حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل پنجم: کاربرد مشتق

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت اول: آزمون یکنوایی

جلسه اول: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

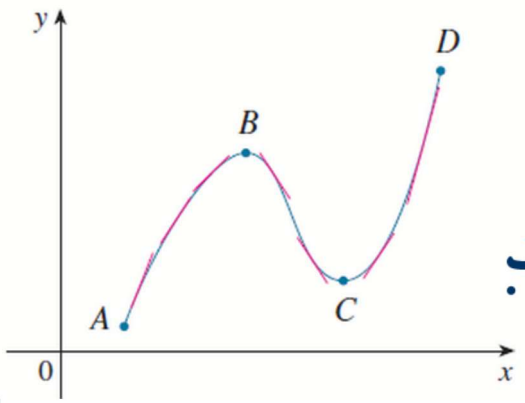
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

در فصل اول با توابع یکنوا و غیر یکنوا آشنا شدید و یکنوایی تابع را با توجه به نمودارش بررسی می‌کردیم.

به نمودار مقابل و خط‌های مماس رسم شده دقت کنید:



در بازه‌هایی که تابع صعودی است شیب خط‌های مماس مثبت
و در بازه‌هایی که تابع نزولی است شیب خط‌های مماس منفی است.

۱) آزمون یکنوایی تابع :

الف) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

به عبارت دیگر برای بررسی یکنوایی تابع مشتق‌پذیر f، از آن مشتق می‌گیریم و مشتق را با رسم جدول، تعیین علامت می‌کنیم. به این جدول تعیین علامت، **جدول تغیرات** تابع می‌گوییم. اگر علامت مشتق در بازه‌ای مثبت باشد، تابع در آن بازه اکیداً صعودی و اگر علامت مشتق در بازه‌ای منفی باشد تابع در آن بازه اکیداً نزولی است و عکس.

مثال: تغییرات تابع $y = x^4 - 4x^3 + 2$ را بررسی کنید.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

در بازه‌های $(0, -\infty)$ و $(3, +\infty)$ تابع اکیداً صعودی و در بازه $(3, 0)$ تابع نزولی است.

مثال: تابع $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ در بازه $[a,b]$ صعودی اکید است. حداکثر مقدار $a-b$ را بدست آورید.

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - 2x(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$-x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

تابع در $[-1, 1]$ صعودی اکید $\Rightarrow a = -1$ و $b = 1 \Rightarrow b - a = 1 + 1 = 2$

نکته: در توابع پیوسته اگر مشتق تابع در نقاطی جدا از هم در یک بازه صفر شود یا هم تابع روی آن بازه می‌تواند اکیداً صعودی یا نزولی باشد.

مثال: یکنوایی تابع $f(x)=x^4$ را بررسی کنید.

$$f'(x)=4x^3=0 \Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f		↗		↗	

تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

مثال: به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x)=-x^4+mx^2-12x+1$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است؟

$$f'\leq 0 \Rightarrow f'(x)=\underbrace{-4x^2}_{<0}+2mx-12\leq 0$$

$$\Delta\leq 0 \Rightarrow (2m)^2-4(-4)(-12)\leq 0$$

$$4m^2-192\leq 0 \Rightarrow m^2\leq 48 \Rightarrow -4\sqrt{3}\leq m\leq 4\sqrt{3}$$

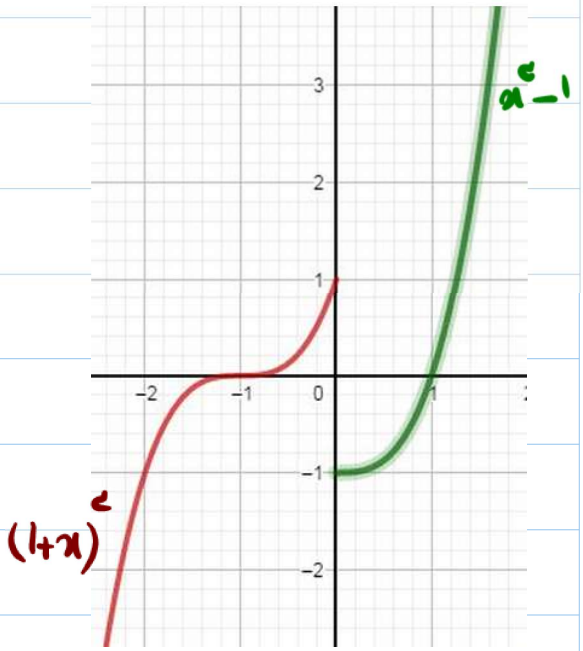
$$m\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\}$$

نکته: آزمون مشتق اول برای توابع پیوسته برقرار است. پس در توابع گویا، در بازه‌هایی می‌توانیم از این آزمون استفاده کنیم که شامل ریشه مخرج نباشد. در توابع چند ضابطه‌ای هم در نقاط مرزی همین نکته را داریم.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x\geq 0 \\ (1+x)^3 & x<0 \end{cases}$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(0,2)$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x>0 \\ \text{مشتق‌پذیر} & x=0 \\ 3(x+1)^2 & x<0 \end{cases}$$



تابع در $(-\infty,0)$ اکیداً صعودی است ولی برای رسیدن به شاخه سبز باید نزول کند. تابع در $(-\infty,+\infty)$ هم اکیداً صعودی است. پس تابع فقط در بازه $(0,2)$ که شامل صفر نیست، صعودی است.

مثال: تابع $f(x)=\frac{5}{x^2-2x}$ روی کدام بازه کاهنده است؟

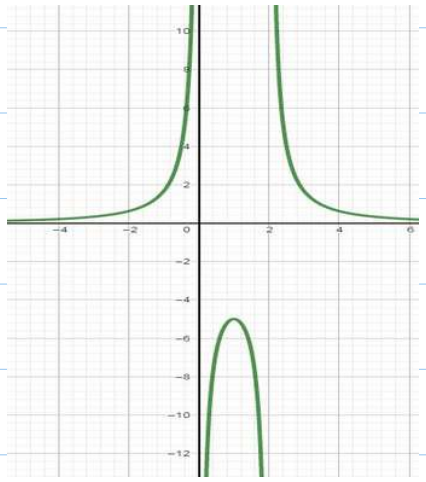
۱) $(1,3)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(2,3)$

$$f'(x)=\frac{0-5(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=\frac{-10x-10}{(x^2-2x)^2}$$

$$-10x-10=0 \Rightarrow x=1 \quad , \quad x^2-2x=0 \to x(x-2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f		↗	‖	↗		↘	‖	↘	

باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که مشتق در آن یک علامت داشته باشد و شامل ریشه مخرج نباشد که فقط گزینه‌ی ۳ بازه $(0,2)$ هردو ویژگی را دارد.



به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت دوم: نقطه بحرانی، اکسترمم‌های نسبی

جلسه دوم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

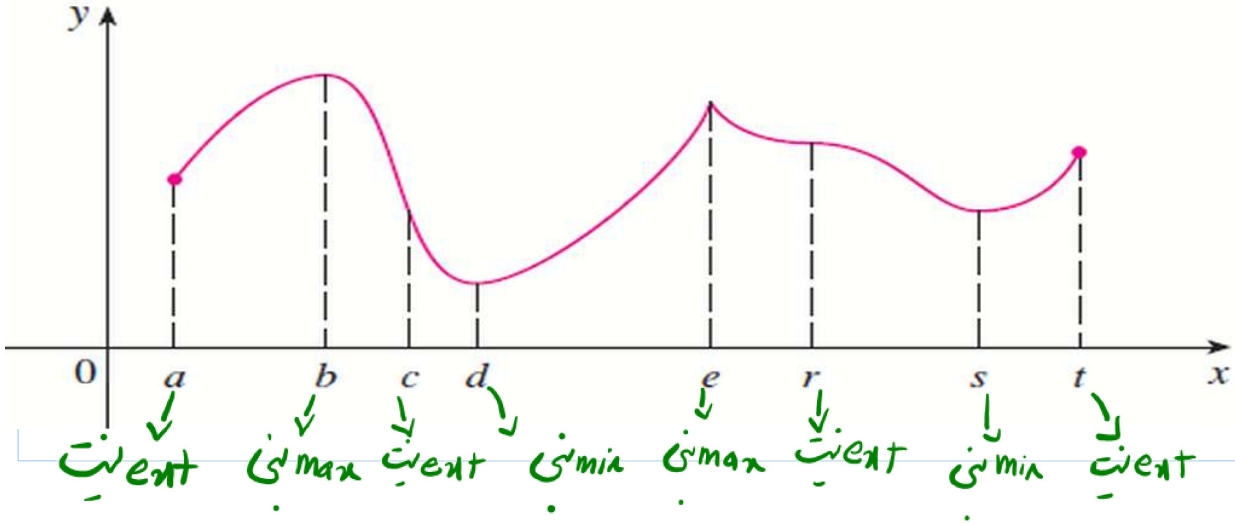
۲) اکسترمم های نسبی تابع :

الف) تابع f در نقطه ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از آن مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(x) \leq f(c)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی f می نامیم.

ب) تابع f در نقطه ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از آن مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(x) \geq f(c)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی f می نامیم.

به عبارت دیگر اگر عرض نقطه ای نسبت به نقاط اطرافش کوچکتر یا مساوی باشد به آن min نسبی و اگر بزرگتر یا مساوی باشد به آن max نسبی می گوییم.

مثال: در نمودار زیر کدام یک از نقاط مشخص شده اکسترمم نسبی هستند؟



چند نکته درباره اکسترمم های نسبی :

فرض کنید $x=c$ حول نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد در این صورت :

۱) نقطه ابتدا و انتهای دامنه نمی تواند نقطه اکسترمم تابع باشد.

۲) f می تواند در این نقطه پیوسته نباشد.

۳) f می تواند در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

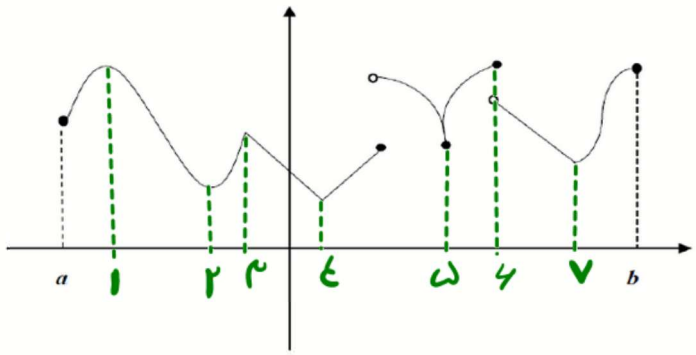
۴) اگر f در این نقطه مشتق پذیر باشد آنگاه : $f'(c)=0$.

۵) نقطه $(c, f(c))$ روی نمودار تابع f قرار دارد ضمن مختصات این نقطه در معادله تابع صدق می کند.

۶) در تابع ثابت تمام نقاط هم max نسبی هستند و هم min نسبی.

