حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل سوم: حد

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی-حد در بی‌نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت اول: یادآوری مفهوم حد و قضایای حد

جلسه اول

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

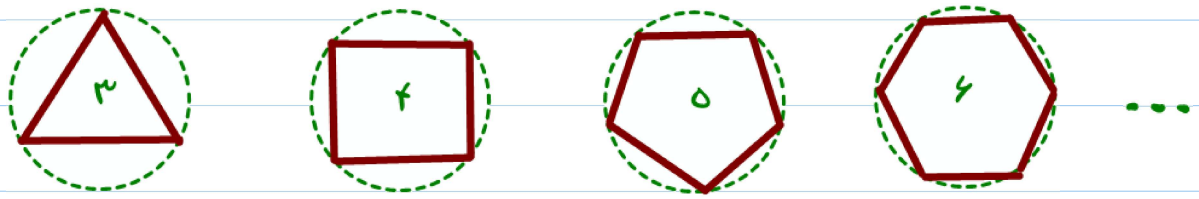
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

قبل از اینکه تعریف دقیق حد یک تابع را بگوئیم، لازم است با مفاهیم زیر آشنا شویم.

۱) فرایند حدی:

- در شکل‌های زیر در هر مرحله یک n ضلعی منتظم درون دایره قرار داریم. اگر n را زیاد کنیم مساحت n ضلعی به مساحت دایره نزدیک می‌شود.



پس می‌توانیم بگوئیم مساحت چند ضلعی‌های محاطی را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

- دنباله $\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ را در نظر بگیرید. اگر n عضو طبیعی را بزرگ و بزرگتر کنیم، مجدات دنباله کوچکتر شده و به صفر نزدیک می‌شود.

مثال‌های بالا نمونه‌ای از فرایندهای حدی هستند.

۲) میل کردن :

وقتی می گوییم x به a میل می کند یعنی x بسیار به عدد a نزدیک می شود ولی هرگز برابر خود a نمی شود و می نویسیم $x \to a$.



$x \to 3$: x ها از هر دو طرف به ۳ نزدیک شوند

وقتی می نویسیم $x \to a^+$ یعنی x از مقادیر بزرگتر از a، به a بسیار نزدیک می شود. در این حالت می گوییم x از سمت راست به a میل می کند.



$x \to 5^+$: x از مقادیر بزرگتر از ۵ به ۵ نزدیک شود

وقتی می نویسیم $x \to a^-$ یعنی x از مقادیر کوچکتر از a، به a بسیار نزدیک می شود. در این حالت می گوییم x از سمت چپ به a میل می کند.

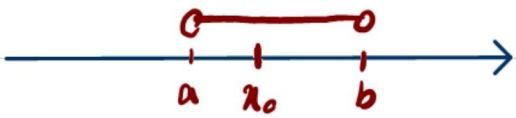


$x \to 4^-$: x از مقادیر کوچکتر از ۴ به ۴ نزدیک می شود

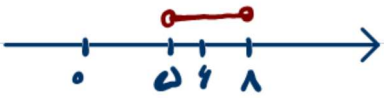
۳) همسایگی :

فرض کنید x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می گوییم.

(a,b) یک همسایگی x_0

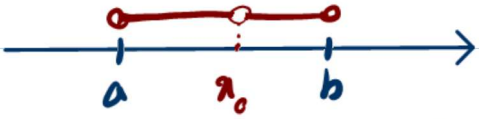


مثال: بازه $(5,8)$ یک همسایگی عدد ۶ است.



اگر عدد x_0 را از همسایگی (a,b) حذف کنیم یعنی $(a,b)-\{x_0\}$، به مجموعه بدست آمده

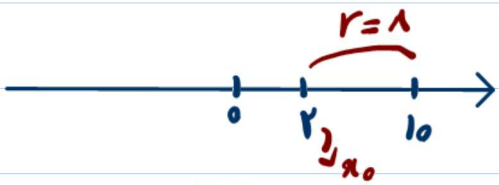
یک همسایگی محذوف x_0 می‌گوییم.



