علیه کمتر است.

مثلاً اگر مقسوم‌علیه از درجه دو باشد باقی‌مانده حداکثر از درجه یک است و می‌توانیم باقی‌مانده را به صورت $ax+b$ بنویسیم. سپس جای xها باقی‌مانده را قرار می‌دهیم و $Q(x)$ حذف می‌شود.

از ریشه‌های مقسوم علیه برای این کار استفاده می‌کنیم. بجای تقسیم ریشه‌های مقسوم علیه

باقیمانده تساوی مقسوم و باقیمانده می‌شود:

$$\frac{P(x)}{R(x)} \quad \begin{matrix} (x-\alpha)(x-\beta) \\ Q(x) \end{matrix}$$

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)Q(x) + R(x)$$

$$x=\alpha \Rightarrow P(\alpha) = (\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)Q(\alpha) + R(\alpha) \Rightarrow P(\alpha) = R(\alpha)$$

$$x=\beta \Rightarrow P(\beta) = (\beta-\alpha)(\beta-\beta)Q(\beta) + R(\beta) \Rightarrow P(\beta) = R(\beta)$$

مثال: باقیمانده تقسیم $x^5+3x^4+5x^2-1$ را بر x^2-1 بدست آورید.

$$\frac{x^5+3x^4+5x^2-1}{R(x)=ax+b} \quad \Big| \begin{matrix} x^2-1 \\ Q(x) \end{matrix}$$

$$x^2-1=0 \to x=\pm 1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow P(1) = 1^5+3(1)^4+5(1)^2-1 = R(1) = a(1)+b$$

$$\Rightarrow 1+3+5-1 = a+b \to a+b=8 \quad (1)$$

$$x=-1 \Rightarrow P(-1) = (-1)^5+3(-1)^4+5(-1)^2-1 = R(-1) = a(-1)+b$$

$$\Rightarrow -1+2^3+5-1=-a+b \Rightarrow -a+b=6 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ -a+b=6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} a+7=8 \rightarrow a=1 \\ 2b=14 \rightarrow b=7 \end{array}$$

$$R(x)=x+7$$

مثال: کنکور ریاضی 99

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به ترتیب 8 و 5 است.

باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$ کدام است؟

1) $-x+2$ 2) $x+3$ 3) $2x+6$ 4) $2x-3$

$x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow P(1)=8$

$2x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2} \rightarrow P(-\frac{1}{2})=5$

$P(x) \mid 2x^2-x-1$, $Q(x)$

$R(x)=ax+b$

$$P(x)=(2x^2-x-1)Q(x)+(ax+b)$$

$$P(x)=(x-1)(2x+1)Q(x)+(ax+b)$$

$x=1 \Rightarrow P(1)=(1-1)Q(1)+(a+b)=8 \Rightarrow a+b=8 \quad (1)$

$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow P(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2}-1)(2\times(-\frac{1}{2})+1)Q(-\frac{1}{2})+a(-\frac{1}{2})+b=5$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}a+b=5 \quad (2)$

$\times\frac{1}{2}$ $\begin{cases} a+b=8 \\ -\frac{1}{2}a+b=5 \end{cases}$ $\xrightarrow{-}$ $\frac{3}{2}b=3 \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} b=\frac{18}{6}=4$

$a+4=8 \rightarrow a=2$

$\Rightarrow R(x)=2x+4$

گزینه ۴

مثال: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2-4 و x^2-9 به ترتیب $x+4$ و $4x+1$ است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2-5x+6 کدام است؟

۱) $2x+5$ ۲) $5x+2$ ۳) $5x-2$ ۴) $2x-5$

$P(x)=(x^2-4)Q_1(x)+(x+4) \Rightarrow P(2)=2+4=8$

$P(x)=(x^2-9)Q_2(x)+(4x+1) \Rightarrow P(3)=4\times3+1=13$

$P(x)=(x^2-5x+6)Q_3(x)+(ax+b)=(x-2)(x-3)Q_3(x)+(ax+b)$

$$p(1) = (1-1)(1-2)Q(1) + (a(1)+b) = 8 \Rightarrow 2a+b=8$$

$$p(2) = (2-1)(2-2)Q(2) + (a(2)+b) = 14 \longrightarrow 2a+b=14$$

$$\begin{cases} 2a+b=8 \\ 2a+b=14 \end{cases} \quad \text{(−)}$$

$$10+b=8 \rightarrow b=-2$$

$$a=0$$

گزینه ۴ : $R(x) = 0x-2$

مثال : اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)(x-2)$ برابر $2x+0$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ را محاسبه کنید.

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + (2x+0)$$

$$x-2=0 \longrightarrow x=2 \longrightarrow f(2) = R$$

$$f(2) = (2-1)(2-2)Q(2) + (4+0) = 11 = R$$

نکته: اگر یک چندجمله‌ای بر حاصل‌ضرب چند، چندجمله‌ای بخش‌پذیر باشد، بر هریک از این چندجمله‌ای‌ها هم بخش‌پذیر خواهد بود.

مثال: اگر چندجمله‌ای $P(x)=x^5+mx^2+nx+32$ بر x^2-4 بخش‌پذیر باشد، m و n را بیابید.

بنابر نکته چون P بر $(x-2)(x+2)$ بخش‌پذیر است پس هم بر $x+2$ بخش‌پذیر است هم بر $x-2$. (ادامه به عهده‌ی خودتان)

روشی دیگر برای یافتن باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه ۲

این روش را با حل یک مثال توضیح می‌دهیم.

می‌خواهیم باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^5+4x^3+5x^2-1$ را بر x^2-1 بیابیم.

مرحله اول: مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم: $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$

مرحله دوم: مقسوم را برحسب x^2 مرتب می‌کنیم: $(x^2)^2 x + 4(x^2)^2 + 5x^2 - 1$

مرحله سوم: جای x^2 مقدارش را در مقسوم می‌گذاریم تا باقی‌مانده بدست آید:

$x^2=1 \rightarrow R = 1\times x + 4(1)^2 + 5\times 1 - 1 = x + 4 + 5 - 1 = x + 7$

تذکر: گاهی اوقات نیاز است مرحله سوم، چندبار تکرار شود.

مثال: کنکور ریاضی خارج ۹۴

اگر عبارت $x^4 + ax^2 - bx + 4$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد، b کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x^2 = 2x - 1$

$$(x^2)^2 + ax^2 - bx + 4 \Big|_{x^2=2x-1} = (2x-1)^2 + a(2x-1) - bx + 4$$

$$= 4x^2 - 4x + 1 + 2ax - a - bx + 4 \Big|_{x^2=2x-1}$$

$$= 4(2x-1) - 4x + 2ax - a - bx + 5 = 8x - 4 - 4x + 2ax - a - bx + 5$$

$$= 4x + 2ax - bx - a + 1 = x(4 + 2a - b) - a + 1 = 0$$

$$\begin{cases} 4 + 2a - b = 0 \\ -a + 1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases} \quad 4 + 2 - b = 0 \rightarrow b = 6$$

گزینه ۴

تجزیه چند رابطه جدید :

در سال‌های گذشته با اتحاد جزء جمع و اتحادهای زیر آشنا شدید :

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

$$x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)$$

می‌خواهیم اتحادهای جزء را برای توان‌های بیشتر از ۳، تعمیم دهیم :

۱) تعمیم $\underbrace{x^n-y^n}_{P}$ بر $x-y$:

$$x-y=0\rightarrow x=y\rightarrow P(y)=y^n-y^n=0=R$$

پس x^n-y^n همواره بر $x-y$ بخش‌پذیر است.

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}) \qquad n\in\mathbb{N}$$

۲) تعمیم $\underbrace{x^n-y^n}_{P}$ بر $x+y$:

$$x+y=0\rightarrow x=-y\rightarrow P(-y)=(-y)^n-y^n \overset{n=2k}{=\!=} y^n-y^n=0$$

$x^n - y^n$ برای nهای زوج بر $x+y$ بخش‌پذیر است.

$n=2k$: $x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + xy^{n-2} - y^{n-1})$

۳) تقسیم $\frac{x^n + y^n}{x+y}$:

$x+y=0 \rightarrow x=-y \rightarrow P(-y) = (-y)^n + y^n$

$x^n + y^n$ برای nهای فرد بر $x+y$ بخش‌پذیر است.

$n=2k+1$: $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$

سوال: تحت چه شرایطی برای n، $x^n + y^n$ بر $x-y$ بخش‌پذیر است؟

$x-y=0 \rightarrow x=y \rightarrow P(y) = y^n + y^n \neq 0$

هیچ‌گاه $x^n + y^n$ بر $x-y$ بخش‌پذیر نیست.

مثال: کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{(x^4-1)(x+2)}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x^3+x^2\times 1 + x\times 1^2 + 1^3)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = x^3+x^2+x+1$

ب) $\frac{(1-t+t^2-t^3+t^4)(1+t)}{1-t^{10}} = \frac{1^5+t^5}{1-t^{10}}$

$= \frac{1+t^5}{(1-t^5)(1+t^5)} = \frac{1}{1-t^5}$

ج) $\frac{(7^9+1)(5^9+5^8+5^7+\dots+1)}{(5^{10}-1)(4^{10}-4^9+4^8-\dots+1)}$

$7^9+1 = (7+1)(7^8-7^7+7^6-\dots+1)$

$5^{10}-1 = (5-1)(5^9+5^8+\dots+1)$

عبارت $= (7+1)(7^8-7^7\dots+1)(5^9+5^8+\dots+1)$
$(5-1)(5^9+5^8+\dots+1)(7^8-7^7+\dots+1)$

$= \frac{7}{4}$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1-x^8}{(1-x^2+x^4-x^6)(x^2+x)}$ ، مقدار $f(-\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

$(1-x^8)x = (1-(x^2)^4)x = x\underbrace{(1+x^2)}_{\text{عامل}}\underbrace{(1-x^2+(x^2)^2-(x^2)^3)}_{\text{عامل}}$ = حاصل؟

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 - 1)} = \frac{1}{x}$$

$$f\left(-\frac{2}{4}\right) = \frac{1}{-\frac{2}{4}} = -\frac{4}{2}$$

گزینه ۱

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل دوم: مشتق

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

قسمت اول: تناوب

جلسه اول: صفحات ۲۴ و ۲۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تابع متناوب :

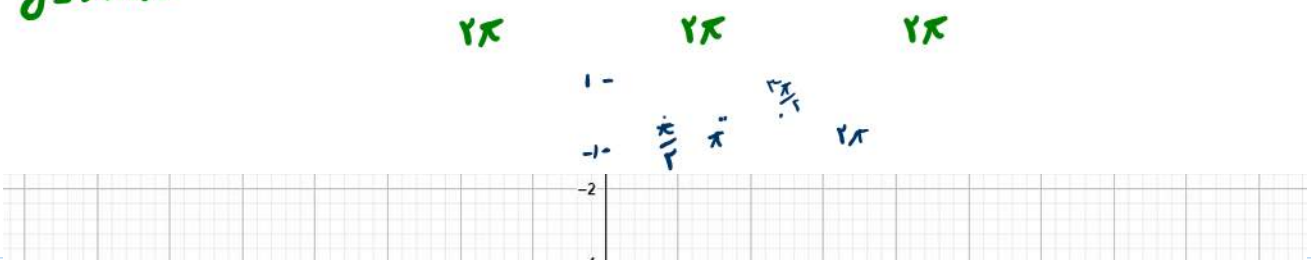
اگر در تابعی برای هر مقدار از دامنه تابع، تساوی $f(x+T)=f(x)$ برقرار باشد، حتی اضافه کردن T، اثری روی مقدار تابع نداشته باشد، می‌گوییم f متناوب است.

به کوچک‌ترین مقدار مثبت T دوره تناوب می‌گوییم.

به عبارت دیگر در توابع متناوب، قسمتی از نمودار در حال تکرار شدن است. به کوچکترین اندازه افقی این قسمت تکرار شونده دوره تناوب می‌گوییم.

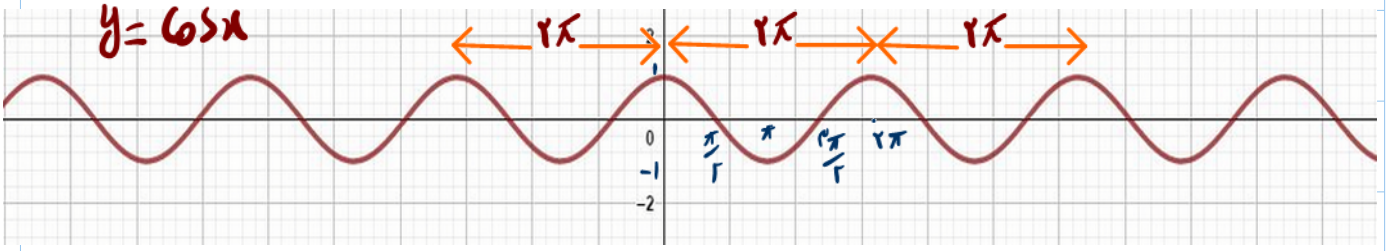
مثال : دوره تناوب توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را بیابید.

$y=\sin x$



$T=2\pi$

$y=\cos x$



$T=2\pi$

نکته: اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد، اضافه یا کم کردن مضارب صحیح

T، مقدار تابع را تغییر نمی‌دهد: $f(x+kT)=f(x)$

مثال: اگر قسمتی از نمودار تابع f به شکل زیر باشد، $f(1399)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$



$T=4$

باید مقداری از ۴ را به ۱۳۹۹ اضافه یا کم کنیم تا عددی بین ۰ تا ۴ بدست آید.

$$f(1399)=f(1399+(-349)4)=f(1399-1396)=f(3)$$

خط AB : $A(2,4), B(4,0)$ $\quad m=\frac{0-4}{4-2}=-\frac{4}{2}$

$$y-0=-\frac{4}{2}(x-4) \Rightarrow y=-\frac{4}{2}x+6$$

$$f(3)=-\frac{4}{2}(3)+6=-\frac{9}{2}+6=\frac{3}{2}$$

گزینه ۲

مثال: ضابطه تابع متناوب f در بازه $(0,1)$ به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ است. اگر دوره تناوب تابع برابر ۱ باشد، $f(-0/46)$ کدام است؟

۱) ۸٪ ۲) ۶٪ ۳) تعریف نشده ۴) ۴٪

گزینه ۱ $f(-0,46)=f(-0,46+1)=f(0/54)=\sqrt{0/54}=0/8=8\%$

نکته: اگر دوره تناوب $f(x)$ برابر T باشد، دوره تناوب $af(bx+c)+d$ برابر $\frac{T}{|b|}$ است. یعنی برای محاسبه دوره تناوب فقط به ضریب x توجه می‌کنیم.

سایر ضرایب و انتقال‌ها اثری روی دوره تناوب ندارند.

مثال: دوره تناوب $y=2f(6x-1)+4$ برابر ۲ است. دوره تناوب $g(x)=-f(3x)-1$ را بیابید.

$y: \quad 2=\frac{T_f}{4} \Rightarrow T_f=12$

$g: \quad T_g=\frac{T_f}{3}=\frac{12}{3}=4$

نتیجه: دوره تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)+d$ ، $y=a\cos(bx+c)+d$ برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است.

مثال: اگر دوره تناوب تابع $f(x)=k\cos(kx)+3$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۴

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{k} \Rightarrow k\pi=8\pi \longrightarrow k=8$$

$$f(x)=8\cos 8x+3 \Rightarrow f(0)=8\underbrace{\cos 8\times 0}_{1}+3=8\times 1+3=11$$ گزینه ۱

نکته: گاهی اوقات لازم است با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی، تابع را ساده تا حد امکان ساده کنیم، سپس دوره تناوب را محاسبه کنیم.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x)=\cos^2 x-\cos^4 x$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) 2π

$$f(x)=\cos^2 x-\cos^4 x=\cos^2 x(1-\cos^2 x)=\cos^2 x\sin^2 x$$

یادآوری : $\sin 2x = 2\sin x \cos x \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\sin^2 2x$

یادآوری : $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$

$T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ گزینه ۲

مثال : اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \sqrt{2}\cos^2(mx-4)$ برابر $\frac{3\pi}{4}$ باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$f(x) = \sqrt{2} \times \frac{1+\cos 2(mx-4)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\cos(2mx-8))$

گزینه ۱

$T = \frac{3\pi}{4} = \frac{2\pi}{|2m|} \Rightarrow 3\pi|m| = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{8\pi}{3\pi} = \frac{4}{3} \Rightarrow m = \pm\frac{4}{3}$

نکته: دوره تناوب توابع $y=\tan ax$, $y=\cot ax$ برابر است با $T=\frac{\pi}{|a|}$.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ کدام است؟

۱) 4π ۲) 2π ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

$$f(x)=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$$ گزینه ۲

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

قسمت دوم: بررسی توابع مثلثاتی با ضابطه $y = asinbx + c$ یا

$$y = acosbx + c$$

جلسه دوم: صفحات ۲۶ تا ۲۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

بررسی توابع مثلثاتی به صورت $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$

پارامتر a باعث انبساط یا انقباض عمودی تابع سینوس و کسینوس می‌شود و پارامتر c یک انتقال عمودی را نتیجه می‌دهد. پس مقادیر ماکزیمم و مینیمم این گونه توابع عبارتند از:

$$y_{max}=|a|+c \qquad y_{min}=-|a|+c$$

در درس قبل هم دیدیم پارامتر b که باعث انبساط یا انقباض افقی می‌شود، در دوره تناوب مؤثر است و $T=\frac{2\pi}{|b|}$.

مثال: مقادیر max، min و دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

الف) $y=3-\cos(\frac{1}{4}x)$ $\qquad T=\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$

$y_{max}=1-|-1|+3=1+3=4$ $\qquad y_{min}=-1-|-1|+3=-1+3=2$

ب) $y=-2\sin(\pi x)+\sqrt{3}$ $\qquad T=\frac{2\pi}{\pi}=2$

$y_{max}=|-2|+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$ $\qquad y_{min}=-|-2|+\sqrt{3}=-2+\sqrt{3}$

نکته: اگر نمودار تابعی به صورت $y=a\cos bx+c$ یا $y=a\sin bx+c$ باشد، برای سریع‌تر کردن ضابطه تابع هنگ یافتن پارامترهای a، b، c و تشخیص سینوسی یا کسینوسی بودن تابع به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) اگر مقدار yها از max یا min نمودار شروع کند، تابع کسینوسی است در غیر این صورت سینوسی است.

۲) با جمع و کم کردن روابط گفته شده برای مقادیر max و min داریم:

$$\begin{cases} y_{max}=|a|+c \\ y_{min}=-|a|+c \end{cases} \xrightarrow{+} y_{max}+y_{min}=2c \Rightarrow c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}$$

$$\Rightarrow y_{max}-y_{min}=2|a| \Rightarrow |a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}$$

۳) برای یافتن b از دوره تناوب کمک می‌گیریم ($T=\frac{2\pi}{|b|}$)

۴) برای تشخیص علامت a و b این‌گونه عمل می‌کنیم:

الف- در توابع سینوسی اگر نمودار از مبدا $x=0$ روند صعودی داشته باشد، a و b هم‌علامت هستند یعنی: $a\times b>0$

و اگر نمودار به ازای $x=0$ روند نزولی داشته باشد، a و b نیز هم‌علامت اند یعنی: $ab>0$

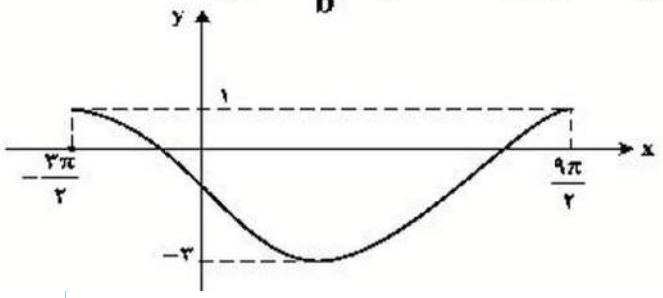
ب- در توابع کسینوسی اگر نمودار، روی محور yها، ماکزیمم داشته باشد $a>0$ است

و اگر مینیمم داشته باشد $a<0$ است.

با توجه به رابطه $\cos(-x)=\cos x$، b می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

مثال: کنکور سراسری ۹۹ تجربی :

شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟



۱) -۲
۲) -۳
۳) -۴
۴) -۶

$T = \frac{۹\pi}{۲} - (-\frac{۳\pi}{۲}) = \frac{۱۲\pi}{۲} = ۶\pi \Rightarrow ۶\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳}$

$|a| = \frac{۱-(-۳)}{۲} = \frac{۱+۳}{۲} = ۲$

چون به ازای $x=0$ تابع نزولی است پس $ab<0$ و در حالت داریم:

$\begin{cases} a=-۲ \\ b=\frac{۱}{۳} \end{cases}$: $\frac{a}{b} = \frac{-۲}{\frac{۱}{۳}} = -۶$

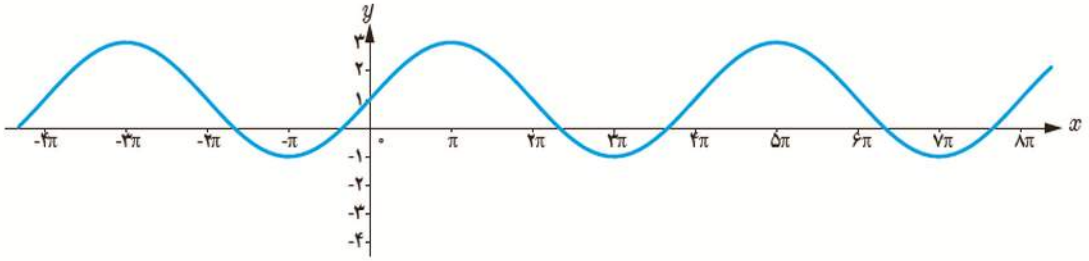
$\begin{cases} a=۲ \\ b=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$ $\frac{a}{b} = \frac{۲}{-\frac{۱}{۳}} = -۶$

گزینه ۴

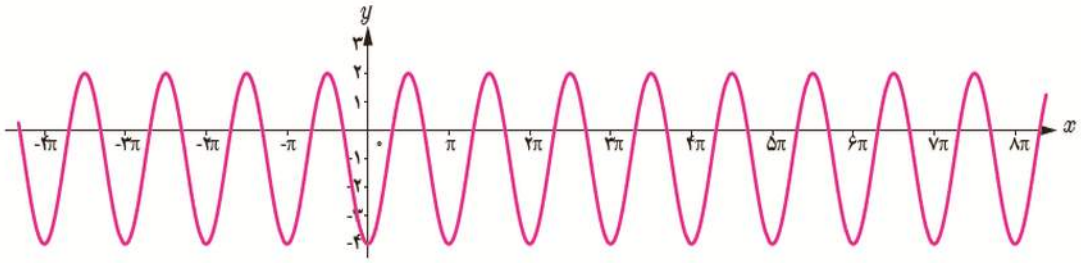
مثال: ضابطهٔ توابع زیر به صورت $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ است.

ضابطهٔ آن‌ها را مشخص کنید.

الف)



ب)



الف) $T=4\pi \Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{1}{2}$ تابع سینوسی است

$|a|=\frac{4-(-1)}{2}=\frac{5}{2}=2$, $c=\frac{4+(-1)}{2}=\frac{3}{2}=1$

چون $x=0$ تابع دو نمودی دارد پس $ab>0$:

ضابطهٔ تابع : $y=2\sin\frac{1}{2}x+1$ یا $y=-2\sin(-\frac{1}{2}x)+1$

ب) $T=\pi \Rightarrow \pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=2$ تابع کسینوسی

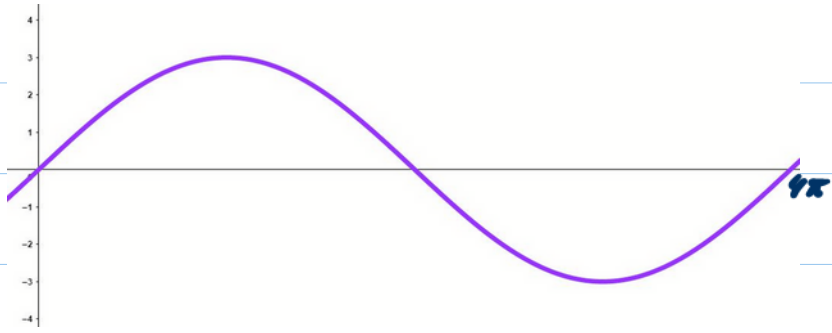
$|a|=\frac{2-(-4)}{2}=\frac{6}{2}=3$, $c=\frac{2+(-4)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

چون بعد y ها از min ی مثبت پس $a<0$ یعنی -3 است:

ضابطه تابع $y=-3\cos(-2x)-1$ یا $y=-3\cos 2x-1$

مثال: شکل زیر نمودار تابع $f(x)=a\sin bx$ است. مقدار ab کدام است؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4



$$T=4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi|b|=2\pi \Rightarrow |b|=\frac{2\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$$

$$|a|=\frac{3-(-3)}{2}=\frac{6}{2}=3$$

بعد از $x=0$ روند تابع صعودی است پس $ab>0$ است:

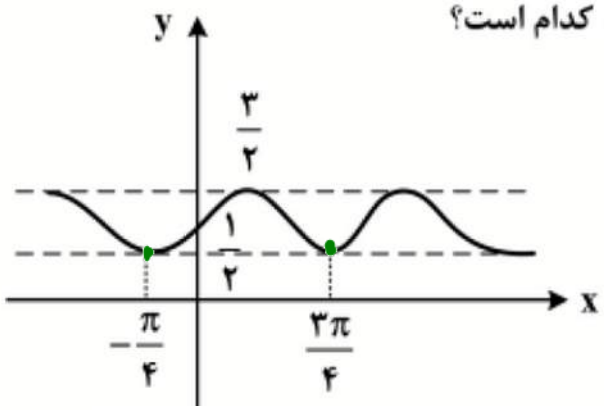
$$a=3,\ b=\frac{1}{2} \Rightarrow ab=3\times\frac{1}{2}=1$$

$$a=-3,\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow ab=-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

گزینه 1

مثال: کنکور سراسری ۹۸ ریاضی :

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = ۱ + a\sin bx\cos bx$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) ۳

مضرب دوره متناسب ضریب Sin

$$y = ۱ + a\sin bx\cos bx = ۱ + \frac{۱}{۲}a\sin ۲bx$$

$$T = \frac{۳\pi}{۴} - (-\frac{\pi}{۴}) = \frac{۴\pi}{۴} = \pi \Rightarrow \pi = \frac{۲\pi}{|۲b|} \Rightarrow \pi|b| = \pi \Rightarrow |b| = ۱$$

$$|\frac{۱}{۲}a| = \frac{\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow |a| = ۱$$

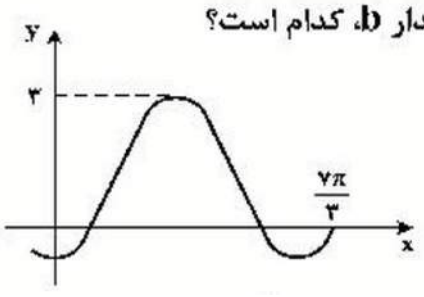
بعد از $x=۰$ روند تابع صعودی است پس $ab>۰$ است :

$$\begin{cases} a=۱ \\ b=۱ \end{cases} \quad a+b=۲ \quad , \quad \begin{cases} a=-۱ \\ b=-۱ \end{cases} \quad a+b=-۲$$

گزینه ۴

مثال: کنکور سراسری ۹۹ تجربی

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x)$ است. مقدار b، کدام است؟



۱) ۲

۲) ۱

۳) -۱

۴) -۲

$$y = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = a + b\cos x$$

$$y_{max} = 4 = |b| + a$$

چون ماکزیمم‌ها از min بیشتر شده است پس $b < 0$:

$$a - b = 4 \quad (1)$$

$$\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right) \xrightarrow{\text{قرینه}} 0 = a + b\cos\frac{7\pi}{4} \Rightarrow 0 = a + b\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

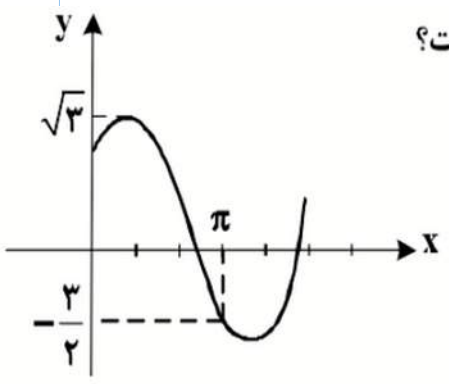
$$\Rightarrow 0 = a + b\cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 = a + b\times\frac{1}{2} \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 4 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3b}{2} = -4 \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} \Rightarrow b = -2$$

گزینه ۴

مثال : کنکور سراسری ۹۸ تجربی :

شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\sqrt{3}$
۴) ۲

$$y_{max} = |b| + a \Rightarrow |b| + a = \sqrt{4}$$

چون تابع به ازای $x=0$ روند صعودی دارد پس b با یک (ضریب x) هم‌علامت و مثبت است:

$$a+b=\sqrt{۳} \qquad (۱)$$

$$(\pi, -\frac{۳}{۲}) \xrightarrow{\text{در تابع}} -\frac{۳}{۲} = a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{۳}) \quad (-\sqrt{۳}/۲)$$

$$a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}b=-\frac{۳}{۲} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{cases} a+b=\sqrt{۳} \\ -\left(a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}b=-\frac{۳}{۲}\right) \end{cases} \Rightarrow b+\frac{\sqrt{۳}}{۲}b=\sqrt{۳}+\frac{۳}{۲}$$

$$b\left(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\sqrt{۳}\left(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) \Rightarrow b=\sqrt{۳}$$ گزینه ۳

مثال: نمودار تابع $f(x)=a\cos bx$ به صورت زیر است. $f(\frac{1}{۲})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}\pi$ ۲) $-\sqrt{۲}\pi$ ۳) $\sqrt{۶}\pi$ ۴) $-\sqrt{۶}\pi$

-1

-۲π

$$y_{min}=-|a|+۰=-۲\pi \Rightarrow |a|=۲\pi$$

چون نمودار ما از min شروع کرده پس $a<۰$ است:

$\Rightarrow -a = 2\pi \Rightarrow a = -2\pi$

چون $f(-1) = 0$ پس :

$a = -2\pi(\cos(-b)) \Rightarrow \cos(-b) = 0 \Rightarrow -b = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$

اولین نقطه‌ای که تابع $\cos$ قبل از $x = 0$ برابر صفر می‌شود $-\frac{\pi}{2}$ است.

$f(x) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} x$

$f(\frac{1}{2}) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = -2\pi \cos \frac{\pi}{4} = -2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\pi$

گزینه ۲

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

قسمت سوم: تانژانت

جلسه سوم: صفحات ۲۹ تا ۳۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تانژانت در دایره مثلثاتی :

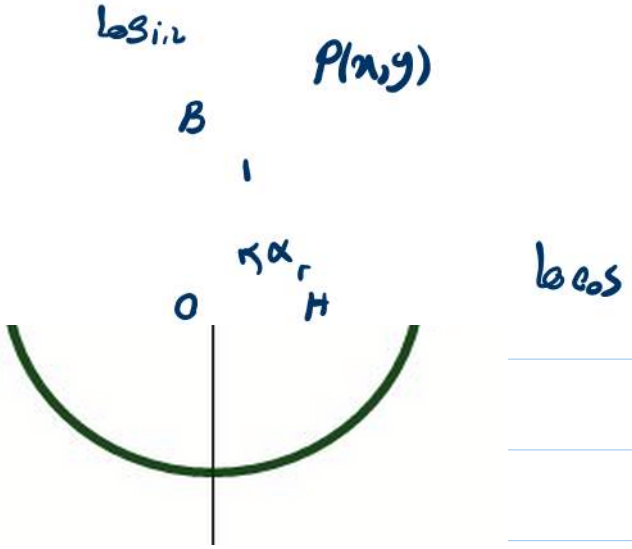
یادآوری : دایره مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدأ مختصات است.

ضلع انتهای هر زاویه در دایره مثلثاتی، بر قسمت مثبت محور xها واقع است.

اگر اندازه زاویه $\alpha > 0$ باشد به اندازه α در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت

دوران می‌کنیم و اگر $\alpha < 0$ باشد به اندازه α در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخیم.

اگر ضلع انتهایی زاویه محیط دایره را در نقطه $P(x,y)$ قطع کند داریم :

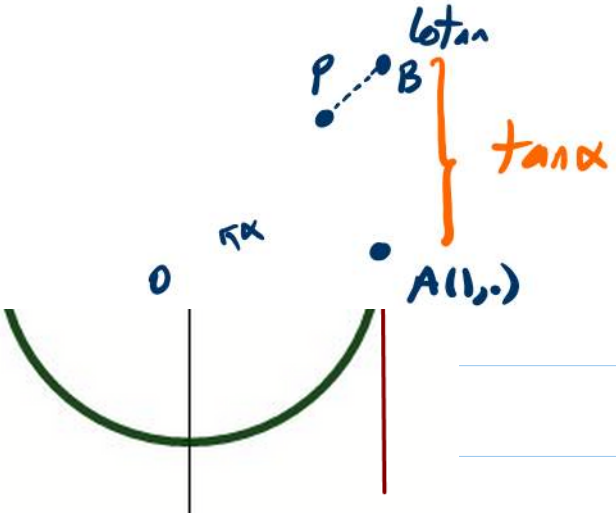


$\triangle OHP$: $\sin\alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{PH}{1} \Rightarrow \sin\alpha = PH = BO \Rightarrow y_P = \sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{OH}{1} \Rightarrow \cos\alpha = OH \Rightarrow x_P = \cos\alpha$

محور تانژانت ها را موازی محور سینوس ها و مماس بر دایره در نقطه $A(1,0)$ در نظر می گیریم. مبدأ این محور $A(1,0)$ است و جهت مثبت آن مانند محور سینوس هاست.

یعنی بالای A تانژانت مثبت و پایین A تانژانت منفی است.



اگر شعاع دایره را واحد در نظر بگیریم، محور تانژانت ها را در B قطع می کند.

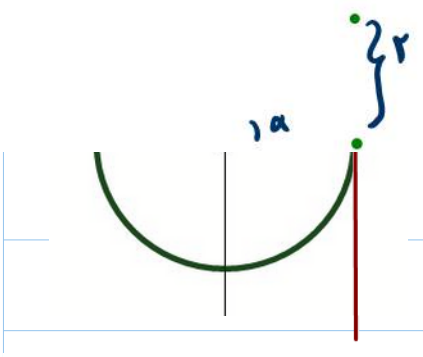
$$\hat{OAB}: \quad \tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} \Rightarrow \tan\alpha = AB$$

توجه: علامت تانژانت در نواحی چهارگانه به صورت زیر است:



نکته : در زاویه‌های $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و بطور کلی در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ ، هرچقدر شعاع را امتداد دهیم محور تانژانت‌ها را قطع نمی‌کند. در این زاویه‌ها تانژانت تعریف نشده است.

مثال : در شکل زیر $\cos\alpha$ کدام است؟

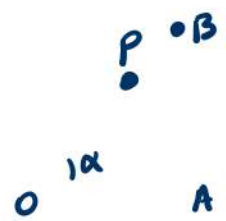


۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

$\tan\alpha = 2$ ، $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+4 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} \cos\alpha = \frac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ گزینه ۲

مثال : با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، اگر $P(2a-1, a)$ باشد، مساحت مثلث AOB چقدر است؟



۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$x_P = 2a-1 = \cos\alpha$

$y_P = a = \sin\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow a^2 + (2a-1)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 4a^2 - 4a + 1 - 1 = 0$

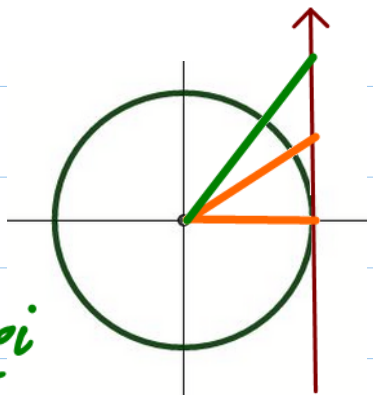
$5a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(5a-4) = 0 \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق ق} \\ 5a - 4 = 0 \longrightarrow a = \frac{4}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos\alpha = 2 \times \frac{4}{5} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} \end{cases}$

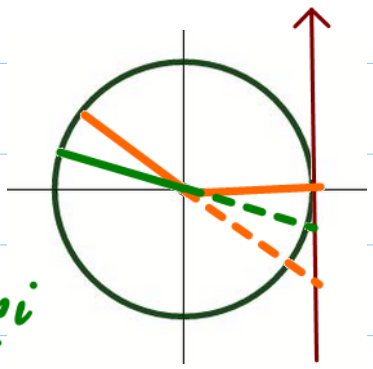
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{3} = AB$

$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times AB = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ گزینه ۲

نکته: در ربع‌های فرجی چهارگانه با افزایش زاویه، مقدار تانژانت هم افزایش می‌یابد.



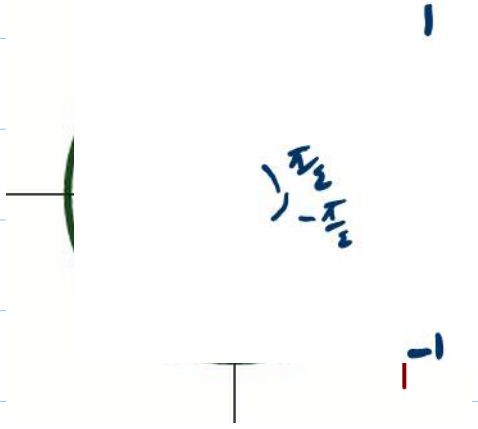
ناحیه اول



ناحیه دوم

برای نواحی سوم و چهارم به طور مشابه عمل می‌کنیم.

مثال: اگر $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ و $\tan x = \frac{2m-4}{5}$ باشد، مقدار m را بیابید.