مثال : تابع مقابل در بازه $[a,b]$

چند نقطه اکسترمم نسبی دارد؟ ۷ نقطه

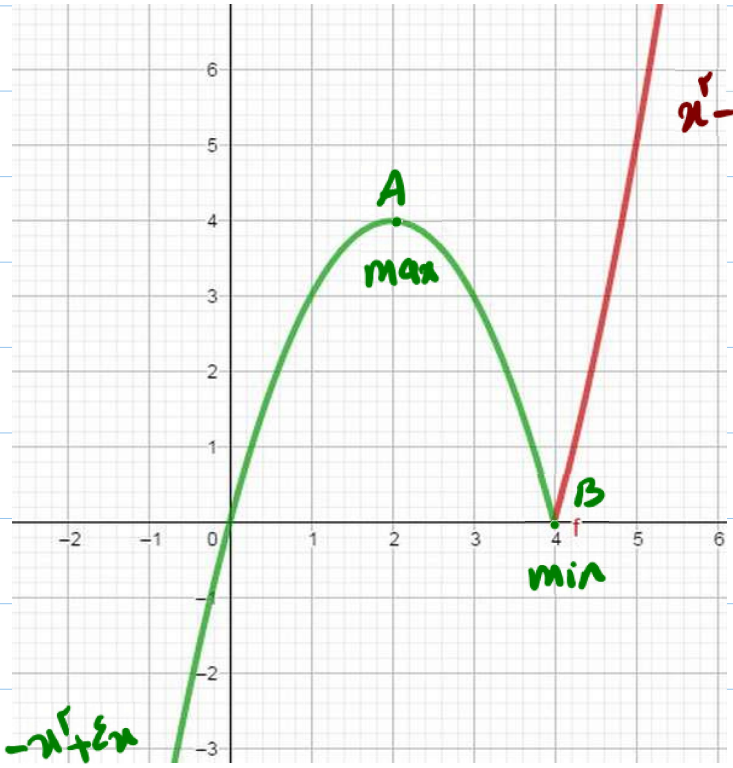


مثال کنکور ۹۸ تجربی :

در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x-4|$، فاصلهٔ دو نقطه ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) & x \geq 4 \\ -x(x-4) & x < 4 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4x & x \geq 4 \\ -x^2+4x & x < 4 \end{cases}$$



A(۲,۴) : ی max B(۴,۰) ی min

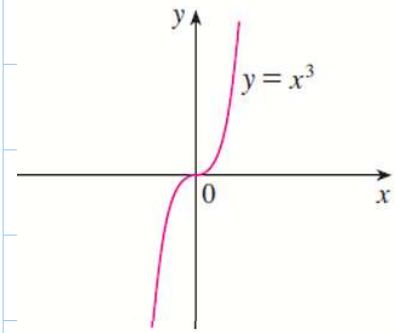
$$AB = \sqrt{(4-2)^2+(0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

گزینهٔ ۴

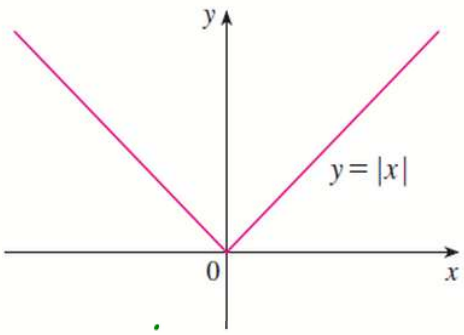
نقطه بحرانی :

نقطه‌ای به طول c از دامنه f است که در آن $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مانند :

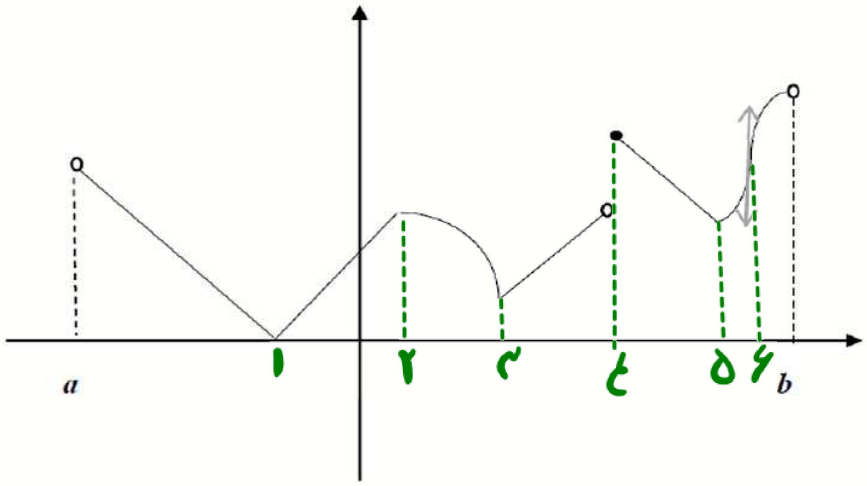


$f'(0)=0$ ، $x=0$ بحرانی



$f'(0)$ موجود نیست ، $x=0$ بحرانی

مثال: تابع f با نمودار زیر در بازه (a,b) چند نقطه بحرانی دارد؟



در ۶ نقطه

نکته: هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

ولی عکس آن درست نیست یعنی هر نقطه بحرانی، اکسترمم نسبی نیست.

توجه: نقاط ابتدا و انتهای دامنه، نقطه بحرانی هستند.

مثال: تابع $f(x)=4x^3-12x$ در بازه $[0,4]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

$$f'(x)=12x^2-12=0 \Rightarrow 12(x^2-1)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

چون $x=-1$ در دامنه تابع نیست پس بحرانی نیست.

نقاط بحرانی $x=1$ و $x=0$ و $x=4$ است.

مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

1) $f(x)=x^2(x+2)^3$

$$f'(x)=2x(x+2)^3+3(x+2)^2x^2=x(x+2)^2\big(2(x+2)+3x\big)=0$$

$$\Rightarrow x(x+2)^2(5x+4)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-2,\ x=-\frac{4}{5}$$ نقاط بحرانی

۲) $g(x)=\frac{x^3}{(1-x)^2}$ $\qquad D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

$$g'(x)=\frac{3x^2(1-x)^2-2(1-x)(-1)x^3}{(1-x)^4}$$

$$g'(x)=0 \Rightarrow x^2(1-x)\big(3(1-x)+2x\big)=0 \Rightarrow x^2(1-x)(-x+3)=0$$

$x=0,\ x=1 \notin D_f,\ x=3$ ⇐ بحرانی اند $x=3$ ، $x=0$

$g'(x)=$ موجبیت $\Rightarrow (1-x)^4=0 \Rightarrow x=1 \notin D_f$

۳) $f(x)=\begin{cases} x^3-3x & -2<x\le 2 \\ x^2-12x & 2<x<4 \end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & -2<x<2 \\ \text{موجبیت} & x=2 \\ 12-2x & 2<x<4 \end{cases}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \in (-2,2)$

$\Rightarrow 12-2x=0 \Rightarrow x=6 \notin (2,4)$ ، $x=\sqrt{6} \in (2,4)$

f' در $x=2$ موجود نیست پس $\{-1, 1, 2, 4\}$ نقاط بحرانی‌اند.

ج) $h(x) = x|x^2-1|$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$h(x) = \begin{cases} x(x^2-1) & x \le -1 \text{ یا } x \ge 1 \\ -x(x^2-1) & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x & x \le -1 \text{ یا } x \ge 1 \\ -x^3 + x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ \text{مشتق‌پذیر} & x = 1 \\ \text{مشتق‌پذیر} & x = -1 \\ -3x^2 + 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

پس در این حالت نقطه بحرانی نیست $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} > -1$ ، $x = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$

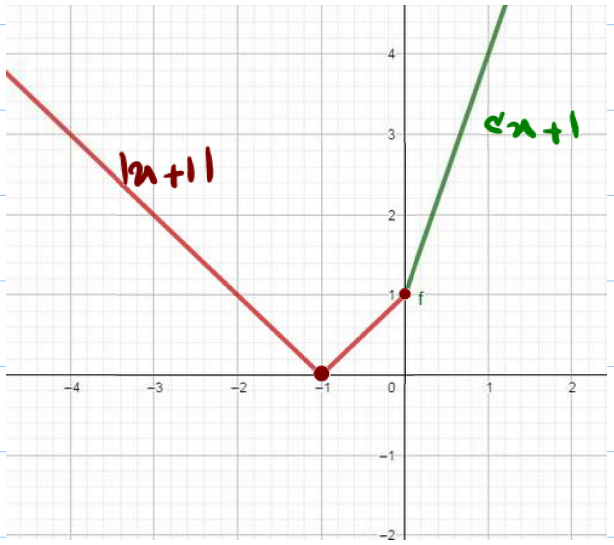
$$\Rightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

درون ناحیه هر دو در بازه $(1,-1)$ قرار دارند پس یکی‌اند.

بنابراین $\{\pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ نقاط برخورد اند.

a) $f(x) = |2x + |x| + 1|$

$$f(x) = \begin{cases} |\overbrace{2x+x}^{3x}+1| & x \geq 0 \\ |2x-x+1| & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 0 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$$

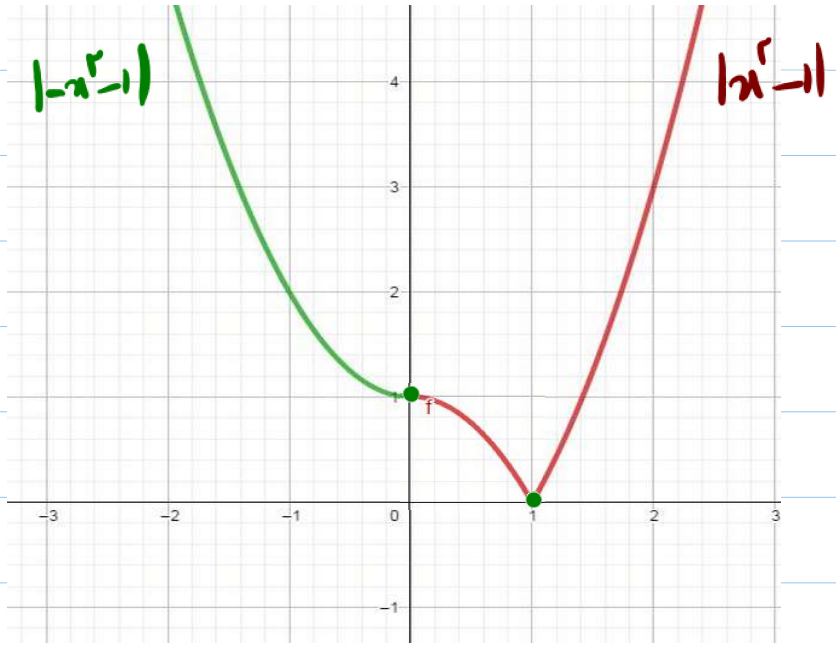


در $x = -1$ و $x = 0$

مشتق موجود نیست پس این نقاط گوشه‌اند.

b) $g(x) = |x|x| - 1|$

$$g(x) = \begin{cases} |x(x)-1| & x \geq 0 \\ |x(-x)-1| & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} |x^2-1| & x \geq 0 \\ |1-x^2-1| & x < 0 \end{cases}$$



در $x=1$ مشتق موجود نیست. در $x=0$ مشتق مخالف است. پس $\{0,1\}$

نقاط بحرانی هستند.