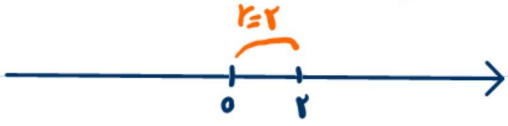
اگر $r>0$ باشد بازه باز (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست عدد x_0 و بازه باز

(x_0-r, x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌گوییم.

مثال: $(1, 10)$ یک همسایگی راست ۲



$(0,2)$ یک همسایگی چپ ۲



حال می‌توانیم تعریف حد را بیان کنیم.

تعریف حد تابع:

فرض کنید تابع $y=f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد (یعنی در حوزه a تعریف شود

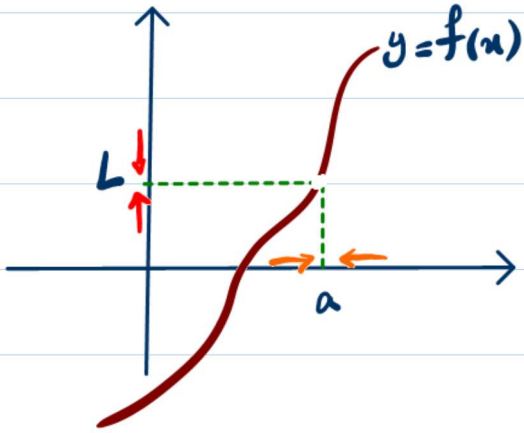
یا نشود فرقی ندارد.) می‌گوییم حد تابع f وقتی $x \to a$ برابر عدد L است هرگاه

با نزدیک شدن x به a مقادیر تابع f (همان yها) به L نزدیک شوند و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

تعریف بالا را به این صورت هم می‌توان گفت:

حد تابع f وقتی $x \to a$ برابر L است هرگاه مقادیر تابع f (همان yها) را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود.

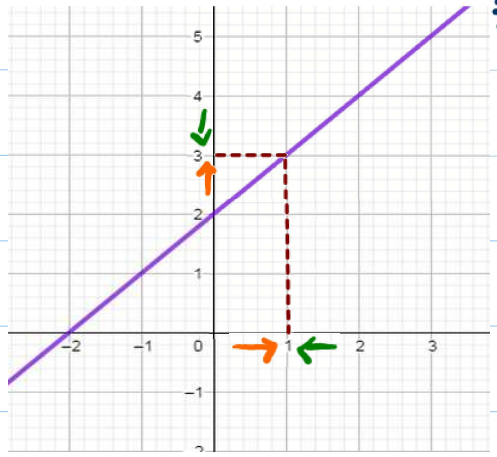


$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

مثال: تابع $f(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول و نمودار، حد تابع را وقتی $x \to 1$ بدست آورید.

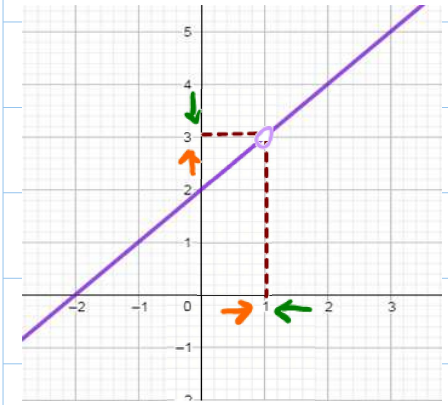
x	0	$0/5$	$0/9$	$0/99$	$\rightarrow 1 \leftarrow$	$1/01$	$1/1$	$1/5$	2
$y=x+2$	2	$2/5$	$2/9$	$2/99$	$\rightarrow 3 \leftarrow$	$3/01$	$3/1$	$3/5$	4

$$\lim_{x \to 1} (x+2) = 3$$

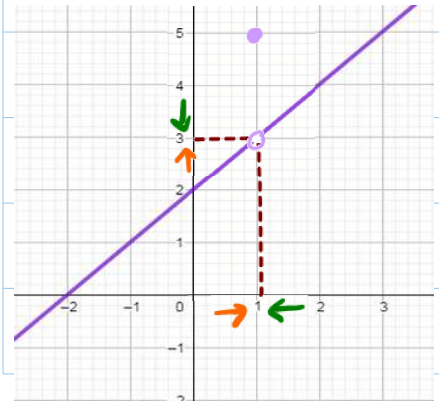


$f(x) = x+2$

در دو حالت زیر هم حد تابع در $x=1$ برابر 3 است.