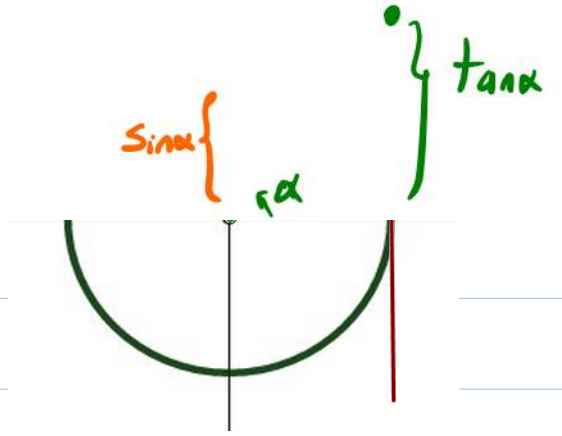
$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$-1 \leq \tan x \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq \frac{2m-4}{5} \leq 1 \quad \xrightarrow{\times 5} \quad -5 \leq 2m-4 \leq 5$$

$$\xrightarrow{+4} \quad -1 \leq 2m \leq 9 \quad \xrightarrow{\div 2} \quad -1 \leq m \leq 4.5$$

نکته: با استفاده از دایره مثلثاتی می‌توان گفت: $|\sin\alpha| < |\tan\alpha|$

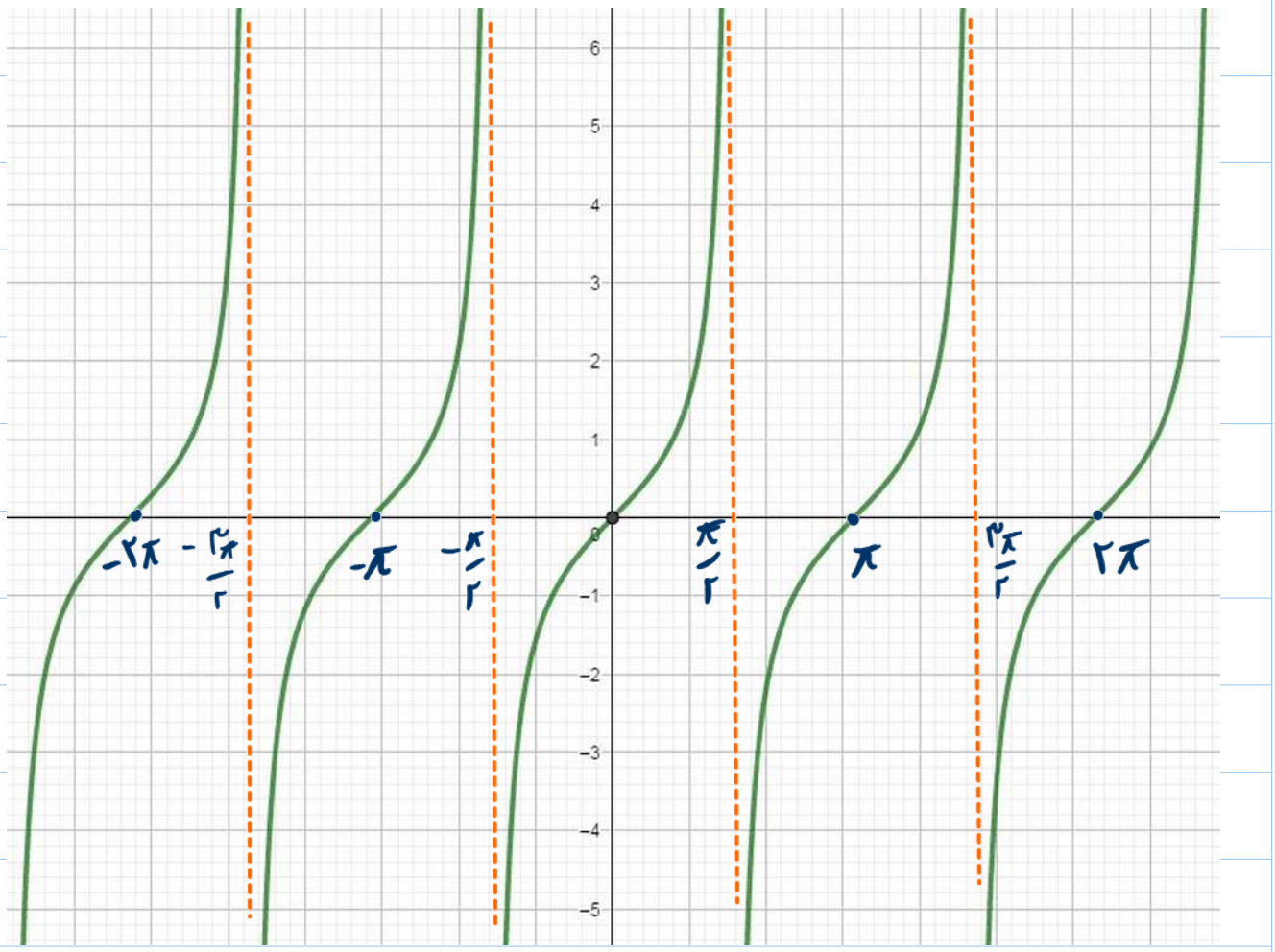


تابع تانژانت

$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$

اگر x عددی حقیقی باشد و $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$، تابعی که به هر x تانژانت آن را نسبت می‌دهد تابع تانژانت نامیده می‌شود.

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \tan x$ با در نظر گرفتن دایره مثلثاتی به نمودار زیر می‌رسیم:



پس درباره تابع $f(x)=\tan x$ می‌توان گفت :

۱- $D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

۲- $R_f = \mathbb{R}$

۳- تابع تانژانت، تابعی متناوب است و $T = \pi$

۴- تابع تانژانت یک‌به‌یک نیست ولی در بازه‌هایی که در آن تعریف می‌شود، یک‌به‌یک است.

مثلاً در بازه‌هایی که شامل $k\pi + \frac{\pi}{2}$ها نیستند، اکیداً صعودی است.

تذکر: دوره تناوب تابع $y = a\tan(bx+c)+d$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

مثال: دامنه تابع $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2})$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $x \neq k$ ۲) $x \neq 2k+1$ ۳) $x \neq 2k$ ۴) $\mathbb{Z}$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \neq k\pi$$

$$\times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq k\pi \times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq 2k$$

گزینه ۳

مثال: اگر $f(x)=\tan x-\frac{1}{\tan x}$، دوره تناوب تابع $\frac{1}{f}$ را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}$$

$$=-2\cot 2x=-\frac{2}{\tan 2x}$$

$$\frac{1}{f}=-\frac{1}{2}\tan 2x \Rightarrow T_{\frac{1}{f}}=\frac{\pi}{2}$$

مثال: تابع f با ضابطه $f(x)=\tan(\frac{\pi}{4}x)$ و دامنه $(2,a)$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

حداکثر مقدار a کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

باید طول تمام نقاط بر $\frac{\pi}{4}$ تقسیم یا در $\frac{4}{\pi}$ ضرب شود:

حداکثر مقدار برای a برابر

تابع در بازه $(2,a)$ اکیداً صعودی

باشد، 4 است. پس گزینه ۳ درست است.

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

قسمت اول: معادلات سینوسی و کسینوسی

جلسه چهارم: صفحات ۳۵ تا ۴۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری :

۱) جدول نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف :

	0	$\frac{\pi}{6}$ (۳۰°)	$\frac{\pi}{4}$ (۴۵°)	$\frac{\pi}{3}$ (۶۰°)	$\frac{\pi}{2}$ (۹۰°)	π (۱۸۰°)	$\frac{3\pi}{2}$ (۲۷۰°)	2π (۳۶۰°)
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	۱-	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۱-	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۲) جدول علامت نسبت‌های مثلثاتی :

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

۳) نسبت‌های مثلثاتی زاویه $(-\alpha)$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\quad$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

۴) دو زاویه متمم: α, β متمم اند. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}=90^\circ \Rightarrow$

$\sin\alpha=\cos\beta$, $\sin\beta=\cos\alpha$

$\tan\alpha=\cot\beta$, $\tan\beta=\cot\alpha$

مثال: $30+60=90$

$\sin 30=\cos 60=\frac{1}{2}$

$\sin 60=\cos 30=\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵) نسبت‌های مثلثاتی $(k\pi\pm\alpha)$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

الف) اگر ضریب π عددی زوج باشد آن را از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می‌کنیم.

$\sin(2k\pi\pm\alpha)=\sin(\pm\alpha)$

$\cos(2k\pi\pm\alpha)=\cos(\pm\alpha)$

ب) اگر ضریب π عددی فرد باشد آن را از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می‌کنیم اما نسبت مثلثاتی را قرینه می‌کنیم.

$\sin((2k+1)\pi\pm\alpha)=-\sin(\pm\alpha)$

$\cos((2k+1)\pi\pm\alpha)=-\cos(\pm\alpha)$

ج) ضریب π چه زوج و چه فرد باشد آن را از کمان‌های $\tan$ و $\cot$ حذف می‌کنیم.

$\tan(k\pi\pm\alpha)=\tan(\pm\alpha)$

$\cot(k\pi\pm\alpha)=\cot(\pm\alpha)$

۶) نسبت های مثلثاتی $\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$

همیشه فرض می کنیم α حاده است و ناحیه ای که زاویه $\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ در آن است را مشخص می کنیم و علامت نسبت را تشخیص می دهیم. حال مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ را حذف کرده و اسم نسبت را به صورت زیر تغییر می دهیم.

$\sin \to \cos$, $\cos \to \sin$, $\tan \to \cot$, $\cot \to \tan$

$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \underbrace{\sin}_{\text{نسبت}} \cos\alpha$

$\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \underbrace{\cos}_{\text{نسبت}} \sin\alpha$

$\tan\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \underbrace{\tan}_{\text{نسبت}} \cot\alpha$

$\cot\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \underbrace{\cot}_{\text{نسبت}} \tan\alpha$

مثال: نسبت های مثلثاتی زیر را برحسب α بنویسید.

۱) $\sin(2\pi - \alpha) \overset{\text{فرد}}{=} -\sin(-\alpha) \overset{-\sin\alpha}{=} \sin\alpha$

۲) $\cos(3\pi + \alpha) \overset{\text{فرد}}{=} -\cos\alpha$

۳) $\cos(4\pi - \alpha) \overset{\text{زوج}}{=} \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

۴) $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) \overset{\text{مضرب فرد } \frac{\pi}{2}}{=} \sin\left(\frac{4\pi+\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

$= +\cos\alpha$

معادلات مثلثاتی

به معادلاتی که مجهول در کمان یک نسبت مثلثاتی قرار می‌گیرد، معادلات مثلثاتی می‌گوییم.

روش شهودی حل معادله $\sin x = a$:

$\alpha + \beta = \pi \xrightarrow{\text{مکمل}} \sin\alpha = \sin\beta$

sin

روی محور sin مقدار a را مشخص و از این



نقطه حاصل بر محور sin عمود می‌کنیم تا دایره

مثلثاتی را قطع کند. نقطه برخورد‌ها x ها یا جواب

مورد نظر است. البته توجه داشته باشید که فرمول عمومی x ، جواب کلی معادله است.

نتیجه:

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

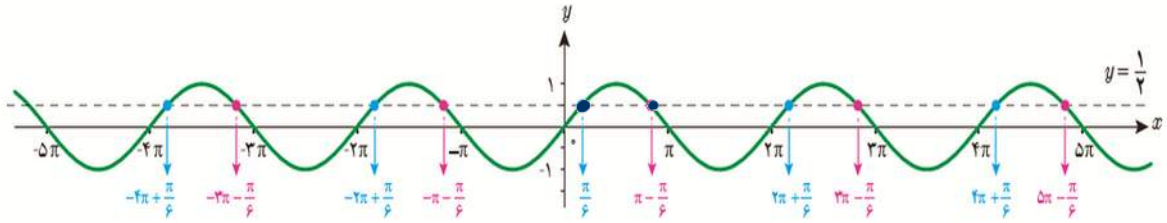
تعمیم

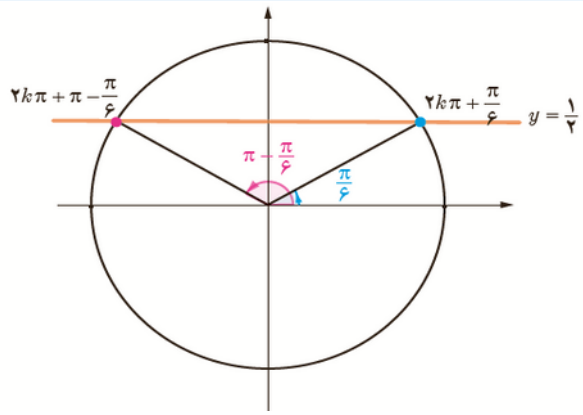
$$\sin\bigcirc = \sin\square \Rightarrow \begin{cases} \bigcirc = 2k\pi + \square \\ \bigcirc = 2k\pi + (\pi - \square) \end{cases}$$

جابه‌جایی

عبارت و

مثال: چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است مثال بزنید.





$$\sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$

ب) $۴\sin x + \sqrt{۸} = ۰$

الف) $۲\sin x = \sqrt{۳} \xrightarrow{\div ۲} \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳}$

$$\begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

ب) $۴\sin x = -\sqrt{۸} \xrightarrow{\div ۴} \sin x = -\frac{\sqrt{۸}}{۴} = -\frac{۲\sqrt{۲}}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{۴})$

$$\begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{۴}) = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

روش شهودی حل معادله $\cos x = a$:

$x = a$

روی محور $\cos$ مقدار a را انتخاب و از این نقطه

a $\cos$

خطی بر محور $\cos$ عمود می‌کنیم تا دایره مثلثاتی

را قطع کند. نقطه برخورد‌ها x یا جواب‌ها در بازه خواسته‌شده.

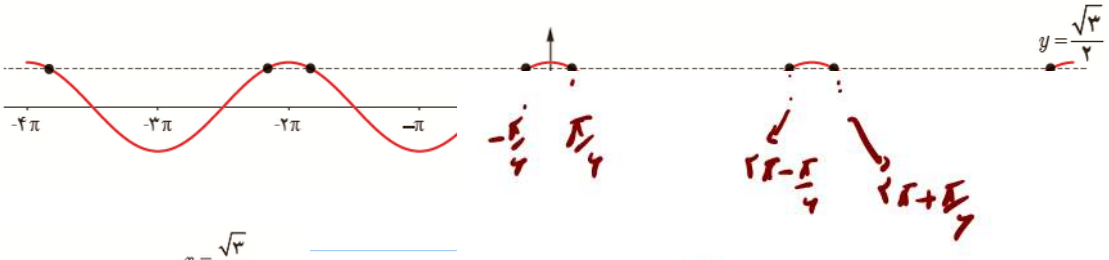
نتیجه:

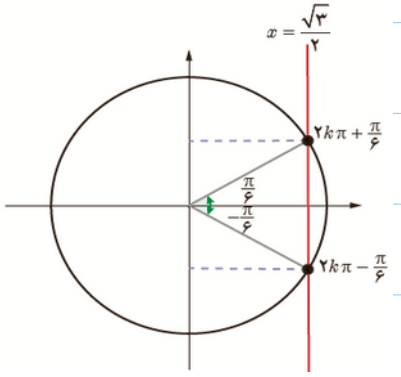
$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

تعمیم

$$\cos \square = \cos \square \Rightarrow \square = 2k\pi \pm \square$$

مثال: چند زاویه که مقدار کسینوس آن‌ها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است مثال بزنید.





$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (جواب عمومی (کلی))

مثال : جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

k	-1	0
x	$-2\pi \pm \frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{3}$

مثال:

$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$

$\Delta = 81 - (4 \times 2 \times (-5)) = 81 + 40 = 121$

$\cos x = \frac{9 \pm 11}{4}$ $\begin{cases} \frac{9+11}{4} = 5 \times & -1 \le \cos x \le 1 \\ \frac{9-11}{4} = -\frac{1}{2} \checkmark \end{cases}$

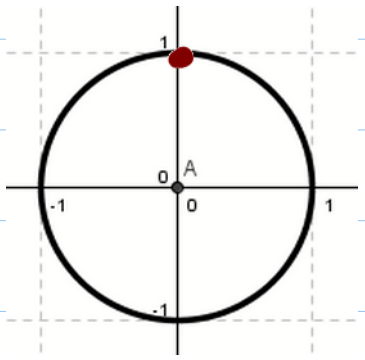
$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos(2\frac{\pi}{3})$



$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

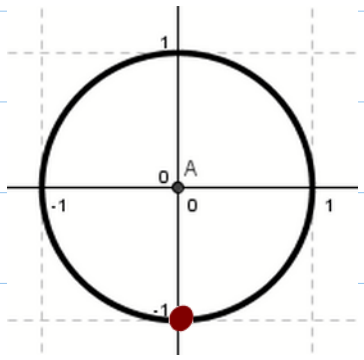
حالت‌های خاص:

$\sin x = 1$



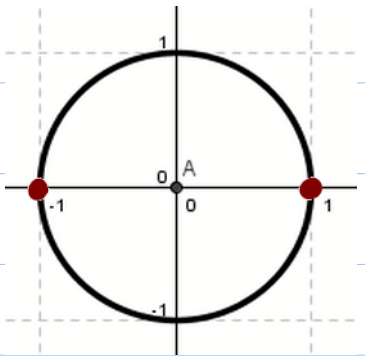
$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin x = -1$



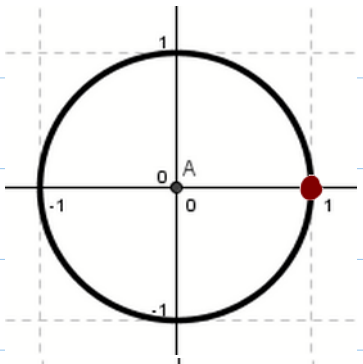
$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$\sin x = 0$



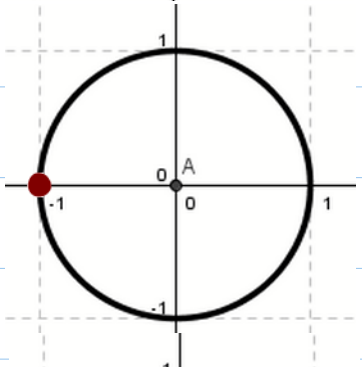
$x = k\pi$

$\cos x = 1$



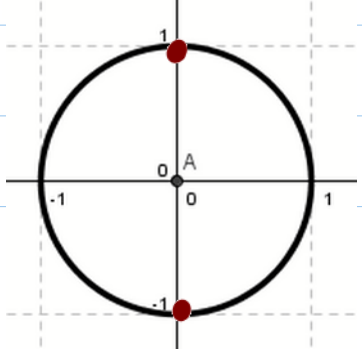
$x = 2k\pi$

$\cos x = -1$



$x = (2k+1)\pi$

$\cos x = 0$



$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۳ معادلات زیر را حل کنید.

لف

حالت خاص $\rightarrow 1=\sin 2x$

$2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} x=\frac{2k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$

$\rightarrow 2\cos^2 x-1-\cos x+1=0$

$2\cos^2 x-\cos x=0 \rightarrow \cos x(2\cos x-1)=0$ $\begin{cases}\cos x=0 \\ 2\cos x-1=0\end{cases}$

$\begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{2} \\ 2\cos x=1 \rightarrow \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\end{cases}$

پ) $\cos x=\cos 2x$

$2x=2k\pi\pm x$

$\begin{cases} 2x=2k\pi+x \rightarrow x=2k\pi \\ 2x=2k\pi-x \rightarrow 3x=2k\pi \rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$

$\rightarrow 1-2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

$-2\sin^2 x-3\sin x+2=0 \qquad \Delta=9-(4\times(-2)(2))=9+16=25$

$\sin x=\dfrac{3\pm 5}{-4}\begin{cases}\frac{8}{-4}=-2 & \times \quad -1\le \sin x\le 1\\ \frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}\end{cases}$

$\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$

$\rightarrow 1-\sin^2 x-\sin x-\frac{1}{4}=0$

$-\sin^2 x-\sin x+\frac{3}{4}=0 \rightarrow \Delta=(-1)^2-(4\times(-1)(\frac{3}{4}))$

$=1+3=4$

$\sin x=\dfrac{1\pm 2}{-2}\begin{cases}\frac{3}{-2} & \times \quad -1\le\sin x\le 1\\ \frac{-1}{-2}=\frac{1}{2} \rightarrow \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} & \begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\end{cases}$

ج) $\sin x-\cos 2x=0$

$\sin x-(1-2\sin^2 x)=0 \rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$\Delta=1-(4\times 2\times(-1))=1+8=9$

$\sin x=\dfrac{-1\pm 3}{4}\begin{cases}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6} & \begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\\ -1\rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$

: حل

$$2\sin x = \sqrt{4} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \xrightarrow{\div 2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

: حل

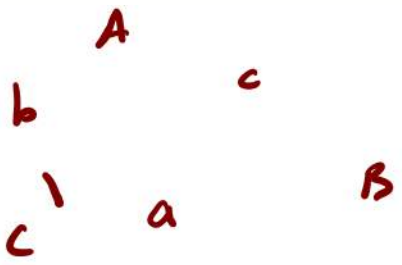
$$2\sin x \cos x = 2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sin 2x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{2\pi/3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

$S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin\hat{C}$



$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin\hat{C} \longrightarrow 3 = 6\sin\hat{C}$

$\sin\hat{C} = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} \hat{C} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{\pi}{6} \checkmark \\ \hat{C} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{5\pi}{6} \checkmark \end{cases}$

دو مثلث

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

قسمت دوم: معادلات تانژانتی و رابطه

تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه

جلسه پنجم: صفحات ۴۱تا۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

روش شهودی حل معادله $\tan x = a$

روی محور $\tan$ مقدار a را مشخص می‌کنیم.

x هایی که مقدارشان به a برخورد می‌کند

جواب معادله هستند.

برای حل معادله $\tan x = a$ ابتدا زاویه‌ای را می‌یابیم که تانژانت آن برابر a شود.

اگر آن زاویه α باشد، برای یافتن جواب‌های کلی این معادله داریم:

$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

مثال: جواب‌های کلی معادلات زیر را بدست آورید.

۱) $\tan x = -1 \Rightarrow \tan x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

۲) $\tan 3x = \tan 2x \Rightarrow 3x = k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi$

۳) $\tan x - 3\cot x = 0 \Rightarrow \frac{\tan x}{1} - \frac{3}{\tan x} = 0 \Rightarrow \frac{\tan^2 x - 3}{\tan x} = 0$

$\Rightarrow \tan^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan x = \tan(\pm\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

نکته مهم: از آنجایی که معادلات تانژانتی محدودیت دامنه دارند، باید جواب به دست آمده را در معادله چک کرد. همچنین در حل معادلات مثلثاتی گاهی دو دایره‌ی دامنه هم باید به دامنه توجه کرد.

مثال: جواب‌های معادله $\cos^2 x + \tan x = 2\cot 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ را بیابید.

نکته: $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$

$\cot x - \tan x + \tan x = \cos^2 x \longrightarrow \cot x = \cos^2 x$

$\longrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \cos^2 x \longrightarrow \cos^2 x(\sin x) = \cos x$

$\rightarrow \cos^2 x(\sin x) - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(\sin x \cos x - 1) = 0$

در بازه‌ی زوایای tan تعریف نمی‌شود: $\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\sin x \cos x - 1 = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = 1 \longrightarrow \sin 2x = 2$ جواب ندارد

$-1 \le \sin x \le 1$

معادله جواب ندارد

مثال: مجموعه جواب های معادله $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ را بیابید.

به توان ۲

$$\Rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{\div \cos x} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

xهایی که در ربع سوم هستند نمی توانند جواب معادله باشند

زیرا sin و cos در ربع سوم منفی هستند و زیر رادیکال مجذور نمی تواند منفی باشد پس:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

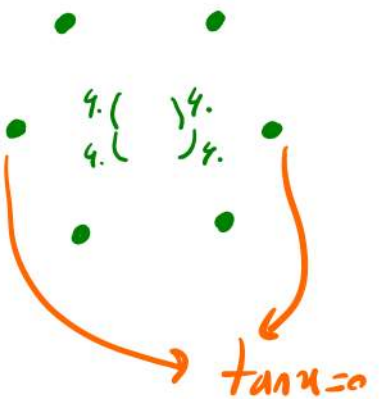
مثال: جواب کلی معادله $\frac{\tan 3x + \tan x}{\tan x} = 1$ را بیابید.

$$\tan 3x + \tan x = \tan x \Rightarrow \tan 3x = 0 \longrightarrow 3x = k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

در $x = k\pi$ ، $\tan x$ نیز در مخرج است، مجاز نیست

پس باید آنها را از جواب کلی کم کرد:



$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

یادآوری :

سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان :

۱) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

۲) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان (2α)

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

تانژانت مجموع و تفاضل دو کمان

۱) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

۲) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

اثبات ۱)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

صورت و مخرج را بر $\cos\alpha\cos\beta$ تقسیم می‌کنیم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad\square$$

رابطه ۲ به طریق مشابه ثابت می‌شود.

مثال: $\tan 105^\circ$ و $\tan 15^\circ$ را محاسبه کنید.

$$\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\times\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

$$\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

مثال: تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\tan 3x+\tan x+\sqrt{3}\tan 3x\tan x=\sqrt{3}$ در بازه $(0,\pi)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\tan 3x + \tan x = \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan 3x \tan x$$

$$\tan 3x + \tan x = \sqrt{3}(1 - \tan 3x \tan x)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 3x + \tan x}{1 - \tan 3x \tan x} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \tan(3x + x) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 4x = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$$

k	0	1	2	3
x	$\frac{\pi}{12}$ ✓	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{4\pi}{12}$ ✓	$\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}$ ✓	$\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{10\pi}{12}$

$$\tan 3x = \tan 3\times\frac{10\pi}{12} = \tan\frac{5\pi}{2}$$

تعریف نشده

جواب گزینه ۳ است.

تأثیرات دو برابر کمان:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

اثبات: $\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ ☐

مثال: اگر $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و انتهای کمان x در ربع اول باشد، مقدار $\tan 2x$ را بیابید.

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{5}}{3})^2}$$

$$\Rightarrow 1+\tan^2 x = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5} \rightarrow \tan^2 x = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$$

$$\xRightarrow[\text{مثبت است}]{\sqrt{}} \tan x = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2 \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{1-(\frac{2}{\sqrt{5}})^2}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$$

مثال: اگر $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ را محاسبه کنید.

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \frac{1}{5} \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}$$

$$= \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1+\tan\alpha = 5-5\tan\alpha \Rightarrow 6\tan\alpha = 4 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2(\frac{2}{3})}{1-(\frac{2}{3})^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4\times 9}{5\times 3} = \frac{12}{5}$$

مثال: معادله $\tan 2x = 3\tan x$ در بازه $(0, \frac{5\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan x$$

$$\Rightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - 3\tan x = 0 \Rightarrow \tan x\left(\frac{2}{1-\tan^2 x} - 3\right) = 0$$

$$\tan x = 0 \longrightarrow x = \pi, 2\pi \quad (4), (5)$$

$$\frac{2}{1-\tan^2 x} - 3 = 0 \longrightarrow \frac{2}{1-\tan^2 x} = 3 \Rightarrow \frac{1-\tan^2 x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1-\tan^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow 1-\frac{2}{3} = \tan^2 x \Rightarrow \frac{1}{3} = \tan^2 x$$

$$\xrightarrow{\surd} \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\longrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{6}$ (1)	$\pi+\frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ (3)	$2\pi+\frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$ (6)
		$\pi-\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (2)	$2\pi-\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ (5)

۷ جواب دارد.

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل سوم: حد

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی-حد در بی‌نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت اول: یادآوری مفهوم حد و قضایای حد

جلسه اول

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

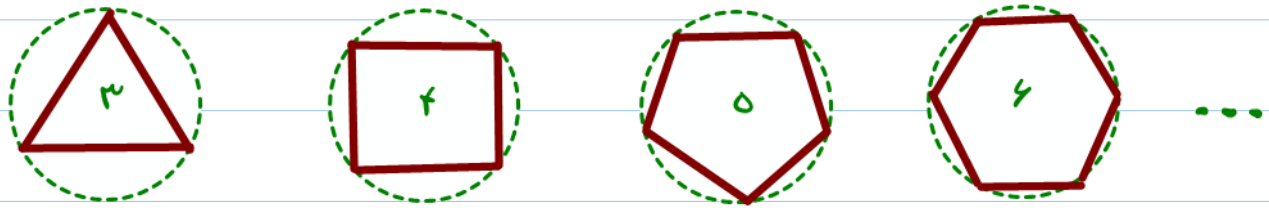
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

قبل از اینکه تعریف دقیق حد یک تابع را بگوئیم، لازم است با مفاهیم زیر آشنا شویم.

۱) فرایند حدی:

- در شکل‌های زیر در هر مرحله یک n ضلعی منتظم را در دایره قرار داده‌ایم. اگر n را زیاد کنیم مساحت n ضلعی به مساحت دایره نزدیک می‌شود.



پس می‌توانیم بگوئیم مساحت چند ضلعی‌های محاطی را به هر اندازه که خواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

- دنباله $\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ را در نظر بگیرید. اگر n عضو شماره جمله را بزرگ و بزرگتر کنیم، جملات دنباله کوچکتر شده و به صفر نزدیک می‌شود.

مثال‌های بالا نمونه‌ای از فرایندهای حدی هستند.

۲) میل کردن :

وقتی می گوییم x به a میل می کند یعنی x بسیار به عدد a نزدیک می شود ولی هرگز برابر عدد a نمی شود و می نویسیم $x \to a$.

مثلاً

$x \to 3$: x ها از هر دو طرف به ۳ نزدیک شوند



وقتی می نویسیم $x \to a^+$ یعنی x از مقادیر بزرگتر از a، به a بسیار نزدیک می شود. در این حالت می گوییم x از سمت راست به a میل می کند.

مثلاً

$x \to 5^+$: x از مقادیر بزرگتر از ۵ به ۵ نزدیک شود



وقتی می نویسیم $x \to a^-$ یعنی x از مقادیر کوچکتر از a، به a بسیار نزدیک می شود. در این حالت می گوییم x از سمت چپ به a میل می کند.

مثلاً

$x \to 4^-$: x از مقادیر کوچکتر از ۴ به ۴ نزدیک می شود



۳) همسایگی :

فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل a را یک همسایگی a می گوییم.

(a,b) یک همسایگی x_0



مثال: بازه $(5,8)$ یک همسایگی شعاع ۳ است.



اگر شعاع x_0 را از همسایگی (a,b) حذف کنیم یعنی $(a,b)-\{x_0\}$، به مجموعه بدست آمده

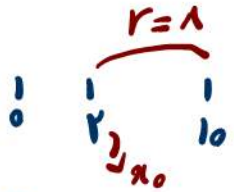
یک همسایگی محذوف x_0 می گوئیم.



اگر $r>0$ باشد بازه باز (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست شعاع r و بازه باز

(x_0-r, x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می گوئیم.

مثال: $(1,10)$ یک همسایگی راست ۲



$(0,2)$ یک همسایگی چپ ۲



حال می توانیم تعریف حد را بیان کنیم.

تعریف حد تابع:

فرض کنید تابع $y=f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد (یعنی در حوزه a تعریف شود

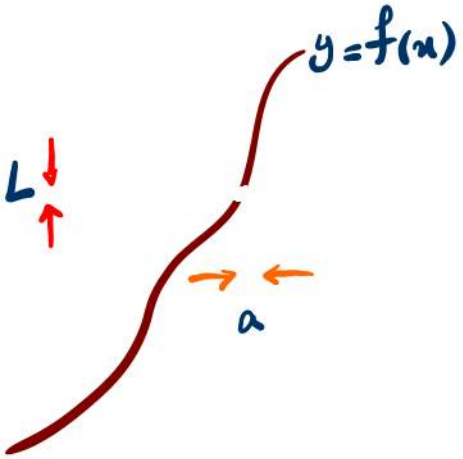
یا نشود فرقی ندارد.) می‌گوییم حد تابع f وقتی $x \to a$ برابر عدد L است هرگاه

با نزدیک شدن x به a مقادیر تابع f (همان yها) به L نزدیک شوند و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

تعریف بالا را به این صورت هم می‌توان گفت:

حد تابع f وقتی $x \to a$ برابر L است هرگاه مقادیر تابع f (همان yها) را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود.

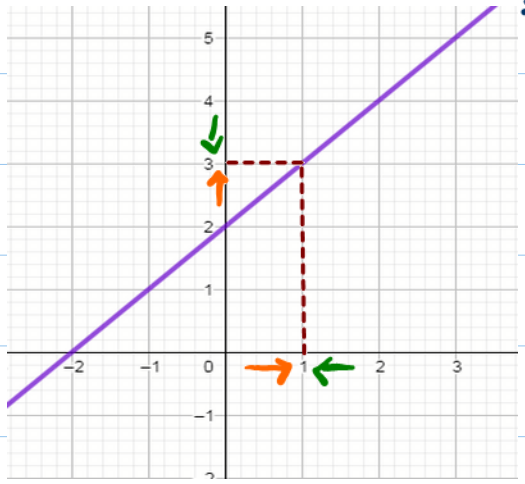


$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

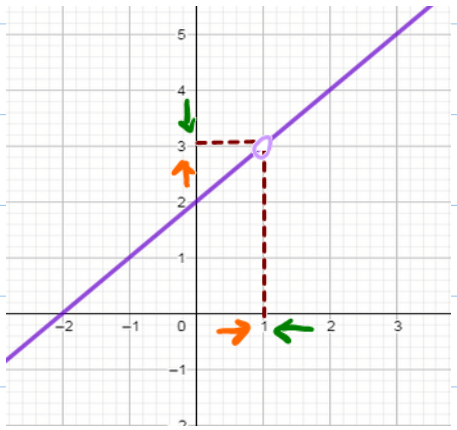
مثال: تابع $f(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول و نمودار، حد تابع را وقتی $x \to 1$ بدست آورید.

x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	$\rightarrow 1 \leftarrow$	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	۲
$y=x+2$	۲	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	$\rightarrow 3 \leftarrow$	۳/۰۱	۳/۱	۳/۵	۴

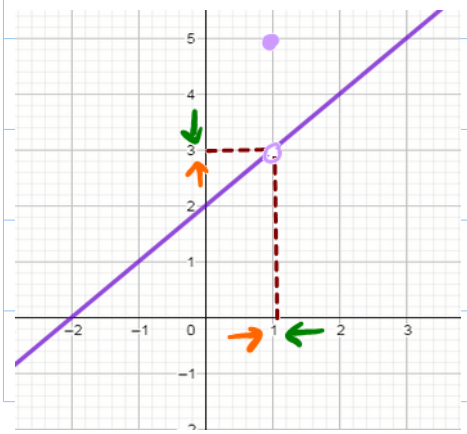
$$\lim_{x \to 1} (x+2) = 3$$



در وضعیت زیر هم حد تابع در $x=1$ برابر ۳ است.



$$g(x) = x+2 \quad , \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$



$$h(x) = \begin{cases} x+2 & x \neq 1 \\ \omega & x = 1 \end{cases}$$

تعریف حد راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد می‌گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر L_1 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_1 نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به a نزدیک شود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$

تعریف حد چپ :

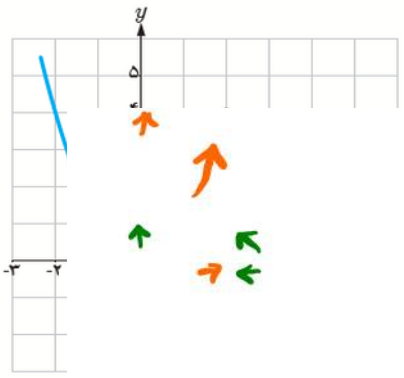
اگر تابع f در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر L_2 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_2 نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به a نزدیک شود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

نکته: حد تابع f در $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حدرات چپ تابع در $x=a$ موجود و برابر باشند یعنی:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -x+3 & x>2 \\ x^2 & x<2 \end{cases}$ به صورت روبه‌رو است:



$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$

تابع در $x=2$ حد ندارد زیرا $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$

مثال:

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$ $\quad$ $= 1$ $\quad$ وجود ندارد $=$

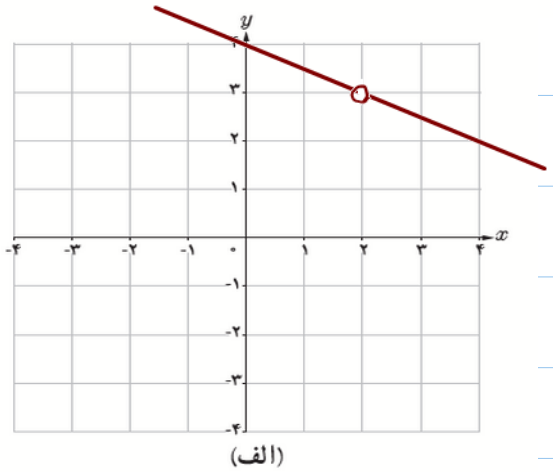
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$ $\quad$ $= 1$ $\quad$ $= 1$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = 3$ $\quad$ وجود ندارد $=$ $\quad$ وجود ندارد $=$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ $\quad$ $= 1$ $\quad$ $= 1$

مثال: نموداری از یک تابع رسم کنید که :

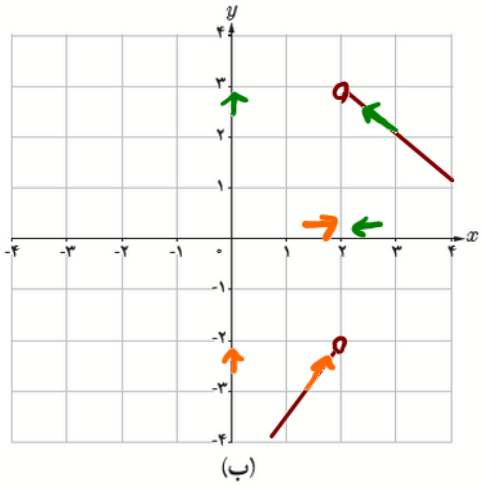
الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.



(الف)

$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.



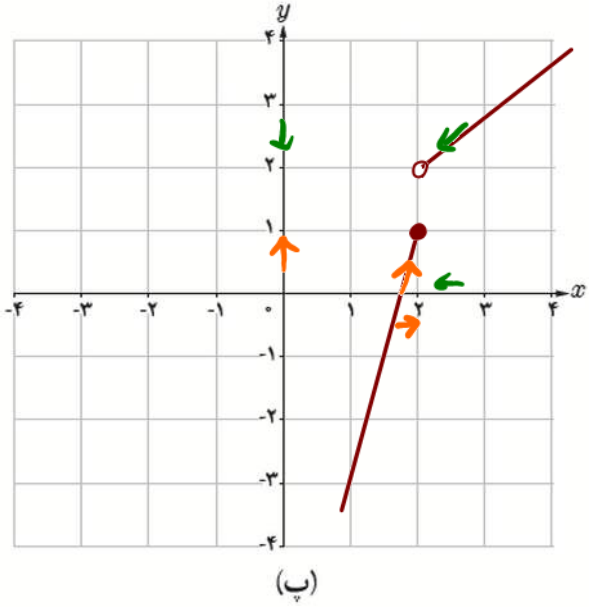
(ب)

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -2$

در $x=2$ حد ندارد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.



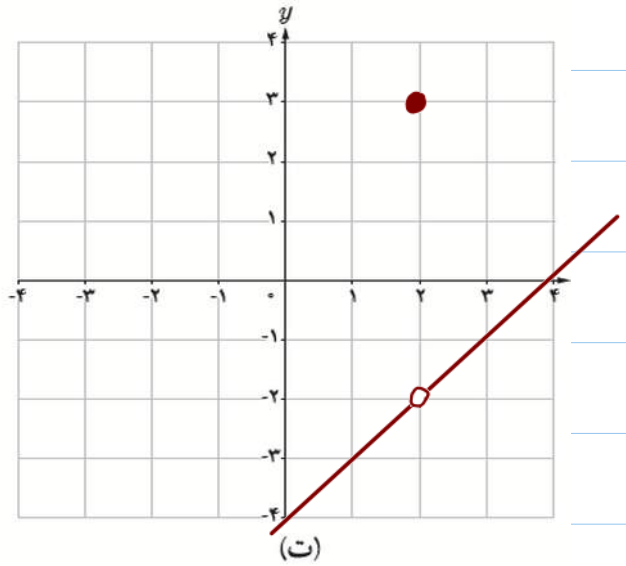
(پ)

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$

در $x=2$ حد ندارد.

ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



$\lim_{x\to 2} f(x) = -2$

$f(2) = 4$

مثال: حدهای زیر را با استفاده از رسم نمودار حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

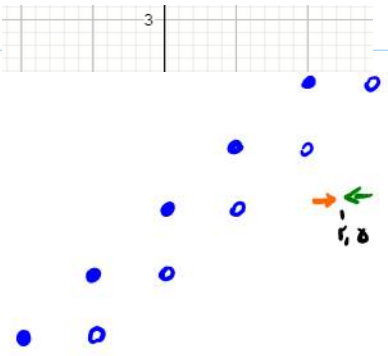
$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\frac{x}{x} & x>0\\ \frac{-x}{x} & x<0\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

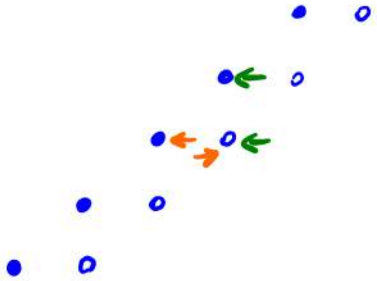
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

تابع در $x=0$ حد ندارد.