۷) $f(x)=(x-2)x^{\frac{2}{3}}$

$$f(x)=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{5x^{\frac{2}{3}}}{3}-\frac{4}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-4}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$$

$f'(x)=0 \rightarrow 5x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{5}$

$f'(x)$ موجود $\rightarrow \sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0$ پس $\{0,\frac{4}{5}\}$ نقاط بحرانی اند.

۸) $f(x)=\sqrt[3]{3x-x^3}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{3-3x^2}{3\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3-3x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$f'(x)$: تعیین علامت $\Rightarrow 3\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}=0 \Rightarrow 3x-x^3=0$

$\Rightarrow x(3-x^2)=0 \begin{cases} x=0 \\ 3-x^2=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

پس $\{\pm\sqrt{3}, 0, \pm 1\}$ نقاط بحرانی اند.

۹) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

D_f : $4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -4 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow D_f=[-2,2]$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x)=0 \rightarrow -2x=0 \rightarrow x=0$$

۲ـ و ۲ نقاط ابتدا و انتهای دامنه و ریشه مضرج هم هستند پس بحرانی اند

مجموعه نقاط بحرانی یا طول های : $\{0, \pm 2\}$

1.) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

D_f : $x^2-1 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 1 \rightarrow x \geq 1$ یا $x \leq -1$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

پس تابع در $x=1$ و $x=-1$ نقطه بحرانی دارند.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس $\{0, \pm 1\}$ مجموعه طول های نقاط بحرانی است.

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت سوم: آزمون مشتق اول

جلسه سوم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

آزمون مشتق اول برای تشخیص اکسترمم‌های نسبی :

فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر است :

الف) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در $x=c$ ، $\max$ نسبی دارد.

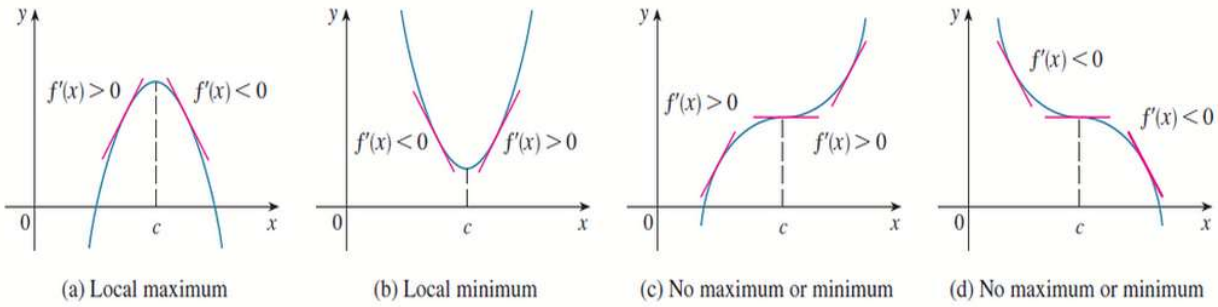
x		c	
f'	$+$		$-$
f	↗		↘

ب) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در $x=c$ ، $\min$ نسبی دارد.

x		c	
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

پ) اگر f در c تغییر علامت ندهد آنگاه f در c ، $\max$ یا $\min$ نسبی ندارد.

به شکل‌های زیر دقت کنید :



مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^5-5x^4$ را بیابید.

$$f'(x)=5x^4-20x^3=0 \Rightarrow 5x^3(x-4)=0 \begin{cases} 5x^3=0 \to x=0 \\ x-4=0 \to x=4 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
f	↗	max	↘		↘	min	↗

مثال: طول نقطه min نسبی تابع $y=x^4-12x+12$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

$$y'=4x^3-12=0 \xrightarrow{\div 4} x^3-3=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{3}$$

x	$-\infty$		$\sqrt[3]{3}$		$+\infty$
y'	$-$	0	$+$		
y	↘	min	↗		

$A(\sqrt[3]{3}, -6)$ نسبی min $O(0,0)$

$$OA=\sqrt{(\sqrt[3]{3}-0)^2+(-6-0)^2}=\sqrt{6+36}=\sqrt{42}=2\sqrt{10}$$

مثال: تابع $y=\frac{x+1}{x^2-2x}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

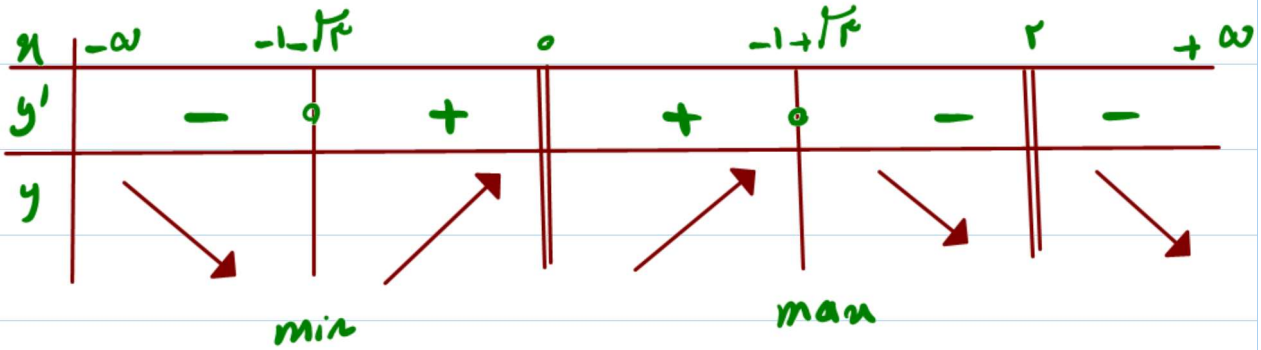
$$y'=\frac{1(x^2-2x)-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}=\frac{x^2-2x-2\overbrace{(x-1)(x+1)}^{x^2-1}}{(x^2-2x)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-2x^2+2}{(x^2-2x)^2}=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

$$y'=0 \rightarrow -x^2-2x+2=0 \Rightarrow \Delta=4-4\times(-1)(2)=4+8=12$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{-2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{-2}=\begin{cases}-1+\sqrt{3}\\-1-\sqrt{3}\end{cases}$$

y' مخرج: $(x^2-2x)^2=0 \rightarrow x=0,2$



گزینه ۳

مثال کنکور تجربی ۹۹ (خارج)

مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+1}$، کدام است؟

۱) $-1+\sqrt{5}$ ۲) $1+\sqrt{5}$ ۳) $-1+\sqrt{3}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2(x^3+x+x^2+1-x^3-2x^2+3x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(-x^2+4x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad : \quad -x^2+4x+1=0 \Rightarrow \Delta=16-4(-1)(1)=20$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{-2}=\frac{-4\pm2\sqrt{5}}{-2}=2\pm\sqrt{5}$$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	min	↗	max	↘	

$$f(2+\sqrt{5})=\frac{(2+\sqrt{5})^2+2(2+\sqrt{5})-3}{(2+\sqrt{5})^2+1}=\frac{4+5+4\sqrt{5}+4+2\sqrt{5}-3}{4+5+4\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{10+6\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}=\frac{5+3\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}\times\frac{5-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}=\frac{25-10\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30}{25-20}$$

گزینه ۱

$$= \frac{-5+5\sqrt{5}}{5} = -1+\sqrt{5}$$

مثال: نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $y = x - \sqrt{2x-1}$ را بدست آورید.

$$y' = 1 - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}} \qquad D_f = [\tfrac{1}{2}, +\infty)$$

$$y' = 0 : \quad \sqrt{2x-1} - 1 = 0 \to \sqrt{2x-1} = 1 \to 2x-1 = 1 \Rightarrow x = 1$$

y' = موجود نیست : $\sqrt{2x-1} = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \to x = \frac{1}{2}$

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'	∄	$-$	0	$+$	
y		↘	min	↗	

نقطهٔ min نسبی : $(1, 0)$

مثال: طول نقطهٔ max نسبی تابع $f(x) = (x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)^2 + 2(x-1)x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}+2(x-1)\frac{\sqrt[3]{x^2}}{1}=\frac{2(x-1)^2+6(x-1)x}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$=\frac{2(x-1)(x-1+3x)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2(x-1)(4x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'=0 \rightarrow 2(x-1)(4x-1)=0 \rightarrow x=1,\frac{1}{4}$$

f' موجود نیست $\rightarrow 3\sqrt[3]{x}=0 \rightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$2(x-1)(4x-1)$	$+$	$+$	0	$-$	0 $+$
$\sqrt[3]{x}$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	$\nexists$ $+$	0	$-$	0 $+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$ max	$\searrow$	min $\nearrow$

گزینه ۱

مثال: اگر $(1,1)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^4+ax^2+bx+1$ باشد، a,b را بیابید.

$(1,1)$ روی تابع، نقطه $\xrightarrow{\text{در تابع جایگذاری کن}}$ $f(1)=1+a+b+1=1 \rightarrow a+b=-1$

$f'(1)=0 \rightarrow f'(x)=4x^3+2ax+b \Rightarrow f'(1)=4+2a+b=0$

$$\rightarrow 2a+b=-4 \quad -\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=-4 \end{cases} \quad a=-3 \quad -3+b=-1 \rightarrow b=2$$

مثال: تابع $f(x)=x^3+ax^2+x-1$ فاقد اکسترمم نسبی است. حدود a را بیابید.

$$f'(x)=3x^2+2ax+1$$

f' باید همواره مثبت یا همواره منفی باشد.

ولی چون ضریب x^2، 3 مثبت است پس f' همواره مثبت است:

$$f'\geq 0 : \quad \Delta\leq 0 : \quad 4a^2-12\leq 0 \rightarrow a^2\leq 3$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3}\leq a\leq \sqrt{3}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت چهارم: اکسترمم‌های مطلق

جلسه چهارم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

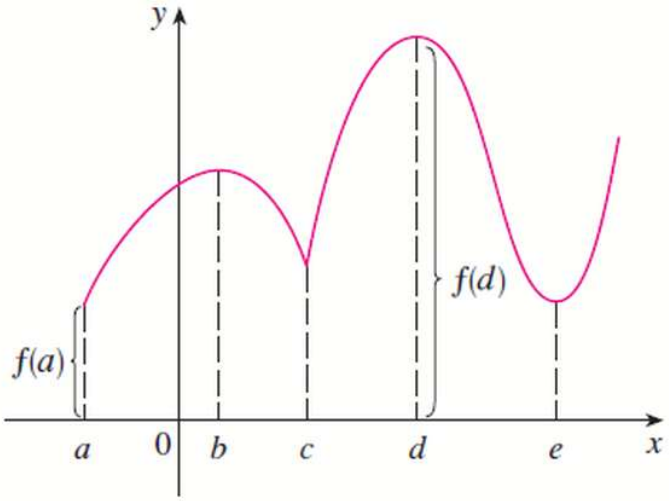
گروه ریاضی استان همدان

۴) اکسترمم های مطلق تابع :

الف) تابع f در $x=c \in D_f$ ، ماکزیمم مطلق دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f داشته باشیم : $f(c) \geq f(x)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f می گوئیم.