$$g(x) = x+2 \quad , \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$



$$h(x) = \begin{cases} x+2 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

تعریف حد راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد می‌گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر L_1 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_1 نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به a نزدیک شود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$

تعریف حد چپ :

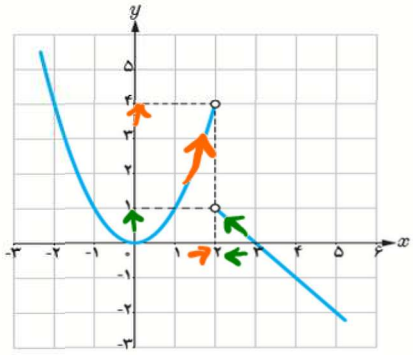
اگر تابع f در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر L_2 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_2 نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به a نزدیک شود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

نکته: حد تابع f در $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد راست و چپ تابع در $x=a$ موجود و برابر باشند یعنی:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -x+3 & x>2 \\ x^2 & x<2 \end{cases}$ به صورت روبه‌رو است:

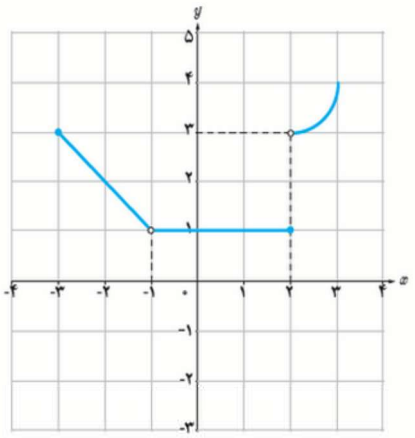


آیا تابع f در نقطهٔ $x=2$ حد دارد؟

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$

تابع در $x=2$ حد ندارد زیرا $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$

مثال: با توجه به نمودار f، حدهای خواسته‌شده را، در صورت وجود، به‌دست آورید.



$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ $\quad$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to 2} f(x)$ = وجود ندارد

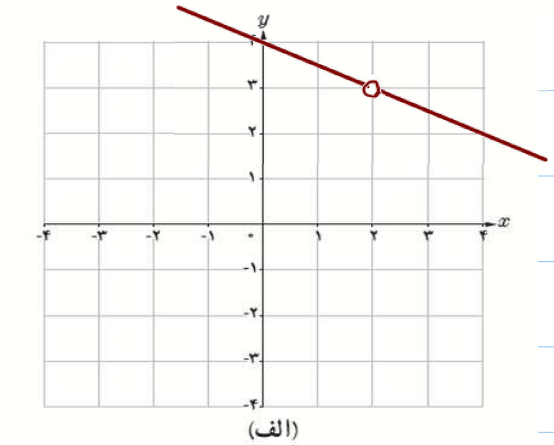
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to -1} f(x) = 1$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = 3$ $\quad$ $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ = وجود ندارد $\quad$ $\lim_{x\to -3} f(x)$ = وجود ندارد

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

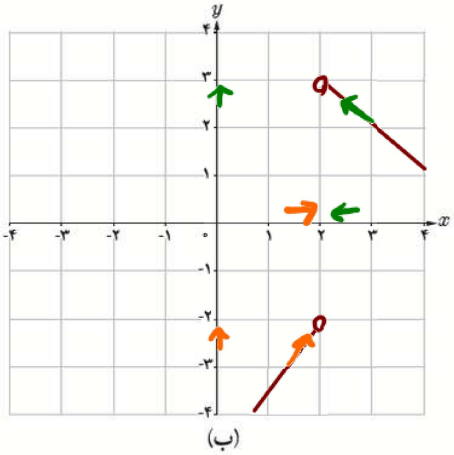
مثال: نموداری از یک تابع رسم کنید که :

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.