ب) $\lim_{x \to \frac{\omega}{2}} [x] = 2$



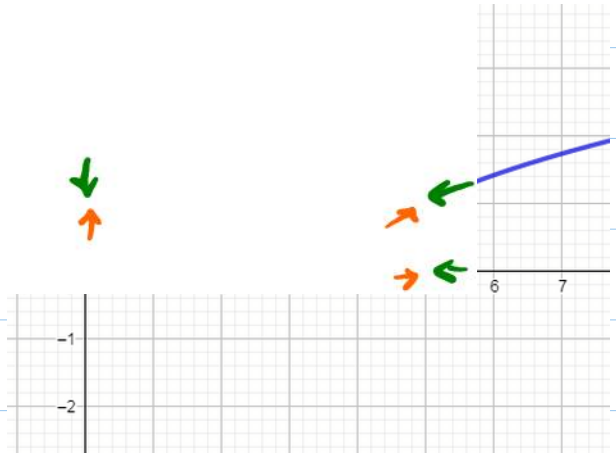
پ) $\lim_{x \to 1} [x]$ = حد ندارد



$\lim_{x \to 1^+} [x] = 1$

$\lim_{x \to 1^-} [x] = 0$

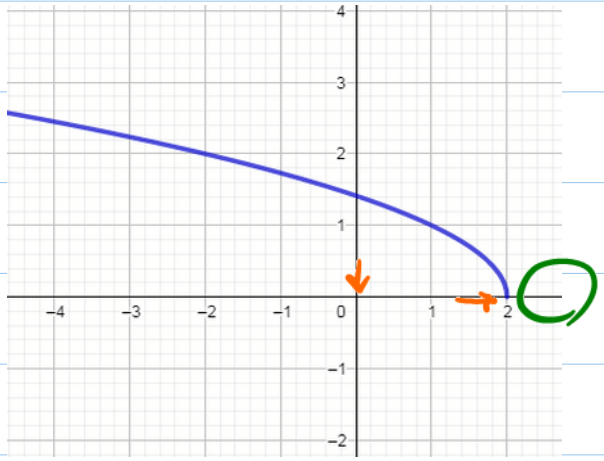
ت) $\lim_{x \to 5} \sqrt{x-4} = 1$



ث) $\lim_{x \to 2} \sqrt{2-x}$ = حد ندارد

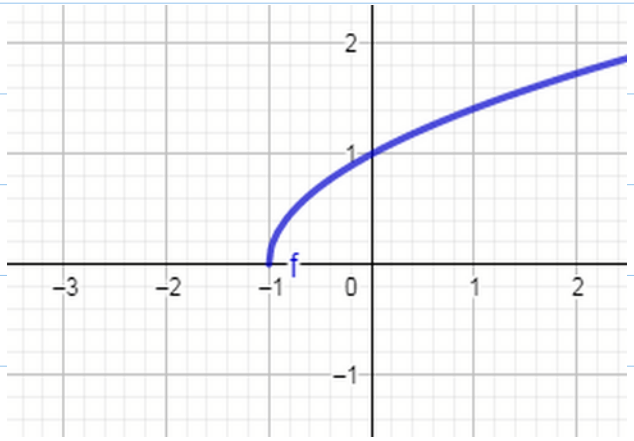
تابع در همسایگی راست ۲ تعریف نشده است پس:

$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{2-x}$ = موجود نیست



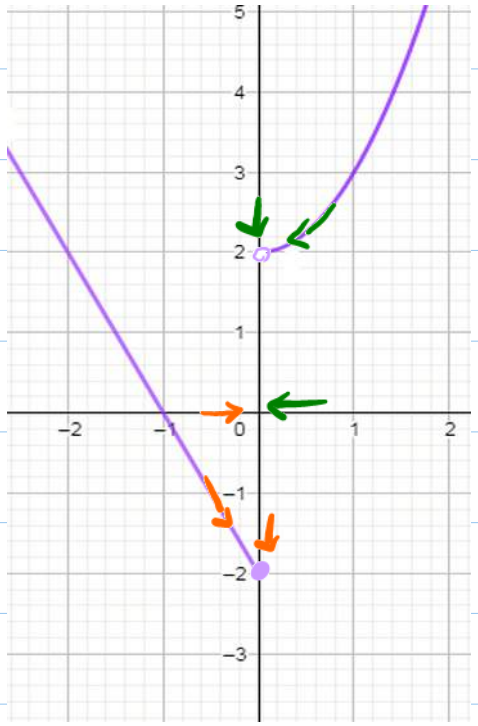
$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{2-x} = 0$

ج) $\lim_{x \to -3} \sqrt{x+1}$ = حد ندارد



زیرا تابع در همسایگی ۲ـ تعریف نشده است.

مثال: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ -2x-2 & x\le 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را ــ در صورت وجود ــ بیابید.



$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$

تابع در $x=0$ حد ندارد.

برای محاسبه حد توابع از قضیه‌های زیر کمک می‌گیریم :

قضیه ۱) حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a، همان مقدار ثابت c است یعنی :

$$\lim_{x\to a} c = c \qquad \text{مثال } \lim_{x\to 5} 3 = 3$$

قضیه ۲) حد تابع همانی $f(x)=x$ در هر عدد دلخواه a، برابر a می‌شود یعنی :

$$\lim_{x\to a} x = a \qquad \text{مثال } \lim_{x\to 10} x = 10$$

قضیه ۳) فرض کنید توابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

آنگاه

الف) مجموع و تفاضل و حاصل ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارند و

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = L_1 \pm L_2$$

ب) اگر $L_2 \neq 0$ باشد، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۴) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$, $c\in\mathbb{R}$ باشد آنگاه

الف) $\lim_{x\to a}(cf(x)) = cL$, مثال $\lim_{x\to 4} 3x = 3\times 4 = 12$

ب) $\lim_{x\to a}(f(x))^n = L^n$, مثال $\lim_{x\to 2}(x)^3 = 2^3 = 8$

قضیه ۵) اگر $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد حد تابع در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر است:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

قضیه ۶) اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to a} f(x)=L$:

الف) اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

ب) $\lim_{x\to a}|f(x)| = |L|$

پ) $\lim_{x\to a}\sin(f(x)) = \sin L$, $\lim_{x\to a}\cos(f(x)) = \cos L$

نتیجه: اگر تابع f در همسایگی a تعریف شده باشد و با جای‌گذاری a به جای x در تابع به یک

عدد مشخص برسیم، مقدار حد همین عدد خواهد شد، جز موارد خاصی که به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

مثال: اگر $\lim_{x\to ۲} f(x) = ۲$ و $\lim_{x\to ۲} g(x) = ۱$ ، آنگاه حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید :

۱) $= ۷\times ۱ - \frac{۱}{۲}\times ۲ = ۷ - ۱ = ۶$

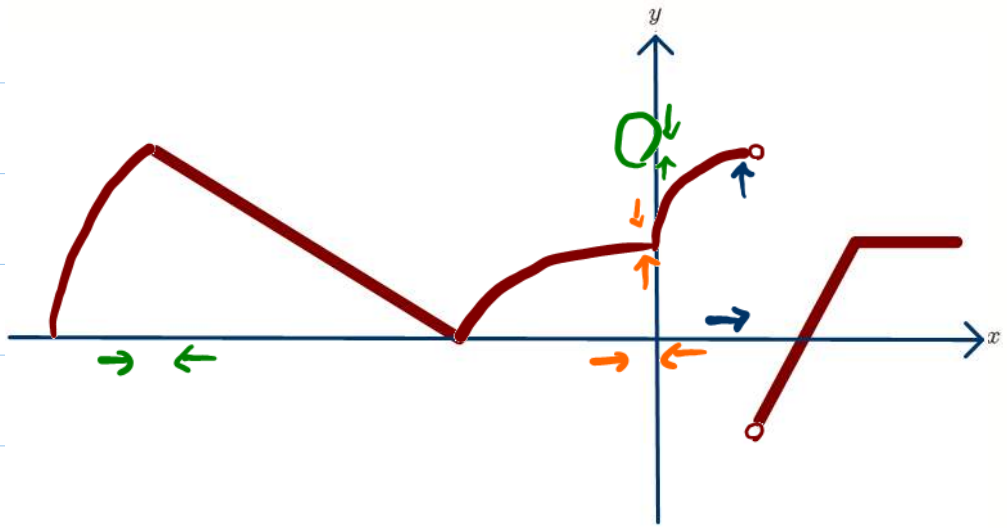
۲) $= \dfrac{(\lim_{x\to ۲} ۱ + \lim_{x\to ۲} f(x)) \lim_{x\to ۲} g(x)}{\lim_{x\to ۲} g(x) + \lim_{x\to ۲} ۲}$

$= \dfrac{(۱+۲)\times ۱}{۱+۲} = \dfrac{۳}{۳} = ۱$

۳) $\lim_{x\to ۲}(g(x) + \frac{۲}{f(x)})^{۳} = (۱ + \frac{۲}{۲})^{۳} = (۱+۱)^{۳} = ۲^{۳} = ۸$

۴) $\lim_{x\to ۲}(\sqrt{۵x-۱} + \frac{f(x)}{g(x)}) = \sqrt{۵\times ۲ - ۱} + \frac{۲}{۱} = \sqrt{۹} + ۲ = ۳ + ۲ = ۵$

مثال: صورت وجود بیابید :



۱) $\lim_{x\to -۵} (\frac{x}{۵}-۱)^۲ \times f(x)$ $= (-\frac{۵}{۵}-۱)^۲ \lim_{x\to -۵} f(x) = (-۲)^۲ \times ۲ = ۴\times ۲ = ۸$

۲) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۴-x}}{x^۲+f(x)}$ $= \frac{\sqrt{۴-۰}}{۰^۲+\lim_{x\to ۰} f(x)} = \frac{۲}{۰+۱} = \frac{۲}{۱} = ۲$

۳) $\lim_{x\to ۱^-} (x^۲+x-$ $= ۱^۲+۱-(\lim_{x\to ۱^-} f(x))^۲ = ۱+۱-(۲)^۲$

$= ۲-۴ = -۲$

مثال:

۱) $\lim_{x\to -۱} (۲x^۴-x^۳$ $= ۲(-۱)^۴-(-۱)^۳-۵(-۱)^۲+۴$

$= ۲-(-۱)-۵+۴ = ۲+۱-۵+۴ = ۲$

۲) $\lim_{x\to ۴} (۱+\frac{x}{۲})^۲ (a$ $= (۱+\frac{۴}{۲})^۲ (۴^۲-۶\times ۴) = ۳^۲ (۱۶-۲۴)$

$= ۹(-۸) = -۷۲$

۳) $\lim_{x\to ۱۰} (۵x^۳-۶$ $= ۵(۱۰)^۳-۶\times ۱۰+۱ = ۵۰۰۰-۶۰+۱ = ۴۹۴۱$

۴) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8x^3+4x^2+2x}{4x+1} = \frac{8(\frac{1}{2})^3+4(\frac{1}{2})^2+2\times\frac{1}{2}}{4\times\frac{1}{2}+1} = \frac{8\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{4}+1}{2+1}$

$= \frac{1+1+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

۵) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1+1}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$

۶) $= 4\sin(-\frac{\pi}{6}) + \cos^2(-\frac{\pi}{6})$

$= -4\sin\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = -4\times\frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

$= -2 + \frac{3}{4} = \frac{-8+3}{4} = \frac{-5}{4}$

۷) $\lim_{x\to 5}$ $= \sqrt{5\times5-9} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

۸) $\lim_{x\to-\pi} \frac{\pi\cos x}{x} = \frac{\pi\cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{\pi\cos\pi}{-\pi} = \frac{\pi\times(-1)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$

موارد خاص :

۱) توابع چندضابطه‌ای : اگر حد تابع در نقاطی که ضابطه تابع تغییر می‌کند (نقاط مرزی) خواسته شده باشد باید حد چپ و حد راست از ضابطه‌های مربوط به آن محاسبه شوند.

مثال:

۱)

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x>0 \\ x-2 & x\le 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-2) = 0-2 = -2$$

$-2 \neq 0$ پس تابع در $x=0$ حد ندارد

۲)

$$f(x)=\begin{cases} 5 & x<3 \\ x+2 & x\ge 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x+2) = 3+2 = 5$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} 5 = 5$$

$5=5$ پس تابع در $x=3$ حد دارد و

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 5$$

۳) $f(x)=\begin{cases}۳-x & x<۲\\ -۱ & x=۲\\ x^{۲}-۴ & x>۲\end{cases}$, $a=۲$

$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+}(x^۲-۴) = ۲^۲-۴ = ۴-۴=۰$

$۰\neq ۱$ پس تابع در $x=۲$ حد ندارد.

$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-}(۳-x) = ۳-۲=۱$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}(a+۱)x+۳ & x>-۲\\ -۲x^{۲}+۱ & x<-۲\end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ حد داشته باشد.

$\lim_{x\to -۲^+} f(x) = \lim_{x\to -۲^+}(a+۱)x+۳ = (a+۱)(-۲)+۳ = -۲a-۲+۳=-۲a+۱$

$\lim_{x\to -۲^-} f(x) = \lim_{x\to -۲^-} -۲x^۲+۱ = (-۲)(-۲)^۲+۱ = -۸+۱=-۷$

$\lim_{x\to -۲^+} f(x) = \lim_{x\to -۲^-} f(x) \Rightarrow -۲a+۱=-۷ \to -۲a=-۸ \Rightarrow a=۴$

۲) حد توابع شامل رادیکال با فرجه زوج :

در این توابع باید بررسی شود عبارت رادیکالی در همسایگی نقطه a تعریف شده است یا خیر.

اگر تعریف شود مقدار تابع حد تابع خواهد بود اگر نه حد موجود نیست.

در این توابع هم برای نقاطی که ریشه داخل رادیکال هستند حد چپ و راست را می یابیم.

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

۱)

$$\lim_{x\to -2^+}\sqrt{2x+4} = \sqrt{-2(2)+4} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x\to -2^-}\sqrt{2x+4} = \text{حد ندارد}$$

پس این حد موجود نیست.

x		-2	
$2x+4$	$-$	0	$+$

تابع در همسایگی چپ ۲- تعریف نمی شود

۲) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+3x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+3x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x^2+3x} = \text{حد ندارد}$$

پس این حد موجود نیست.

x		-3		0	
x^2+3x	$+$	0	$-$	0	$+$

۳) $\lim_{x \to 5} \sqrt{۳-x}$

$D: ۳-x \geq ۰ \Rightarrow -x \geq -۳ \Rightarrow x \leq ۳$

$D = (-\infty, ۳]$

تابع در همسایگی کرد ۵ تعریف نمی‌شود پس در این نقطه حد ندارد.

۳) حد توابع شامل جزء صحیح :

می‌دانیم اگر $x \to a^+$ یعنی $x > a$ و اگر $x \to a^-$ یعنی $x < a$ است. در محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح از این نکته استفاده کرده عبارت داخل جزء صحیح را می‌سازیم و مقدار عبارت جزء صحیح را در همسایگی a محاسبه می‌کنیم تا ببینیم با کدام تابع ثابت برابر می‌شود. پس با جای‌گذاری این مقدار در تابع، حد را بدست می‌آوریم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱)

$\lim_{x \to ۰^+} (x+۳)[x] = (۰+۳) \times ۰ = ۰$

$\lim_{x \to 0^-} (x+4)[x] = (0+4) \times (-1) = -4$

$-4 \neq 0$ این حد موجود نیست

۲) $= \frac{2^2 + 4 \times 2}{[2^-] + 1} = \frac{10}{1+1} = \frac{10}{2} = 5$

$1 < x < 2 \leftarrow$

۳) $\lim_{x \to 1^-} [-3x]$: $x < 1 \xrightarrow{\times(-3)} -3x > -3$

در نتیجه عبارت $-3x$ بزرگتر از -3 و نزدیک آن است پس $-4 < -4x < -2$

$\lim_{x \to 1^-} [-4x] = -4$

با جدگذاری هم به همین نتیجه می‌رسیم.

۴) $\lim_{x \to 3} x + \left[\frac{x}{3}\right]$

$x \to 3^+ : x > 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{x}{3} > 1$ پس $\frac{x}{3}$ بزرگتر از یک و نزدیک آن است.

$1 < \frac{x}{3} < 2 \rightarrow \lim_{x \to 3^+} x + \left[\frac{x}{3}\right] = 3 + 1 = 4$

$x \to 4^- : x < 4 \xrightarrow{\div 4} \frac{x}{4} < 1$: پس $\frac{x}{4}$ کوچکتر از یک و نزدیک آن است

$0 < \frac{x}{4} < 1 \to \lim_{x \to 4^-} x + \left[\frac{x}{4}\right] = 4 + 0 = 4$

$4 \neq 4$ پس این حد موجود نیست.

۵) $= \frac{\sqrt{2-2}}{(2^+)+1} = \frac{0}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$

۶) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} x[x] = \frac{1}{2} \times 0 = 0$

$0 < x < 1$

۷) $\lim_{x \to \frac{5}{2}} 2[x] = 2 \times 2 = 4$

$2 < x < 3$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی-حد در بی‌نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت دوم: رفع ابهام صفرصفرم

جلسه دوم

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

اگر محاسبه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ خواسته شده باشد و بعد از قرار دادن a به جای x، صورت و مخرج هر دو صفر شوند با توجه به نوع صفر ۴ حالت خواهیم داشت.

صفرها دو دسته اند : ۱ـ صفر مطلق (خود صفر) ۲ـ صفر نسبی یا حدی ($0^{\pm}$)

نزدیک صفر

نوع اول : $\frac{0}{\neq 0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد .

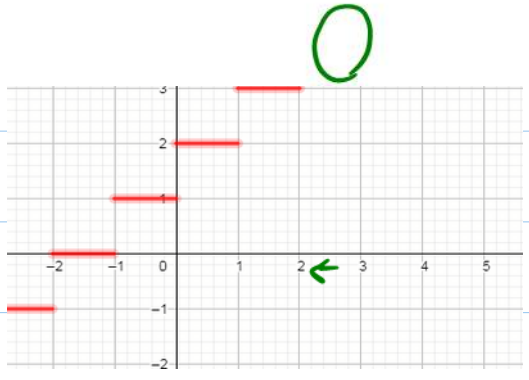
نوع دوم : $\frac{\neq 0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

نوع سوم : $\frac{0}{0^{\pm}}$ صورت صفر مطلق و مخرج غیر صفر (صفر حدی) پس حد کسر صفر می شود.

نوع چهارم : $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$ به این حالت ، حالت مبهم می گوییم و باید رفع ابهام شود .

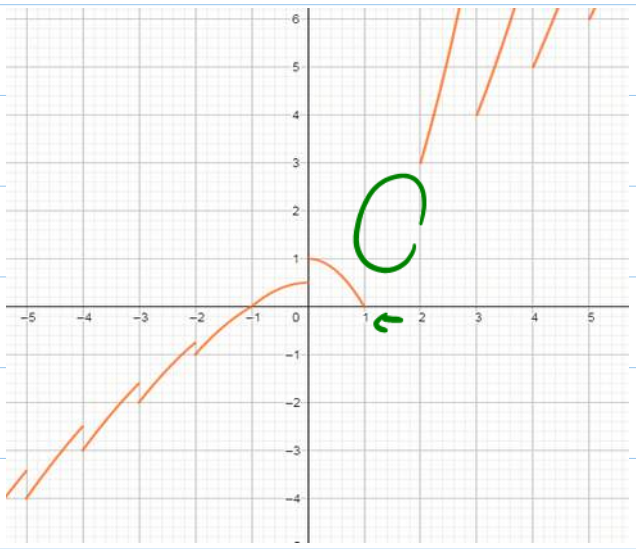
مثال : حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 2^+}\frac{[x]^2-4}{[x]-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$ حد وجود ندارد

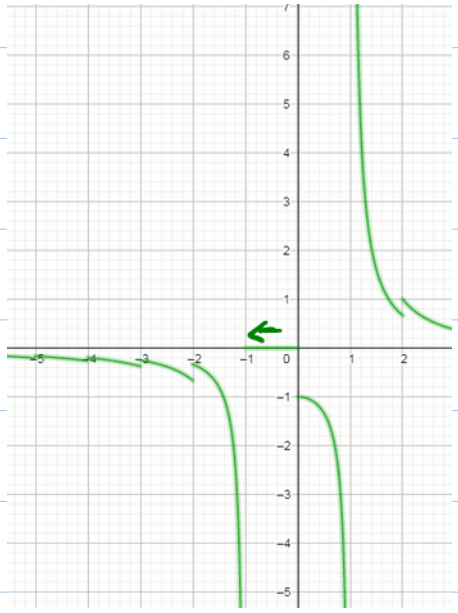


حد موجود نیست

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{[x]-1} = \frac{1^+-1}{1-1} = \frac{0^+}{\text{مثبت } 0}$



ب) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{[x]+1}{x^2-1} = \frac{-1+1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$



مثال: کنکور تجربی ۹۹

حاصل $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{[x]+3}{x+2}$، کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ✓ ۳) صفر ۴) ۱

گزینه ۳

$\frac{-2+3}{0^-} = \frac{1}{0^-} = 0$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

چون $x \to a$ صورت و مخرج هردو صفر شده اند پس هم صورت و هم مخرج بر $(x-a)$ بخش پذیرند یا $(x-a)$ را دارا هستند. به $(x-a)$ عامل ابهام یا صفر کننده می گوییم.

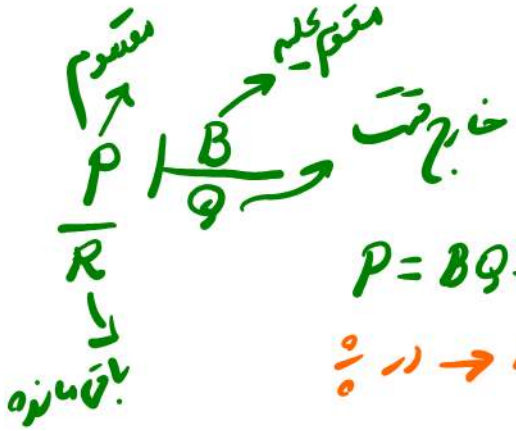
الف) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ وقتی صورت و مخرج هردو چندجمله ای باشند.

با استفاده از روش های تجزیه (فاکتورگیری و اتحادها) عامل ابهام را از صورت و مخرج ایجاد و با یکدیگر حذف می کنیم تا حد قابل محاسبه باشد.

تبصره: همواره نمی توانیم با اتحادها یا فاکتورگیری عامل ابهام را ایجاد کنیم، چاره ای جز تقسیم آن عبارت بر عامل ابهام نداریم. در این صورت به جای آن عبارت حاصل ضرب $(x-a)$ (ضلع مقسوم علیه) در خارج قسمت را می نویسیم.

یادآوری

۱) رابطه تقسیم:



۲) تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای :

روش اول :

$2x^3 + x^2 + 1 \;\big|\; x+1$

$\frac{2x^3}{x} = 2x^2$

$-(2x^3 + 2x^2)$

$-x^2 + 1$

$\frac{-x^2}{x} = -x$

$-(-x^2 - x)$

$x + 1$

$\frac{x}{x} = 1$

$-(x+1)$

0

$2x^2 - x + 1$

روش دوم (روش هورنر) : برای تقسیم درجه n بر درجه یک

ریشه مقسوم علیه

ضرائب مقسوم	۱	۰	۱
-1	۲	$-1\times 2+1=-1$	$-1+0=1-$
	۲	-1	$0=1+1\times 1-$

باقی مانده

خارج قسمت : $2x^2 - 1x + 1 \longrightarrow 2x^2 - x + 1$

مثال:

۱) $=\frac{0}{0}$ عامل مشترک $(x-(-3))$: $(x+3)$

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x}=\frac{-3-3}{-3}=\frac{-6}{-3}=2$$

۲) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}=\frac{0}{0}$ عامل مشترک $(x-1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+6}=\frac{1+1}{1+6}=\frac{2}{7}$$

۳) $=\frac{0}{0}$ عامل مشترک $(x-\frac{1}{2})$

$$8x^3-1=8(x^3-\frac{1}{8})=8(x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$$

روش هورنر

	8	0	-1
$\frac{1}{2}$	8	$8\times\frac{1}{2}-0=4$	$4\times\frac{1}{2}-1=1$

باقی‌مانده $\leftarrow 1+(-2)\times\frac{1}{2}=0$

خارج قسمت : $8x^2+4x+2$

$$2x^2-5x+1=(x-\frac{1}{2})(8x^2+4x+2)$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8(x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{(x-\frac{1}{2})(4x-2)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{2(4x-1)}$$

$$= 4\,\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{2-1} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

۴) $\lim_{x\to-4} \frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4} = \frac{0}{0}$ صورت کسر $(x+4)$

$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$

روش هورنر

	۱	۴
۱	$-4\times1+4=0$	$-4\times0+1=1$
		$-4\times1+4=0$ ← باقی‌مانده

خارج قسمت x^2+1

$x^3+4x^2+x+4 = (x+4)(x^2+1)$

$$\lim_{x\to-4} \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x^2+1)} = \lim_{x\to-4} \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{-4-1}{16+1} = \frac{-5}{17}$$

o) $\lim_{x\to -2} \frac{|x^2-4|}{x+2} = \frac{0}{0}$

x	$\to -2 \leftarrow$	2
x^2-4	$+ \mid 0 - \mid 0 +$	

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{-(x^2-4)}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = -(-2-2) = 4$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -2-2 = -4$$

$4 \neq -4$ پس تابع در $x=-2$ حد ندارد.

ب) رفع ابهام $\frac{0}{0}$: وقتی صورت یا مخرج و یا هر دو شامل عبارات رادیکالی هستند:

در این حالت از مفهوم گویا کردن و اتحادهای مزدوج یا چاق و لاغر استفاده می‌کنیم. به این صورت که با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارت رادیکالی (برای مرجه‌های ۲) یا عبارت چاق عبارت رادیکالی (برای مرجه‌های ۳)، عامل ابهام را ایجاد می‌کنیم.

مثال:

۱) $\frac{0}{0}$ عامل ابهام $(x-2)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} \times \frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-(3x-2)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

(مزدوج)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \frac{2-1}{(2+2)(2+\sqrt{6-2})} = \frac{1}{4(4)} = \frac{1}{16}$$

۲) $\lim_{x\to 4} \frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} = \frac{0}{0}$ عامل ابهام : $(x-4)$

روش هورنر برای صورت

	3	-10	-8
4	3	$4\times 3-10=2$	$8-8=0$

خارج قسمت : $3x+2$ — باقی‌مانده

$$3x^2-10x-8=(x-4)(3x+2)$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} \times \frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{3-\sqrt{x}-1}$$

مزدوج

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{2-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{-(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{\overset{4}{(\sqrt{4}+2)}\overset{14}{(12+2)}\overset{2}{(\sqrt{3-\sqrt{4}}+1)}}{-1} = -112$$

۳) $\frac{0}{0}=$ حالت ابهام x :

مزدوج صورت

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}\times\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}+1}\times\frac{\sqrt{3x+4}+2}{\sqrt{3x+4}+2}$$

مزدوج مخرج

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1-1)(\sqrt{3x+4}+2)}{(3x+4-4)(\sqrt{2x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{3x+4}+2)}{3x(\sqrt{2x+1}+1)}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2+2}{1+1}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

۴) $\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ حالت ابهام $\frac{0}{0}$

x^2-x-2 : $-1 \to 2$: $+\ 0\ -\ 0\ +$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-x-2)}{2x-\sqrt{x^2+12}}\times\frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{2x+\sqrt{x^2+12}}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{4x^2-(x^2+12)}$$

$4x^2-(x^2+12)=3x^2-12$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{\underbrace{3x^2-12}_{3(x^2-4)}}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{-(2+1)(4+4)}{3(2+2)} = \frac{-3\times 8}{3\times 4}$$

$$= -2$$

یادآوری اتحاد چاق لاغر :

چاق لاغر

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

نحوه ساختن عبارت چاق از روی عبارت لاغر :

۱ـ جمله اول چاق : مربع (توان دوم) جمله اول لاغر

۲ـ جمله دوم چاق : حاصل ضرب جمله اول در دوم لاغر با علامت قرینه

۳ـ جمله سوم چاق : مربع جمله دوم لاغر

مثال: کنکور تجربی ۹۸

- حدّ عبارت $\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x \to -8$، کدام است؟

۱) -24 ۲) -18 ۳) -12 ۴) -6

حاصل ابهام $(\frac{0}{0})$

$$\lim_{x \to -8} \frac{(x+8)(x+2)}{6(2+\sqrt[3]{x})} \times \frac{(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

گویا ← حالت

$$= \lim_{x \to -8} \frac{(x+8)(x+2)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{6(8+x)}$$

2^3 ، $(\sqrt[3]{x})^3$

$$= \frac{(-8+2)(4-2\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{16})}{6} = \frac{-6(4-2(-2)+4)}{6}$$

$$= -1 \times 12 = -12$$

گزینه ۳

مثال: کنکور ریاضی ۹۹

حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$ کدام است؟

۱) $-1/5$ ۲) $-1/2$ ۳) $-0/8$ ۴) $-0/6$

$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}} = \frac{0}{0}$ حالت ابهام $(x-1)$

مزدوج صورت

$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}} \times \frac{2x+5+7\sqrt{x}}{2x+5+7\sqrt{x}} \times \frac{2x+\sqrt{3x+1}}{2x+\sqrt{3x+1}}$

مزدوج مخرج

$= \lim_{x\to 1}\frac{((2x+5)^2-49x)(2x+\sqrt{3x+1})}{(4x^2-(3x+1))(2x+5+7\sqrt{x})}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{(4x^2+20x+25-49x)(2x+\sqrt{3x+1})}{(4x^2-3x-1)(2x+5+7\sqrt{x})}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{(4x^2-29x+25)(2x+\sqrt{3x+1})}{(4x^2-3x-1)(2x+5+7\sqrt{x})}$

ریشه‌ها $x=1$ و $25/4$

ریشه‌ها $x=1$ و $-1/4$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(4x-25)\left(25x+\sqrt{25x+1}\right)}{(x-1)(4x+1)(25x+5\sqrt{x})}$$

$$= \frac{(4-25)(2+2)}{(4+1)(2+5+5)} = \frac{-21\times 4}{5\times 14} = \frac{-3\times 2}{5} = -\frac{6}{5} = -1,2$$

گزینه ۲

پاسخ ابهام $\frac{0}{0}$ وقتی صورت یا مخرج یا هردو توابع مثلثاتی باشند:

با استفاده از روابط مثلثاتی حاصل ابهام را بدست می‌آوریم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} = \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$= \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

($\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$)

۲) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 2\cos 0 = 2 \times 1 = 2$

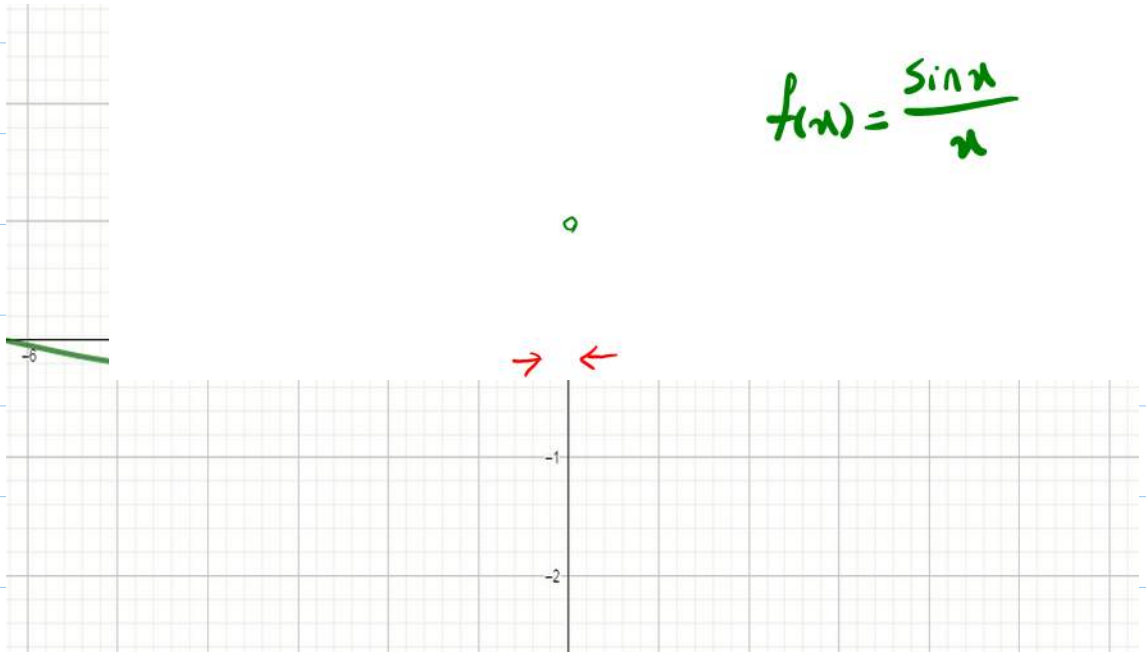
۳) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$

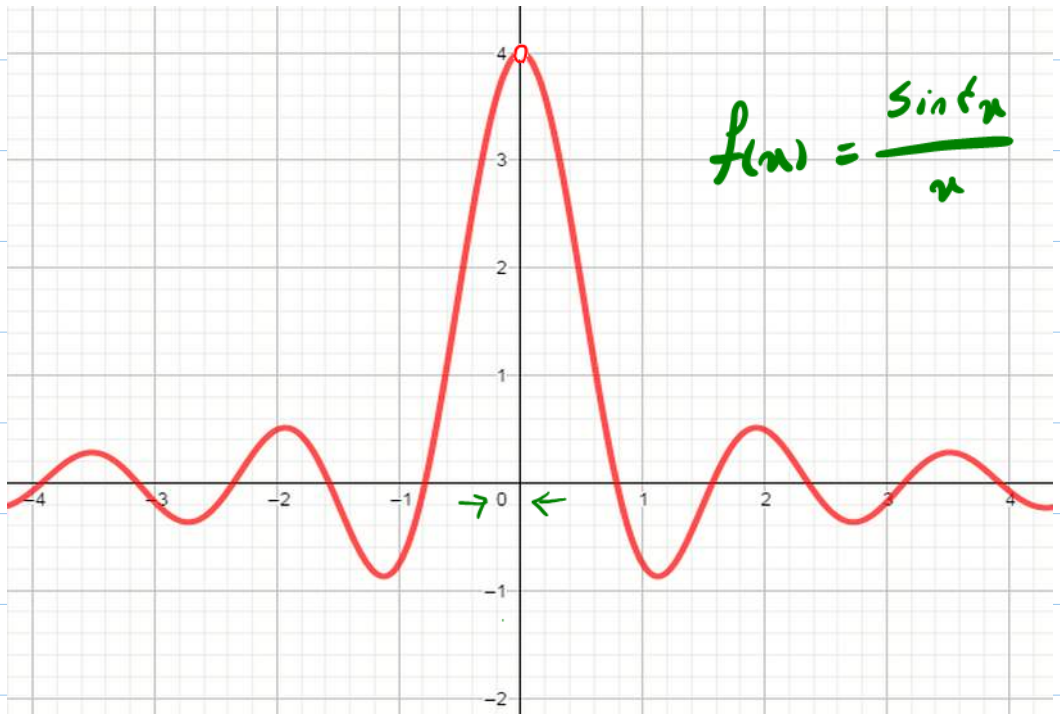
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow$ بنابراین $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \to \pi} \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2} = 2 \times 1 = 2$$

نکته: با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ داریم: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

و در حالت کلی $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m$.





$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4$

مثال: حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2}$

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$

یعنی هم $2\sin^2 x = 1-\cos 2x$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2 = 2\times 2^2 = 2\times 4 = 8$$

ب) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)(3+\cos x)}{x\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x(3+\cos x)}{x\sin 4x}$

صورت و مخرج تقسیم بر x^2 $\Longrightarrow$ $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\sin^2 x}{x^2}(3+\cos x)}{\frac{x\sin 4x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2(3+\cos x)}{\frac{\sin 4x}{x}}$

$$= \frac{2\times 1\times(3+1)}{4} = 2$$

ب) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ $\times \sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos x}$ $\times \sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x-\cos x}{x^2\left(\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos x}\right)}$$

$\sqrt{\cos 0}+\sqrt{\cos 0} = 1+1 = 2$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{(1-2\sin^2\frac{3x}{2})-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}-\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2-\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{x}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}-\frac{9}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

ت) $\lim_{x\to 0}\left(([2x]+[-2x])\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\lim_{x\to 0^+}[2x]+[-2x] = 0-1=-1$

$\lim_{x\to 0^-}[2x]+[-2x] = -1+0=-1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}[2x]+[-2x] = -1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)(1+\sqrt{1+x^2})}{1-(1+x^2)}$$

(حاق و لاغر)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2\sin^2 \frac{x}{2})(1+\cos x+\cos^2 x)(1+\sqrt{1+x^2})}{-x^2}$$

$$= -2 \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 \times (1+1+1)(1+1) = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 6 = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(([2x]+[-2x]) \frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} \right) = -1 \times (-3) = 3$$

ب) $$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-|x|\sin 4x}{4x^2-|x|\sin 6x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-(-x)\sin 4x}{4x^2-(-x)\sin 6x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+x\sin 4x}{4x^2+x\sin 6x} \xrightarrow{\div x^2} \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x\sin 4x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x\sin 6x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{1+\frac{\sin 4x}{x}}{4+\frac{\sin 6x}{x}} = \frac{1+4}{4+6} = \frac{5}{10}$$

مثال: کنکور ریاضی ۹۹ (خارج)

حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 2

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}} \times \frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2+3x-(2-x)}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|\left(\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x}{\sqrt{2}\left(-\sin\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

($x\to 0^-$: $\frac{x}{2}$ ربع سوم $\Rightarrow \sin\frac{x}{2}<0$)

$$= -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sin\frac{x}{2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

گزینه ۱

روش تغییر متغیر برای رفع ابهام ÷

در این روش حاصل صفر کننده را برابر متغیر جدیدی مانند t می‌گیریم و با توجه به متغیر حد را ساده و محاسبه می‌کنیم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) حاصل ابهام $x - \frac{\pi}{4} = t$

$$\begin{cases} x = t + \frac{\pi}{4} \\ \tan x = \tan t + \pi \\ \sin 2x = \sin 2t + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\left(x \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \to 0 \right)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(2t + \frac{\pi}{2}) - 1}{2t + \pi - \pi} = \lim_{t \to 0} \frac{\cos 2t - 1}{2t} = \lim_{t \to 0} -\frac{(1 - \cos 2t)}{2t}$$

$$= -\frac{1}{4} \lim_{t \to 0} \frac{2\sin^2 t}{t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \times \sin t$$

$$= -\frac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0$$

۲) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}$

قرار می‌دهیم $x - \frac{\pi}{۲} = t$

$(x \to \frac{\pi}{۲} \Rightarrow t \to ۰)$

$$\begin{cases} x = t + \frac{\pi}{۲} \\ ۲x = ۲t + \pi \\ ۴x = ۴t + ۲\pi \end{cases}$$

$$\lim_{t \to ۰} \frac{\sin(۲t + \pi)}{\cos(۴t + ۲\frac{\pi}{۲})} = \lim_{t \to ۰} \frac{-\sin ۲t}{\sin ۴t} = \lim_{t \to ۰} \frac{\frac{-\sin ۲t}{t}}{\frac{\sin ۴t}{t}} = \frac{-۲}{۴}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی-حد در بی‌نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت سوم: تعریف حد بی‌نهایت

جلسه سوم: صفحات ۴۶ تا ۵۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تعریف همسایگی: اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوییم.