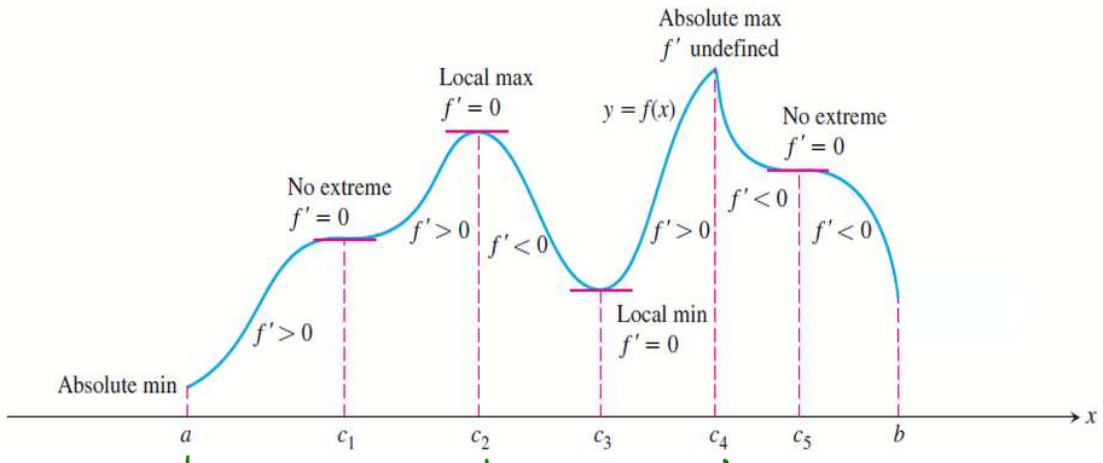
ب) تابع f در $x=c \in D_f$ ، مینیمم مطلق دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f داشته باشیم : $f(c) \leq f(x)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f می گوئیم.

در نمودارهای زیر داریم :



در $x=a$ ، min مطلق داریم.

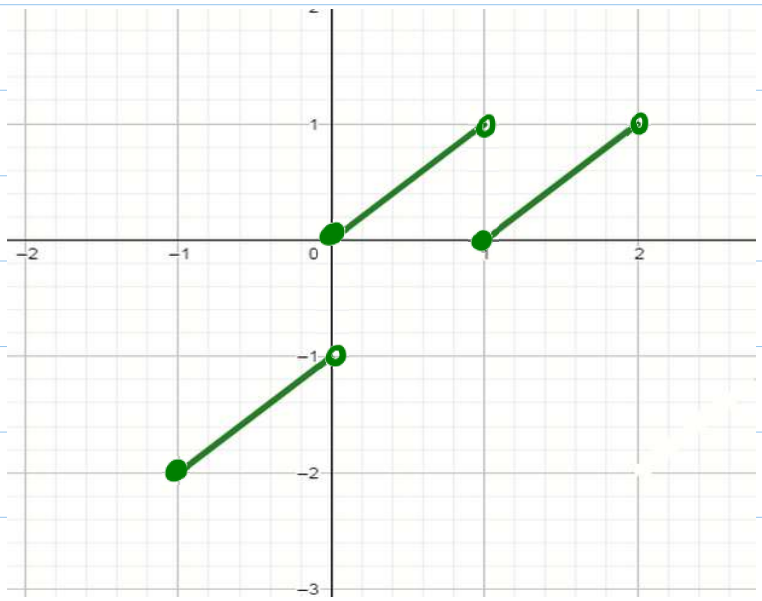
در $x=d$ ، max مطلق داریم.



مطلق min
نسبی max
نسبی min
مطلق max و نسبی

مثال: مقادیر max و min مطلق تابع $f(x) = x - [x]^2$ را روی بازه $(-1, 2)$ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

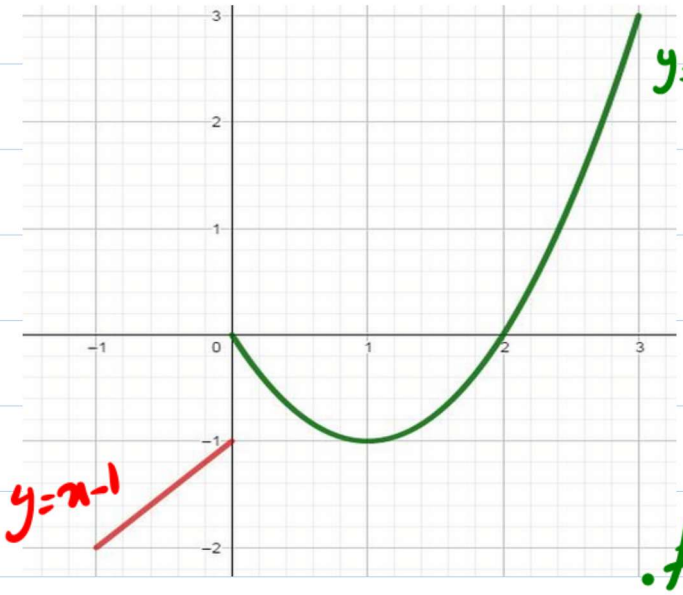


max مطلق ندارد.

min مطلق دارد، $x = -1$

که مقدار آن $f(-1) = -2$ است.

مثال: مقادیر max و min مطلق تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & 0\le x\le 3 \\ x-1 & -1\le x<0 \end{cases}$ را بیابید.



max مطلق در $x=3$ یا $f(3)=3$ مقدار.

min مطلق در $x=-1$ با مقدار $f(-1)=-2$.

قضیه: اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه max و min مطلق دارد.

روش یافتن اکسترمم‌های مطلق توابع پیوسته در بازه $[a,b]$:

ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازه $[a,b]$ می‌یابیم. سپس مقدار تابع را در نقاط بحرانی حساب می‌کنیم. بیشترین مقدار max مطلق و کمترین مقدار min مطلق تابع f در بازه هستند.

مثال کنکور تجربی ۹۸

مقادیر max و min مطلق تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2-10x$ را روی بازه $[-2,4]$ کدام‌اند؟

۱) -11 و 24 ۲) -45 و 27 ۳) -36 و 27 ۴) -27 و 36

$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x-5)(x+3) = 0$ $\begin{cases} x = 5 \notin D_f \\ x = -3 \checkmark \end{cases}$

پس تابع ۲ نقطه بحرانی در $x=-3$ و $x=5$ دارد.

x	-4	-3	4
y	$\frac{78}{4}$	27	-65
		max نسبی	min نسبی

$f(-4) = \frac{1}{4}(-4)^3 - (-4)^2 - 15(-4) = \frac{-64}{4} - 16 + 60 = \frac{-64 - 64 + 120}{4} = \frac{78}{4}$

$f(-3) = \frac{1}{4}(-3)^3 - (-3)^2 - 15(-3) = \frac{-27}{4} - 9 + 45 = 27$

$f(4) = \frac{1}{4}(4)^3 - (4)^2 - 15(4) = 16 - 16 - 60 = -60$

تمرین ۲

مثال: حداکثر مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ در بازه $[1, \frac{1}{2}]$ چقدر از کمترین مقدار آن در این بازه بیشتر است؟

۱) $\frac{12}{21}$ ۲) $\frac{8}{7}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{21}{12}$

$f'(x) = \frac{-(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2}$

بحرانی $f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
y	$\frac{4}{7}$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$		1

min (1) max (2)

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3+2+4}{4}} = \frac{4}{7}$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}, \quad f(1) = \frac{1}{1-1+1} = 1$$

$$\max - \min = \frac{4}{3} - \frac{4}{7} = \frac{28-12}{21} = \frac{16}{21}$$ گزینه ۱

مثال: مقدار $\max$ مطلق تابع $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ را بیابید.

$$f'(x) = 1\times\sqrt{4-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\times x = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-2x^2+4}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$D_f: 4-x^2 \geq 0 \to x^2 \leq 4 \to -2 \leq x \leq 2 \to D_f = [-2,2]$$

$$f'(x) = 0 \to -2x^2+4 = 0 \to x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
y	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

min max

$f(2) = f(-2) = 0$

$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\sqrt{4-2} = -2$

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{4-2} = 2$

مقدار $\max$ مطلق $= 2$ ، مقدار $\min$ مطلق $= -2$

مثال: حاصل ضرب بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع $f(x) = 2x\sqrt{5-x} + \sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $5\sqrt{2}$ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) $5\sqrt{5}$

D_f : ① $x \geq 0$

② $5-x \geq 0 \rightarrow x \leq 5$

$D_f = ① \cap ② = [0, 5]$

$f'(x) = 2x\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} - \sqrt{x} = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} = \sqrt{x}$

بر ۲ تقسیم $\rightarrow$ $x = 2(5-x) \rightarrow x = 10 - 2x \rightarrow 3x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{3}$

x	0	$\frac{10}{3}$	5
y	$\sqrt{5}$ ↓ min	5 ↑ max	$2\sqrt{5}$

$f(0) = 0 + \sqrt{5} = \sqrt{5}$

$f(\frac{10}{3}) = 2 \times \frac{10}{3} + 1 = 8$

$\max \times \min = 5\sqrt{5}$ نزدیک ۴

$f(5) = 2\sqrt{5} + 0 = 2\sqrt{5}$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = (2x-1)\sqrt[3]{x}$ در فاصله $[-1, 1]$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

$f(x) = (2x-1)x^{\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(8x - 1) = \frac{8x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 8x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{8}$

$f'(x)$ = موجود نیست : $3\sqrt[3]{x^2} = 0 \rightarrow x = 0$

x	-1		0		$\frac{1}{8}$		1
y	4	↗	0	↘	$-\frac{4}{8}$	↗	1
		max			min		

$f(-1) = -2^2 \times (-1) = 4$ $\qquad$ $f(0) = (-1) \times 0 = 0$

$f(\frac{1}{8}) = (\frac{1}{4} - 1) \times \frac{1}{2} = -\frac{4}{8}$ $\qquad$ $f(1) = 1 \times 1 = 1$

گزینه ۲

نکته: برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع f روی بازه (a,b)، در روش بالا به جای $f(a)$، $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ و به جای $f(b)$، $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. اگر بیشترین یا کمترین مقدار، در این مقادیر حدی اتفاق افتد آن‌گاه تابع در این بازه max یا min مطلق نخواهد داشت. در مورد بازه‌های $[a,b]$، $(a,b]$، $(-\infty,a)$ و $[a,+\infty)$، $(a,+\infty)$، $(-\infty,+\infty)$ هم به این شکل عمل می‌کنیم.

مثال: تابع $f(x) = x^4 - 2x^2$ در بازه $(-1,2]$ مفروض است. اکسترمم‌های مطلق آن را در صورت وجود محاسبه کنید.