(الف)

$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

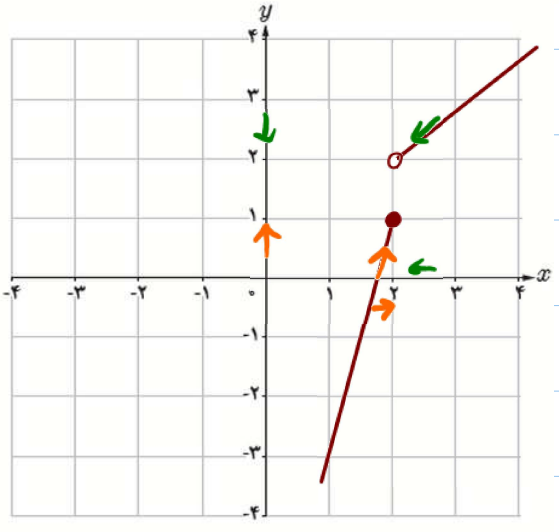

(ب)

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -2$

در $x=2$ حد ندارد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.

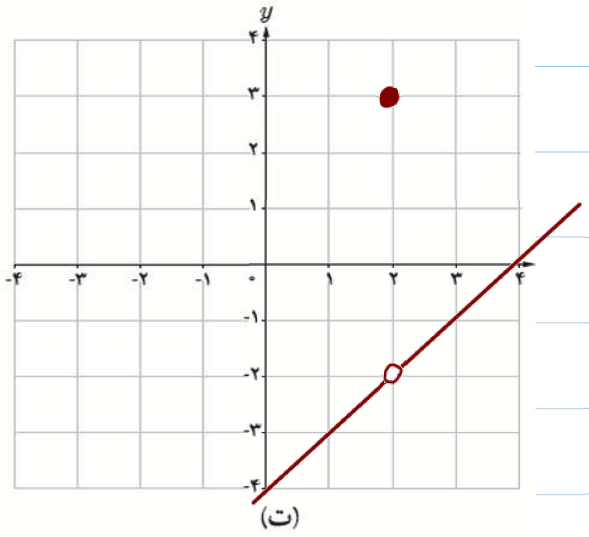

(پ)

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$

در $x=2$ حد ندارد.

ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



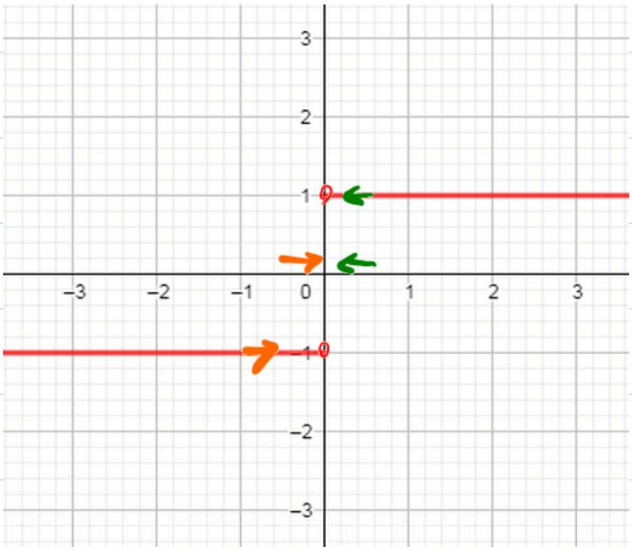
$$\lim_{x \to 2} f(x) = -2$$

$$f(2) = 4$$

مثال: حدهای زیر را با استفاده از رسم نمودار محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ \frac{-x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

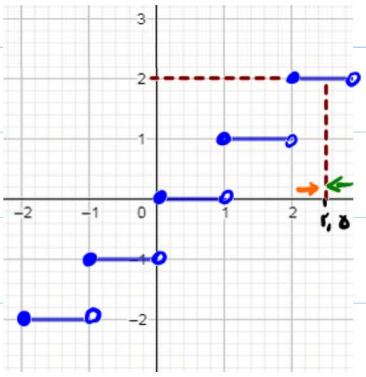


$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

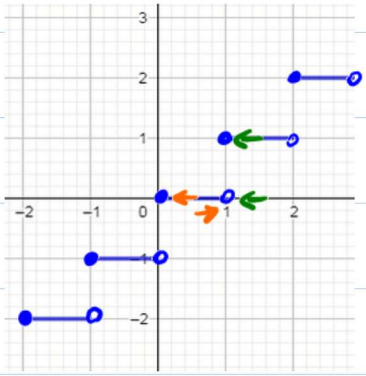
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

تابع در $x=0$ حد ندارد.