(a,b) یک همسایگی x_0

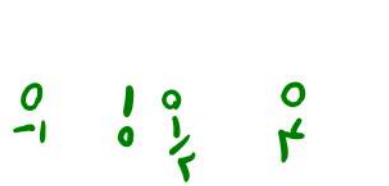
$(1,7)$ یک همسایگی کوچک ۳ است: مانند



تعریف همسایگی محذوف: اگر x_0 را از همسایگی بازش خارج کنیم، همسایگی محذوف x_0 به دست می‌آید. یعنی: $(a,b)-\{x_0\}$

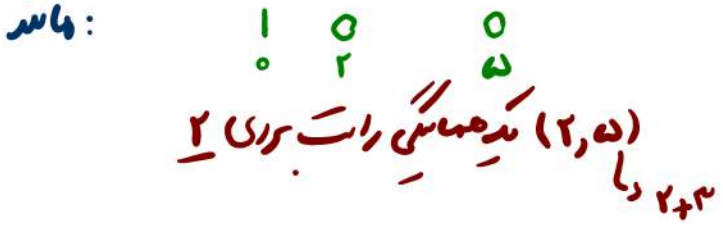


$\frac{1}{2}$ همسایگی محذوف $(-1,4)-\{\frac{1}{2}\}$ مانند:



تعریف همسایگی راست و چپ: اگر x_0 عددی حقیقی و مثبت باشد بازه (x_0, x_0+2) را یک همسایگی راست x_0 و بازه (x_0-2, x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

مانند:



$(2,5)$ یک همسایگی راست برای ۲

$(0,2)$ یک همسایگی چپ برای ۲

مثال: اگر بازه $(a-3, 2a+1)$ همسایگی صفر یک باشد، حدود a را بیابید.

$$a-3 < 1 < 2a+1$$

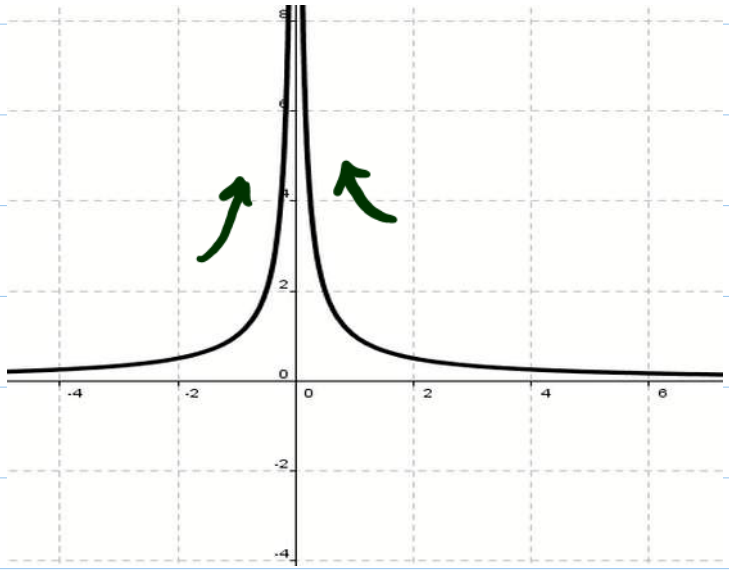
$$\begin{cases} a-3<1 \rightarrow a<4 \\ 2a+1>1 \rightarrow 2a>0 \rightarrow a>0 \end{cases}$$

$$\cap \rightarrow 0<a<4$$

می‌خواهیم حد تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ را در $x=0$ بررسی کنیم. تابع در $x=0$ تعریف نمی‌شود ولی

در یک همسایگی محذوف 0 وجود دارد.

x	-0.5	-0.1	-0.01	$-0.001 \rightarrow 0 \leftarrow 0.001$	0.01	0.1	0.5
$y=f(x)$	2	100	1000	$10000 \quad +\infty \quad +\infty \quad 10000$	1000	100	2



تعریف: فرض کنید f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f به ازای xهایی که از هر دو طرف به a نزدیک شوند، به طوری که مقادیر متغیر x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشند می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

در این صورت می‌گوییم تابع f در a حد نامتناهی (مثبت بی‌نهایت) دارد

تذکر: اگر با شرایط تعریف بالا:

۱- مقادیر تابع f به ازای xها کاهش یابد، می‌نویسیم: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

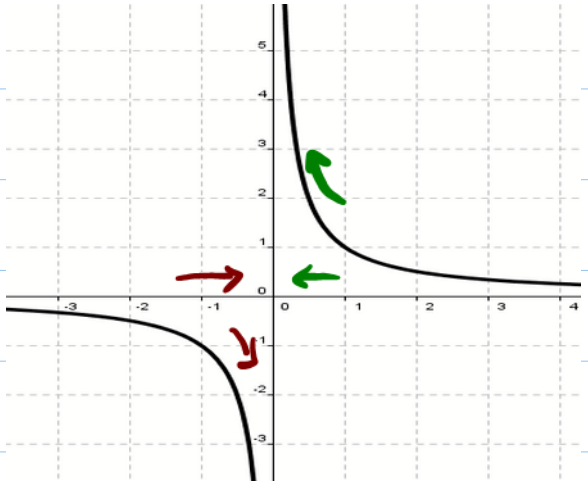
۲- f در یک همسایگی راست نقطه a تعریف شده باشد و مقادیر تابع کاهش یا افزایش یابد

به ترتیب می‌نویسیم: $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

۳- f در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده باشد و مقادیر تابع کاهش یا افزایش یابد

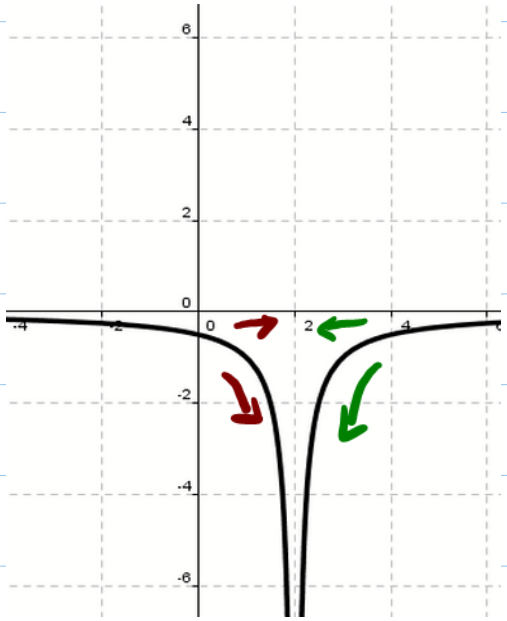
به ترتیب می‌نویسیم: $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

: مثال



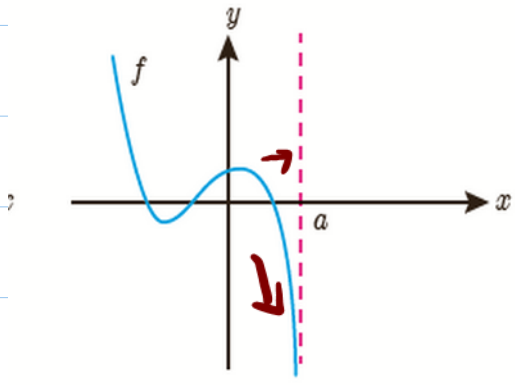
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

محاسبه حدی نهایت :

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ ، $\lim_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه a حد نامتناهی یا حدی نهایت دارد و علامت بی نهایت با توجه به علامت L و علامت صفر حدی تابع g در یک همسایگی محذوف a تعیین می شود. این نکته برای حد چپ و حد راست هم درست است.

پس : $\frac{\text{عدد}}{\text{۰ حدی}}=\infty$ (در حدی نهایت ها به بهت یک حد را میل می کند و جواب حدی نهایت می شود.)

نکته : برای تشخیص علامت صفر حدی با توجه به ضابطه تابع معرف از جدول گذاری مقادیر نزدیک a یا جدول تعیین علامت و در صورت اینکه تابع مثلثاتی باشد از دایره مثلثاتی استفاده می کنیم. همچنین در صورتی که حد چپ و راست در علامت صفر متفاوت باشد باید هر یک را جداگانه بررسی کرد.

کار در کلاس

۱ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{x-5}$

$=\frac{10}{5^--5}=\frac{10}{0^-}=-\infty$

$5^-\Rightarrow 4,9$

ب) $\lim_{x\to 5^+}\frac{2x}{x-5}$

$=\frac{10}{5^+-5}=\frac{10}{0^+}=+\infty$

$5^+\Rightarrow 5,1$

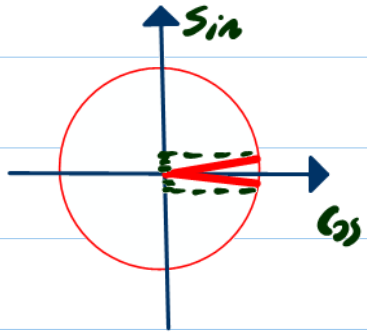
x	$\to 5\leftarrow$
$x-5$	$-$ ۰ $+$

پ) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{(0^\pm)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ت) $\lim_{x\to 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|0^\pm|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

ث) $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{-1}{|0^\pm|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

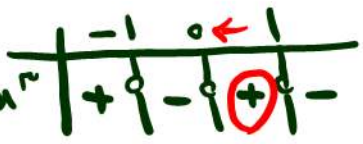
ج) $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{(0^\pm)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$



مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x-x^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$x(1-x^2)$ یا $x-x^3$



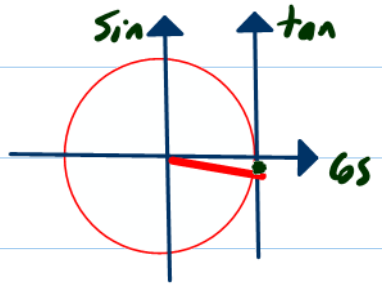
۲) $\lim_{x\to 2^-} \frac{2x-1}{(x-2)^3} = \frac{2\times 2-1}{(0^-)^3} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

$1,9$

Sin

+ - - - Cos

۳) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{1+1}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$



۴) $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x - 2}{\tan x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

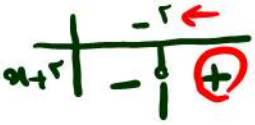
۵) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x} = \frac{\cos 2\frac{\pi}{2} - 1}{0} = \frac{\cos \pi - 1}{0} = \frac{-1-1}{0} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

sin

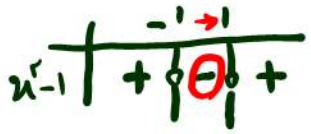
cos

۶) $\lim_{x \to -2^+} \frac{x+1}{x+2} = \frac{-2+1}{-2^+ +2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$-2^+ \to -1,9$



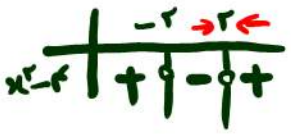
۷) $\lim_{x \to 1^-} \frac{[x]-1}{x^2-1} = \frac{0-1}{(1^-)^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$



۸) $\lim_{x \to 2} \frac{-[x]-1}{x^2-4}$

$x \to 2^+ : \frac{-2-1}{0^+} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

$x \to 2^- : \frac{-1-1}{0^-} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

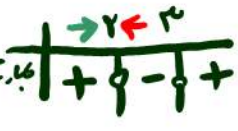


۹) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

۱۰) $\lim_{x \to 2} \frac{-4}{x^2-5x+6} = \frac{-4}{0}$

$x \to 2^+ : \frac{-4}{0^-} = +\infty$

$x \to 2^- : \frac{-4}{0^+} = -\infty$



11) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \dfrac{0}{0}$ — عامل ابهام $(x-1)$

روش هورنر : برای تقسیم در جمله بر درجه یک

$x^3-x^2-x+1 \;\big|\; x-1$ — $x-1=0$, $x=1$

ضرایب مقسوم کلیه ← $1 \quad -1 \quad -1 \quad 1$

سه لفظ کلیدی : ضرب ـ جمع — $1 \quad 1\times1-1=0 \quad 1\times0-1=-1 \quad 1\times(-1)+1=0$ → باقیمانده

درجه اش یک واحد کمتر از مقسوم ← خارج قسمت : $1x^2+0x-1 = x^2-1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{1-2}{0} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

($x^2-1 \to 0.9$)

مثال: اگر $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، a و b را بیابید.

$$\frac{2-3}{0^+} = -\infty$$ (منفی)

۲ ریشه مضاعف مخرج است پس :

$$(x-2)^2 = x^2+ax+b$$
$$x^2-4x+4 = x^2+ax+b \longrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=4 \end{cases}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی-حد در بی‌نهایت

درس دوم: حد در بی‌نهایت

جلسه چهارم: صفحات ۵۹ تا ۶۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

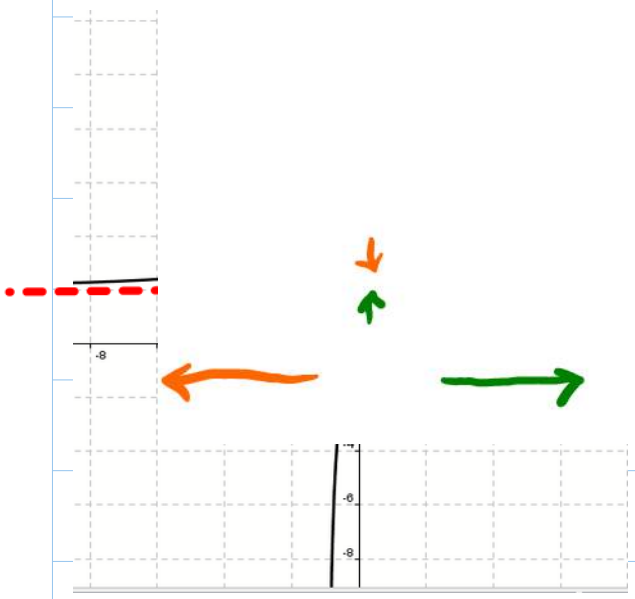
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

حدود در بی‌نهایت :

می‌خواهیم رفتار تابع $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ را به ازای

برخی مقادیر مثبت و منفی x در جدول زیر بررسی کنیم.



x	$-\infty \leftarrow -1000$	-1000	-100	-10	10	100	1000	$10000 \to +\infty$
$f(x)$	$2 \leftarrow 2,0002$	$2,0002$	$2,002$	$2,2$	$1,81$	$1,98$	$1,998$	$1,999 \to 2$

تعریف : فرض کنید تابع f روی بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد و مقادیر تابع f به هر اندازه که بخواهیم به عدد حقیقی L نزدیک شوند به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شده باشند در این صورت می‌نویسیم : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$.

تذکر : اگر در تعریف بالا، بازه $(-\infty,a)$ و مقادیر متغیر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شوند

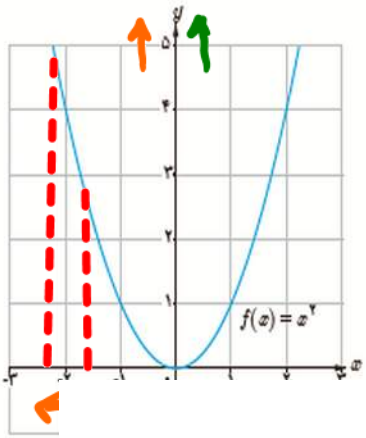
می‌نویسیم : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$.

نکته : در حد در بی‌نهایت x به سمت مثبت یا منفی بی‌نهایت میل می‌کند و جواب حد یک عدد است.

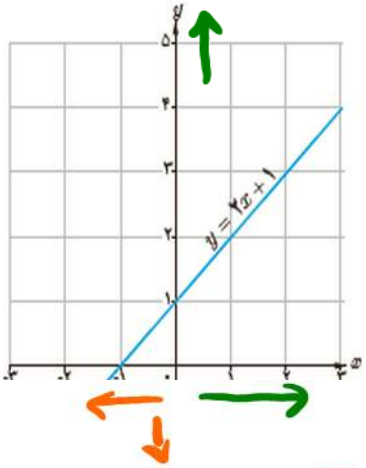
نکته: در برخی توابع، وقتی x به سمت بی نهایت میل می‌کند، مقدار تابع یعنی $f(x)$ هم به هر اندازه دلخواه بزرگ یا کوچک می‌شود، یعنی: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. به این حالت حد نامتناهی در بی نهایت می‌گوییم.

کار در کلاس

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.

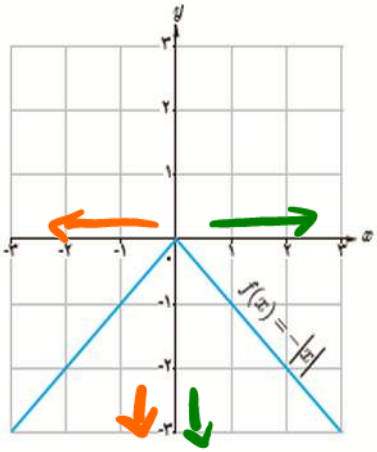


ف



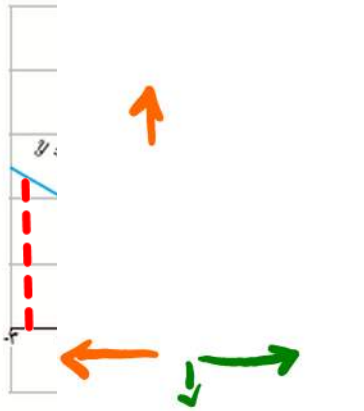
$-\infty$

$+\infty$



پ) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

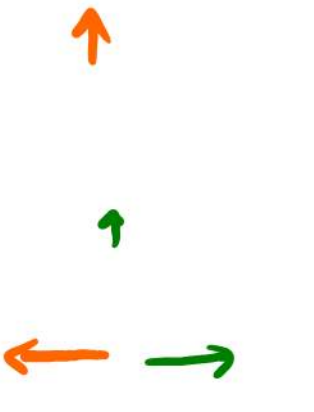


ت

$+\infty$

$-\infty$

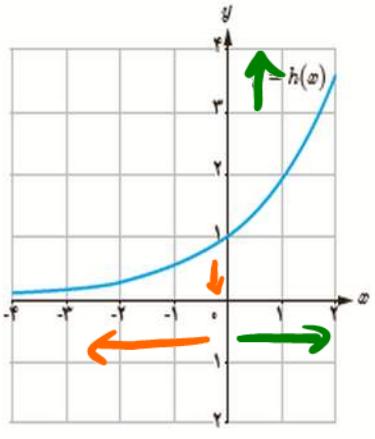
$x \to +\infty$ ۲



$+\infty$

۲

$x \to +\infty$



ج) $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

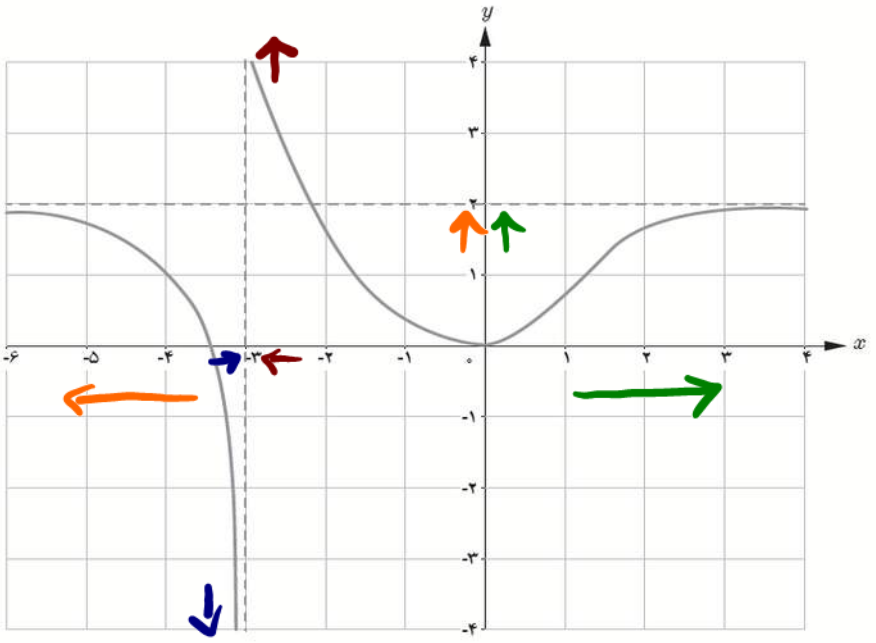
مثال: با توجه به نمودار توابع داده شده حدود خواسته شده را بیابید.

$\lim_{x \to (-۳)^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to (-۳)^-} f(x) = -\infty$

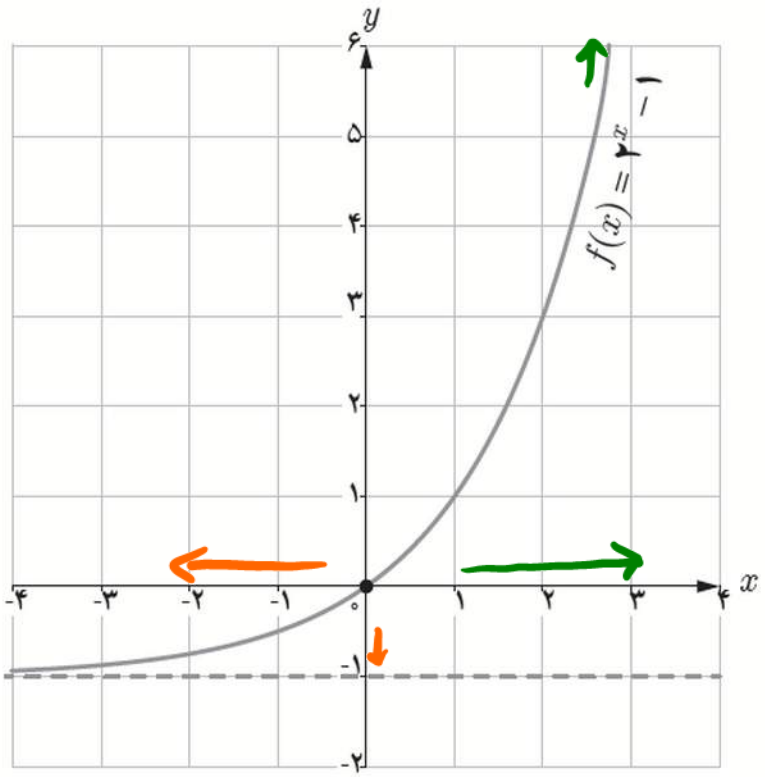
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ۲$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ۲$



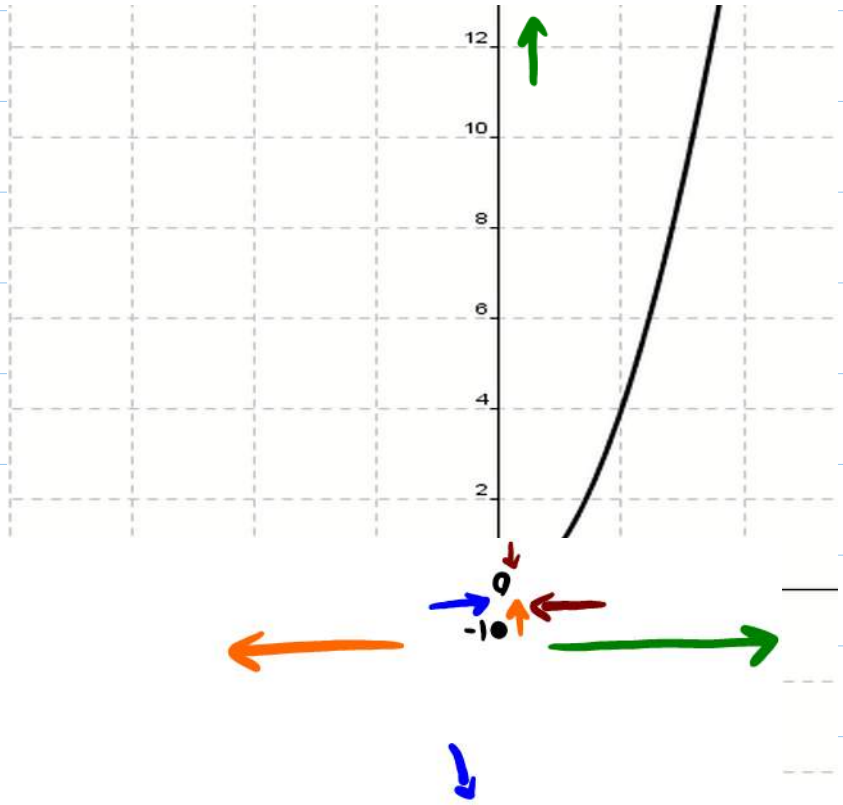
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -۱$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بیابید.

$$g(x)=\begin{cases} x^{2} & x>0 \\ -1 & x=0 \\ \frac{1}{x} & x<0 \end{cases} \quad : \lim_{x\to 0^{+}} g(x)\ ,\ \lim_{x\to 0^{-}} g(x)\ ,\ \lim_{x\to -\infty} g(x)\ ,\ \lim_{x\to +\infty} g(x)$$



$\lim_{x\to 0^{+}} g(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^{-}} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$

محاسبه حد در بی‌نهایت از روی ضابطه :

۱۱ از قاعده های زیر، بعد از جایگذاری $+\infty$ یا $-\infty$ به جای x، در محاسبه حد در بی‌نهایت‌ها استفاده می‌کنیم. $(a \in \mathbb{R} - \{0\})$

۱) $a \times \infty = \infty$

۲) $a + \infty = \infty$

* ۳) $\frac{a}{\infty} = 0$

۴) $\frac{\infty}{a} = \infty$

۵) $(\infty)^a = \infty \quad (a \in \mathbb{N})$

۶) $+\infty + \infty = +\infty$

۷) $-\infty - \infty = -\infty$

۸) $\infty - \infty$: حالت مبهم

۹) $\infty \times \infty = \infty$

۱۰) $\frac{\infty}{\infty}$: حالت مبهم

۱۲) $\sqrt{+\infty} = +\infty$

۱۳) $a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

$\rightarrow 2^{+\infty} = +\infty$

۱۴) $a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$

$\rightarrow 3^{-\infty} = \left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty} = 0$

۲) در محاسبه حد در بی نهایت چندجمله‌ای های درجه n، از جمله‌ای که توان متغیر تا کمتر از n است صرف نظر می کنیم.

۳) برای محاسبه حد در بی نهایت توابع گویی که صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند، ابتدا از نکته ۲ استفاده می کنیم و از درجات کمتر صرف نظر می کنیم. سه حالت رخ می دهد:

الف) درجه صورت از مخرج بیشتر است. در این حالت حد نامتناهی می شود یعنی $+\infty$ یا $-\infty$.

ب) درجه صورت و مخرج برابر هستند. در این حالت با تقسیم ضرایب متغیر، مقدار حد محاسبه می شود.

ج) درجه مخرج از صورت بیشتر است. در این حالت مقدار حد صفر می شود.

۴) هرگاه در صورت یا مخرج عبارت رادیکالی داشتیم، از درجات کوچکتر از درجه عبارت زیر رادیکال صرف نظر می کنیم و در صورت امکان عبارت را توان را از زیر رادیکال خارج می کنیم.

کار در کلاس

۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-1}$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{1-5t^2}{t^2+3t}$ پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2-3x}$

الف) $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{3n}{n}=3$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{-5t^2}{t^2}=-5$

پ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{-3n}=0$ یا $\frac{1}{-\infty}=0$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد.

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{-x+2} = -1$

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{100x}{x+4} = 100$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-5x+4}{7x^3-11x^2-6x}$ ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+4}{x^3+x-8}$ پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{7x^3} = \frac{2}{7}$

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{x^3} = 0$ یا $\frac{5}{\infty} = 0$

پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7}{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} -2x^4 = -2\times(+\infty) = -\infty$

مثال:

۱) $= \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3}{x^3} = 5$

۲) $= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

۳) $= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{2x^3} = -\frac{1}{2}$

۴) $\lim_{x\to+\infty}$ (۳ ... $= \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x^۳}{x^۳} = ۳$

۵) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ... $= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳x^۲}}{۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳}|x|}{۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳}x}{۲x} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۶) $\lim_{x\to+\infty}$ − ... $= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = ۱$

۷) $\lim_{x\to+\infty} \frac{۶}{۵}$ ... $= \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x^۲}{۵x^۲} = \frac{۳}{۵}$

۸) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲+\sqrt{x^۴+۳x+۱}}{۵x^۲}$ $= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲+\sqrt{x^۴}}{۵x^۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲+x^۲}{۵x^۲}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x^۲}{۵x^۲} = \frac{۲}{۵}$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی – حد در بی‌نهایت

جلسه پنجم: مجانب‌ها

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تعریف مجانب یک منحنی :

خطی است که فاصله منحنی از آن وقتی نهایت به صفر نزدیک می‌شود.

۱) مجانب قائم :

خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می‌نامیم هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

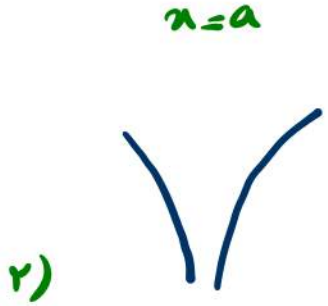
مانند :

۱)



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

۲)



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

مثال: مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ را بدست آورید.

حد تابع را در $x=-1$ از طرف راست محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

نمودار این تابع از طرف مجانب قائم مانند شکل است.

نکته: در توابع گویای شکسته که مخرج مشترک صفر می‌شود مجانب قائم دارند. اگر حد تابع در این نقاط بی‌نهایت شود آن نقطه خط ($x=$ عدد مخرج) مجانب قائم است.

تذکر ۱) در توابع گویایی که صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند، اگر ضابطه تابع را ساده کنیم به طوری که عامل مشترکی در صورت و مخرج نباشد، به طور قطع ریشه‌های مخرج مجانب قائم هستند.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{(x^2-x-6)(x-4)}$ چند مجانب قائم دارد؟

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-4)(x+2)(x-3)}=\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$$

پس $x=-2$ و $x=4$ مجانب‌های قائم‌اند.

تذکر ۲) در توابعی که صورت یا مخرج چندجمله‌ای نیستند، اگر در نقطه‌ای حد مخرج صفر شد حد صورت صفری غیرصفر شود، نمودار در آن نقطه مجانب قائم دارد. دقت کنید برای اینکه حد صورت و مخرج تعریف شود باید تابع حداقل در سمت چپ یا راست نقطه تعریف شده باشد.

مثال: نمودار تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x}(x+2)}$ چند مجانب قائم دارد؟

فقط یک مجانب قائم $x=0$ دارد. دقت کنید چون $D_f=(0,+\infty)$ پس تابع در اطراف $x=-2$ تعریف نشده است.

مثال: به ازای چه مقدار a تابع $f(x)=\frac{x-1}{x^2+ax+9}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

دو حالت داریم:

۱) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد: $\Delta=0 \Rightarrow a^2-36=0 \Rightarrow a=\pm 6$

۱۲ فقط یکی از ریشه‌های مخرج با مرتبت برابر باشد تا بعد از ساده کردن مرتبت مخرج با یک ریشه برای مخرج باقی بماند.

پس $x=1$ باید ریشه مخرج هم باشد، $x=1 : 1^2+a(1)+9=0$

$\Rightarrow a=-10$

$f(x)=\frac{x-1}{x^2-10x+9}=\frac{x-1}{(x-1)(x-9)} \Rightarrow x=9$ مجانب قائم

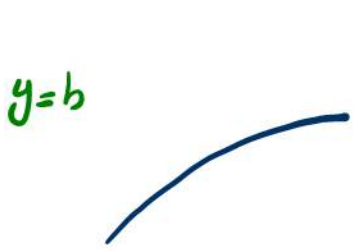
پس به ازای $a=-10, a=\pm 6$ این تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

۲) مجانب افقی:

خط $y=b$ را مجانب افقی نمودار تابع f می‌نامیم هرگاه حداقل یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$

مانند:



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$



$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$

پس برای یافتن مجانب افقی تابع f کافی است حد تابع f را وقتی $x \to \pm\infty$ حساب کنیم.

مثال: مجانب افقی $f(x) = \dfrac{x}{2x - |x-1|}$ را بیابید.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x - (x-1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2x + (x-1)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3x-1} = \frac{1}{3}$$

پس نمودار تابع دو مجانب افقی $y=1$ و $y=\frac{1}{3}$ دارد.

مثال: نمودار تابع $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ در چه ربعی از مجانب افقی آن قرار دارد؟

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \quad \to \quad y = 1 \quad \text{مجانب افقی}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$$

$x \to +\infty$: $\dfrac{3}{x+2} \to 0^+ \to f(x) < 1$: نمودار پایین مجانب افقی

$x \to -\infty$: $\dfrac{3}{x+2} \to 0^- \to f(x) > 1$: نمودار بالای مجانب افقی

پس اطراف $y=1$ سهمی به صورت : ... است.

مثال: سهمی تابع $f(x)=\frac{x^2+mx+1}{x^3+2}$ مجانب افقی خود را قطع نمی‌کند. حدود m را بیابید.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \rightarrow y=0$ مجانب افقی

پس باید معادله $f(x)=0$ جواب نداشته باشد تا سهمی f خط $y=0$ را قطع نکند :

$$\frac{x^2+mx+1}{x^3+2}=0 \rightarrow x^2+mx+1=0 \;:\; \Delta=m^2-4<0$$

$$\Rightarrow -2<m<2$$

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل چهارم: مشتق

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

قسمت اول

جلسه اول: صفحات ۷۲ تا ۷۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

آنچه تا به حال درباره شیب دانسته‌ایم :

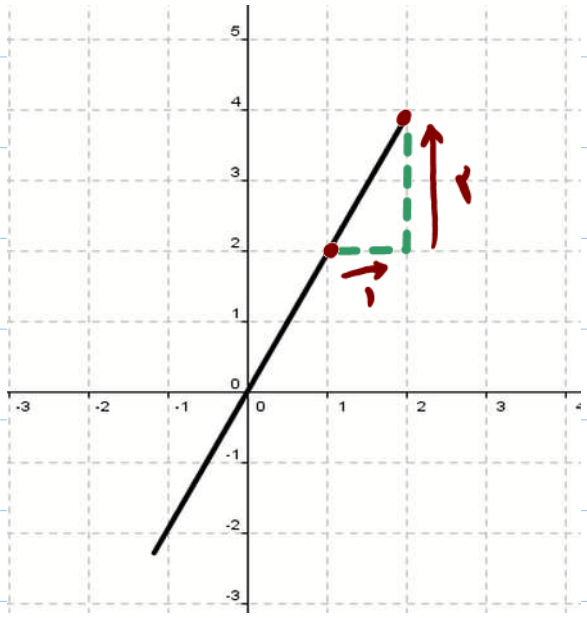
مفهوم فیزیکی شیب: نسبت افزایش ارتفاع به مسافت افقی طی شده را شیب سطح شیبدار می‌گوییم.

B

$$\text{شیب} = \frac{BH}{AH}$$

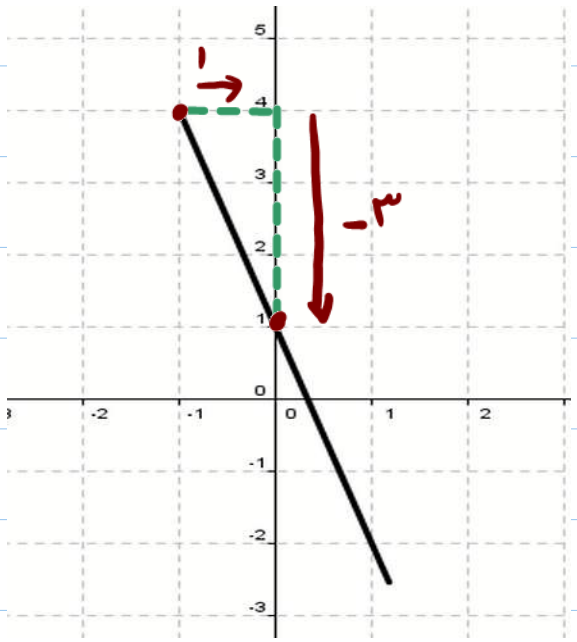
A H

شیب خط : وقتی می‌گوییم شیب خطی m است یعنی به ازای افزایش یک واحدی متغیر x متغیر y به اندازه m واحد افزایش یا کاهش می‌یابد.



الف)

$m = ۲$



ب)

$m = -۳$

نکته : الف) هرگاه روی محور xها از چپ به راست حرکت کنیم و روی خط به سمت بالا برویم، شیب خط مثبت خواهد بود.

ب) هرگاه روی محور xها از چپ به راست حرکت کنیم و روی خط به پائین سر بخوریم شیب خط منفی خواهد بود.

ج) اگر خط موازی محور xها باشد شیب خط صفر است (خط‌های افقی)

د) اگر خط موازی محور yها باشد شیب خط تعریف نشده است (خط‌های قائم)

یافتن شیب خط با داشتن دو نقطه از آن :

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از خط d باشند، شیب این خط برابر است با :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

نوشتن معادله خط با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن :

اگر $A(x_1, y_1)$ نقطه‌ای از خط d با شیب m باشد آنگاه معادله این خط

از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه به مختصات $(-1, -7)$ و $(-4, -2)$ بگذرد.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2+7}{-4-1} = \frac{5}{-5} = -\frac{5}{5} \rightarrow y+7 = -\frac{5}{5}(x-1)$$

$$y = -\frac{5}{5}x + \frac{5}{5} - 7 \longrightarrow y = -\frac{5}{5}x - \frac{26}{5}$$

رابطه شیب خط و تانژانت: تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد برابر شیب خط است.

تذکر: الف) به معادله‌های به شکل $y = mx + h$ معادله استاندارد خطی می‌گوییم که m شیب خط و h عرض از مبدأ (محل برخورد خط با محور yها) است.

ب) به معادله‌های به شکل $ax + by + c = 0$ صورت کلی خطی می‌گوییم که شیب از $-\frac{a}{b}$ به دست می‌آید.

مثال: شیب خط‌های زیر را بیابید.

۱) $x = 1 \rightarrow m$: تعریف نشده

۲) $y = \sqrt{3}x - 4 \rightarrow m = \sqrt{3}$

۳) $y = -2 \rightarrow m = 0$

۴) $4x + 12y - 10 = 0 \longrightarrow m = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$

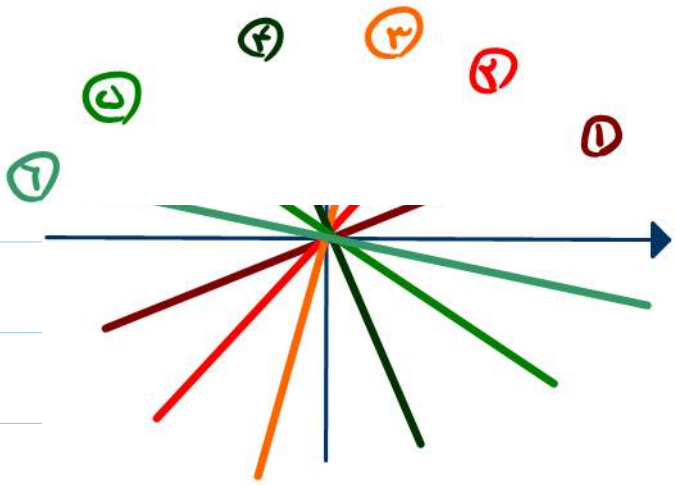
۵) $3x = 3y + 1 \rightarrow 3y = 3x - 1 \xrightarrow{\div 3} y = \frac{3}{3}x - \frac{1}{3} \rightarrow m = \frac{3}{3}$

۶) $m = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$



نکته : در خط‌های با شیب مثبت، هرچه خط به محور yها نزدیک‌تر شود، شیب آن بیشتر می‌شود و در خط‌های با شیب منفی، هرچه خط به محور yها نزدیک‌تر شود شیب آن افزایش می‌یابد.