$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0 \div x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

$f(0) = 0$, $f(4) = 64 - 48 = 16$, $f(-1) = -1 - 3 = -4$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} x^3 - 3x^2 = 64 - 48 = 16$

x	-1	0	2	4 (حد)
y	-4	0	-4	16

چون مقدار max در حدّ تابع وقتی $x \to 4^-$

اتّفاقاً این دو تا نقطه‌ی min مطلق دارند: $f(-1) = f(2) = -4$ ولی max مطلق ندارد

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ روی بازه $(0, +\infty)$ چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۹

$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \frac{16}{0^+} = 0 + \infty = +\infty$ نقطه max مطلق است.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$ در $x = 2$ یک min مطلق دارد:

گزینه ۲ : $f(2) = 4 + 8 = 12$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت پنجم: بهینه سازی

جلسه پنجم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

بهینه سازی :

هدف از بهینه سازی پیدا کردن بیشترین یا کم‌ترین مقدار یک تابع است.

در اکثر سوالات بهینه سازی، ضابطه تابع به ما داده نمی‌شود و باید با توجه به داده‌های مسئله تابع هدف را بسازیم. مراحل زیر را برای حل اینگونه سوالات دنبال می‌کنیم :

۱- در صورت لزوم شکل مناسبی رسم می‌کنیم.

۲- اگر تابع هدف بیش از یک متغیر داشته باشد با استفاده از شرط سوال (رابطه کمکی) آن را برحسب یک متغیر می‌نویسیم.

۳- از تابع هدف مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم. مقادیر اکسترمم تابع هدف را محاسبه می‌کنیم.

مثال : اگر x و y دو عدد مثبت باشند که $xy=4$، مقدار مینیمم عبارت $P=2x+3y$ را محاسبه کنید.

رابطه کمکی :

$$xy=4 \rightarrow y=\frac{4}{x}$$

تابع هدف $P = 2x + 2 \times \frac{6}{x} \Rightarrow P(x) = 2x + \frac{18}{x}$

$P'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{18}{x^2} = 2 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \overset{x>0}{\Rightarrow} x = 3$

$y = \frac{6}{3} = 2$ $\quad P_{min} = 2 \times 3 + 3 \times 2 = 6 + 6 = 12$

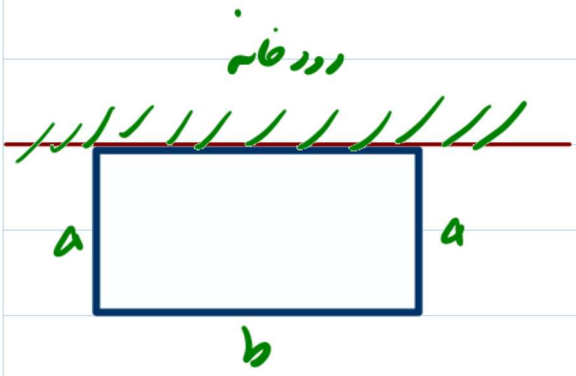
مثال: اگر $x + y = 4$ باشد، ماکزیمم $x^3 y$ را بیابید.

$P = x^3 y \Rightarrow P(x) = x^3(4 - x) = 4x^3 - x^4$: $y = 4 - x$

$P'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3 - x) = 0$ $\begin{cases} 4x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow min \\ 3 - x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow max \end{cases}$

$y = 4 - 3 = 1$: $P_{max} = 3^3 \times 1 = 27$

مثال: بیشترین مساحت مستطیلی که بوسیله یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه یک رودخانه می‌توان محصور کرد، چند متر مربع است؟



رابطه کمکی $2a + b = 48$

$\rightarrow b = 48 - 2a$

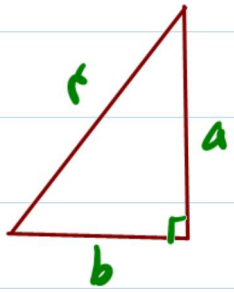
تابع هدف :

$$S = a \times b = a(48 - 2a) = 48a - 2a^2$$

$$S'(a) = 48 - 4a = 0 \rightarrow 4a = 48 \rightarrow a = 12 \; ; \; b = 48 - 24 = 24$$

$$S_{max} = 12 \times 24 = 288$$

مثال : طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۴ است. بیشترین مقدار مساحت آن را بیابید.



رابطه فیثاغورس : $a^2 + b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 16 - a^2$

$$\Rightarrow b = \sqrt{16 - a^2}$$

$$S = \frac{1}{2}ab \Rightarrow S = \frac{1}{2}a\sqrt{16 - a^2}$$

$$S'(a) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - a^2} + \frac{-2a}{2\sqrt{16 - a^2}} \times \frac{1}{2}a$$

$$S'(a) = \frac{16 - a^2 - a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} = \frac{16 - 2a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} = \frac{8 - a^2}{\sqrt{16 - a^2}}$$

$$S'(a) = 0 \rightarrow 8 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \text{ و } b = \sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}$$

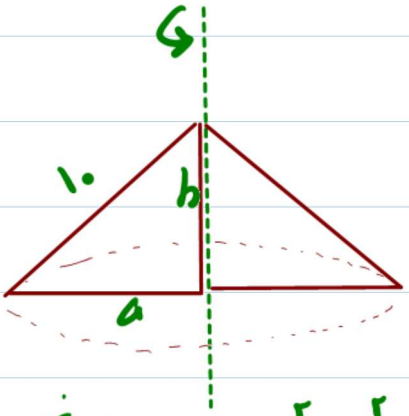
$$S_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{8} \times \sqrt{8} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

مثال: کنکور تجربی ۹۹

از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

اگر یک مثلث قائم الزاویه را حول یک ضلع قائم دوران دهیم، یک مخروط ایجاد می‌شود که شعاع قاعده و ارتفاعش برابر اضلاع قائم مثلث اند:



تابع هدف : $V = \frac{۱}{۳}\pi a^۲ b$

رابطه بین دو متغیر : $a^۲ + b^۲ = ۱۰۰ \rightarrow a^۲ = ۱۰۰ - b^۲$ رابطه کمکی :

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰ - b^۲)b = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰b - b^۳)$$

$$V'(b) = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰ - ۳b^۲) = ۰ \rightarrow ۳b^۲ = ۱۰۰ \rightarrow b^۲ = \frac{۱۰۰}{۳}$$

$$a^۲ = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۳} = \frac{۲۰۰}{۳}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a^۲}{b^۲}} = \sqrt{\frac{\frac{۲۰۰}{۳}}{\frac{۱۰۰}{۳}}} = \sqrt{۲}$$ گزینه ۴

مثال: کنکور تجربی خارج ۹۹:

کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطه $A(۵,۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۲x+۷}$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) $۳\sqrt{۲}$

نقطه $B(x,y)$ را روی نمودار در نظر می‌گیریم. فاصله $A(۵,۰)$ تا B را تابع هدف می‌گیریم که باید min شود:

رابطه کمکی $y=\sqrt{۲x+۷}$

$AB=\sqrt{(x-۵)^۲+(y-۰)^۲}$

تابع هدف $AB=\sqrt{x^۲-۱۰x+۲۵+۲x+۷}=\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}$

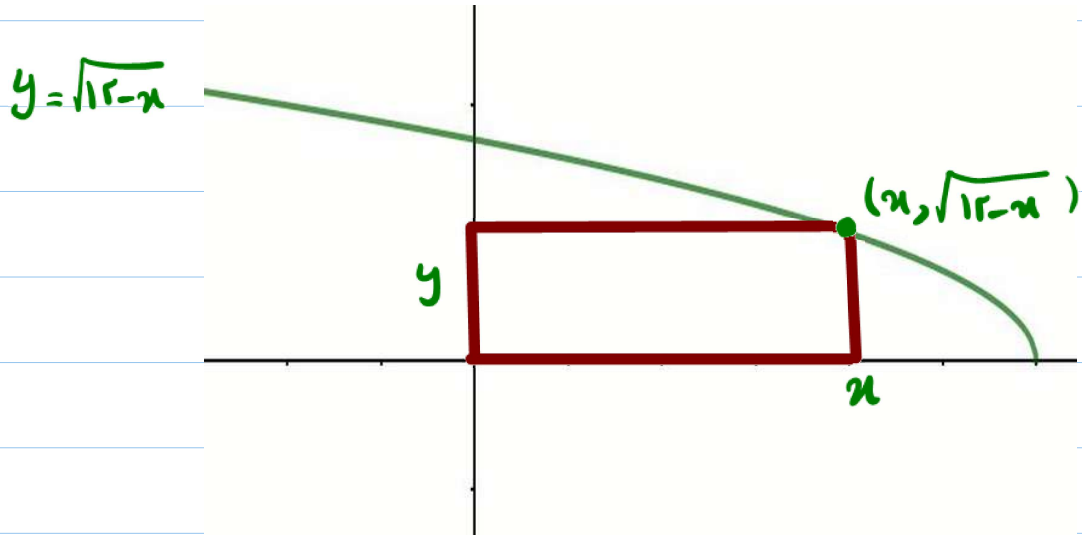
$(AB)'=\frac{۲x-۸}{۲\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}}=۰ \rightarrow ۲x-۸=۰ \rightarrow x=۴$

$(AB)_{min}=\sqrt{۴^۲-۸\times۴+۳۲}=\sqrt{۱۶}=۴$ گزینه ۱

مثال: کنکور تجربی ۹۸

بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۱۲-x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸



$$S = xy = x\sqrt{12-x} = \sqrt{12x^2-x^4}$$

$$S'(x) = \frac{24x-4x^3}{2\sqrt{12x^2-x^4}} \rightarrow S'=0 \rightarrow 24x-4x^3=0$$

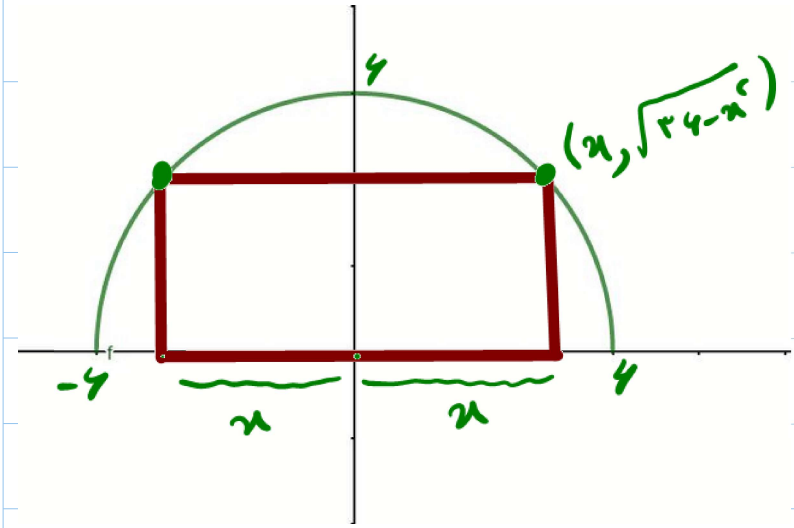
$$4x(6-x)=0 \begin{cases} x=0 \text{ قبول نیست} \\ x=6 \checkmark \end{cases} \quad . \quad y=\sqrt{12-6}=\sqrt{6}=2$$

$$S_{max} = 6\times 2 = 12 \qquad \text{گزینه ۲}$$

مثال: کنکور تجربی خارج ۹۸

بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶



معادله دایره $x^۲+y^۲=۳۶$

$y^۲=۳۶-x^۲ \Rightarrow y=\sqrt{۳۶-x^۲}$

$$S=۲x\times y=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}=۲\sqrt{۳۶x^۲-x^۴}$$