ب) $\lim_{x \to \frac{3}{2}} [x] = 2$



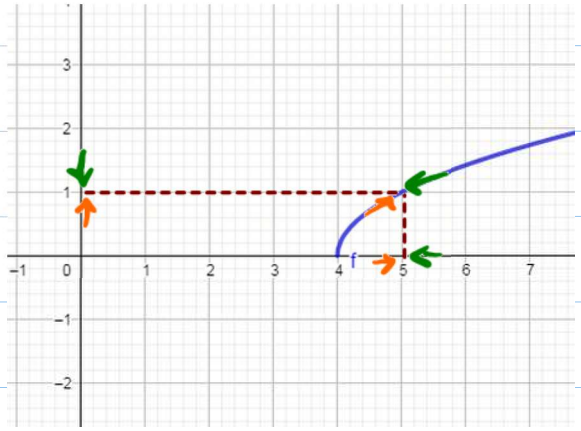
پ) $\lim_{x \to 1} [x]$ = حد ندارد



$\lim_{x \to 1^+} [x] = 1$

$\lim_{x \to 1^-} [x] = 0$

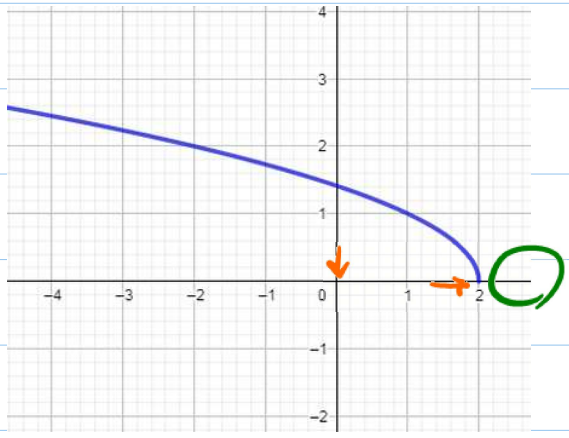
ت) $\lim_{x \to 5} \sqrt{x-4} = 1$



ث) $\lim_{x \to 2} \sqrt{2-x}$ = حد ندارد

تابع در همسایگی راست ۲ تعریف نشده است پس:

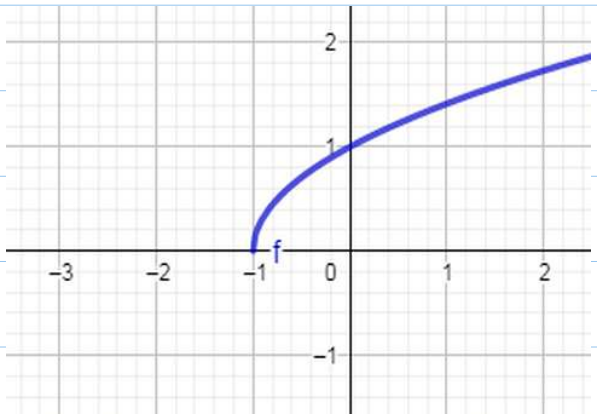
$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{2-x}$ = موجود نیست



$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{2-x} = 0$

ج) $\lim_{x \to -3} \sqrt{x+1}$ = حد ندارد

زیرا تابع در همسایگی ۳- تعریف نشده است.

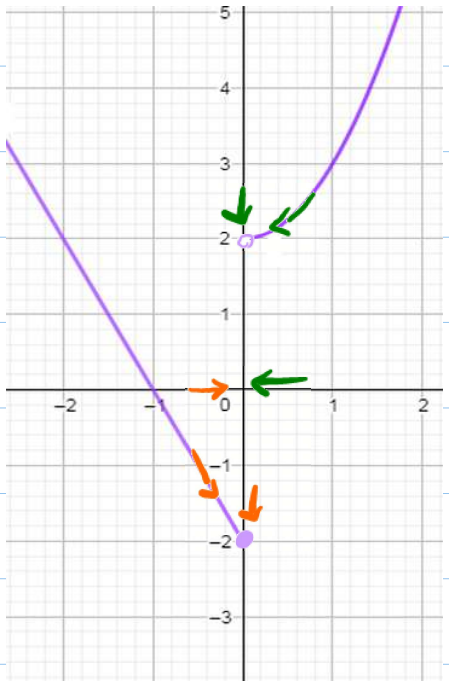


مثال: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ -2x-2 & x\le 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را ــ در صورت وجود ــ بیابید.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$

تابع در $x=0$ حد ندارد.