مثال : شیب خط‌های داده شده، به ترتیب $\{2, -4, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 1\}$ است. هر شیب مربوط به کدام خط است؟



$m_1 = \frac{1}{2}$

$m_2 = 1$

$m_3 = 2$

$m_4 = -4$

$m_5 = -1$

$m_6 = -\frac{1}{3}$

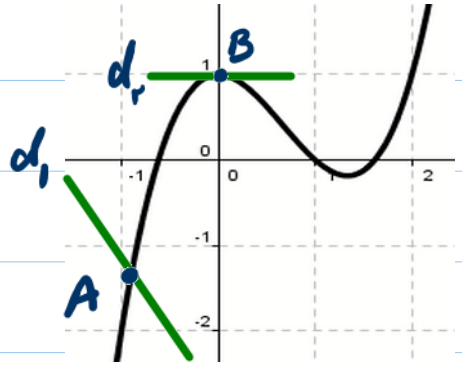
خط مماس بر منحنی :

در هندسه، خط مماس بر دایره، خطی تعریف می‌شود که دایره را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

ولی این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.



به نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید.



از لحاظ احساسی خط d_2 در B

بر تابع مماس است ولی خط d_1 در A

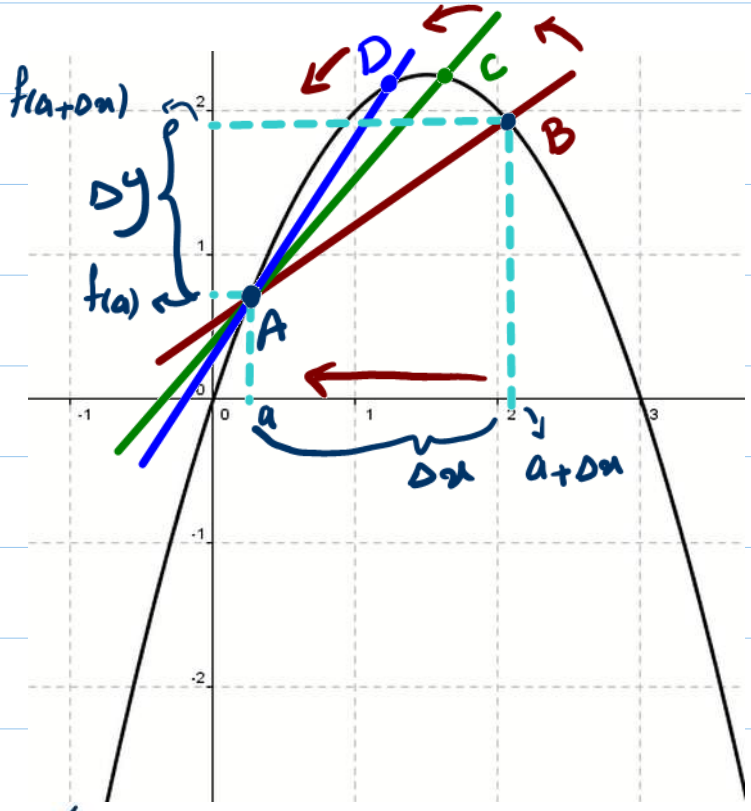
بر منحنی تابع مماس نیست.

تعریفی غیر دقیق از خط مماس :

خط را طوری است که منحنی تابع را در آن نقطه فقط لمس می‌کند. به صورت غیر دقیق

خطی تعریف می‌شود که از دو نقطه واقع بر منحنی که بی‌نهایت به یکدیگر نزدیک اند می‌گذرد.

مثال: تابع $y = -x^2 + 3x$ را در نظر بگیرید.



هر خطی که از دو نقطه منحنی می‌گذرد را خط قاطع می‌نامیم مانند:

. AD ، AC ، AB

فرض کنید نقطه A ثابت باشد و نقطه B را به نقطه A نزدیک و نزدیک‌تر می‌کنیم.

این عمل معادل این است که $\Delta x \to 0$. ضمن انجام این عمل، خط قاطع حول نقطه ثابت A گردش می‌کند. این خط قاطع را برای یک وضعیت حدی است.

همین وضعیت حدی است که ما می‌خواهیم خط مماس بر منحنی در نقطه A باشد.

حال اگر شیب خط قاطع AB را $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ در نظر بگیریم. با این کار این عمل حدی شیب خط قاطعی که به نقطه A بسیار بسیار نزدیک است به صورت : $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ خواهد بود.

تعریف دقیق خط مماس :

فرض کنید تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ عبارت است از خطی که از نقطه A می‌گذرد و دارای شیبی است که از محاسبه حد زیر بدست می‌آید :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که این حد موجود باشد.

تذکر مهم : اگر حد بالا نامتناهی شود یعنی: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$ آنگاه خط مماس، خط $x = a$ تعریف می‌شود.

نکته : اگر هیچ‌یک از حالت‌های بالا برقرار نباشد آنگاه خط مماس در A وجود ندارد.

مثال:

$a = x = -2 \longrightarrow f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7 \longrightarrow A(-2, 7)$

نقطه تماس

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left((-2+\Delta x)^2 + 3\right) - 7}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 - 4\Delta x + \Delta x^2 + 3 - 7}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x - 4)}{\Delta x} = 0 - 4 = -4$$

$$y - 7 = -4(x + 2)$$

$$y = -4x - 8 + 7 \longrightarrow y = -4x - 1$$

معادله خط مماس در نقطه $A(-2,7)$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

قسمت دوم

جلسه دوم: صفحات ۷۷ تا ۸۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در جلسه قبل با تعریف خط مماس آشنا شدیم. حال به بحث اصلی یعنی مشتق می پردازیم.

تعریف مشتق :

اگر $a \in D_f$ باشد مشتق تابع f در نقطه $x = a$ را با $f'(a)$ نشان می دهیم

و این گونه تعریف می کنیم :

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

همانطور که می بینید شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(a, f(a))$

دقیقاً برابر مشتق تابع f در $x = a$ است. به حد بالا شیب منحنی در a هم گفته می شود.

نکته: گاهی اوقات از h به جای Δx استفاده می شود و تعریف مشتق به این صورت

نوشته می شود :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: اگر $f(x)=3x^2+12$ باشد، مشتق تابع f را در نقطه $x=a$ بیابید.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{3(a+h)^2+12-(3a^2+12)}{h}$$

($f(a+h)$ و $f(a)$)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(a^2+2ah+h^2)+12-3a^2-12}{h}$$

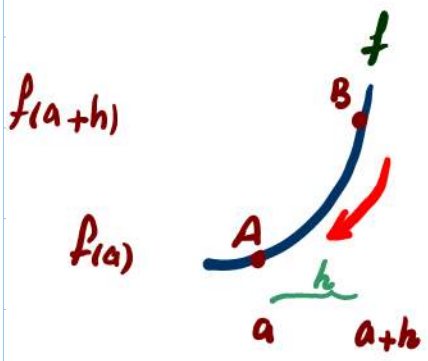
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3a^2+6ah+3h^2-3a^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6ah}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3h+6a)}{h}$$

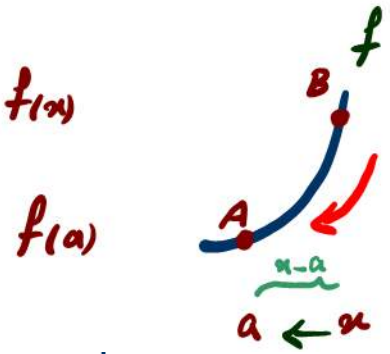
$$=3\times 0+6a=6a$$

$$f'(a)=6a$$

حال می‌خواهیم با تغییری در نمادگذاری‌ها تعریف دیگری از مشتق ارائه دهیم. به شکل‌های زیر دقت کنید.



$$\text{شیب خط مماس در } A = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$$\text{شیب خط مماس در } A = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریف دیگری برای مشتق:

اگر $a \in D_f$ باشد، مشتق تابع f در $x = a$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

مثال: برای تابع $f(x)=-x^2+10x$ مقادیر $f'(5), f'(8)$ را محاسبه کنید.

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}$$

$$f(5)=-5^2+10\times 5$$
$$=-25+50=25$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-x^2+10x-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{-(x^2-10x+25)}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)^2}{x-5}=\lim_{x\to 5}-(x-5)=0$$

$$f'(8)=\lim_{x\to 8}\frac{f(x)-f(8)}{x-8}$$

$$f(8)=-8^2+10\times 8$$
$$=-64+80=16$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{-x^2+10x-16}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{-(x^2-10x+16)}{x-8}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{-(x-8)(x-2)}{x-8}=\lim_{x\to 8}-(x-2)$$

$$=-(8-2)=-6$$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x)=(x-1)(x-2)\dots(x-5)$ را در نقطه $x=5$ حساب کنید.

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{(x-1)\cdots(x-5)-0}{x-5}$$

$$f(5)=(5-1)(5-2)\dots(5-5)=0$$

$$=\lim_{x\to 5}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=4\times 3\times 2\times 1=24$$

مثال: اگر $f(2)=0$ و $f'(2)=-3$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-f^2(2)}{x^2-4}$ را بیابید.

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-f(2))(f(x)+f(2))}{(x-2)(x+2)}$$

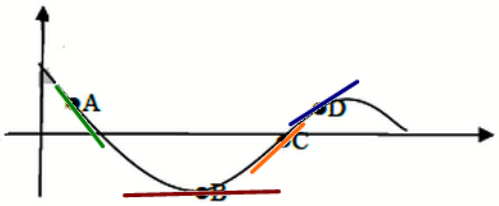
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+f(2)}{x+2}$$

$$=f'(2)\times\frac{f(2)+f(2)}{2+2}=-3\times\frac{2\times 5}{4}=-3\times\frac{5}{2}$$

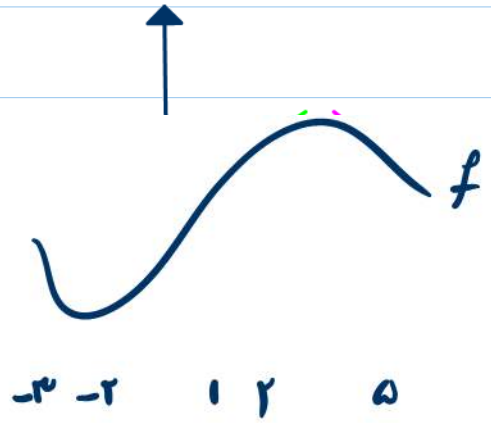
$$=-\frac{15}{2}$$

مثال: نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲
نقطه	C	B	D	A



مثال: با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.



الف) $f'(۱) > f'(۲)$ درست زیرا خط قرمز به نمودار نزدیک‌تر

ب) $f'(۰) > f'(-۲)$ درست زیرا خط صورتی به نمودار نزدیک‌تر

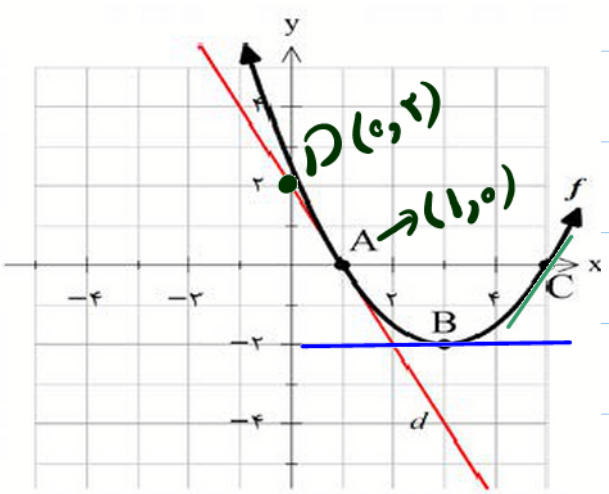
پ) $f'(-۲) < f(۰)$ نادرست زیرا عدد منفی $\not< ۰$

ت) $f'(-۳) < f'(-۲) < f'(۲) < f'(۱)$ درست.

مثال: در نمودار مقابل خط d در نقطه $x=1$ بر نمودار مماس شده است:

الف)مشتق تابع f را در نقطه $x=1$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



الف) $f'(1)=$ شیب خط مماس بر f در نقطه A

$$m_d = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{2-0}{0-1} = -2 \rightarrow f'(1)$$

ب) یک عدد مثبت

$$m_C > m_B$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

جلسه سوم: حل تمرین

صفحات۸۱و۸۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱ اگر $f(x)=3x^2-2x+1$، $f'(2)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

$3\times4-2\times2+1=12-4+1=9$

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-2x+1-9}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-2x-8}{x-2}$$

$3x^2-2x-8 \mid x-2$

روش هورنر

	3	-2	-8
2	3	$2\times3-2=4$	$2\times4-8=0$

باقی‌مانده

خارج قسمت: $3x+4$

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(3x+4)}{x-2}=3\times2+4=10$$

$m=f'(2)=10$ مماس

$A(2,f(2))\Rightarrow A(2,9)$

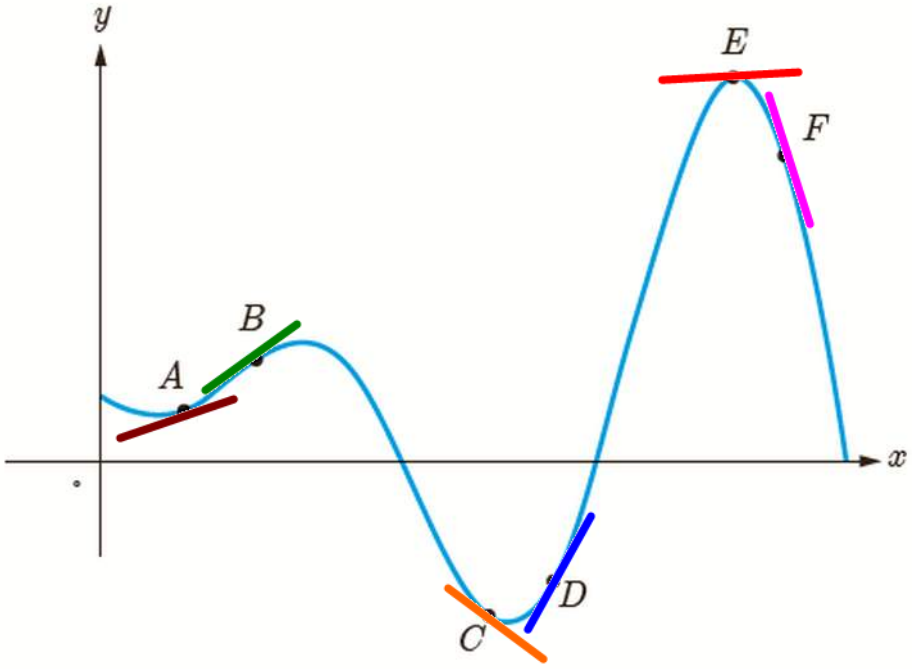
$$y-9=10(x-2)$$

$$y=10x-20+9 \Rightarrow y=10x-11$$

معادله خط مماس در A

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

نقطه	شیب
F	-۳
C	-۱
E	۰
A	$\frac{۱}{۲}$
B	۱
D	۲



۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A : m_1

ب) شیب نمودار در نقطه B : m_2

پ) شیب نمودار در نقطه C : m_3

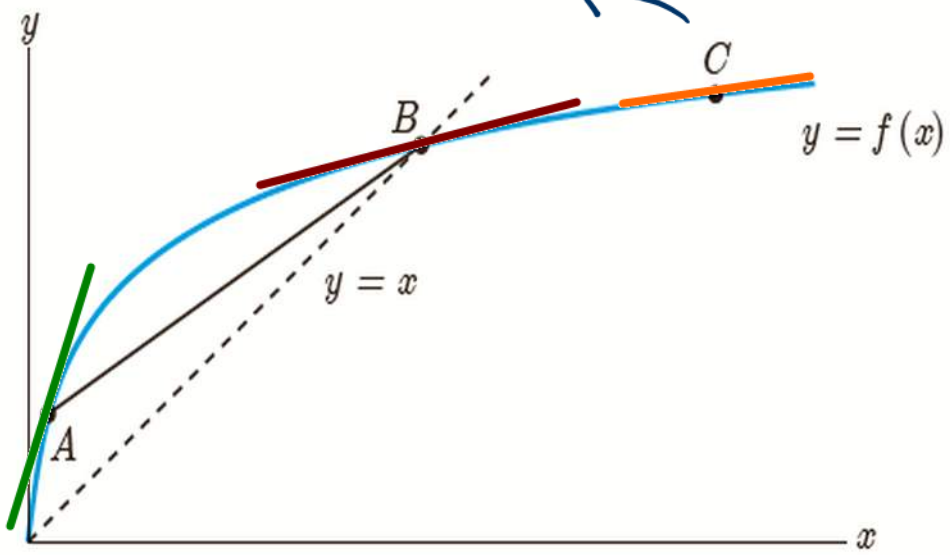
ت) شیب خط AB : m_4

ث) شیب خط $y=2$: $m_5 = 0$

ج) شیب خط $y=x$: $m_6 = 1$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 ، m_2 ، ... و m_6 در نظر بگیرید.

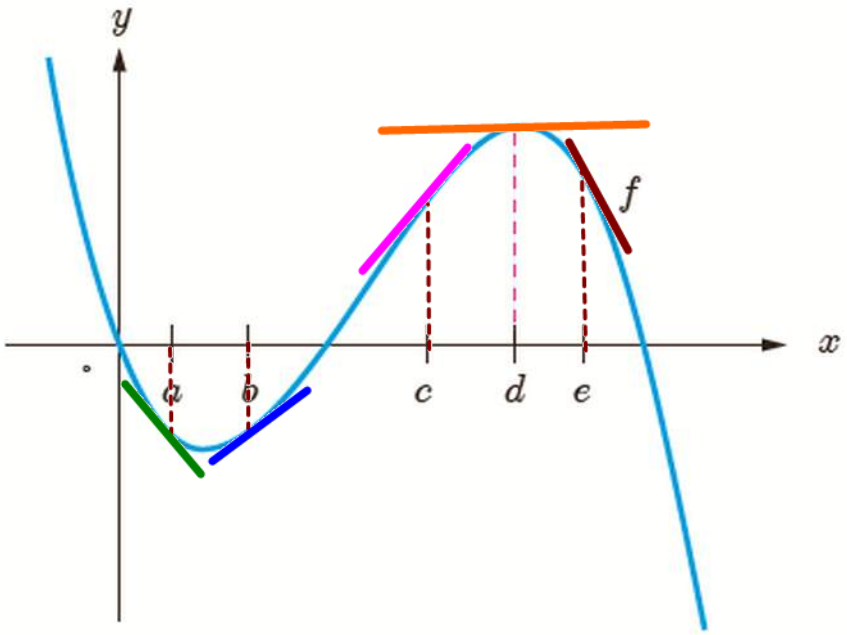
هرچه به راست می‌رویم شیب کمتر



$m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۰/۵
e	−۲



۵ نقاطی مانند $A، B، C، D، E، F$ و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

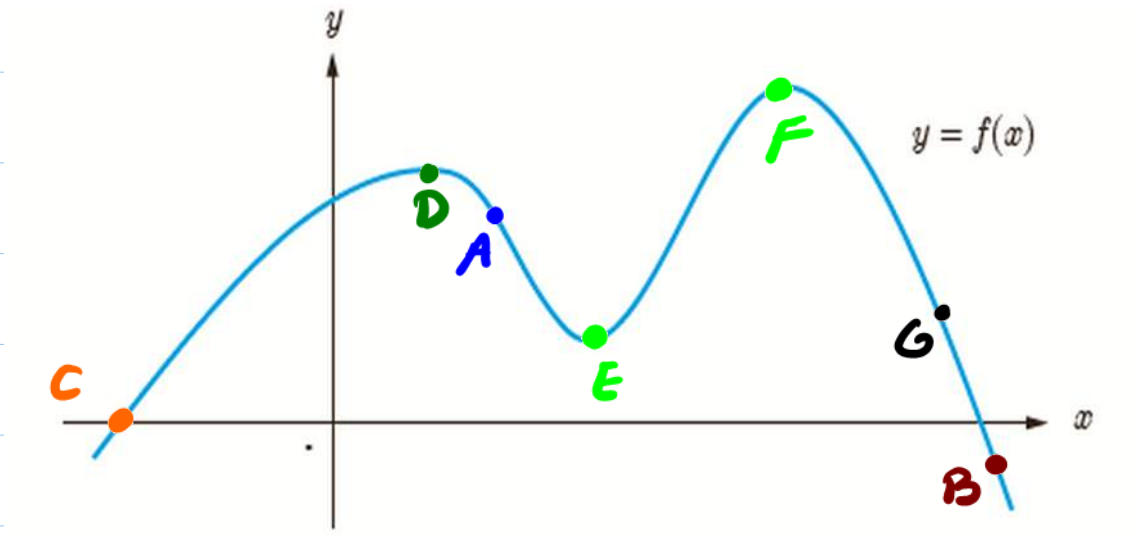
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x)=x^3-2$ ، $f'(-1)$ را به‌دست آورید.

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2-(-3)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$

$$=(-1)^2-(-1)+1=1+1+1=3$$

۷ نقاط $A، B، C، D، E$ و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) نادرست

ب) نادرست

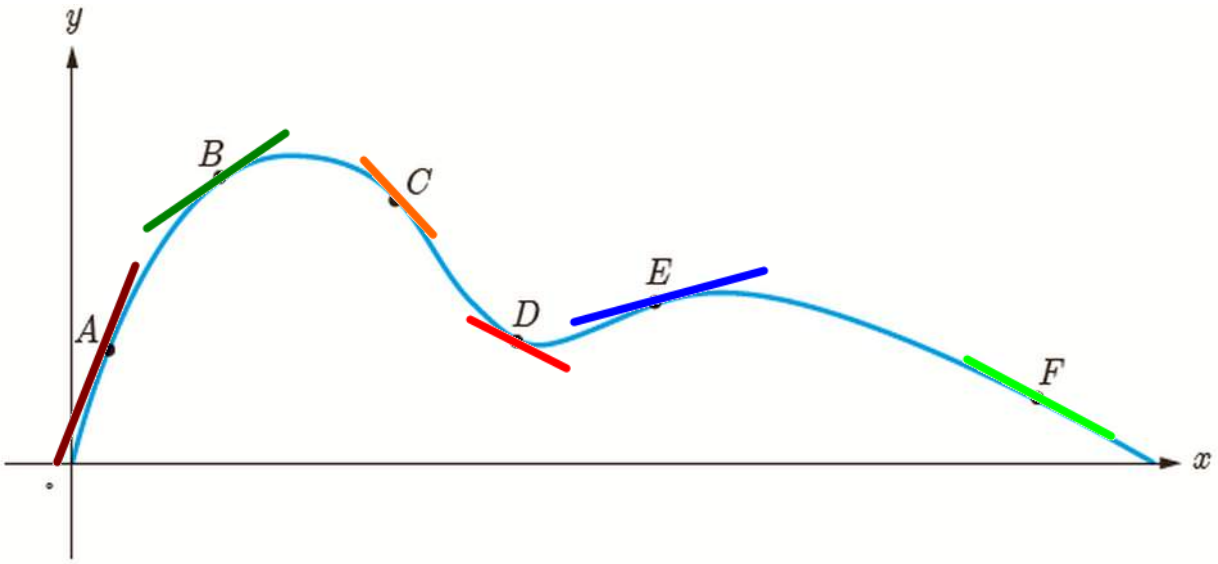
با A

پ) درست

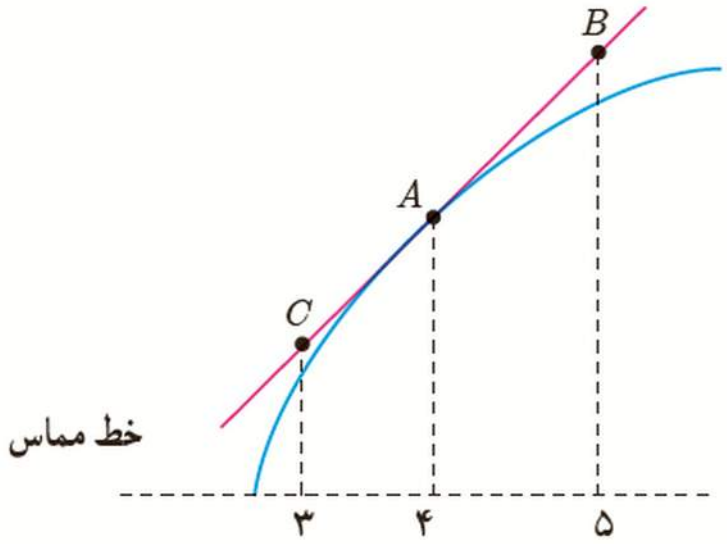
ت) درست

ث) نادرست ← درست : $m_C < m_D < m_F$

ج) درست



۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم : $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.



$A(۴, f(۴)) \rightarrow A(۴, ۲۵)$

معادله خط مماس بر f در A:

$y - ۲۵ = ۱/۵(x - ۴)$

$y = ۱/۵x - ۶ + ۲۵ \rightarrow y = ۱/۵x + ۱۹$

$x_B = ۵ \xrightarrow[B]{\text{روی خط مماس}} y_B = ۱/۵ \times ۵ + ۱۹ = ۷/۵ + ۱۹ = ۲۶/۵$

$x_C = ۳ \xrightarrow[C]{\text{روی خط مماس}} y_C = ۱/۵ \times ۳ + ۱۹ = ۴/۵ + ۱۹ = ۲۳/۵$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

قسمت اول

جلسه چهارم: صفحات ۸۴ تا ۸۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

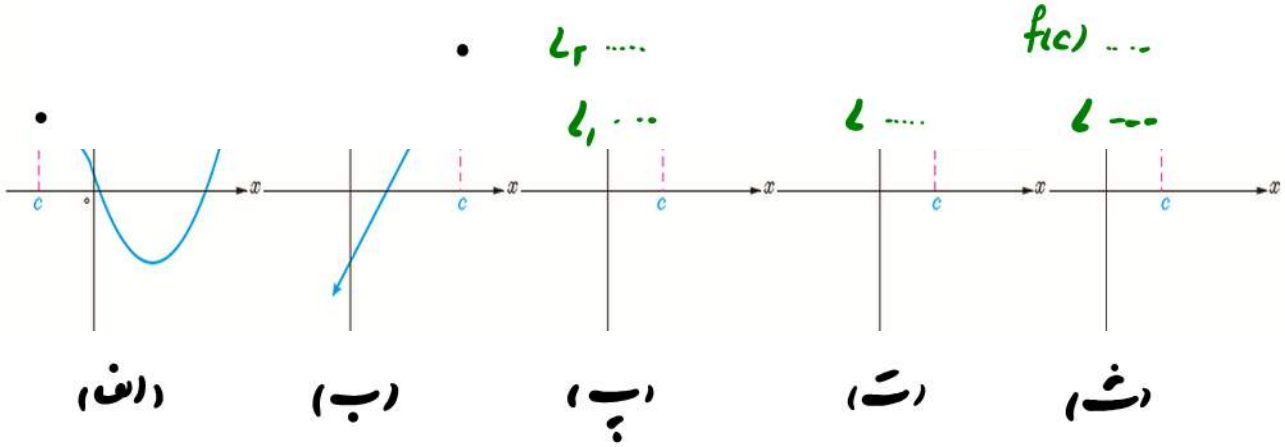
گروه ریاضی استان همدان

یادآوری :

تعریف پیوستگی : تابع f را در $x=c$ پیوسته گوئیم هرگاه : $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

یعنی مقادیر $f(c)$ و $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود و با هم برابر باشند .

مثال :



(الف) (ب) (پ) (ت) (ث)

الف) $\lim_{x\to c^-} f(x)$ موجود نیست پس $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

ب) $\lim_{x\to c^+} f(x)$ موجود نیست پس $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

پ) $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$ پس $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در c پیوسته نیست

ت) $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود دارد ولی $f(c)$ موجود نیست پس تابع در c پیوسته نیست .

ث) $\lim_{x\to c} f(x)$ و $f(c)$ هردو موجودند ولی با هم برابر نیستند پس تابع در c پیوسته نیست .

مشتق یک طرفه:

مشتق راست تابع f در $x=a$ را $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ یا $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ می‌نامیم و با $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم.

مشتق چپ تابع f در $x=a$ را $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ یا $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ می‌نامیم و با $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم.

مثال: مشتق چپ و راست تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+5 & x<2\\ 4x+1 & x\geq 2\end{cases}$ را در $x=2$ بیابید.

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x+1-9}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4(x-2)}{x-2}=4$$

($4x+1\to 9$)

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+5-9}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}x+2=4$$

دقت کنید مقدار $f(2)$ برای مشتق چپ و راست از ضابطه اول بدست می‌آید.

حال می‌خواهیم وارد بحث مشتق‌پذیری شویم، یعنی ببینیم که تابع در چه نقطه‌ای مشتق دارد و در چه نقطه‌ای مشتق ندارد.

تعریف: تابع f را در a مشتق‌پذیر می‌گوئیم اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد.

تذکر: وجود $f'(a)$ به این معناست که مشتق‌های چپ و راست موجود، متناهی و برابر باشند.

قضیه: اگر تابع f در a مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته است.

اثبات: بنابه فرض f در a مشتق‌پذیر است پس $f'(a)$ وجود دارد یعنی:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{وجود دارد}$$

شرط موجود بودن $f(a)$ برقرار است زیرا در غیر این صورت حد بالا بی‌معناست.

حد مقابل را در نظر بگیرید:

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big)$$

$$= \lim_{x \to a} \left((x-a) \times \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)}\right) = \lim_{x \to a}(x-a) \times \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= 0 \times f'(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a}\big(f(x) - f(a)\big) = 0 \to \lim_{x \to a} f(x) - \underbrace{\lim_{x \to a} f(a)}_{\to f(a)} = 0 \to \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

نتیجه: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد در a مشتق پذیر هم نیست.

تذکر: عکس قضیه بالا درست نیست. یعنی اگر f در $x=a$ پیوسته باشد لزوماً در a مشتق پذیر نیست.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<2 \\ 8-x & x\geq 2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}(8-x)=6 \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}(2x-1)=3 \quad , \quad f(2)=6$$

پس تابع f در 2 پیوسته است

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=6$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{8-x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x-1-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-7}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

$$f'_+(2)\neq f'_-(2)$$

پس تابع f در $x=2$ مشتق پذیر نیست.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}2x & x\geq 1\\ x^2 & x<1\end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$\lim_{x\to 1^+} 2x = 2$ ، $\lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$ ، $f(1)=2 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)$ وجود ندارد

پس تابع در $x=1$ پیوسته نیست لذا مشتق پذیر هم نخواهد بود.

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax+1 & x\geq 2\\ x^2+b & x<2\end{cases}$ در $x=2$ مشتق پذیر باشد، a,b را بیابید.

شرط پیوستگی: $\lim_{x\to 2^+} ax+1 = 2a+1$ ، $\lim_{x\to 2^-} x^2+b = 4+b$ ، $f(2)=2a+1$

$\Rightarrow 2a+1 = 4+b \rightarrow 2a+1-4=b \rightarrow b=2a-3$

$$f'_+(2)= \lim_{x\to 2^+} \frac{ax+1-(2a+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{ax+1-2a-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{a(x-2)}{x-2} = a$$

$$f'_-(2)= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+b-(2a+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2a-3-2a-1}{x-2}$$

($b \to 2a-3$)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 2+2=4$$

$f'_+(2)=f'_-(2) \Rightarrow a=4 \rightarrow b=2\times 4-3=8-3=5$

$a=4$, $b=0$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$. نشان دهید $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

$\lim_{x\to 0^+} x = 0$, $\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0^2 = 0$, $f(0)=0$ ← تابع در $x=0$ پیوسته است

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ $\Rightarrow$ $f'(0)$ موجود نیست.

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

قسمت دوم

جلسه پنجم: صفحات ۸۶ تا ۸۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

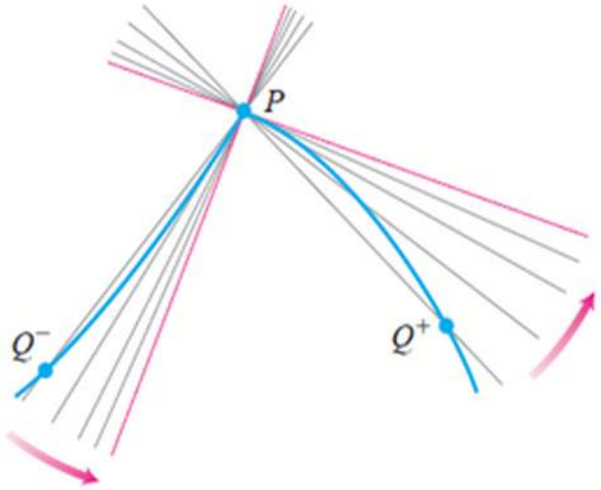
گروه ریاضی
استان همدان

مشتق ناپذیری

دسته اول: همانطور که در جلسه قبل دیدیم تابع در نقاطی که در آن‌ها پیوسته نیست مشتق‌پذیر نیست.

دسته دوم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد، چنانچه مشتق‌های چپ و راست موجود، متناهی و نابرابر باشند و یا حداکثر یکی از مشتق‌های چپ و راست نامتناهی باشد، f در a مشتق‌پذیر نیست. به این نقطه، نقطهٔ **گوشه‌ای** یا زاویه‌دار می‌گوییم.

تذکر: در نقاط گوشه‌ای دو نیم مماس بر تابع قابل رسم است.



مثال: به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-4|$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$f(2)$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

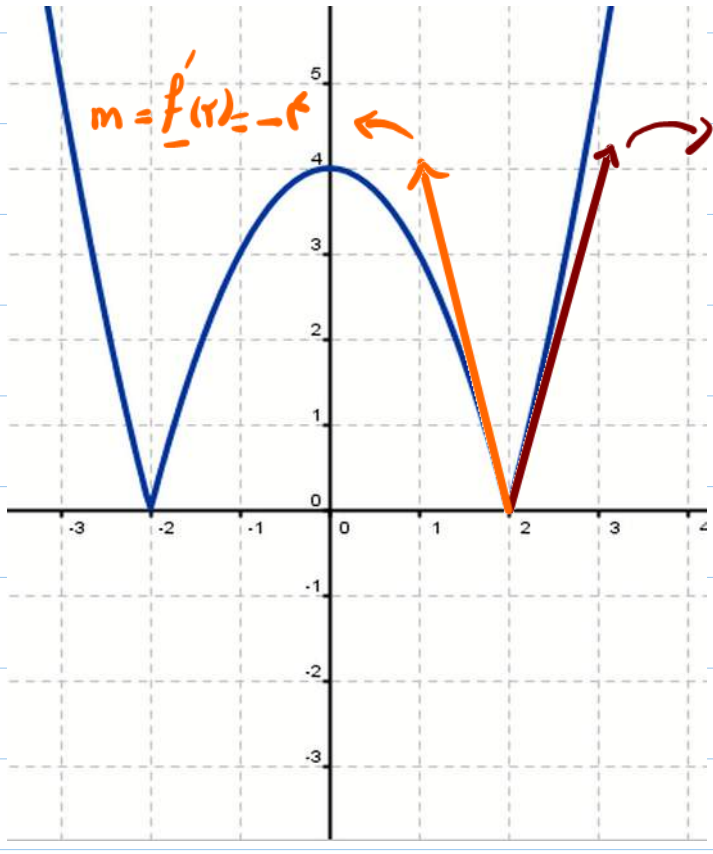
$x\to 2^-$: x^2-4 : $+\ 0\ -$

$x\to 2^+$: x^2-4 : $-\ 0\ +$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}-\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=-4$$

پس تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست و این نقطه یک نقطه گوشه‌ای است. $f'_-(2)\neq f'_+(2)$



مثال: نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$ در $x=0$ نقطه گوشه‌ای دارد.

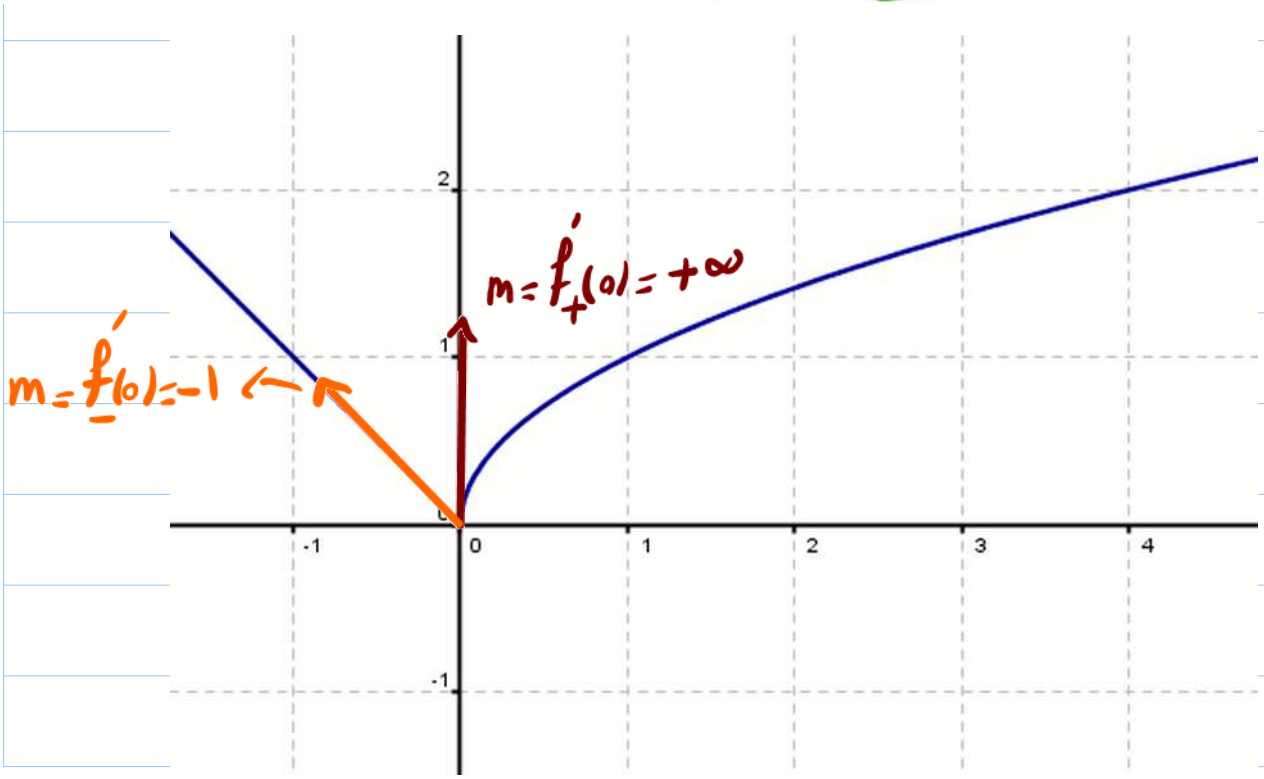
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt{x}}$$

($f(0)$: $\sqrt{x}-0$)

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

پس f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و این نقطه گوشه‌ای است. $f'_+(0)\neq f'_-(0)$



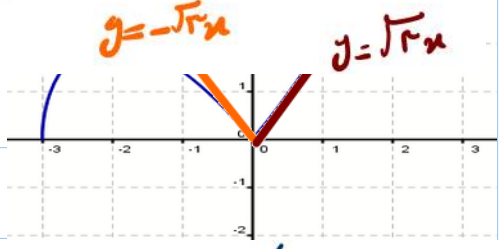
مثال: معادله نیم‌مماس‌های تابل رسم نمودار $f(x)=|x|\sqrt{x+2}$ را در $x=0$ بدست آورید.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sqrt{x+2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x+2}}{x}=\sqrt{2}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sqrt{x+2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sqrt{x+2}}{x}=-\sqrt{2}$$

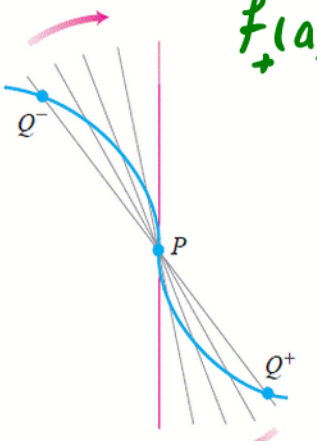
نیم‌مماس راست : $y-0=\sqrt{2}(x-0)\to y=\sqrt{2}x$ $\quad A(0,0)$

نیم‌مماس چپ : $y-0=-\sqrt{2}(x-0)\to y=-\sqrt{2}x$

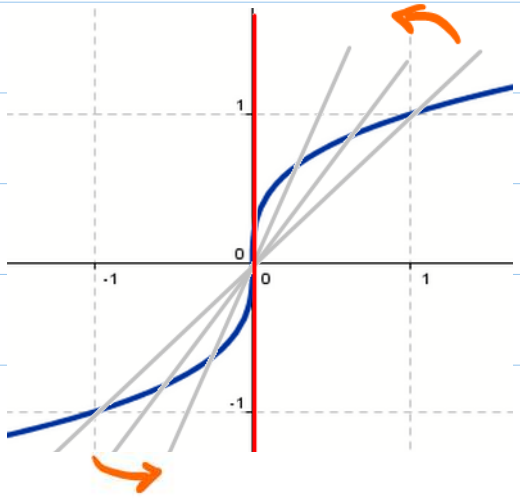


دسته سوم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های چپ و راست در a نامتناهی و هم‌علامت باشند، آنگاه در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست.