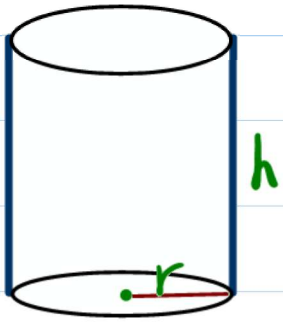
$$S'(x)=۲\frac{۷۲x-۴x^۳}{۲\sqrt{۳۶x^۲-x^۴}}=۰ \rightarrow ۷۲x-۴x^۳=۰$$

$$۴x(۱۸-x^۲)=۰ \begin{cases} x=۰ \\ x=\sqrt{۱۸} \checkmark \\ x=-\sqrt{۱۸} \end{cases} \quad y=\sqrt{۳۶-۱۸}=\sqrt{۱۸}$$

$$S_{max}=۲\times\sqrt{۱۸}\times\sqrt{۱۸}=۲\times۱۸=۳۶$$

گزینه ۴

مثال: می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای شکل بسازیم که گنجایش آن ۲π لیتر باشد. ارتفاع استوانه چقدر باشد تا هزینه فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟



$V = \pi r^2 h = 2\pi \Rightarrow r^2 h = 2$ (الحجم ثابت)

$\Rightarrow h = \frac{2}{r^2}$ (رابطة بين h و r)

$S_{\text{كلي}} = S_{\text{قاعدتان}} + S_{\text{جانبي}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$S_{\text{كلي}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{2}{r^2} = 2\pi\left(r^2 + \frac{2}{r}\right)$ (تابع هدف)

$S'(r) = 2\pi\left(2r - \frac{2}{r^2}\right) = 0$

$\frac{2r^3 - 2}{r^2} = 0 \rightarrow 2r^3 - 2 = 0 \longrightarrow r^3 = 1 \longrightarrow r = 1$

$h = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

جلسه ششم: صفحات ۱۲۷ تا ۱۳۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

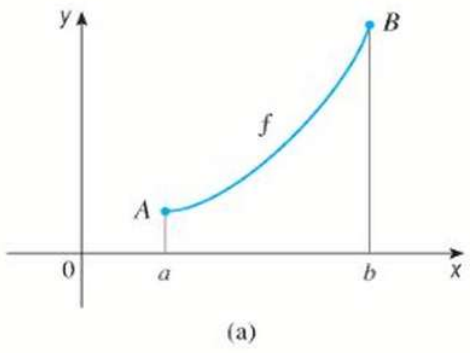
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

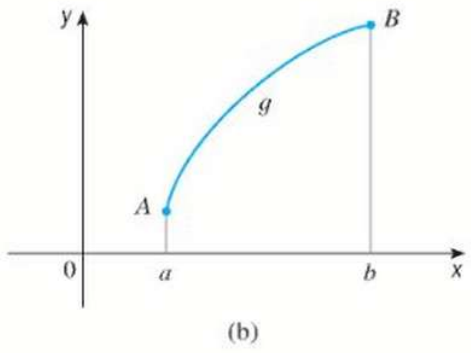
جهت تقعر:

اگر در یک بازه، همه خطهای مماس بر منحنی، زیر منحنی قرار گیرند، می‌گوییم تقعر رو به بالا است.

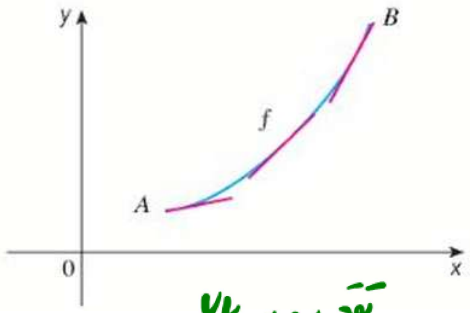
اگر در یک بازه، همه خطهای مماس بر منحنی، بالای منحنی قرار گیرند، می‌گوییم تقعر رو به پایین است.



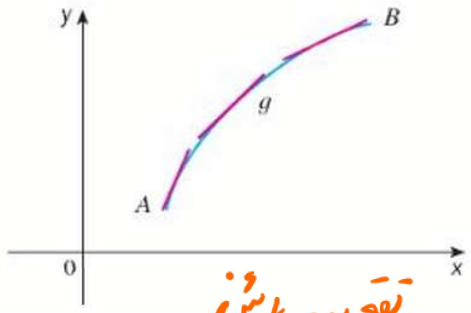
(a)



(b)

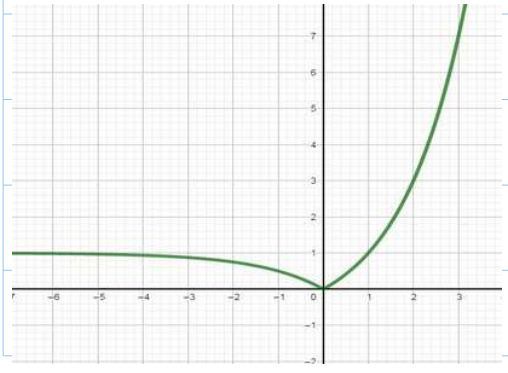


تقعر رو به بالا



تقعر رو به پایین

مثال: جهت تقعر تابع $f(x)=|2^x-1|$ را تعیین کنید.



در $(0,+\infty)$ تقعر رو به بالا

در $(-\infty,0)$ تقعر رو به پایین

یافتن جهت تقعر بدون رسم نمودار :

به شکل‌های تعریف بالا در حالت تقعر رو به پائین دقت کنید. شیب مماس بر منحنی از چپ به راست در حال کاهش است و می‌دانیم شیب مماس بر منحنی همان مشتق.

پس مشتق تابع در حال کاهش است. به عبارت دیگر مشتق آن نزولی است و اگر یک تابع نزولی باشد، مشتق آن منفی است پس داریم :

$$f'' < 0 \Rightarrow (f')' < 0 \Rightarrow f' \text{ منفی است} \Rightarrow f \text{ نزولی}$$

برای تقعر رو به بالا هم به نتیجه مشابهی می‌رسیم.

قضیه : فرض کنید f'' به ازای هر نقطه از بازه باز I موجود باشد :

۱- اگر برای هر x از I : $f''(x) > 0$ باشد آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

۲- اگر برای هر x از I : $f''(x) < 0$ باشد آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پائین دارد.

۳- اگر برای هر x از I : $f''(x) = 0$ باشد آزمون بی نتیجه است.

نکته: برای تعیین جهت تقعر تابع f باید مشتق دوم را تعیین علامت کنیم.

مثال: جهت تقعر تابع $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ را مشخص کنید.

$$f'(x)=\frac{1(1+x^2)-2x\times x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-2(1+x^2)\times 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{2x(1+x^2)\left(-(1+x^2)-2(1-x^2)\right)}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{2x(-1-x^2-2+2x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$$2x(x^2-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

مثال: به ازای چه مقادیری از a، تقعر منحنی $f(x)=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2$ همواره رو به بالاست؟

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+3x$$

$$f''(x)=\underbrace{12x^2+6ax+3}_{+} > 0 \xrightarrow{\div 3} 4x^2+2ax+1>0$$

$\Delta<0$:

$$\Delta=4a^2-4\times4\times1<0 \to 4a^2-16<0 \to a^2<4$$

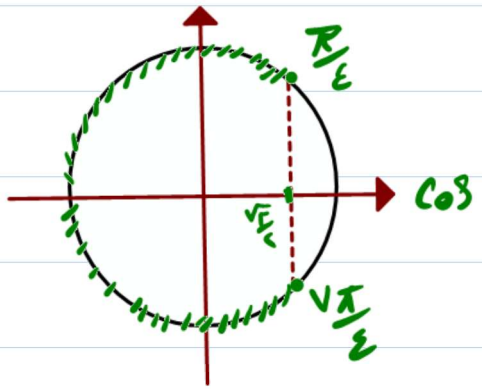
$$\Rightarrow -2<a<2$$

مثال: مجموعه نقاطی که تقعر منحنی تابع $f(x)=x^2+2\sqrt{2}\cos x$، $0\le x\le 2\pi$ رو به بالاست، در چه بازه‌ای است؟

$$f'(x)=2x-2\sqrt{2}\sin x \quad : \quad f''(x)=2-2\sqrt{2}\cos x>0$$

$$-2\sqrt{2}\cos x>-2 \Rightarrow \cos x<\frac{-2}{-2\sqrt{2}} \to \cos x<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$$



تقعر رو به بالا در بازه $(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$

نقطه عطف :

نقطه $(c, f(c))$ را نقطه عطف نمودار تابع f می‌گوییم هرگاه :

۱) تابع در این نقطه خط مماس داشته باشد .

۲) جهت تقعر نمودار در این نقطه تغییر کند .

نکته : وقتی می‌گوییم تابع f در $(c, f(c))$ خط مماس دارد، یعنی در این نقطه مشتق متناهی دارد یا در این نقطه پیوسته است و مشتق نامتناهی دارد .

مثال: نقاط عطف توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} - 10\sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{20}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{20}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+2) = \frac{10}{9}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^4}}$$

($x=-2$ ، $x=0$)

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	‖	$+$	
f		∩		∪		∪	

تابع در $x=-2$ نقطه‌ی عطف دارد زیرا تابع در این نقطه پیش از قبل رسم است و مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد.

۲) $g(x)=\frac{x}{x^2-1}$

$$g'(x)=\frac{x^2-1-2x\times x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

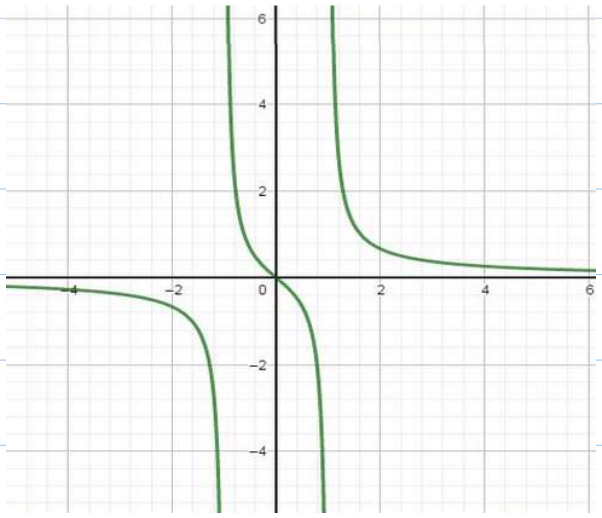
$$g''(x)=\frac{-2x(x^2-1)^2-2(x^2-1)2x(-x^2-1)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2-1)\left(-(x^2-1)-2(-x^2-1)\right)}{(x^2-1)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2+4)}{(x^2-1)^4}$$

($x=0$ ← صفر، $x=\pm1$ → مخرج صفر)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g''		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
g		∩	‖	∪	عطف	∩	‖	∪	

در $x=0$ نقطه‌ی عطف دارد.