برای محاسبه حد توابع از قضیه‌های زیر کمک می‌گیریم :

قضیه ۱) حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a، همان مقدار ثابت c است یعنی :

$$\lim_{x\to a} c = c$$

مثال $\lim_{x\to 2} 3 = 3$

قضیه ۲) حد تابع همانی $f(x)=x$ در هر عدد دلخواه a، برابر a می‌شود یعنی :

$$\lim_{x\to a} x = a$$

مثال $\lim_{x\to 10} x = 10$

قضیه ۳) فرض کنید توابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

آنگاه

الف) مجموع و تفاضل و حاصل ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارند و

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = L_1 \pm L_2$$

ب) اگر $L_2 \neq 0$ باشد، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۴) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $c\in\mathbb{R}$ باشد آنگاه

الف) $\lim_{x\to a}(cf(x)) = cL$

مثال $\lim_{x\to 4} 3x = 3\times 4 = 12$

ب) $\lim_{x\to a}(f(x))^n = L^n$

مثال $\lim_{x\to 2}(x)^3 = 2^3 = 8$

قضیه ۵) اگر $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد حد تابع در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر است:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

قضیه ۶) اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to a} f(x)=L$:

الف) اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

ب) $\lim_{x\to a}|f(x)| = |L|$

پ) $\lim_{x\to a}\sin(f(x)) = \sin L$ ، $\lim_{x\to a}\cos(f(x)) = \cos L$

نتیجه: اگر تابع f در همسایگی a تعریف شده باشد و با جایگذاری a به جای x در تابع به یک عدد مشخص برسیم، مقدار حد همین عدد خواهد شد، جز موارد خاصی که به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

مثال: اگر $\lim_{x\to ۲} f(x) = ۲$ و $\lim_{x\to ۲} g(x) = ۱$ ، آنگاه حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید :

۱) $\lim_{x\to ۲}(۷g(x) - \frac{۱}{۲}f(x))$ $= ۷\times ۱ - \frac{۱}{۲}\times ۲ = ۷ - ۱ = ۶$

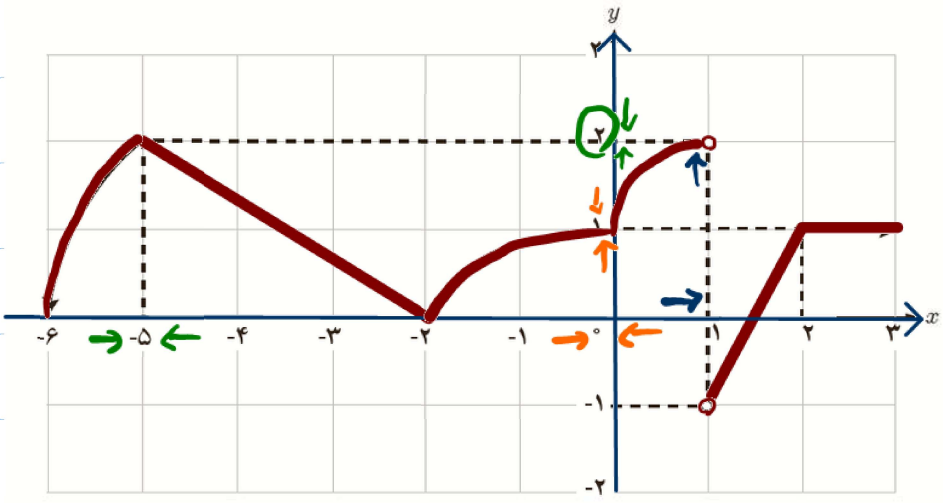
۲) $\lim_{x\to ۲}\frac{(۱+f(x))g(x)}{g(x)+۲}$ $= \frac{(\lim_{x\to ۲} ۱ + \lim_{x\to ۲} f(x))\lim_{x\to ۲} g(x)}{\lim_{x\to ۲} g(x) + \lim_{x\to ۲} ۲}$