نکته: در این حالت تابع در این نقطه دارای **مماس قائم** با معادله $x=a$ است.



$f'_+(a) = f'_-(a) = -\infty$



$f'_+(a) = f'_-(a) = +\infty$

مثال: مشتق پذیری تابع $g = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

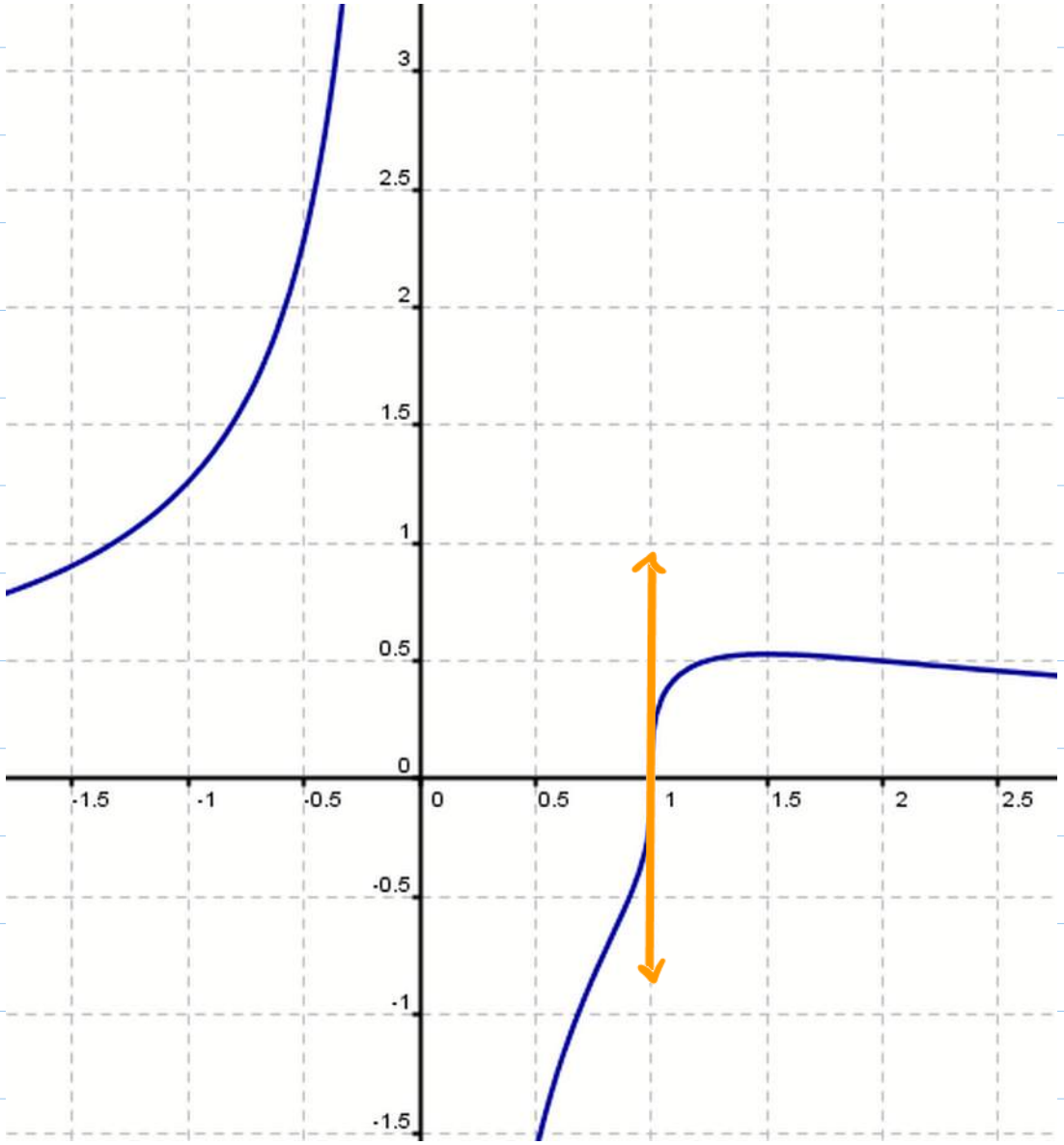
$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x} - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x(x-1)} \times \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^3}}{x(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{1\times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)}{x(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{1\times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

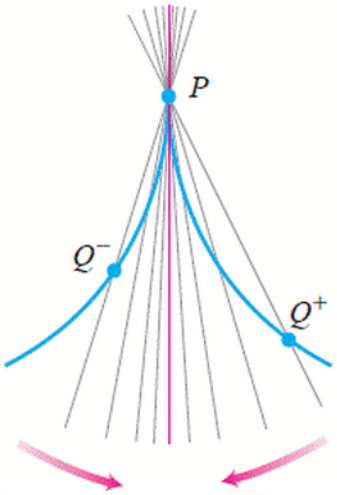
به طوری که:

پس تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست و تابع در این نقطه مماس قائم دارد.

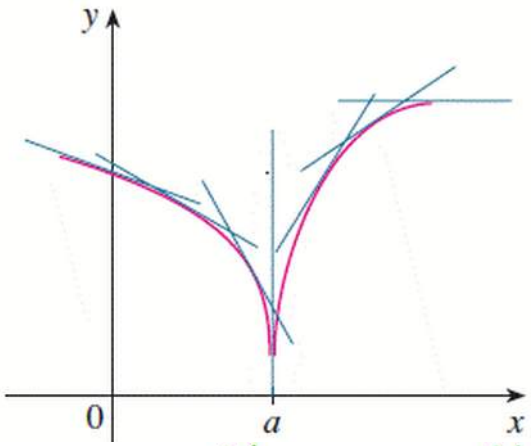

3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

دسته چهارم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در a نامتناهی و نامساوی باشند، f در a مشتق‌پذیر نیست. به این نقطه، نقطه بازگشت گفته می‌شود.

نکته: در نقطه بازگشت مماس قائم بر نمودار تابع است.



$f'_-(a)=+\infty$ ، $f'_+(a)=-\infty$



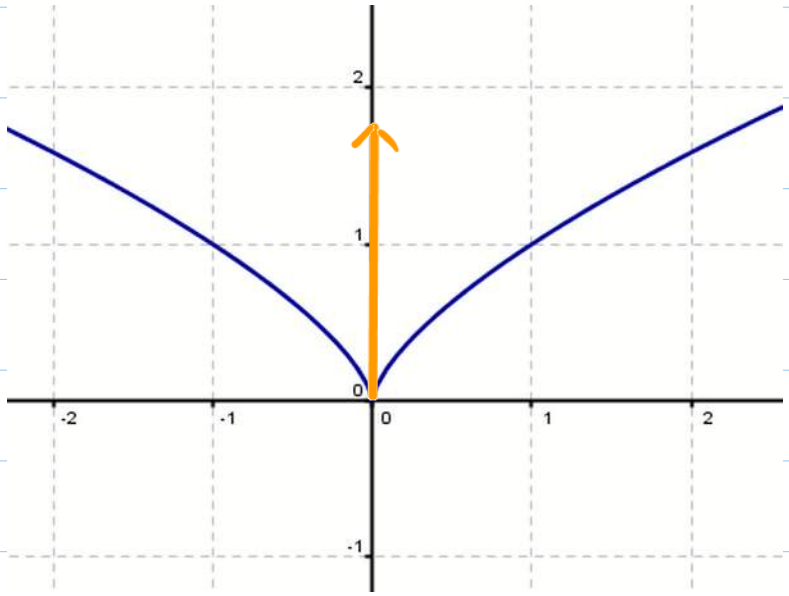
$f'_-(a)=-\infty$ ، $f'_+(a)=+\infty$

مثال: نشان دهید تابع $y=\sqrt[3]{x^2}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\times\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

به طریق به

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$



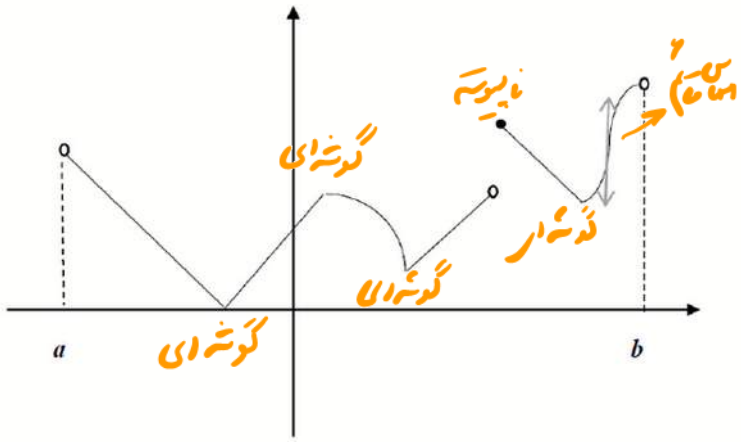
$y = \sqrt[3]{x^2}$

مثال: نمودار تابع f با دامنه (a,b) به شکل مقابل است.

این تابع در چند نقطه از دامنه اش مشتق پذیر نیست؟

۱) چهار نقطه ۲) پنج نقطه

۳) شش نقطه ۴) هفت نقطه

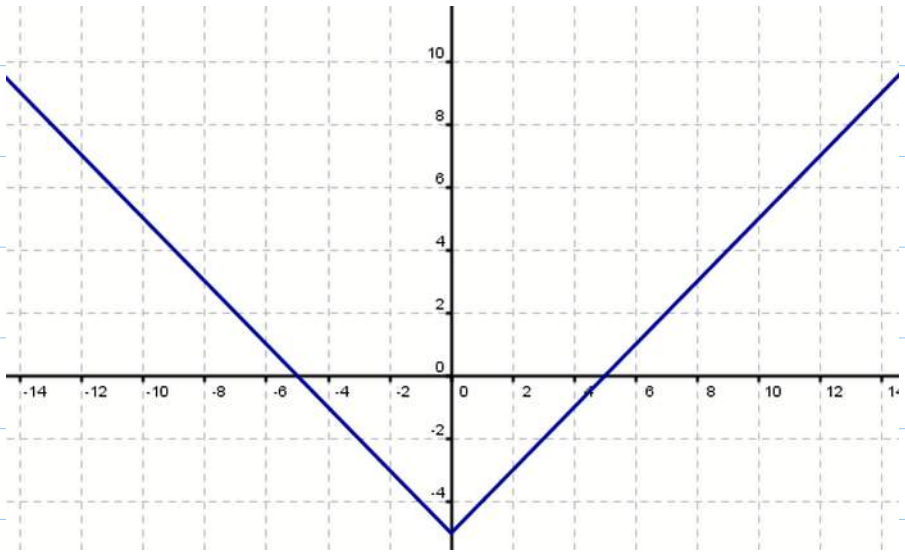


مثال: توابع زیر در چند نقطه مشتق پذیر نیستند.

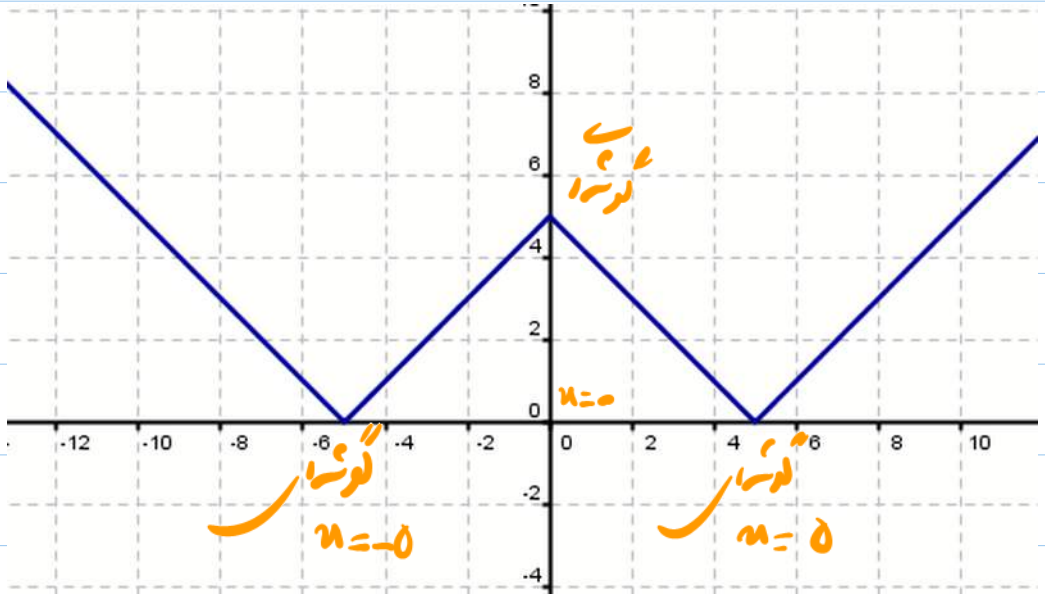
الف) $f(x) = ||x| - 5|$

ب) $g(x) = |2x - |x - 3||$

ابتدا $f_1(x)=|x|-5$



$f(x)=||x|-5|$



در سه نقطه

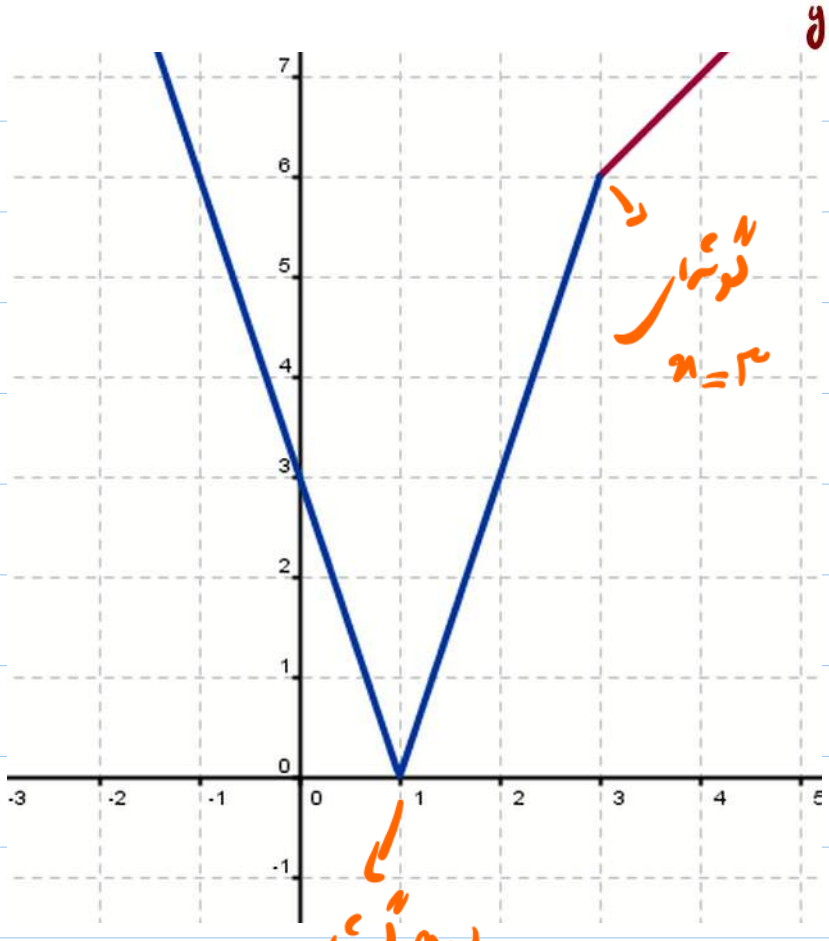
ب) $g(x) = |2x - |x-3||$

$x > 3 \rightarrow g(x) = |2x - x + 3| = |x+3| = x+3$

$x < 3 \rightarrow g(x) = |2x - (-(x-3))| = |2x + x - 3| = |3x-3|$

$$g(x) = \begin{cases} |3x-3| & x \leq 3 \\ x+3 & x > 3 \end{cases}$$

$y = |3x-3|$



در دو نقطه

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

قسمت سوم

جلسه ششم: صفحات ۹۰ تا ۹۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تابع مشتق :

تعریف: تابع مشتق f که با f' نمایش داده می‌شود تابعی است که دامنه‌اش مجموعه همه نقاطی است که تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر است و مقدار آن در نقطه x از دامنه‌اش برابر است با :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثال : تابع مشتق، $f(x) = \sqrt{x}$ را بدست آورید .

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

همانطور که تا حال دیدیم یافتن مشتق یک تابع با استفاده از تعریف، عملی زمان بر است. مانند آنچه در مثال قبل برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بدست آوردیم، می‌توانیم قواعدی را بیان کنیم که با استفاده از آن‌ها مشتق توابع را بیابیم.

قواعد مشتق‌گیری

۱.مشتق تابع ثابت صفر است.

مثال:

$f(x)=5 \rightarrow f'(x)=0$

$f(x)=\sqrt{7} \rightarrow f'(x)=0$

۲.مشتق تابع $f(x)=ax^n$ برابر است با حاصل ضرب ،ضریب عددی در توان متغیر در متغیر به توان یک واحد کمتر یعنی: $f'(x)=anx^{n-1}$

مثال:

$y=x \rightarrow y'=1\times 1\times x^{1-1}=1\times 1\times x^0=1\times 1\times 1=1$

$y=4x \rightarrow y'=4x^0=4$

$y=7x^5 \rightarrow y'=35x^4$

$y=2x^{\frac{1}{4}} \rightarrow y'=\frac{2}{4}x^{\frac{1}{4}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$

حالت خاص:

$(x)'=1$

$(ax)'=a$

۳. مشتق جمع یا تفریق چند تابع برابر است با جمع یا تفریق مشتق تک تک آنها.

مثال :

$$f(x)=9x^{6}-2x^{2}+\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}+7x-\sqrt{2}$$

$$f'(x)=54x^{5}-4x+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+7+0$$

$$f'(x)=54x^{5}-4x+\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}+7$$

۴. مشتق ضرب دو تابع برابر است با مشتق اولی در خود دومی بعلاوه مشتق دومی در خود اولی یعنی : $(f\times g)'(x)=f'g+g'f$

مثال :

$$f(x)=(\sqrt{7}x+2)(x^{3}+6x^{2}+x)$$

$$f'(x)=(\sqrt{7})(x^{3}+6x^{2}+x)+(3x^{2}+12x+1)(\sqrt{7}x+2)$$

۵. مشتق تقسیم دو تابع برابر است با مشتق صورت در خود مخرج منهای مشتق مخرج در خود صورت تقسیم بر خود مخرج به توان دو یعنی : $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'g-g'f}{g^{2}}$

مثال :

$$f(x)=\frac{7x^{3}-9}{x^{4}+2x}$$

$$f'(x)=\frac{(21x^{2})(x^{4}+2x)-(4x^{3}+2)(7x^{3}-9)}{(x^{4}+2x)^{2}}$$

حالت خاص: ۱) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ۲) $\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$

۳) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

مثال: $y = \frac{10}{x} \rightarrow y' = -\frac{10}{x^2}$

$y = \frac{2x+4}{3x-4} \rightarrow y' = \frac{2(-4)-4(3)}{(3x-4)^2} = \frac{-20}{(3x-4)^2}$

۶.مشتق توابع رادیکالی با فرجه دو برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر دو برابر خود رادیکال یعنی اگر $f(x)=\sqrt{u}$ که u تابع برحسب x باشد آنگاه $f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

مثال: $f(x) = \sqrt{3x^2-x+1} \rightarrow f'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}$

$g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \rightarrow g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}$

$h(x) = \sqrt{(x^3+2x)(1-9x+\frac{1}{x})}$

$h'(x) = \frac{(3x^2+2)(1-9x+\frac{1}{x}) - (-9-\frac{1}{x^2})(x^3+2x)}{2\sqrt{(x^3+2x)(1-9x+\frac{1}{x})}}$

حالت خاص $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۷.مشتق توابع رادیکالی با فرجه سه برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر سه برابر خود رادیکال به توان دو یعنی اگر $f(x)=\sqrt[3]{u}$ که u تابع برحسب x باشد آنگاه

$$f'(x)=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

مثال :

$$f(x)=\sqrt[3]{2x-1} \rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$$

$$g(x)=\sqrt[3]{\frac{2x-8}{x+1}} \rightarrow g'(x)=\frac{\frac{2-(-8)}{(x+1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2x-8}{x+1}\right)^2}}$$

حالت خاص :

$$(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

۸. مشتق هر تابع تواندار برابر است با حاصلضرب ضریب عددی (در صورت وجود) در توان تابع در خود تابع با توان یک واحد کمتر در مشتق تابع بدون توان یعنی :

$$(au^n)'=anu^{n-1}u'$$

مثال :

$$y=6(3x^4-7x+1)^5$$

$$y'=30(3x^4-7x+1)^4(12x^3-7)$$

$$y = \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}x^2\right)^3$$

$$y' = 3\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}x^2\right)^2 \times \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{2}x\right)$$

۹. مشتق توابع مثلثاتی:

مشتق سینوس یک کمان برابر است با مشتق کمان در کسینوس همان کمان.

مشتق کسینوس یک کمان برابر است با منهای مشتق کمان در سینوس همان کمان.

مشتق تانژانت یک کمان برابر است مشتق کمان در یک بعلاوه مربع تانژانت همان کمان.

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$$

مثال:

$$y = \sin(4x + 5\sqrt{x})$$

$$y' = \left(4 + 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cos\left(4x + 5\sqrt{x}\right)$$

$$y = \cos\left(\frac{2x+1}{x^2-4x}\right)$$

$$y' = -\frac{2(x^2-4x) - (2x-4)(2x+1)}{(x^2-4x)^2} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2-4x}\right)$$

$$y = \tan(2x + \frac{1}{x})$$

$$y' = (2 - \frac{1}{x^2})(1 + \tan^2(2x + \frac{1}{x}))$$

مثال : مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱) $f(x) = (x^2 + 1)^3 (5x - 1)$

$$f'(x) = 3(x^2+1)^2 (2x)(5x-1) + (5)(x^2+1)^3$$

۲) $g(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$

$$g'(x) = \frac{(9)(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$$

۳) x^2

$$f'(x) = 5\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4 \times \frac{2x(3x-1) - (3)x^2}{(3x-1)^2}$$

۴)

$$g'(x) = \left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}\right)(x^۳+۱) + (۳x^۲)(\sqrt{۳x+۲})$$

$\{ \to \frac{۱}{۲}x$

۵)

$$f'(x) = \frac{(۲\times\frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۲})(x^۲+\sqrt{x}) - (۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(۲\sin\frac{x}{۲})}{(x^۲+\sqrt{x})^۲}$$

۶)

$$g'(x) = ۴\sin^۲(۵x)\times ۵\cos ۵x$$

۷)

$$g'(x) = ۴\tan x(۱+\tan^۲ x) + (-۲x)\sin x^۲$$

۸)

$$g'(x) = \frac{(-\cos x)(\cos x) - (-\sin x)(۱-\sin x)}{\cos^۲ x}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

قسمت چهارم

جلسه هفتم: صفحات ۹۶ تا ۹۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

مثال:

$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1)$ نکته: $(kf)' = kf'$

$= 3\times 4 + 2\times 5 = 9+10 = 19$

مثال:

یادآوری نوشتن معادله خط مماس بر f در نقطه‌ای روی آن:

۱- تکمیل مختصات نقطه تماس: $(A, f(A))$

۲- $m_{\text{مماس}} = f'(A)$

۳- معادله خط مماس: $y - f(A) = m(x-A)$

$f(x) = 6x - 2 \longrightarrow f'(2) = 6(2) - 2 = 10 \longrightarrow m = f'(2) = 10$

$x=2 \longrightarrow y = f(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 1 = 12 - 4 + 1 = 9 \longrightarrow (2,9)$

$y - 9 = 10(x-2) \longrightarrow y = 10x - 20 + 9 \longrightarrow y = 10x - 11$

مثال:

$(f+g)'(2)$ را به دست آورید.

$(fg)'(1) = f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = 1\times(-3) + 2\times 3 = -3+6 = 3$

$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 1 + 2 = 3$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ x^2-1 & x\geq 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

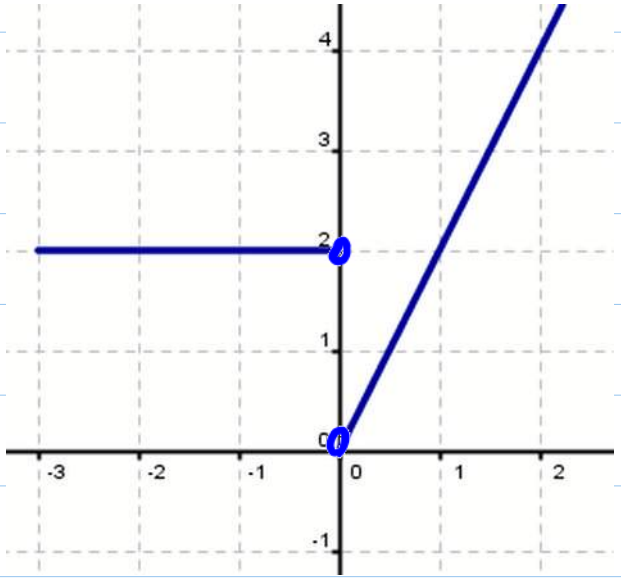
ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

$$f'(x)=\begin{cases}2 & x<0\\ \text{وجود ندارد} & x=0\\ 2x & x>0\end{cases}$$

$f'_+(0)=2\times 0=0$ ، $f'_-(0)=2 \Rightarrow 2\neq 0$ تابع در صفر مشتق‌پذیر نیست

$f'(x)$



مثال:

$g'(x)=$ شیب $=-1$

$f'(x)=$ شیب $=2$

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)} \rightarrow h'(1)=\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{g^2(1)}$$

چون تابع f به شکل دو خط و g یک خط است، شیب خط‌ها همان تابع مشتق می‌شود یعنی:

نتيجة: $g(x)=ax+b \longrightarrow g'(x)=a$

$$h'(1)=\frac{2\times 3-(-1)\times 2}{3^2}=\frac{6+2}{9}=\frac{8}{9}$$

مثال:

✓

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(5-2x)-(-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}$$

$$f'(4)=\frac{\frac{1}{4}(5-8)+2\times 3}{(5-8)^2}=\frac{-\frac{3}{4}+6}{9}=\frac{\frac{-3+24}{4}}{9}=\frac{21}{4}$$

$$=\frac{21}{4\times 9}=\frac{7}{12}$$

مثال:

✓

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2-x)^3-3(x^2-x)^2(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2-x)^2\left((2x+2)(x^2-x)-2(2x-1)(x^2+2x)\right)}{(x^2-x)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2-x)-2(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^2}$$

$$f'(2)=\frac{(6)(2)-2(3)(8)}{2^2}=\frac{12-72}{16}=\frac{-60}{16}=\frac{-15}{4}$$

مثال:

✓

شرط پیوستگی: $\lim_{x\to -2^+} -\frac{1}{2}x^2+bx+c = -2-2b+c$

$$\lim_{x\to -2^-}\sqrt{0-2x}=\sqrt{8+4}=\sqrt{9}=3=f(-2)$$

$$\Rightarrow -2-2b+c=3 \longrightarrow -2b+c=5 \quad (1)$$

برابری مشتق چپ و راست:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-2}{2\sqrt{0-2x}} & x<-2\\ -x+b & x>-2\end{cases}$$

$$f'_+(-2)=-(-2)+b=2+b$$

$$f'_-(-2)=\frac{-2}{2\sqrt{8+4}}=\frac{-1}{4}$$

$$f'_+(-2)=f'_-(-2)\Rightarrow 2+b=-\frac{1}{4}\rightarrow b=-\frac{1}{4}-2=\frac{-9}{4}$$

شرط پیوستگی

$$(1)\rightarrow -2b+c=8\rightarrow -2\left(-\frac{9}{4}\right)+c=8$$

$$c=8-\frac{18}{4}\rightarrow c=\frac{1}{4}$$

مثال:

$$\left(\sqrt[m]{u^n}\right)'=\frac{n u'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

m ↑ $\quad\rightarrow n$

تمرین:

$$f'(x)=\frac{2\frac{(2-2x)(x^3+5)-3(2x-x^2)}{(x^3+5)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{x^3+5}\right)^{3-2}}}$$

$$f'(-2)=\frac{2\frac{4(-1)-3(-8)}{1}}{3\sqrt[3]{\frac{-8}{-1}}}=\frac{2(-4+24)}{3\sqrt[3]{8}}=\frac{2\times 18}{6}=4$$

مشتق تابع مرکب : (قاعده زنجیری)

اگر f, g دو تابع مشتق پذیر باشند آنگاه : $(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$

نماد دیفرانسیلی : $y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$

مثال : اگر $f(x) = x^2 - x + 1$ و $g(x) = 2 - x^2$ ، مقدار $(gof)'(1)$ را بیابید.

$(gof)'(1) = f'(1)\, g'(f(1))$

$f'(x) = 2x - 1 \rightarrow f'(1) = 2 - 1 = 1$, $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$

$g'(x) = -2x \rightarrow g'(f(1)) = g'(1) = -2 \times 1 = -2$

$(gof)'(1) = 1 \times (-2) = -2$

مثال : اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

۱) -2 ✓ ۲) -1 ۳) 2 ۴) 3

$(fog)'(2) = 6 \rightarrow g'(2)\, f'(g(2)) = 6$ (1)

$g'(x) = \frac{-2-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \rightarrow g'(2) = \frac{-3}{1} = -3$

$$g(2)=\frac{2\times 2+1}{2-1}=5$$

$$\xrightarrow{(1)} \quad (-4)\,f'(0)=6 \rightarrow f'(0)=\frac{6}{-4}=-2$$

مشتق مرتبه دوم :

اگر تابع مشتق $y'=f'(x)$ مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم را با $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از مشتق اول یعنی $f'(x)$ یک بار دیگر مشتق می‌گیریم.

مثال : مشتق مرتبه دوم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=3x^5-7x^4+12x$

$$f'(x)=20x^4-28x^3+12$$
$$f''(x)=80x^3-84x$$

ب) $f(x)=\sqrt{3x+1} \rightarrow f(x)=(3x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{1}{2}-1}(3)=\frac{3}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(3x+1)^{-\frac{1}{2}-1}(3)=-\frac{9}{4}(3x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-9}{4(3x+1)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow f''(x) = \frac{-9}{4\sqrt{(3x+1)^3}}$$

مشتق پذیری روی بازه :

الف) تابع f روی بازه (a,b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

ب) تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a,b) مشتق پذیر باشد

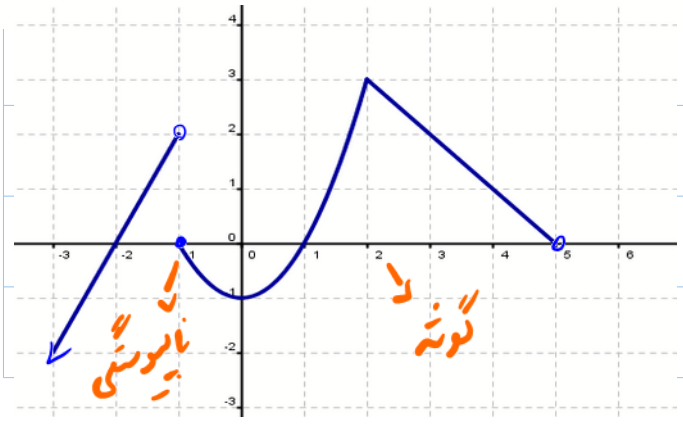
و در $x=a$ مشتق راست و در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

پ) مشتق پذیری روی بازه های $[a,b)$ ، $(a,b]$ ، $(-\infty,b)$ ، $[b,-\infty)$

$(a,+\infty)$ ، $[a,+\infty)$ به طور مشابه تعریف می شوند.

کار در کلاس

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x<-1 \\ x^2-1 & \text{اگر } -1 \le x < 2 \\ -x+5 & 2<x<5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[1,-1]$، $(2,5)$ و $[0,-2]$ بررسی کنید.



مشتق پذیر : $[-1,1]$

مشتق پذیر : $(2,5)$

تنها نیست زیرا در $x=-1$ مشتق پذیر است $[-2,0]$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

جلسه هشتم: صفحات ۱۰۲ تا ۱۰۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغیر

اگر ماشینی مسافت ۱۸۰ کیلومتر را در ۲ ساعت طی کند سرعت متوسط آن $\frac{180}{2}=90$ کیلومتر بر ساعت است. یعنی در این بازه زمانی به طور متوسط در هر ساعت ۹۰ کیلومتر مسافت طی می‌کند. اگر بازه زمانی را خیلی کوچک کنیم سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای نزدیک می‌شود.

یا وقتی می‌گوئیم آهنگ متوسط رشد یک کودک در بازه [۶،۰] ماه، دو سانتی متر در ماه است یعنی در طی این ۶ ماه، رشد متوسط قد کودک ۲ سانتی متر در هر ماه است.

به جز مثال های بالا، در مطالعه پدیده های گوناگونی، کمیت هایی وجود دارند که تغیر یکی وابسته به تغیرات دیگری است مانند تغیرات دما در زمان های مختلف، تغیر سرعت یک ذره وقتی شتاب آن تغیر می‌کند یا تغیر جهت در زمان های مختلف.

اگر رابطه بین دو متغیر x و y به صورت $y=f(x)$ باشد، نسبت تغیرات y (متغیر وابسته) به تغیرات x (متغیر مستقل) را آهنگ متوسط تغیر y نسبت به x می‌گوئیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

تعریف: آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

شیب خط قاطع

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

تذکر: اگر بازه را به صورت $[x_1, x_1+\Delta x]$ بنویسیم، تعریف آهنگ متوسط تغییر به شکل زیر می‌شود

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

تعریف: آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x=x_1$ برابر است با مشتق تابع f در x_1.

شیب خط مماس

$$f'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

مثال: بد.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(7)-f(2)}{7-2}=\frac{\sqrt{7+2}-\sqrt{2+2}}{5}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{5}=\frac{3-2}{5}=\frac{1}{5}$$

مثال: به صورت

$$f'(t)=-2t+10 \longrightarrow f'(2)=-2(2)+10=-4+10=6$$

مثال: یک توده ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است.

الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه ی زمانی $[3,4]$ چقدر است؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه ی $t=3$ چقدر است؟

الف) $\frac{x(4)-x(3)}{4-3}=\frac{\sqrt{4}+2(4)^3-(\sqrt{3}+2(3)^3)}{1}=2+128-\sqrt{3}-54$

$=76-\sqrt{3}$

ب) $x'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2 \rightarrow x'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}+6(3)^2=\frac{1}{2\sqrt{3}}+54$

مثال: یه) داده

شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,5]$ با هم برابرند؟

سرعت متوسط $=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{(5^2-5+10)-(0^2-0+10)}{5}=\frac{30-10}{5}=\frac{20}{5}=4$

$f'(t)=$ سرعت متوسط $=4 \rightarrow 2t-1=4 \rightarrow 2t=5 \rightarrow t=2,5$

مثال: ام مقـدار

✓

آهنگ متوسط $=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{\sqrt{21-36+24}-\sqrt{21-25+20}}{1}=3-4=-1$

$f'(x)=\frac{-2x+4}{2\sqrt{21-x^2+4x}}=-1 \rightarrow \sqrt{21-x^2+4x}=x-2$ ($-2(x-2)$)

به توان ۲ $\longrightarrow 21 - x^2 + 4x = x^2 - 6x + 8$

$\longrightarrow 2x^2 - 8x - 12 = 0 \rightarrow \Delta = 64 - 8(2)(-12) = 64 + 136 = 200$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{200}}{4} = \frac{8 \pm 10\sqrt{2}}{4} \begin{cases} \frac{8+10\sqrt{2}}{4} = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \checkmark \\ \frac{8-10\sqrt{2}}{4} = 2 - \frac{5}{2}\sqrt{2} \times \end{cases}$$

مثال: در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[0,4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{2}$، چقدر کمتر است؟

۱) ۰/۰۳ ۲) ۰/۰۴ ✓ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۶

آهنگ متوسط $= \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{\sqrt{2(4)+1} + \frac{1}{4+1} - \left(\sqrt{2(0)+1} + \frac{1}{0+1}\right)}{4}$

$$= \frac{3 + \frac{1}{5} - 1 - 1}{4} = \frac{1 + \frac{1}{5}}{4} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

آهنگ لحظه‌ای: $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} + \frac{-1}{(x+1)^2}$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \times \frac{3}{2} + 1}} - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{25-8}{50} = \frac{17}{50} \times \frac{2}{2} = \frac{34}{100}$$

$0/34 - 0/3 = 0/04$

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل پنجم: کاربرد مشتق

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت اول: آزمون یکنوایی

جلسه اول: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

در فصل اول با توابع یکنوا و غیریکنوا آشنا شدید و یکنوایی تابع را با توجه به مشتقش بررسی می‌کردیم.

به مشتق روبه‌رو و خط‌های مماس رسم شده دقت کنید:

در بازه‌هایی که تابع صعودی است شیب خط‌های مماس مثبت
و در بازه‌هایی که تابع نزولی است شیب خط‌های مماس منفی است.

۱) آزمون یکنوایی تابع :

الف) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

به عبارت دیگر برای بررسی یکنوایی تابع مشتق پذیر f، از آن مشتق می‌گیریم و مشتق را با رسم جدول، تعیین علامت می‌کنیم. به این جدول تعیین علامت، جدول تغییرات تابع می‌گوییم. اگر علامت مشتق در بازه‌ای مثبت باشد، تابع در آن بازه اکیداً صعودی و اگر علامت مشتق در بازه‌ای منفی باشد تابع در آن بازه اکیداً نزولی است و برعکس.

مثال: یکنوایی تابع $y = x^4 - 4x^3 + 2$ را بررسی کنید.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

در بازه‌های $(0, -\infty)$ و $(+\infty, 3)$ تابع اکیداً صعودی و در بازه $(3, 0)$ تابع نزولی است.