چند نکته درباره نقطه عطف:

۱- خط مماس بر نمودار تابع در نقطه عطف تابع از نمودار تابع عبور می‌کند.

۲- لزومی ندارد تابع در نقطه عطف مشتق دوم داشته باشد. مثلاً تابع $y=x^{\frac{4}{3}}$ در $x=0$.

۳- در نقطه عطف، اگر مشتق دوم وجود داشته باشد، برابر صفر است.

۴- هر نقطه که مشتق دوم تابع در آن صفر باشد لزوماً نقطه عطف نیست. مثلاً تابع $y=x^4$ در $x=0$.

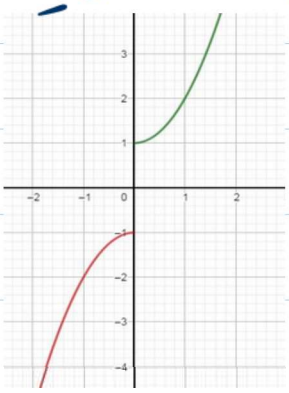
$$f''(0)=0 \quad : \quad f''(x)=12x^2 \quad : \quad f'(x)=4x^3$$

$12x^2>0$ است پس f'' اطراف $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد پس $x=0$ عطف نیست.

۵- هر نقطه که جهت تقعر نمودار تابع در آن تغییر کند، لزوماً نقطه عطف نیست. این نقطه ممکن است نقطه ناپیوستگی یا مشتق ناپذیری باشد.

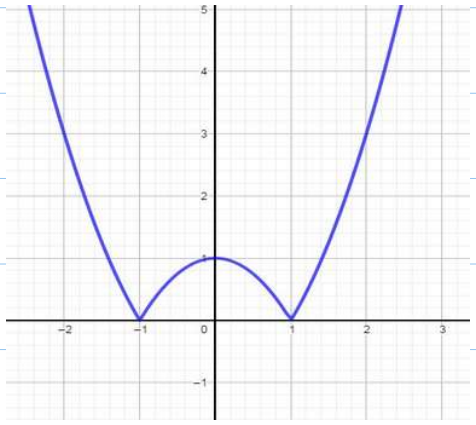
مثال:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 0 \\ -x^2-1 & x<0 \end{cases}$$



$x=0$ عطف نیست زیرا در این نقطه تابع پیوسته نیست.

$g(x) = |x^2 - 1|$



$x = -1$ ، $x = 1$ خطف نیستند زیرا در این نقاط دو نیم مماس بر تابع رسم می‌شود

مثال: کنکور ریاضی ۹۷

خط راستی بر نمودار تابع $y = x^4 - 2x^2 + 3x$ مماس شده و از آن عبور می‌کند.

شیب این خط کدام است؟ ۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

این در نقطه خطف بر تابع مماس رسم شده است.

$y' = 4x^3 - 4x + 3$: $y'' = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ خطف

شیب خط مماس در نقطه خطف : $y'(\frac{2}{3}) = 4(\frac{2}{3})^3 - 4 \times \frac{2}{3} + 3$

$= \frac{8}{27} - \frac{8}{3} + 3 = \frac{-8}{27} + 3 = \frac{5}{3}$ گزینه ۴

مثال: اگر $A(1,-11)$ نقطه عطف نمودار تابع $f(x)=x^4+ax^2+bx$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۶

$f(1)=-11$ نقطه عطف روی تابع : $f(1)=1+a+b=-11 \Rightarrow a+b=-12$ (۱)

$f''(1)=0$: $f'(x)=4x^3+2ax+b$: $f''(x)=12x+2a$

$f''(1)=12+2a=0 \rightarrow a=-6 \xrightarrow{(1)} -6+b=-12 \Rightarrow b=-6$

$f(x)=x^4-6x^2-6x$: $f(-1)=-1-6+6=-1$ گزینه ۳

مثال: کنکور ریاضی ۹۸

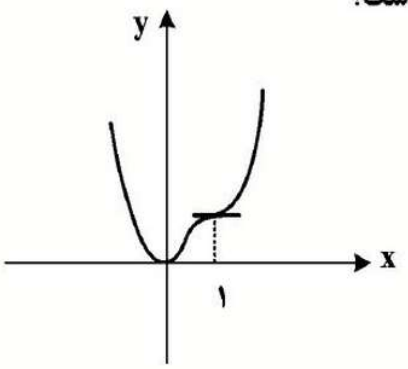
شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx$ است. a کدام است؟

۱) -8

۲) -7

۳) -5

۴) -4



در $x=1$ نقطه عطف داریم پس $f''(1)=0$.

در $x=1$ هم اکسترمم داریم پس $f'(1)=0$.

در $x=0$ یک مینیمم نسبی است. $\Rightarrow f'(0)=0$

$f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c$: $f'(0)=0$

$\Rightarrow f'(0)=0+0+0+c=0 \rightarrow c=0$

$f'(1)=0$: $f'(1)=12+3a+2b+0=0 \rightarrow 3a+2b=-12$

$f''(1)=0$: $f''(x)=36x^2+6ax+2b$

$f''(1)=36+6a+2b=0 \rightarrow 3a+b=-18$

$$-\begin{cases} 3a+2b=-12 \\ 3a+b=-18 \end{cases} \quad 3a+2=-18 \rightarrow 3a=-24 \rightarrow a=-8$$

$b=6$

گزینه ۱

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس سوم: رسم نمودار تابع

جلسه هفتم: صفحات ۱۳۷ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

رسم نمودار توابع :

برای رسم نمودار یک تابع مراحل زیر را انجام می دهیم :

۱- دامنه تابع را می یابیم .

۲- مجانب های تابع را در صورت وجود بدست می آوریم .

۳- مشتق اول تابع را پیدا می کنیم و جدول تغییرات تابع را می یابیم .

۴- مشتق دوم تابع را پیدا می کنیم و جهت تقعر تابع را می یابیم .

۵- محل برخورد نمودار تابع را با محورهای مختصات در صورت امکان تعیین می کنیم .

۶- با استفاده از اطلاعات بدست آمده ، نمودار تابع را رسم می کنیم .

نکته : اگر مرحله ای محاسبات زیادی داشت یا بدیهی بود ، از برخی مراحل صرفنظر می کنیم .

مثال : نمودار تابع $f(x)=x^3+3x^2-4$ را رسم کنید .

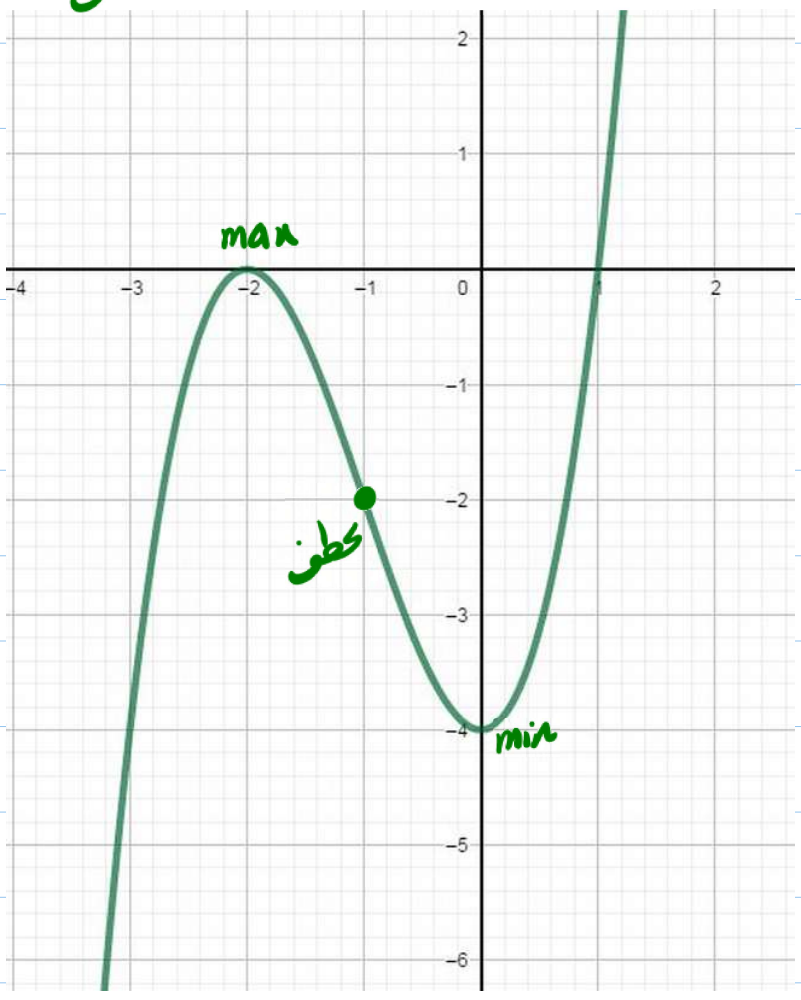
حل : $D=\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	0 (max)	↘	-4 (min)	↗	

$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		∩	-2 (نقطة عطف)	∪	



چند نکته درباره نمودار تابع درجه سوم :

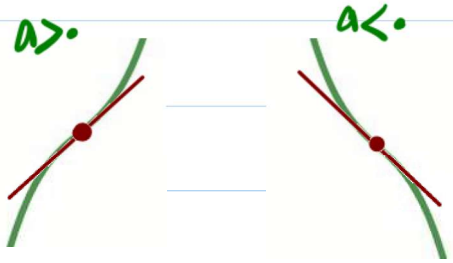
اگر ضابطه‌ی تابع درجه ۳ ، $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ باشد :

۱- اگر $a>0$ باشد ، نمودار از ناحیه‌ی سوم شروع و به ناحیه‌ی اول ختم می‌شود و اگر $a<0$ باشد نمودار از ناحیه‌ی دوم شروع و به ناحیه‌ی چهارم ختم می‌شود.

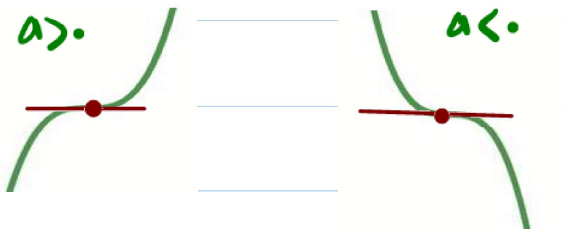
۲- مشتق اول تابع درجه سوم به صورت $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ است که یک تابع درجه دوم است. ریشه‌های مشتق به شرطی که f در آن‌ها تغییر علامت دهد نقاط extremum نسبی f هستند.

$$\Delta_{f'}=4b^2-4(3a)(c)=4(b^2-3ac)$$

الف) اگر $\Delta_{f'}>0$ باشد ، f فاقد extremum نسبی است.