$= \frac{(۱+۲)\times ۱}{۱+۲} = \frac{۳}{۳} = ۱$

۳) $\lim_{x\to ۲}(g(x) + \frac{۲}{f(x)})^{۳}$ $= (۱ + \frac{۲}{۲})^{۳} = (۱+۱)^{۳} = ۲^{۳} = ۸$

۴) $\lim_{x\to ۲}(\sqrt{۵x-۱} + \frac{f(x)}{g(x)})$ $= \sqrt{۵\times ۲ - ۱} + \frac{۲}{۱} = \sqrt{۹} + ۲ = ۳ + ۲ = ۵$

مثال: نمودار تابع f داده شده است. حاصل حدهای زیر را درصورت وجود بیابید :



۱) $\lim_{x\to -۵} (\frac{x}{۵}-۱)^۲ \times f(x)$ $= (-\frac{۵}{۵}-۱)^۲ \lim_{x\to -۵} f(x) = (-۲)^۲ \times ۲ = ۴\times ۲ = ۸$

۲) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۴-x}}{x^۲+f(x)}$ $= \frac{\sqrt{۴-۰}}{۰^۲+\lim_{x\to ۰} f(x)} = \frac{۲}{۰+۱} = \frac{۲}{۱} = ۲$

۳) $\lim_{x\to ۱^-} (x^۲+x-(f(x))^۲)$ $= ۱^۲+۱-(\lim_{x\to ۱^-} f(x))^۲ = ۱+۱-(۲)^۲$

$= ۲-۴ = -۲$

مثال: حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

۱) $\lim_{x\to -۱} (۲x^۴-x^۳-۵x^۲+۴)$ $= ۲(-۱)^۴-(-۱)^۳-۵(-۱)^۲+۴$

$= ۲-(-۱)-۵+۴ = ۲+۱-۵+۴ = ۲$

۲) $\lim_{x\to ۴} (۱+\frac{x}{۲})^۲ (x^۲-۶x)$ $= (۱+\frac{۴}{۲})^۲ (۴^۲-۶\times ۴) = ۳^۲ (۱۶-۲۴)$

$= ۹(-۸) = -۷۲$

۳) $\lim_{x\to ۱۰} (۵x^۳-۶|x|+۱)$ $= ۵(۱۰)^۳-۶\times ۱۰+۱ = ۵۰۰۰-۶۰+۱ = ۴۹۴۱$

۴) $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۸x^{۳}+۴x^{۲}+۲x}{۴x+۱} = \frac{۸(\frac{۱}{۲})^{۳}+۴(\frac{۱}{۲})^{۲}+۲\times\frac{۱}{۲}}{۴\times\frac{۱}{۲}+۱} = \frac{۸\times\frac{۱}{۸}+۴\times\frac{۱}{۴}+۱}{۲+۱}$

$= \frac{۱+۱+۱}{۳} = \frac{۳}{۳} = ۱$

۵) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\sin x}{۱-\cos x} = \frac{۱+\sin\frac{\pi}{۲}}{۱-\cos\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱+۱}{۱-۰} = \frac{۲}{۱} = ۲$

۶) $\lim_{x\to\frac{-\pi}{۶}} (۴\sin x+\cos^{۲} x) = ۴\sin(-\frac{\pi}{۶})+\cos^{۲}(-\frac{\pi}{۶})$

$= -۴\sin\frac{\pi}{۶}+\cos^{۲}\frac{\pi}{۶} = -۴\times\frac{۱}{۲}+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}$

$= -۲+\frac{۳}{۴} = \frac{-۸+۳}{۴} = \frac{-۵}{۴}$

۷) $\lim_{x\to۵} \sqrt{۵x-۹} = \sqrt{۵\times۵-۹} = \sqrt{۲۵-۹} = \sqrt{۱۶} = ۴$

۸) $\lim_{x\to-\pi} \frac{\pi\cos x}{x} = \frac{\pi\cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{\pi\cos\pi}{-\pi} = \frac{\pi\times(-۱)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = ۱$

موارد خاص :

۱) توابع چندضابطه‌ای : اگر حد تابع در نقاطی که ضابطه تابع تغییر می‌کند (نقاط مرزی) خواسته شده باشد باید حد چپ و حد راست از ضابطه‌های مربوط به آن محاسبه شوند.