مثال: تابع $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ در بازه $[a, b]$ صعودی اکید است. حداکثر مقدار $b-a$ را بدست آورید.

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - 2x(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$-x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

تابع در $[-1, 1]$ صعودی اکید $\Rightarrow a = -1$ و $b = 1 \Rightarrow b - a = 1 + 1 = 2$

نکته: در توابع پیوسته اگر مشتق تابع در نقاطی جدا از هم در یک بازه صفر شود یا هم تابع روی آن بازه می‌تواند اکیداً صعودی یا نزولی باشد.

مثال: یکنوایی تابع $f(x)=x^3$ را بررسی کنید.

$$f'(x)=3x^2=0 \Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f		↗		↗	

تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

مثال: به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x)=-x^3+mx^2-12x+1$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است؟

$$f' \leq 0 \Rightarrow f'(x)=\underbrace{-3}_{<0}x^2+2mx-12 \leq 0$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (2m)^2-4(-3)(-12) \leq 0$$

$$4m^2-144 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 36 \Rightarrow -6 \leq m \leq 6$$

$$m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$$

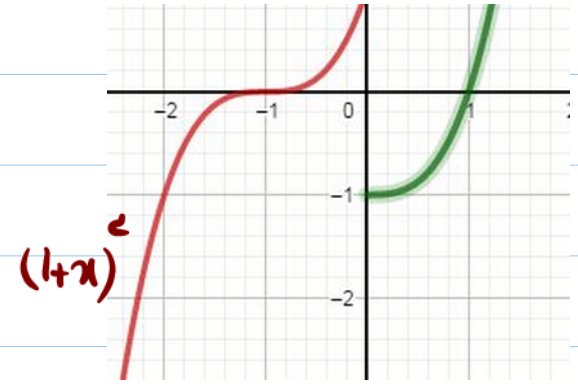
نکته: آزمون تقعر برای توابع پیوسته برقرار است. پس در توابع گویا، در بازه‌هایی که توانی از این آزمون دستگاه کنیم که شامل ریشه مخرج نباشد. در توابع چند ضابطه‌ای هم در نقاط مرزی همین نکته را داریم.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^4-1 & x\geq 0 \\ (1+x)^4 & x<0 \end{cases}$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(2,5)$

x^4-1

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x>0 \\ \text{مشتق‌پذیر نیست} & x=0 \\ 4(x+1)^3 & x<0 \end{cases}$$



تابع در $(-\infty,0)$ اکیداً صعودی است ولی برای رسیدن به شاخه سبز باید نزول کند. تابع در $(-\infty,+\infty)$ هم اکیداً صعودی است. پس تابع فقط در بازه $(2,5)$ که شامل صفر نیست، صعودی است.

مثال: تابع $f(x)=\frac{5}{x^2-2x}$ روی کدام بازه کاهنده است؟

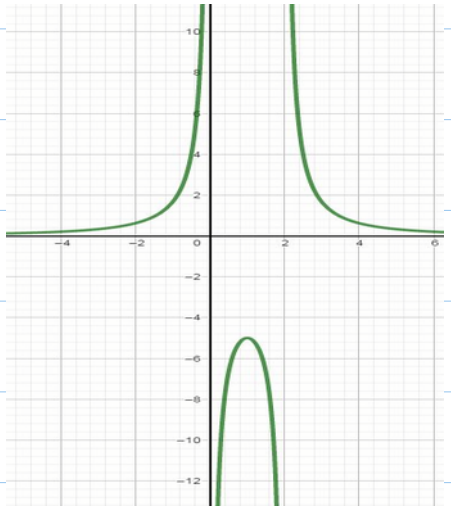
۱) $(3,1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(2,4)$

$$f'(x)=\frac{0-5(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=\frac{-10x-10}{(x^2-2x)^2}$$

$$-10x-10=0 \Rightarrow x=1 \quad , \quad x^2-2x=0 \to x(x-2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f									

باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که مشتق در آن تک علامت داشته باشد و شامل ریشه مخرج نباشد که فقط گزینه‌ی ۲ بازه $(-1,1)$ هردو ویژگی را دارد.



به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت دوم: نقطه بحرانی، اکسترمم‌های نسبی

جلسه دوم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

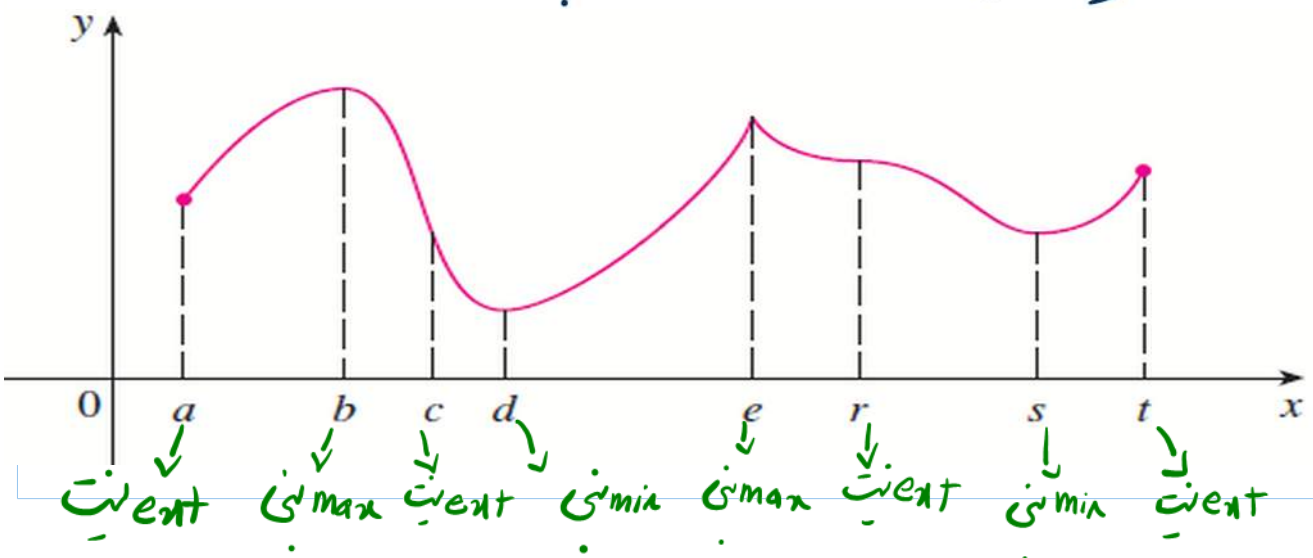
۲) اکسترمم های نسبی تابع :

الف) تابع f در نقطه ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از آن مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \geq f(x)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی f می نامیم.

ب) تابع f در نقطه ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از آن مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \leq f(x)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی f می نامیم.

به عبارت دیگر اگر عرض نقطه ای نسبت به نقاط اطرافش کوچکتر یا مساوی باشد به آن min نسبی و اگر بزرگتر یا مساوی باشد به آن max نسبی می گوییم.

مثال: در نمودار زیر کدامیک از نقاط مشخص شده اکسترمم نسبی هستند؟



چند نکته درباره اکسترمم های نسبی :

فرض کنید $x=c$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد در این صورت :

۱) نقطه ابتدا و انتهای دامنه نمی تواند نقطه اکسترمم تابع باشد.

۲) f می تواند در این نقطه پیوسته نباشد.

۳) f می تواند در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

۴) اگر f در این نقطه مشتق پذیر باشد آنگاه : $f'(c)=0$.

۵) نقطه $(c, f(c))$ روی نمودار تابع f قرار دارد هیچ مختصات این نقطه در معادله تابع صدق می کند.

۶) در تابع ثابت تمام نقاط هم max نسبی هستند هم min نسبی.

مثال : تابع متصل در بازه $[a,b]$

چند نقطه اکسترمم نسبی دارد؟ ۷ نقطه

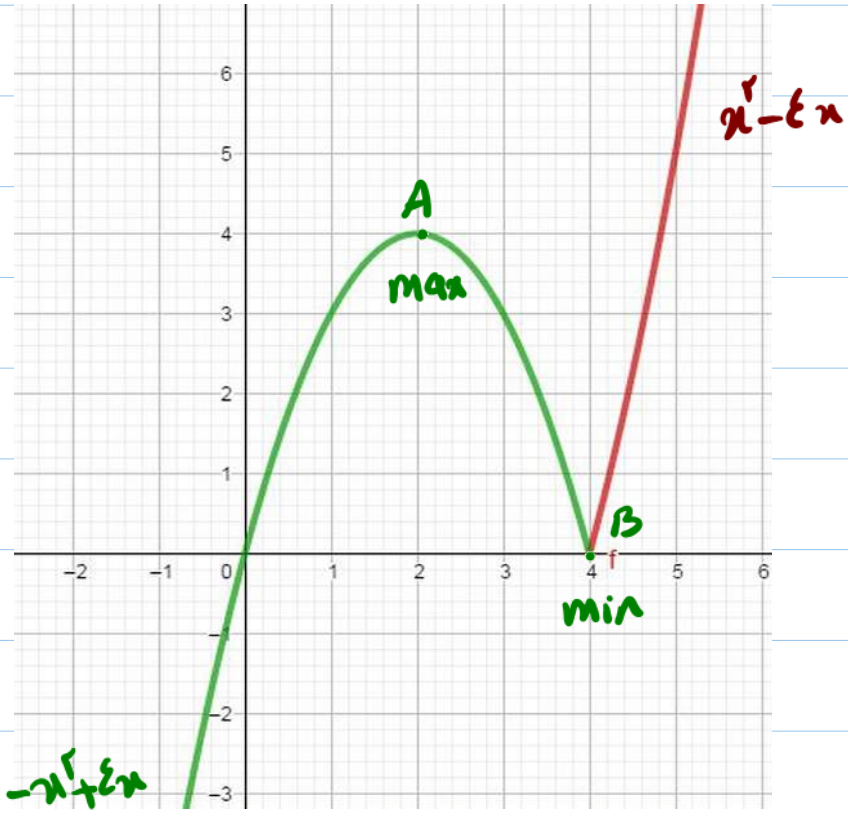
۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

مثال کنکور ۹۸ تجربی :

در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x-4|$، فاصلهٔ دو نقطه ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) & x \geq 4 \\ -x(x-4) & x < 4 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4x & x \geq 4 \\ -x^2+4x & x < 4 \end{cases}$$



A(2,4) : ی max B(4,0) ی min

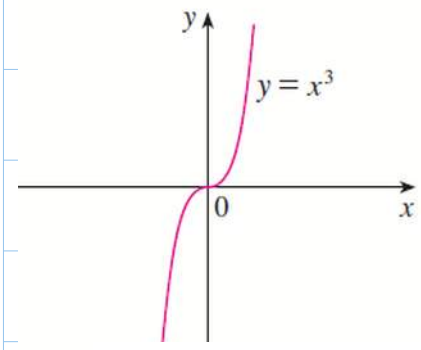
$$AB = \sqrt{(4-2)^2+(0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

گزینه ۴

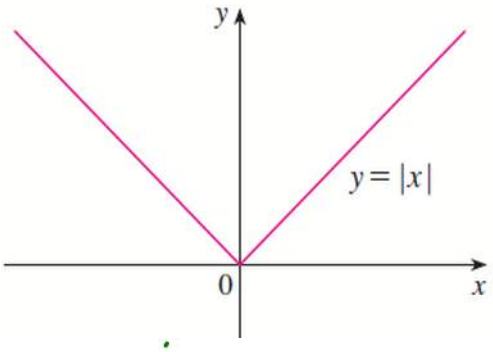
نقطه بحرانی :

نقطه‌ای به طول c از دامنه f است که در آن $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مانند :

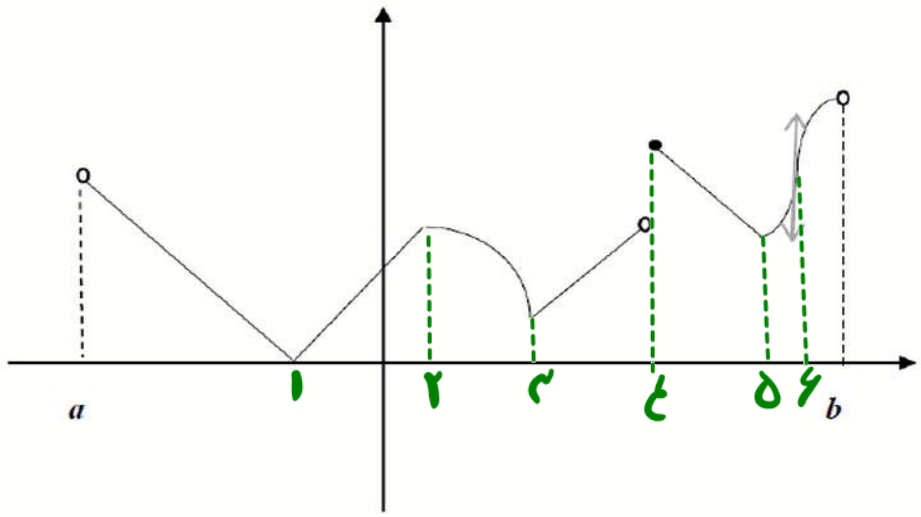


$f'(0)=0$ ، $x=0$ برای



$f'(0)$ موجود نیست ، $x=0$ برای

مثال: تابع f با نمودار زیر در بازه (a,b) چند نقطه بحرانی دارد؟



در ۶ نقطه

نکته: هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

ولی عکس آن درست نیست یعنی هر نقطه بحرانی، اکسترمم نسبی نیست.

توجه: نقاط ابتدا و انتهای دامنه، نقطه بحرانی هستند.

مثال: تابع $f(x)=4x^3-12x$ در بازه $[0,4]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

$$f'(x)=12x^2-12=0 \Rightarrow 12(x^2-1)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

چون $x=-1$ در دامنه تابع نیست پس بحرانی نیست.

نقاط بحرانی $x=1$ و $x=0$ و $x=4$ است.

مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

1) $f(x)=x^2(x+2)^3$

$$f'(x)=2x(x+2)^3+3(x+2)^2x^2 = x(x+2)^2\big(2(x+2)+3x\big)=0$$

$$\Rightarrow x(x+2)^2(5x+4)=0 \Rightarrow x=0, x=-2, x=-\frac{4}{5}$$ نقاط بحرانی

۲) $g(x)=\frac{x^۳}{(۱-x)^۲}$ $\qquad D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$

$$g'(x)=\frac{۳x^۲(۱-x)^۲-۲(۱-x)(-۱)x^۳}{(۱-x)^۴}$$

$$g'(x)=۰ \Rightarrow x^۲(۱-x)\big(۳(۱-x)+۲x\big)=۰ \Rightarrow x^۲(۱-x)(-x+۳)=۰$$

$x=۰,\ x=۱,\ x=۳ \Rightarrow$ ریشه‌های مشتق $x=۳$ ، $x=۰$ ($x=۱\notin D_f$)

$g'(x)=$ موجودیت $\Rightarrow (۱-x)^۴=۰ \Rightarrow x=۱\notin D_f$

۳) $f(x)=\begin{cases} x^۳-۳x & -۲<x\le ۲ \\ x^۳-۱۲x & ۲<x<۴ \end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^۲-۳ & -۲<x<۲ \\ \text{موجودیت} & x=۲ \\ ۳x^۲-۱۲ & ۲<x<۴ \end{cases}$$

$f'(x)=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۳=۰ \Rightarrow x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=\pm ۱ \in (-۲,۲)$

$\Rightarrow ۳x^۲-۱۲=۰ \Rightarrow x^۲-۴=۰ \Rightarrow x=\pm ۲ \begin{cases} ۲\in(۲,۴) \\ -۲\notin(۲,۴) \end{cases}$

f در $x=2$ موجود نیست پس $\{4, 2, 1, -1\}$ نقاط بحرانی‌اند.

ج) $h(x) = x|x^2-1|$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$h(x) = \begin{cases} x(x^2-1) & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x(x^2-1) & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x^3 + x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} 3x^2-1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ \text{مشتق‌پذیر نیست} & x = 1 \\ \text{مشتق‌پذیر نیست} & x = -1 \\ -3x^2+1 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

پس در این حالت نقاط بحرانی $x = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ ، $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} > -1$

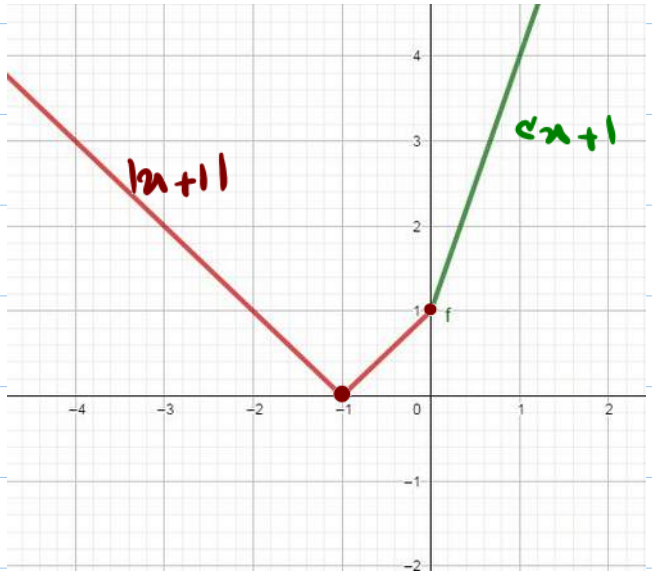
$$\Rightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

درون ضابطه هر دو در بازه $(1,-1)$ قرار دارند پس یکی‌اند.

بنابراین $\{\pm 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ نقاط بحرانی‌اند.

a) $f(x) = |2x + |x| + 1|$

$$f(x) = \begin{cases} |\overbrace{2x+x}^{3x}+1| & x \geq 0 \\ |2x-x+1| & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 0 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$$

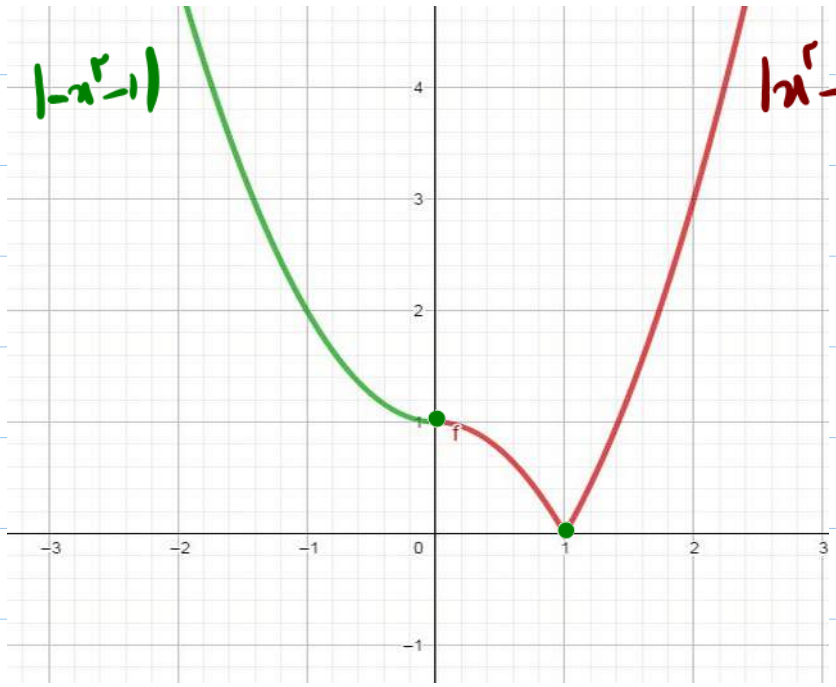


در $x = -1$ و $x = 0$

مشتق موجود نیست پس این نقاط بحرانی‌اند.

ب) $g(x) = |x|x| - 1|$

$$g(x) = \begin{cases} |x(x)-1| & x \geq 0 \\ |x(-x)-1| & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} |x^2-1| & x \geq 0 \\ |1-x^2-1| & x < 0 \end{cases}$$



در $x=1$ مشتق موجود نیست. در $x=0$ مشتق مخالف است. پس $\{0,1\}$

نقاط بحرانی هستند.

v) $f(x)=(x-2)x^{\frac{2}{3}}$

$$f(x)=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{5x^{\frac{2}{3}}}{3}-\frac{4}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-4}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 5x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{5}$$

$f'(x)$ موجود نیست $\rightarrow \sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0$ پس $\{0,\frac{4}{5}\}$ نقاط بحرانی اند.

۱) $f(x)=\sqrt[3]{3x-x^3}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{3-3x^2}{3\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3-3x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$f'(x)$: تغییرات $\Rightarrow 3\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}=0 \Rightarrow 3x-x^3=0$

$$\Rightarrow x(3-x^2)=0 \begin{cases} x=0 \\ 3-x^2=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

پس $\{\sqrt{3}, 0, \pm 1\}$ نقاط بحرانی اند.

۹) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

D_f : $4-x^2\geq 0 \Rightarrow -x^2\geq -4 \Rightarrow x^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq x\leq 2$

$$\Rightarrow D_f=[-2,2]$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x)=0 \longrightarrow -2x=0 \longrightarrow x=0$$

۲- دو نقاط ابتدا و انتها را نمی‌دانیم و دنبال مجانب هم هستیم پس بگردیم

مجموعه نقاط بحرانی یا طول‌های: $\{0, \pm 2\}$

1.) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

D_f : $x^2-1 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 1 \rightarrow x \geq 1$ یا $x \leq -1$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

پس تابع در $x=1$ و $x=-1$ نقطه بحرانی دارند.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس $\{\pm 1, 0\}$ مجموعه طول‌های نقاط بحرانی است.

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت سوم: آزمون مشتق اول

جلسه سوم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

آزمون مشتق اول برای تشخیص اکسترمم‌های نسبی :

فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر است :

الف) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در $x=c$ ، max نسبی دارد.

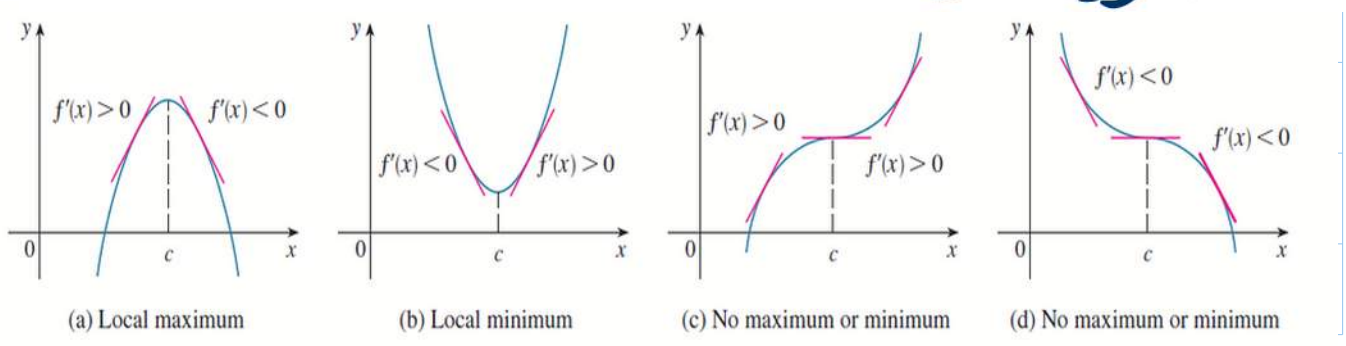
x		c	
f'	+	0	−
f		max	

ب) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در $x=c$ ، min نسبی دارد.

x		c	
f'	−	0	+
f		min	

پ) اگر f در c تغییر علامت ندهد آنگاه f در c ، max یا min نسبی ندارد.

به شکل‌های زیر دقت کنید :



(a) Local maximum (b) Local minimum (c) No maximum or minimum (d) No maximum or minimum

مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^5-5x^4$ را بیابید.

$$f'(x)=5x^4-20x^3=0 \Rightarrow 5x^3(x-4)=0 \begin{cases} 5x^3=0 \to x=0 \\ x-4=0 \to x=4 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘	min	↗	

max

مثال: فاصله نقطه min نسبی تابع $y=x^3-12x+12$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

$$y'=3x^2-12=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	max	↘	-4	↗	

$A(2,-4)$ نقطه min $O(0,0)$

$$OA=\sqrt{(2-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

مثال: تابع $y=\frac{x+1}{x^2-2x}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$$y'=\frac{1(x^2-2x)-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}=\frac{x^2-2x-2\frac{(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}}{(x^2-2x)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-2x^2+2}{(x^2-2x)^2}=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

$$y'=0 \Rightarrow -x^2-2x+2=0 \Rightarrow \Delta=4-4\times(-1)(2)=4+8=12$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{-2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{-2}=\begin{cases}-1+\sqrt{3}\\-1-\sqrt{3}\end{cases}$$

$y'=$ موجودیت : $(x^2-2x)^2=0 \Rightarrow x=0,2$

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y			min				max			

گزینه ۳

مثال کنکور تجربی ۹۹ (خارج)

مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+1}$، کدام است؟

۱) $-1+\sqrt{5}$ ۲) $1+\sqrt{5}$ ۳) $-1+\sqrt{3}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)}{(x^2+1)^2}\cdot\frac{(2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2(x^3+x+x^2+1-x^3-2x^2+3x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(-x^2+4x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad : \quad -x^2+4x+1=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta=16-4(-1)(1)=20$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{-2}=\frac{-4\pm2\sqrt{5}}{-2}=2\pm\sqrt{5}$$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f			min		max		

$$f(2+\sqrt{5})=\frac{(2+\sqrt{5})^2+2(2+\sqrt{5})-3}{(2+\sqrt{5})^2+1}=\frac{4+5+4\sqrt{5}+4+2\sqrt{5}-3}{4+5+4\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{10+4\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}=\frac{5+2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}\times\frac{5-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}=\frac{25-10\sqrt{5}+10\sqrt{5}-20}{25-20}$$

گزینه ۱

$$= \frac{-5+5\sqrt{5}}{5} = -1+\sqrt{5}$$

مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=x-\sqrt{2x-1}$ را بدست آورید.

$$y' = 1 - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}} \qquad D_f = [\tfrac{1}{2}, +\infty)$$

$y'=0$: $\sqrt{2x-1}-1=0 \to \sqrt{2x-1}=1 \to 2x-1=1 \Rightarrow x=1$

y' نامعین : $\sqrt{2x-1}=0 \Rightarrow 2x-1=0 \to x=\frac{1}{2}$

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'	∄	$-$	0	$+$	
y		↘	0 (min)	↗	

min نسبی : $(1,0)$

مثال: طول نقطه ماکسیمم نسبی تابع $f(x)=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)^2 + 2(x-1)x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}+2(x-1)\sqrt[3]{x^2}=\frac{2(x-1)^2+6(x-1)x}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$=\frac{2(x-1)(x-1+3x)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2(x-1)(4x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'=0 \rightarrow 2(x-1)(4x-1)=0 \rightarrow x=1,\frac{1}{4}$$

f' موجود نیست $\rightarrow 3\sqrt[3]{x}=0 \rightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$2(x-1)(4x-1)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$\sqrt[3]{x}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		
f'	$-$	$\exists$	$+$		$-$		$+$		
f				min		max		min	

گزینه ۱

مثال: اگر $(1,1)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^4+ax^2+bx+1$ باشد، a,b را بیابید.

$(1,1)$ روی تابع است $\xrightarrow{\text{در تابع صدق می‌کند}}$ $f(1)=1+a+b+1=1 \rightarrow a+b=-1$

$f'(1)=0 \rightarrow f'(x)=4x^3+2ax+b \Rightarrow f'(1)=4+2a+b=0$

$$\rightarrow 2a+b=-4 \quad \begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=-4 \end{cases} \quad -a=3 \rightarrow a=-3 \quad -3+b=-1 \rightarrow b=2$$

مثال: تابع $f(x)=x^3+ax^2+x-1$ خاصیت اکیداً نزولی است. حدود a را بیابید.

$f'(x)=3x^2+2ax+1$

f' باید همواره مثبت یا همواره منفی باشد.

ولی چون ضریب x^2، 3 مثبت است پس f' همواره مثبت است:

$f'\geq 0 : \quad \Delta\leq 0 : \quad 4a^2-12\leq 0 \rightarrow a^2\leq 3$

$\Rightarrow \quad -\sqrt{3}\leq a\leq \sqrt{3}$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت چهارم: اکسترمم‌های مطلق

جلسه چهارم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۴) اکسترمم های مطلق تابع :

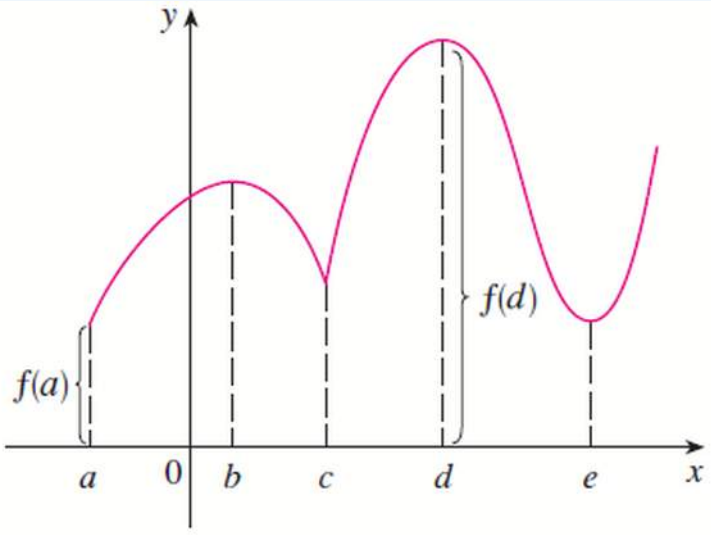
الف) تابع f در $x=c \in D_f$ ، ماکزیمم مطلق دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f

داشته باشیم : $f(c) \geq f(x)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f می گوئیم.

ب) تابع f در $x=c \in D_f$ ، مینیمم مطلق دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f

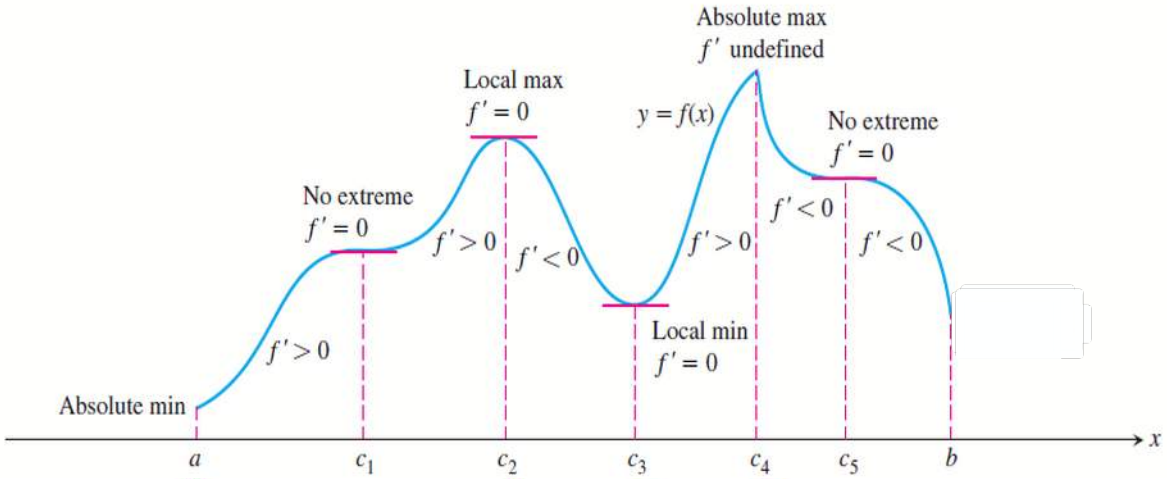
داشته باشیم : $f(c) \leq f(x)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f می گوئیم.

در نمودارهای زیر داریم :



در $x=a$ ، min مطلق داریم.

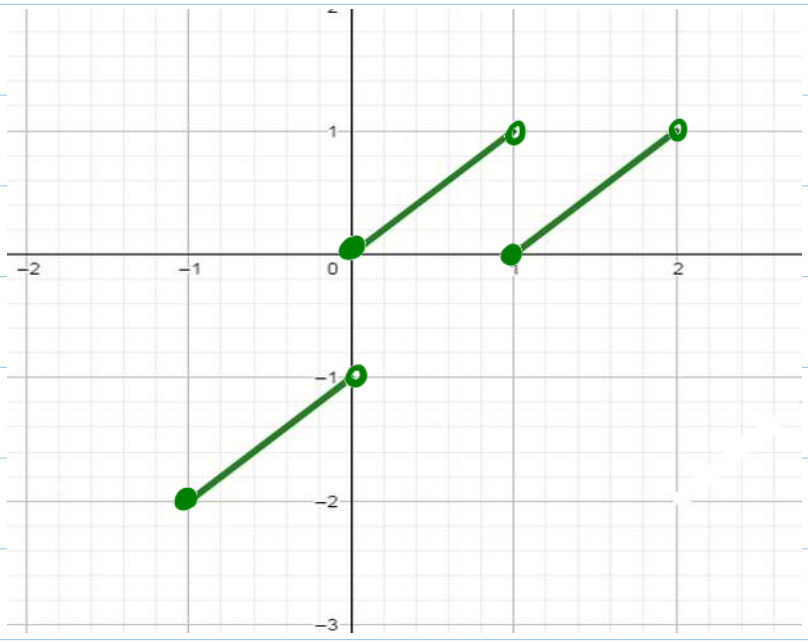
در $x=d$ ، max مطلق داریم.



مینیمم مطلق
ماکسیمم نسبی
مینیمم نسبی
ماکسیمم مطلق و نسبی

مثال: مقادیر max و min مطلق تابع $f(x) = x - [x]^2$ را روی بازه $(-1, 2)$ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ x - 1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$$



ماکسیمم مطلق ندارد.

مینیمم مطلق داریم، $x = -1$

که مقدار آن $f(-1) = -2$ است.

مثال: مقادیر max و min مطلق تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & 0\le x\le 3 \\ x-1 & -1\le x<0 \end{cases}$ را بیابید.

$y=x^2-2x$

max مطلق در $x=3$:

مقدار $f(3)=3$.

$y=x-1$

min مطلق در $x=-1$ با مقدار $f(-1)=-2$.

قضیه: اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه max و min مطلق دارد.

روش یافتن اکسترمم های مطلق توابع پیوسته در بازه $[a,b]$:

ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازه $[a,b]$ می یابیم. سپس مقدار تابع را در نقاط بحرانی حساب می کنیم. بیشترین مقدار max مطلق و کمترین مقدار min مطلق تابع f در بازه هستند.

مثال کنکور تجربی 98

مقادیر max و min مطلق تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-15x^2$ را روی بازه $[-4,4]$ کدام است؟

۱) -44 و 24 ۲) -45 و 27 ۳) -36 و 27 ۴) -27 و 36

$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x-5)(x+3) = 0$ $\begin{cases} x = 5 \notin D_f \\ x = -3 \checkmark \end{cases}$

پس تابع در $x = -3$ نقطه بحرانی دارد.

x	-4	-3	3
y	$\frac{76}{3}$	27	-45
		max نسبی	min نسبی

در $x = -3$ دارد.

$f(-4) = \frac{1}{3}(-4)^3 - (-4)^2 - 15(-4) = -\frac{64}{3} - 16 + 60 = \frac{-64 - 48 + 180}{3} = \frac{68}{3}$

$f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 - (-3)^2 - 15(-3) = -9 - 9 + 45 = 27$

$f(3) = \frac{1}{3}(3^3) - (3)^2 - 15(3) = 9 - 9 - 45 = -45$

گزینه ۲

مثال: حداکثر مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ در بازه $[1, \frac{1}{2}]$ چقدر از کمترین مقدار آن در این بازه بیشتر است؟

۱) $\frac{16}{21}$ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) $\frac{5}{7}$ ۴) $\frac{19}{21}$

$f'(x) = \frac{-(2x-1)\times 1}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ تنها بحرانی

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y	$\frac{4}{7}$ (min)	$\frac{4}{3}$ (max)	1

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{1+2+4}{4}} = \frac{4}{7}$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{1-2+4}{4}} = \frac{4}{3}, \quad f(1) = \frac{1}{1-1+1} = 1$$

$$\max - \min = \frac{4}{3} - \frac{4}{7} = \frac{28-12}{21} = \frac{16}{21}$$ گزینه ۱

مثال: مقدار $\max$، $\min$ مطلق تابع $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ را بیابید.

$$f'(x) = 1\times\sqrt{4-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\times x = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-2x^2+4}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$D_f: \ 4-x^2 \geq 0 \to x^2 \leq 4 \to -2 \leq x \leq 2 \to D_f = [-2,2]$$

$$f'(x) = 0 \to -2x^2+4=0 \to x^2=2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

x	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
y	0	-2 (min)	2 (max)	0

$f(2) = f(-2) = 0$

$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\sqrt{4-2} = -2$

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{4-2} = 2$

مقدار $\max$ مطلق $= 2$ ، مقدار $\min$ مطلق $= -2$

مثال: حاصل ضرب بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) 10 ۴) $5\sqrt{5}$

D_f : ① $x \geq 0$

② $5 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 5$

$D_f = ① \cap ② = [0, 5]$

$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} - \sqrt{x} = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} = \sqrt{x}$

$\xrightarrow[2]{\text{برابر}}$ $2(5-x)=x \rightarrow 20-4x=x \rightarrow -5x=-20 \rightarrow x=4$

x	0	4	5
y	$\sqrt{5}$	5	$2\sqrt{5}$
	min	max	

$f(0)=0+\sqrt{5}=\sqrt{5}$

$f(4)=2\times 2+1=5$

$\max \times \min = 5\sqrt{5}$ گزینه ۴

$f(5)=2\sqrt{5}+0=2\sqrt{5}$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x)=(2x-1)\sqrt[3]{x}$ در فاصله $[-1,1]$ کدام است؟

۱) $\frac{-3}{4}$ ۲) $\frac{-3}{8}$ ۳) $\frac{-2}{3}$ ۴) $\frac{-1}{3}$

$f(x)=(2x-1)x^{\frac{1}{3}}=2x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(8x-1)=\frac{8x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(x)=0 \rightarrow 8x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{8}$

$f'(x)$ موجود نیست : $3\sqrt[3]{x^2}=0 \rightarrow x=0$

x	-1	0	$\frac{1}{8}$	1
y	4 (max)	0	$-\frac{4}{8}$ (min)	1

$f(-1) = -4 \times (-1) = 4$ $\qquad$ $f(0) = (-1) \times 0 = 0$

$f(\frac{1}{8}) = (\frac{1}{4} - 1) \times \frac{1}{2} = -\frac{4}{8}$ $\qquad$ $f(1) = 1 \times 1 = 1$

گزینه ۲

نکته: برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع f روی بازه (a,b)، در روش بالا به جای $f(a)$، $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ و به جای $f(b)$، $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. اگر بیشترین یا کمترین مقدار، در این مقادیر حدی اتفاق افتد آن‌گاه تابع در این بازه max یا min مطلق نخواهد داشت. در مورد بازه‌های $[a,b)$، $(a,b]$، $(-\infty,a)$، $[a,+\infty)$، $(a,+\infty)$، $(-\infty,a]$ و $(-\infty,+\infty)$ هم به این شکل عمل می‌کنیم.

مثال: تابع $f(x) = x^4 - 4x^2$ در بازه $[-1,4]$ مفروض است. اکسترمم‌های مطلق آن را در صورت وجود محاسبه کنید.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$f(0) = 0$, $f(2) = 8 - 12 = -4$, $f(-1) = -1 - 3 = -4$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} x^3 - 3x^2 = 64 - 48 = 16$

x	-1	0	2	4
y	-4	0	-4	16

چون مقدار max در حدّ راست $x \to 4$ بزرگتر است.