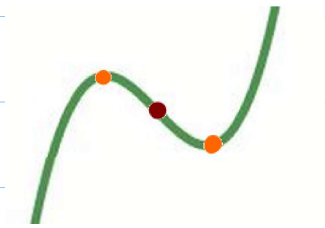


ب) اگر $\Delta_{f'}=0$ باشد ، f فاقد extremum نسبی است ولی در ریشه‌ی مشتق همانند تابع قبل رفتار می‌کند.

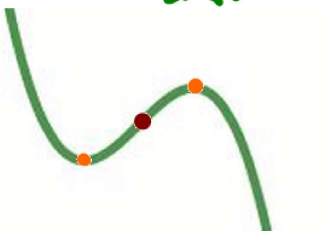


پ) اگر $f''(x_0)=0$ باشد، f دارای یک min نسبی و یک max نسبی است.

$a>0$



$a<0$



۳- مشتق دوم تابع درجه سوم به صورت $f''(x)=6ax+2b$ است. پس تابع همواره

یک نقطه عطف دارد: $6ax+2b=0 \rightarrow 6ax=-2b \rightarrow x=\frac{-2b}{6a}$

$$\Rightarrow x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}$$

۴- درحالتی که f ، $+ex+$ نسبی دارد، نقطه عطف وسط پاره خطی است که نقاط نسبی $ex+b$

را به هم وصل می‌کند.

مثال: اگر بعد میانگین مقادیر max, min نسبی تابع $f(x)=x^3-3x^2+x-m$ سهمی دو برابر

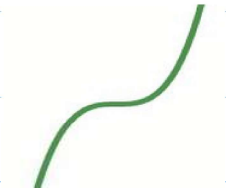
m را بیابید. $\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=y_{\text{عطف}} \Rightarrow \frac{2}{2}=y_{\text{عطف}} \Rightarrow y_{\text{عطف}}=1$

$x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}=-\frac{-3}{3\times 1}=1$ عطف $(1,1)$

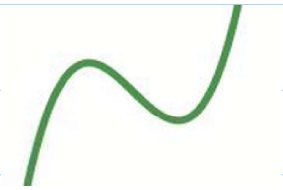
$(1,1)$ در تابع $\Rightarrow f(1)=1-3+1-m=1 \Rightarrow m=-2$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$ به کدام صورت است؟

۱)



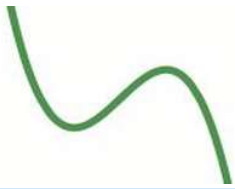
۲)



۳)



۴)



نمودار از ناحیه سوم شروع و به ناحیه اول ختم می‌شود: $a=\frac{1}{3}>0$

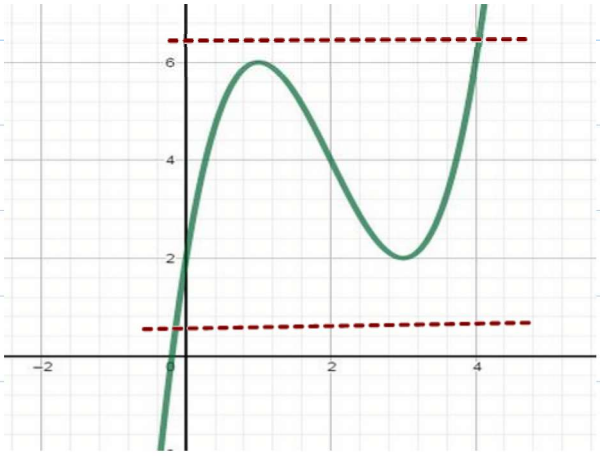
$f'(x)=x^2-2x+1$: $\Delta_{f'}=4-4(1)(1)=0$ نقطه‌ی بحرانی است و

در نقطه مماس افقی است. پس گزینه ۱ درست است.

مثال: با توجه به نمودار تابع $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ به ازای چه تعداد مقادیر از m، معادله $f(x)=m$ فقط یک ریشه حقیقی دارد؟

$f'(x)=3x^2-12x+9=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-4x+3=0 \rightarrow x=1,3$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	4	↘	3	↗	
			max		min		



$m<3$ یا $m>4$

مثال: منحنی تابع $f(x)=\frac{2x-1}{1-x}$ را رسم کنید. $\left(f(x)=\frac{2x-1}{-x+1}\right)$

$D=\mathbb{R}-\{1\}$

مجانب قائم: $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{1-x}=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{1-x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{1-x}=\frac{2}{-1}=-2 \Rightarrow y=-2$$ مجانب افقی

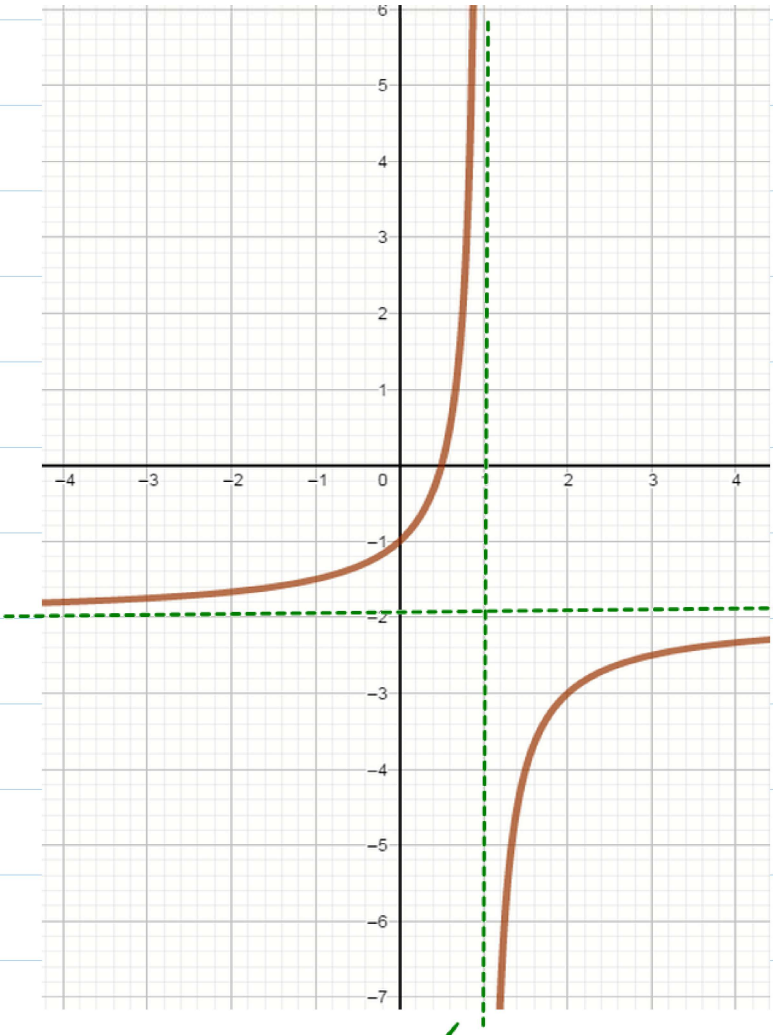
$$f'(x)=\frac{2(1)-(-1)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2-1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

نقطه بحرانی

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$			
f	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-4		-2

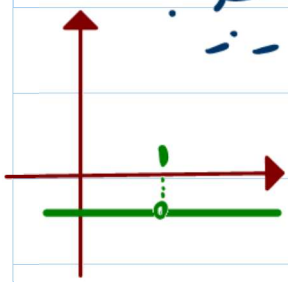
معادل برخورد با محور yها: $x=0 \rightarrow y=\frac{2\times 0-1}{1-0}=-1$

معادل برخورد با محور xها: $y=0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$



نکته: توابع به فرم کلی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را تابع هموگرافیک می‌گوییم، به شرطی که $c\neq 0$ باشد (اگر $c=0$ باشد تابع خطی می‌شود) و $ad-bc\neq 0$ باشد. اگر $ad-bc=0$ باشد تابع ثابت $y=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ می‌شود.

مثال: اگر نمودار تابع $y=\frac{ax+2}{2x+b}$ به صورت زیر باشد، a و b را بیابید.



نمودار تابع ثابت است پس: $ab-2(2)=0 \Rightarrow ab=4$

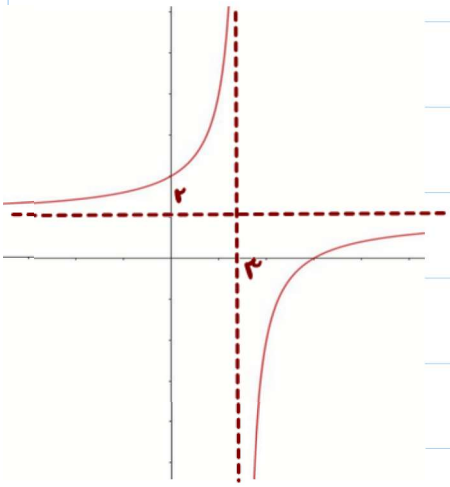
$x=1$ ریشه مخرج است پس $2\times1+b=0 \Rightarrow b=-2$

$a(-2)=4 \Rightarrow a=-2$

تذکر: تابع همگرا مثل فوق ext نیست و نقطه عطف است و دارای یک مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}$ و یک مجانب افقی $y=\frac{a}{c}$ است که نقطه تلاقی مجانب‌ها مرکز تقارن تابع است.

$(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+4}{bx+1}$ به صورت زیر است. a و b را بیابید.



$x=4$ مجانب قائم: پس $x=4$ ریشه مخرج:

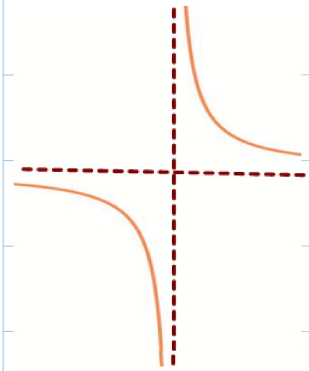
$4b+1=0 \rightarrow b=-\frac{1}{4}$

$y=2$ مجانب افقی:

$\frac{a}{b}=2 \rightarrow a=2b=2(-\frac{1}{4})=-\frac{2}{4}$

نکته: می دانیم مشتق تابع همواره یک تابع است به صورت $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ است. این تابع روی دامنه‌اش نیز یکنوا است و می‌تواند در دو طرف مجانب قائم با توجه به علامت $ad-bc$ یا اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

مثال: اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{mx+1}{x-2}$ به صورت زیر باشد، حدود m را بیابید.



$x=2$ مجانب قائم است، پس در بازه $(-\infty,2)$ و $(2,+\infty)$ تابع اکیداً نزولی است پس f' منفی است ($ad-bc<0$)

$$m(-2)-(1)(1)<0 \Rightarrow -2m-1<0$$

$$\Rightarrow -2m<1 \rightarrow m>-\frac{1}{2}$$


گروه ریاضی دوره دوم متوسطه استان همدان
@riazihmd1
ریاضی و تجربی
@riazihmd2
انسانی و فحک