تابع در نقاط -1 و 2 مینیمم مطلق دارد: $f(-1) = f(2) = -4$ ولی ماکسیمم مطلق ندارد.

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ روی بازه $(0, +\infty)$ چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۹

$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \frac{16}{0^+} = 0 + \infty = +\infty$ تابع ماکسیمم مطلق ندارد.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$ در $x = 2$ مینیمم مطلق دارد:

گزینه ۲ : $f(2) = 4 + 8 = 12$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت پنجم: بهینه سازی

جلسه پنجم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

بهینه سازی :

هدف از بهینه سازی پیدا کردن بیشترین یا کم‌ترین مقدار یک تابع است.

در اکثر سوالات بهینه سازی، ضابطه تابع به ما داده نمی‌شود و باید با توجه به داده‌های مسئله تابع هدف را بسازیم. مراحل زیر را برای حل اینگونه سوالات دنبال می‌کنیم :

۱- در صورت لزوم شکل مناسبی رسم می‌کنیم.

۲- اگر تابع هدف بیش از یک متغیر داشته باشد با استفاده از شرط سوال (رابطه کمکی) آن را برحسب یک متغیر می‌نویسیم.

۳- از تابع هدف مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم. مقادیر اکسترمم تابع هدف را محاسبه می‌کنیم.

مثال : اگر x و y دو عدد مثبت باشند که $xy=6$، مقدار مینیمم عبارت $P=2x+3y$ را محاسبه کنید.

رابطه کمکی : $xy=6 \rightarrow y=\frac{6}{x}$

$P = 2x + 4 \times \frac{6}{x} \Rightarrow P(x) = 2x + \frac{18}{x}$ تابع هدف

$P'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{18}{x^2} = 2 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \overset{x>0}{\Rightarrow} x = 3$

$y = \frac{6}{3} = 2$ $\qquad P_{min} = 2 \times 3 + 3 \times 2 = 6 + 6 = 12$

مثال: اگر $x + y = 4$ باشد، ماکزیمم $x^3 y$ را بیابید.

$P = x^3 y \Rightarrow P(x) = x^3 (4 - x) = 4x^3 - x^4$: $y = 4 - x$

$P'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3 - x) = 0$ $\begin{cases} 4x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow min \\ 3 - x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow max \end{cases}$

$y = 4 - 3 = 1$: $P_{max} = 3^3 \times 1 = 27$

مثال: بیشترین مساحت مستطیلی که بوسیله یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه یک رودخانه می‌توان محصور کرد، چند متر مربع است؟

رودخانه

a a b

رابطه کلی $2a + b = 48$

$\rightarrow b = 48 - 2a$

تابع هدف : $S = a \times b = a(48 - 2a) = 48a - 2a^2$

$S'(a) = 48 - 4a = 0 \rightarrow 4a = 48 \rightarrow a = 12 \; ; \; b = 48 - 24 = 24$

$S_{max} = 12 \times 24 = 288$

مثال : طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۴ است. بیشترین مقدار مساحت آن را بیابید.



رابطه فیثاغورس : $a^2 + b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 16 - a^2$

$\Rightarrow b = \sqrt{16 - a^2}$

$S = \frac{1}{2} ab \Rightarrow S = \frac{1}{2} a \sqrt{16 - a^2}$

$S'(a) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - a^2} + \frac{-2a}{2\sqrt{16 - a^2}} \times \frac{1}{2} a$

$S'(a) = \frac{16 - a^2 - a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} = \frac{16 - 2a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} = \frac{8 - a^2}{\sqrt{16 - a^2}}$

$S'(a) = 0 \rightarrow 8 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$ و $b = \sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}$

$S_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{8} \times \sqrt{8} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

مثال: کنکور تجربی ۹۹

از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

اگر یک مثلث قائم الزاویه را حول یک ضلع قائم دوران دهیم، در سوط ایجاد می‌شود که شامل قاعده و ارتفاعش برابر اضلاع قائم مثلث اند:

تابع هدف: $V = \frac{۱}{۳}\pi a^۲ b$



رابطه کمکی: رابطه فیثاغورس: $a^۲ + b^۲ = ۱۰۰ \rightarrow a^۲ = ۱۰۰ - b^۲$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰ - b^۲)b = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰b - b^۳)$$

$$V'(b) = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰ - ۳b^۲) = ۰ \rightarrow ۳b^۲ = ۱۰۰ \rightarrow b^۲ = \frac{۱۰۰}{۳}$$

$$a^۲ = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۳} = \frac{۲۰۰}{۳}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a^۲}{b^۲}} = \sqrt{\frac{\frac{۲۰۰}{۳}}{\frac{۱۰۰}{۳}}} = \sqrt{۲}$$ گزینه ۴

مثال: کنکور تجربی خارج ۹۹:

کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطه $A(5,0)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{2x+7}$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) $3\sqrt{2}$

نقطه $B(x,y)$ را روی تابع در نظر می‌گیریم. فاصله A تا B را تابع هدف می‌گیریم که باید min شود:

رابطه کمکی $y=\sqrt{2x+7}$

$AB=\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}$

تابع هدف $AB=\sqrt{x^2-10x+25+2x+7}=\sqrt{x^2-8x+32}$

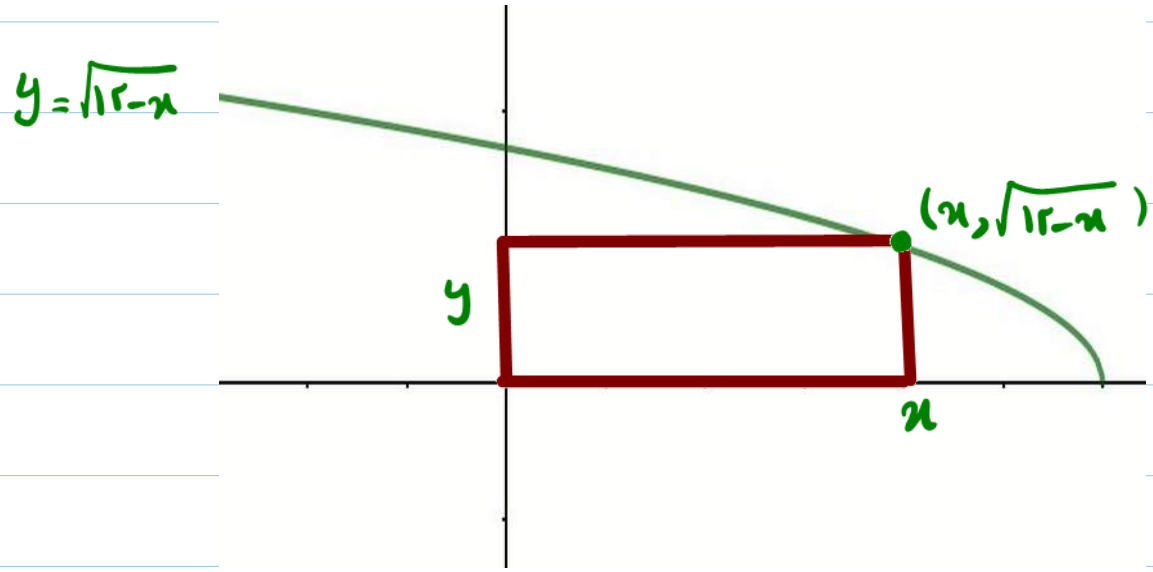
$(AB)'=\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}}=0 \rightarrow 2x-8=0 \rightarrow x=4$

گزینه ۱ $(AB)_{min}=\sqrt{4^2-8\times4+32}=\sqrt{16}=4$

مثال: کنکور تجربی ۹۸

بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{12-x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{3}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸



$$S = xy = x\sqrt{12-x} = \sqrt{12x^2-x^4}$$

$$S'(x) = \frac{24x-3x^2}{2\sqrt{12x^2-x^4}} \rightarrow S'=0 \longrightarrow 24x-3x^2=0$$

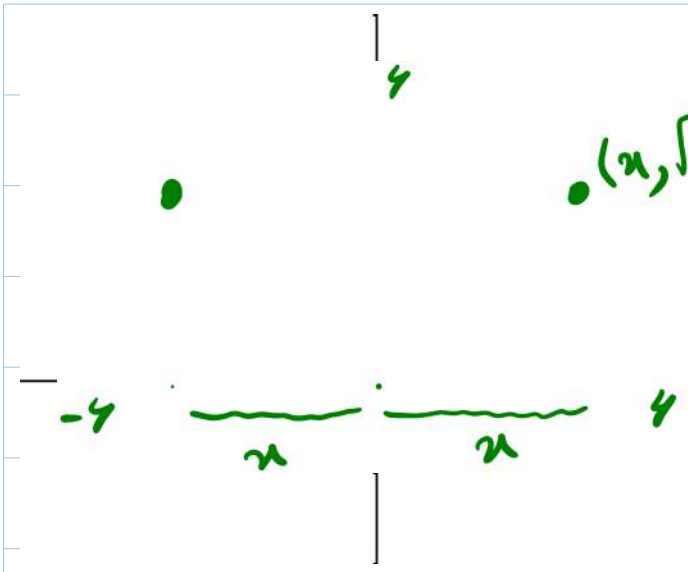
$$3x(8-x)=0 \begin{cases} x=0 \text{ قبول نیست} \\ x=8 \checkmark \end{cases} \quad . \quad y=\sqrt{12-8}=\sqrt{4}=2$$

$$S_{max} = 8\times 2 = 16 \qquad \text{گزینه ۴}$$

مثال: کنکور تجربی خارج ۹۸

بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶



محاط در دایره $x^۲+y^۲=۳۶$

$y^۲=۳۶-x^۲ \Rightarrow y=\sqrt{۳۶-x^۲}$

$$S=۲x\times y=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}=۲\sqrt{۳۶x^۲-x^۴}$$

$$S'_{(x)}=۲\frac{۷۲x-۴x^۳}{۲\sqrt{۳۶x^۲-x^۴}}=۰ \rightarrow ۷۲x-۴x^۳=۰$$

$$۴x(۱۸-x^۲)=۰ \begin{cases} x=۰ \\ x=\sqrt{۱۸} \checkmark \\ x=-\sqrt{۱۸} \end{cases} \quad y=\sqrt{۳۶-۱۸}=\sqrt{۱۸}$$

$$S_{max}=۲\times\sqrt{۱۸}\times\sqrt{۱۸}=۲\times۱۸=۳۶$$ گزینه ۴

مثال: می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای شکل بسازیم که گنجایش آن ۲π لیتر باشد. ارتفاع استوانه چقدر باشد تا هزینه فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟



$V = \pi r^2 h = 2\pi \Rightarrow r^2 h = 2$ القوانين

h

r .

$\Rightarrow h = \frac{2}{r^2}$ بالتعويض //

$S_{\text{كلي}} = S_{\text{قاعدة}} + S_{\text{جانبي}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$S_{\text{كلي}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{2}{r^2} = 2\pi(r^2 + \frac{2}{r})$ نأخذ المشتق

$S'(r) = 2\pi(2r - \frac{2}{r^2}) = 0$

$\frac{2r - 2}{r^2} = 0 \rightarrow 2r^3 - 2 = 0 \longrightarrow r^3 = 1 \longrightarrow r = 1$

$h = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

جلسه ششم: صفحات ۱۲۷ تا ۱۳۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

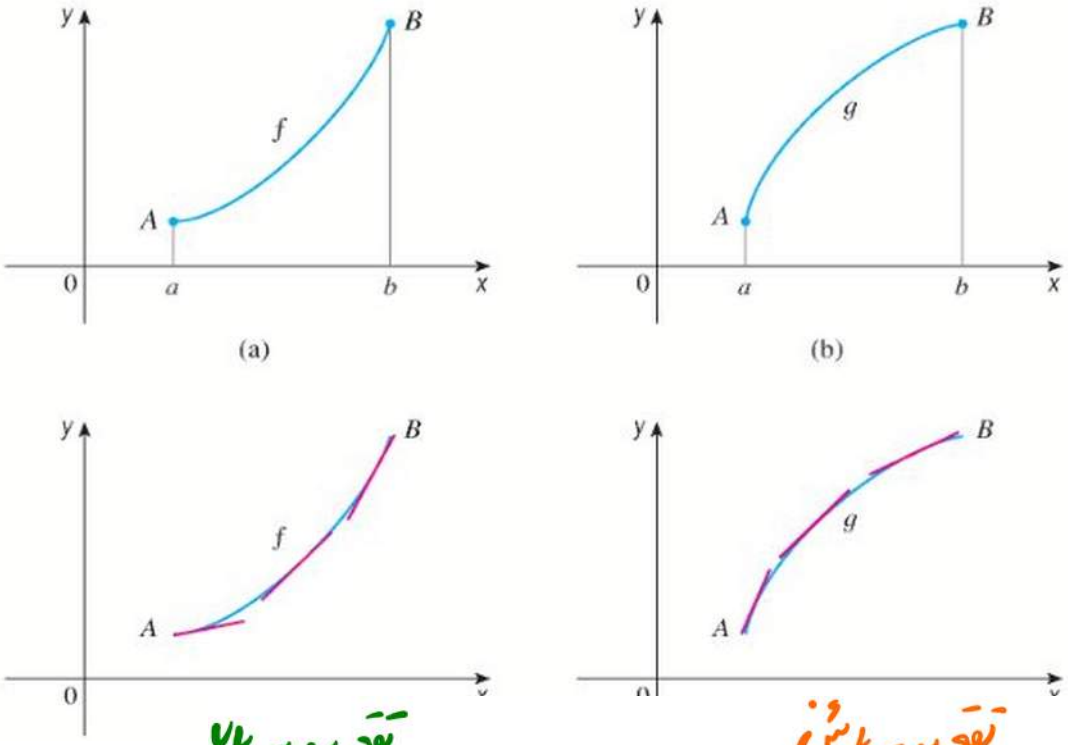
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

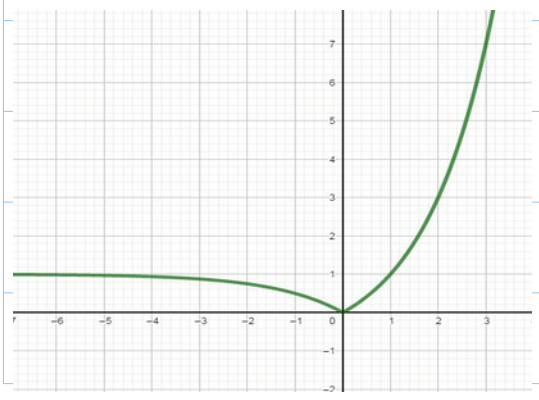
جهت تقعر:

اگر در یک بازه، همه خط‌های مماس بر منحنی، زیر منحنی قرار گیرند، می‌گوییم تقعر رو به بالا است.

اگر در یک بازه، همه خط‌های مماس بر منحنی، بالای منحنی قرار گیرند، می‌گوییم تقعر رو به پایین است.



مثال: جهت تقعر تابع $f(x)=|x^2-1|$ را تعیین کنید.



در $(0,+\infty)$ تقعر رو به بالا

در $(-\infty,0)$ تقعر رو به پایین

یافتن جهت تقعر بدون رسم نمودار :

به شکل‌های تعریف بالا در حالت تقعر رو به پائین دقت کنید. شیب خط مماس بر منحنی از چپ به راست در حال کاهش است و می‌دانیم شیب مماس بر منحنی همان مشتق. پس مشتق تابع در حال کاهش است. به عبارت دیگر مشتق آن نزولی است و اگر یک تابع نزولی باشد، مشتق آن منفی است پس داریم :

$$f'' < 0 \Rightarrow (f')' < 0 \Rightarrow \text{مشتق } f' \text{ منفی است} \Rightarrow f' \text{ نزولی}$$

برای تقعر رو به بالا هم به نتیجه مشابهی می‌رسیم.

قضیه : فرض کنید f'' به ازای هر نقطه از بازه باز I موجود باشد :

۱- اگر برای هر x از I : $f''(x) > 0$ باشد آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

۲- اگر برای هر x از I : $f''(x) < 0$ باشد آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پائین دارد.

۳- اگر برای هر x از I : $f''(x) = 0$ باشد آنگاه آزمون بی نتیجه است.

نکته: برای تعیین جهت تقعر تابع f باید مشتق دوم را تعیین علامت کنیم.

مثال: جهت تقعر تابع $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ را مشخص کنید.

$$f'(x)=\frac{1(1+x^2)-2x\times x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-2(1+x^2)\times 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{2x(1+x^2)\left(-(1+x^2)-2(1-x^2)\right)}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{2x(-1-x^2-2+2x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \qquad 2x(x^2-3)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

مثال: به ازای چه مقادیری از a، تقعر منحنی $f(x)=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2+1$ همواره رو به بالاست؟

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+3x$$

$$f''(x)=12x^2+6ax+3>0 \xrightarrow{\div 3} 4x^2+2ax+1>0$$

$\Delta<0$:

$$\Delta=4a^2-4\times4\times1<0 \to 4a^2-16<0 \to a^2<4$$

$$\Rightarrow -2<a<2$$

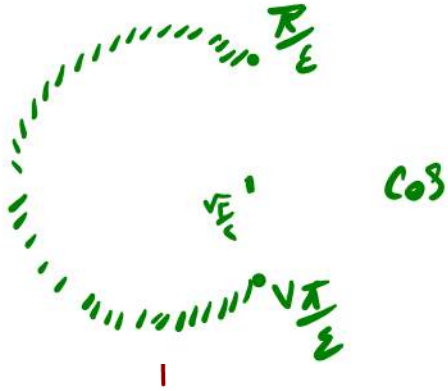
مثال: مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع $f(x)=x^2+2\sqrt{2}\cos x$ ، $0\le x\le 2\pi$ رو به بالاست، در چه بازه‌ای است؟

$$f'(x)=2x-2\sqrt{2}\sin x \quad : \quad f''(x)=2-2\sqrt{2}\cos x>0$$

$$-2\sqrt{2}\cos x>-2 \Rightarrow \cos x<\frac{-2}{-2\sqrt{2}} \to \cos x<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تقعر رو به بالا در بازه $(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$ است.



نقطه عطف :

نقطه $(c, f(c))$ را نقطه عطف نمودار تابع f می گوییم هرگاه :

۱) تابع در این نقطه خط مماس داشته باشد .

۲) جهت تقعر نمودار در این نقطه تغییر کند .

نکته : وقتی می گوییم تابع f در $(c, f(c))$ خط مماس دارد، یعنی در این نقطه مشتق متناهی دارد یا در این نقطه پیوسته است و مشتق نامتناهی دارد .

مثال: نقاط عطف توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} - 10\sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{20}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{20}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+2) = \frac{10}{9}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^4}}$$

($x+2=0 \Rightarrow x=-2$ ، $x=0$)

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f''		$-$		$+$		$+$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cup$	

تابع در $x=-2$ نقطه‌ی عطف دارد زیرا تابع در این نقطه پیوسته است قبل رسم است

و مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد.

۲) $g(x)=\frac{x}{x^2-1}$

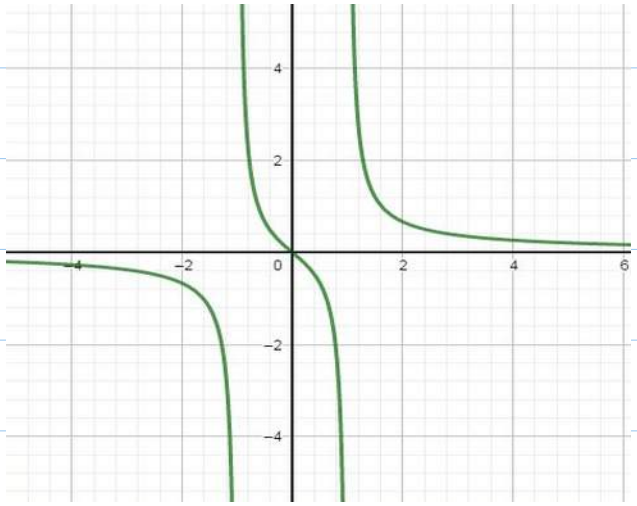
$$g'(x)=\frac{x^2-1-2x\times x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$g''(x)=\frac{-2x(x^2-1)^2-2(x^2-1)2x(-x^2-1)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2-1)\left(-(x^2-1)-2(-x^2-1)\right)}{(x^2-1)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}\quad \begin{matrix}\leftarrow 0\\ \rightarrow \pm 1\end{matrix}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g''		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
g		$\cap$		$\cup$	عطف	$\cap$		$\cup$	

در $x=0$ نقطه‌ی عطف دارد.



چند نکته درباره نقطه عطف:

۱- خط مماس بر نمودار تابع در نقطه عطف تابع از نمودار تابع عبور می‌کند.

۲- لزومی ندارد تابع در نقطه عطف مشتق دوم داشته باشد. مثلاً تابع $y=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$.

۳- در نقطه عطف، اگر مشتق دوم وجود داشته باشد، برابر صفر است.

۴- هر نقطه که مشتق دوم تابع در آن صفر باشد لزوماً نقطه عطف نیست. مثلاً تابع $y=x^4$ در $x=0$.

$$f'(x)=4x^3 \quad : \quad f''(x)=12x^2 \quad : \quad f''(0)=0$$

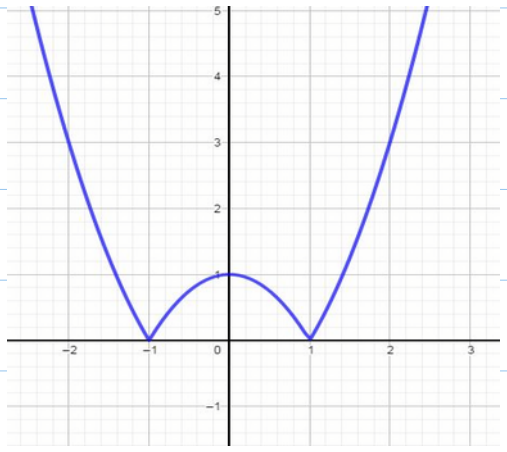
$12x^2>0$ است پس f'' اطراف $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد پس $x=0$ عطف نیست.

۵- هر نقطه که جهت تقعر نمودار تابع در آن تغییر کند، لزوماً نقطه عطف نیست. این نقطه ممکن است نقطه ناپیوستگی یا مشتق ناپذیری باشد.

مثلاً:
$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 0 \\ -x^2-1 & x<0 \end{cases}$$

$x=0$ عطف نیست زیرا در این نقطه تابع پیوسته نیست.

$g(x) = |x^2 - 1|$



$x = -1$ ، $x = 1$ خطّ نیست زیرا در این نقاط دو نیم مماس بر تابع رسم می‌شود

مثال: کنکور ریاضی ۹۷

خط راستی بر نمودار تابع $y = x^4 - 2x^2 + 4x$ مماس شده و از آن عبور می‌کند.

شیب این خط کدام است؟ ۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پس در نقطه خطّ بر تابع مماس رسم شده است.

$y' = 4x^3 - 4x + 4$: $y'' = 12x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ خطّ

شیب خط مماس در نقطه خطّ : $y'(\frac{2}{3}) = 4(\frac{2}{3})^3 - 4 \times \frac{2}{3} + 4$

$= \frac{32}{27} - \frac{8}{3} + 4 = \frac{-4}{3} + 4 = \frac{8}{3}$ گزینه ۴

مثال: اگر $A(1,-11)$ نقطه عطف نمودار تابع $f(x)=x^4+ax^2+bx$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۲ ۳) ۵ ۴) ۶

$f(1)=-11$ نقطه عطف روی تابع : $f(1)=1+a+b=-11 \Rightarrow a+b=-12$ ①

$f''(1)=0$: $f'(x)=4x^3+2ax+b$: $f''(x)=12x+2a$

$f''(1)=12+2a=0 \rightarrow a=-6 \xrightarrow{①} -6+b=-12 \Rightarrow b=-6$

$f(x)=x^4-6x^2-6x$: $f(-1)=-1-6+6=5$ گزینه ۳

مثال: کنکور ریاضی ۹۸

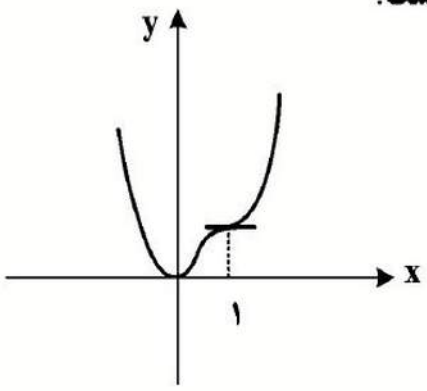
شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx$ است. a کدام است؟

۱) -8

۲) -7

۳) -5

۴) -4



در $x=1$ نقطه عطف داریم پس $f''(1)=0$.

در $x=1$ چون اکسترمم نسبی داریم پس $f'(1)=0$.

در $x=0$ یک نقطه‌ی min نسبی است. $f'(0)=0$

$$f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c \quad : \quad f'(0)=0$$

$$\Rightarrow f'(0)=0+0+0+c=0 \rightarrow c=0$$

$$f'(1)=0 \quad : \quad f'(1)=12+3a+2b+0=0 \rightarrow 3a+2b=-12$$

$$f''(1)=0 : \quad f''(x)=36x^2+6ax+2b$$

$$f''(1)=36+6a+2b=0 \rightarrow 3a+b=-18$$

$$-\begin{cases} 3a+2b=-12 \\ 3a+b=-18 \end{cases} \quad 3a+2=-18 \rightarrow 3a=-24 \rightarrow a=-8$$

$b=6$

تمرین ۲

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس سوم: رسم نمودار تابع

جلسه هفتم: صفحات ۱۳۷ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

رسم نمودار توابع :

برای رسم نمودار یک تابع مراحل زیر را انجام می دهیم :

۱- دامنه تابع را می یابیم .

۲- مجانب های تابع را در صورت وجود بدست می آوریم .

۳- مشتق اول تابع را پیدا می کنیم و جدول تغییرات تابع را می یابیم .

۴- مشتق دوم تابع را پیدا می کنیم و جهت تقعر تابع را می یابیم .

۵- محل برخورد نمودار تابع را با محورهای مختصات در صورت امکان تعیین می کنیم .

۶- با استفاده از اطلاعات بدست آمده ، نمودار تابع را رسم می کنیم .

نکته : اگر مرحله ای محاسبات زیادی داشت یا بدیهی بود ، از برخی مراحل صرفنظر می کنیم .

مثال : نمودار تابع $f(x)=x^3+3x^2-4$ را رسم کنید .

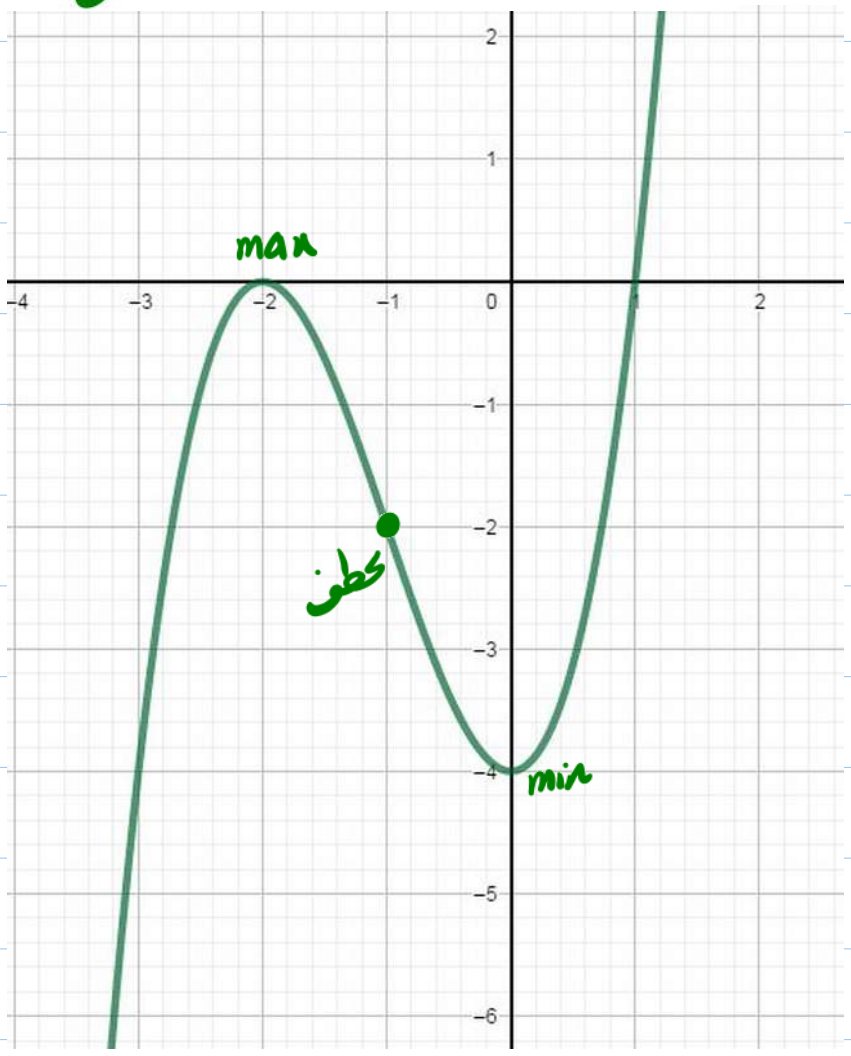
حل : دامنه تعریف : $D=\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	0	↘	-4	↗	
			max		min		

$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		∩	-2	∪	
			عطف		



چند نکته درباره نمودار تابع درجه سوم :

اگر ضابطه‌ی تابع درجه ۳ ، $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ باشد :

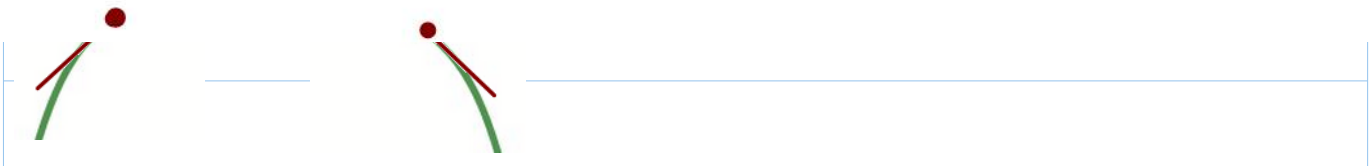
۱- اگر $a>0$ باشد ، نمودار از ناحیه‌ی سوم شروع و به ناحیه‌ی اول ختم می‌شود و اگر $a<0$ باشد نمودار از ناحیه‌ی دوم شروع و به ناحیه‌ی چهارم ختم می‌شود.

۲- مشتق اول تابع درجه سوم به صورت $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ است که یک تابع درجه دوم است. ریشه‌های مشتق به شرطی که f در آن‌ها تغییر علامت دهد نقاط اکسترمم f هستند.

$$\Delta_{f'}=4b^2-4(3a)(c)=4(b^2-3ac)$$

الف) اگر $\Delta_{f'}<0$ باشد ، f فاقد اکسترمم است.

$a>0$ $a<0$



ب) اگر $\Delta_{f'}=0$ باشد ، f فاقد اکسترمم است ولی در ریشه‌ی مشتق همانند نمودار تابع قبل رسم می‌شود.

$a>0$ $a<0$



پ) اگر $\Delta_f > 0$ باشد، f دارای یک min نسبی و یک max نسبی است.



۳- مشتق دوم تابع را بدست می‌آوریم: $f''(x) = 6ax + 2b$ است. پس تابع همواره

یک نقطه عطف دارد: $6ax + 2b = 0 \rightarrow 6ax = -2b \rightarrow x = \frac{-2b}{6a}$

$$\Rightarrow x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{3a}$$

۴- در حالتی که f، n تا ریشه حقیقی است که $n-1$ تا نقطه‌ی عطف وسط یا به خطی است که n تا را به هم وصل می‌کند.

مثال: اگر بعضی مقادیر min، max نسبی تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - m$ سه‌تایی دو به دو، m را بیابید. $y_{\text{عطف}} = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} \Rightarrow \frac{2}{2} = y_{\text{عطف}} \Rightarrow y_{\text{عطف}} = 1$

$x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{3a} = -\frac{-2}{3 \times 1} = 1$ عطف $(1, 1)$

(۱،۱) روی تابع $f(1)=1-3+1-m=1 \Rightarrow m=-2$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$ به کدام صورت است؟

۱)



۲)

۳)



۴)

نمودار از ناحیه سوم شروع و به ناحیه اول ختم می‌شود: $a=\frac{1}{3}>0$

$f'(x)=x^2-2x+1$: $\Delta_{f'}=4-4(1)(1)=0$ ریشه‌ی مضاعف دارد

در نقطه‌ی $x=1$ اکسترمم است.

در نقطه‌ی $x=1$ اکسترمم است. پس گزینه ۱ درست است.

مثال: با توجه به نمودار تابع $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ به ازای چه مقادیری از m، معادله $f(x)=m$ فقط یک ریشه حقیقی دارد؟

$f'(x)=3x^2-12x+9=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-4x+3=0 \rightarrow x=1,3$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	
			max		min		

$m<2$ یا $m>4$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-1}{1-x}$ را رسم کنید. ($f(x)=\frac{2x-1}{-x+1}$)

$D=\mathbb{R}-\{1\}$

مجانب قائم: $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{1-x}=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{1-x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{1-x}=\frac{2}{-1}=-2 \Rightarrow y=-2$$ مجانب افقی

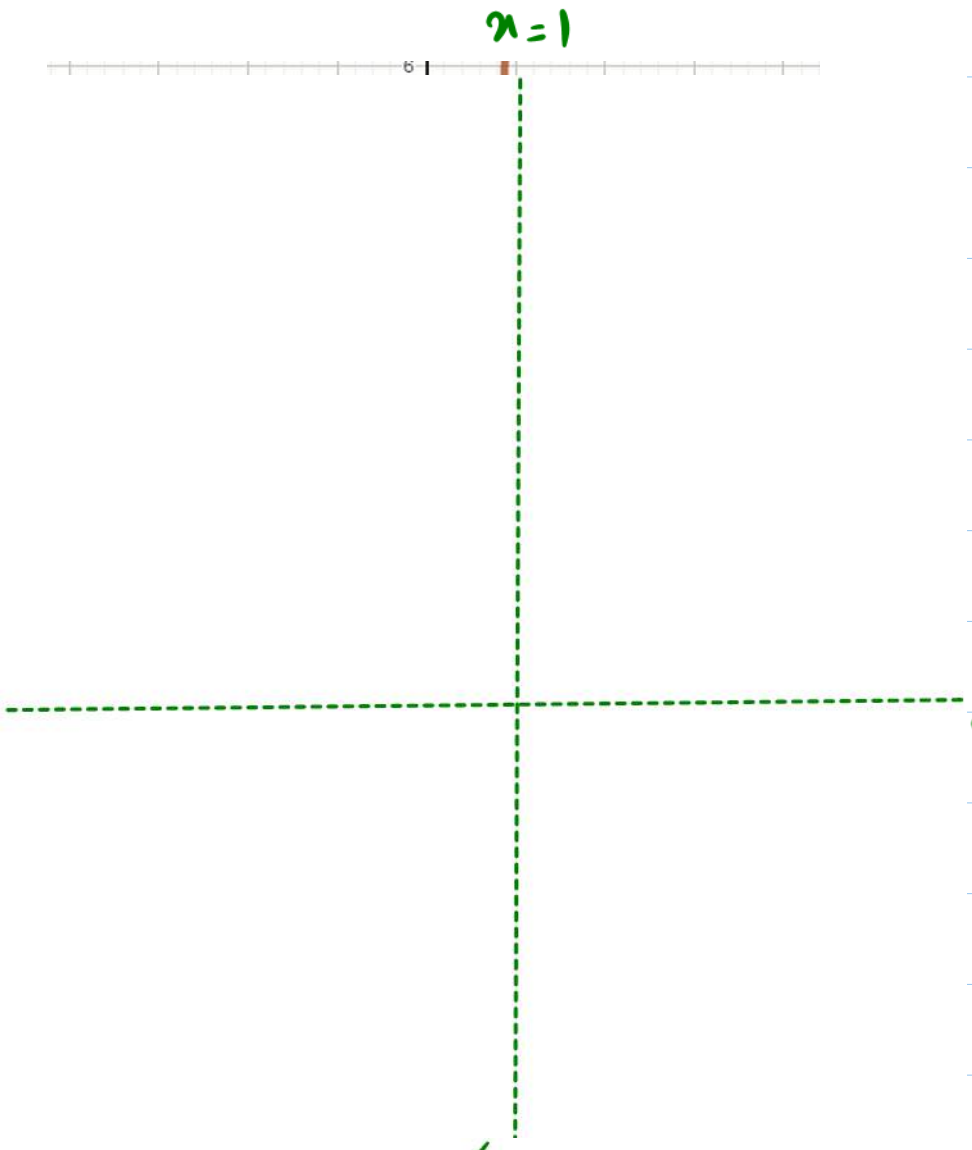
$$f'(x)=\frac{2(1)-(-1)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2-1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

نقطه بحرانی

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	∄	$+$	0	$+$	
f	-2	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	-4	$\nearrow$	-2
			$-\infty$				

محل برخورد با محور y ها: $x=0 \rightarrow y=\frac{2\times 0-1}{1-0}=-1$

محل برخورد با محور x ها: $y=0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$



نکته: توابع به فرم کلی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را تابع هموگرافیک می گوییم، به شرطی که $c\neq 0$ باشد (اگر $c=0$ باشد تابع خطی می شود) و $ad-bc\neq 0$ باشد. اگر $ad-bc=0$ باشد تابع ثابت $y=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ می شود

مثال: اگر نمودار تابع $y=\frac{ax+2}{2x+b}$ به صورت زیر باشد، a و b را بیابید.



نمودار تابع ثابت است پس: $ab-2(2)=0 \Rightarrow ab=4$

$x=1$ ریشه مخرج است پس $2\times1+b=0 \Rightarrow b=-2$

$a(-2)=4 \Rightarrow a=-2$

تذکر: تابع همگرا مثبت فقط در بینهایت و نقاط حاصل است و دارای یک مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}$ و یک مجانب افقی $y=\frac{a}{c}$ است، که نقطه تلاقی مجانب‌ها نقطه $(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ مرکز تقارن تابع است.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+4}{bx+1}$ به صورت زیر است. a و b را بیابید.



$x=2$ مجانب قائم: پس $x=2$ ریشه مخرج:

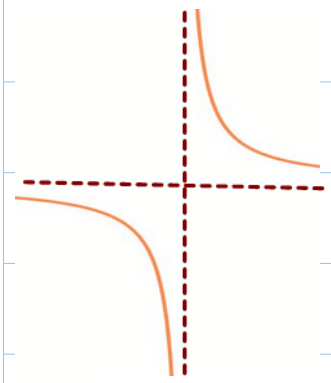
$2b+1=0 \rightarrow b=-\frac{1}{2}$

$y=2$ مجانب افقی:

$\frac{a}{b}=2 \rightarrow a=2b=2(-\frac{1}{2})=-\frac{2}{2}$

نکته: دی دانیم مشتق تابع همواره $f(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ به صورت است. این تابع روی دامنه‌اش نیز یکنوا است دی در دو طرف مجانب قائم با توجه به علامت $ad-bc$ یا اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

مثال: اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{mx+1}{x-2}$ به صورت زیر باشد، حدود m را بیابید.



$x=2$ مجانب قائم است، پس در بازه $(-\infty,2)$ و $(2,+\infty)$

تابع اکیداً نزولی است پس f' منفی است ($ad-bc<0$)

$$m(-2)-(1)(1)<0 \Rightarrow -2m-1<0$$

$$\Rightarrow -2m<1 \rightarrow m>-\frac{1}{2}$$


گروه ریاضی دوره دوم متوسطه استان همدان
@riazihmd1
ریاضی و تجربی
@riazihmd2
انسانی و فحک