مثال: حد تابع f را در نقطهٔ a (درصورت وجود) بیابید

۱) $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x>۰ \\ x-۲ & x<۰ \end{cases}$, $a=۰$

$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} x^{۲} = ۰^{۲} = ۰$

$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (x-۲) = ۰-۲=-۲$

$-۲\neq ۰$ پس تابع در $x=۰$ حد ندارد

۲) $f(x)=\begin{cases} ۵ & x<۳ \\ x+۲ & x>۳ \end{cases}$, $a=۳$

$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} (x+۲) = ۳+۲=۵$

$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim ۵ = ۵$

$۵=۵$ پس تابع در $x=۳$ حد دارد و

$\lim_{x\to ۳} f(x) = ۵$

۳) $f(x)=\begin{cases}۳-x & x<۲\\ -۱ & x=۲\\ x^۲-۴ & x>۲\end{cases}$, $a=۲$

$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+}(x^۲-۴) = ۲^۲-۴ = ۴-۴=۰$

$۰\neq ۱$ پس تابع در $x=۲$ حد ندارد.

$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-}(۳-x) = ۳-۲=۱$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}(a+۱)x+۳ & x>-۲\\ -۲x^۲+۱ & x<-۲\end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ حد داشته باشد.

$\lim_{x\to -۲^+} f(x) = \lim_{x\to -۲^+}(a+۱)x+۳ = (a+۱)(-۲)+۳ = -۲a-۲+۳ = -۲a+۱$

$\lim_{x\to -۲^-} f(x) = \lim_{x\to -۲^-} -۲x^۲+۱ = (-۲)(-۲)^۲+۱ = -۸+۱ = -۷$

$\lim_{x\to -۲^+} f(x) = \lim_{x\to -۲^-} f(x) \Rightarrow -۲a+۱=-۷ \to -۲a=-۸ \Rightarrow a=۴$

۲) حد توابع شامل رادیکال با فرجه زوج :

در این توابع باید بررسی شود عبارت رادیکالی در همسایگی نقطه a تعریف شده است یا خیر.

اگر تعریف نشود مقدار تابع حد تابع خواهد بود اگر نه حد موجود نیست.

در این توابع هم برای نقاطی که ریشه داخل رادیکال هستند حد چپ و راست را می یابیم.

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x \to -۲} \sqrt{۲x+۴}$

x	$\to -۲ \leftarrow$
$۲x+۴$	$- \quad 0 \quad +$

تابع در همسایگی چپ ۲- تعریف نمی شود

$\lim_{x \to -۲^+} \sqrt{۲x+۴} = \sqrt{۲(-۲)+۴} = \sqrt{۰} = ۰$

$\lim_{x \to -۲^-} \sqrt{۲x+۴}$ = حد ندارد

پس این حد موجود نیست.

۲) $\lim_{x \to ۰} \sqrt{x^۲+۳x}$

x	$-۳ \to ۰ \leftarrow$
$x^۲+۳x$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

$\lim_{x \to ۰^+} \sqrt{x^۲+۳x} = ۰$

$\lim_{x \to ۰^-} \sqrt{x^۲+۳x}$ = حد ندارد

پس این حد موجود نیست.

۳) $\lim_{x \to 5} \sqrt{۳-x}$

$D: ۳-x \geq ۰ \Rightarrow -x \geq -۳ \Rightarrow x \leq ۳$

$D = (-\infty, ۳]$

تابع در همسایگی کرد ۵ تعریف نمی‌شود پس در این نقطه حد ندارد.

۳) حد توابع شامل جزء صحیح :

می‌دانیم اگر $x \to a^+$ یعنی $x > a$ و اگر $x \to a^-$ یعنی $x < a$ است. در محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح از این نکته استفاده کرده عبارت داخل جزء صحیح را می‌سازیم و مقدار عبارت جزء صحیح را در همسایگی a محاسبه می‌کنیم تا ببینیم با کدام تابع ثابت برابر می‌شود. پس با جای‌گذاری این مقدار در تابع، حد را بدست می‌آوریم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \to ۰} (x+۳)[x]$

$\lim_{x \to ۰^+} (x+۳)[x] = (۰+۳) \times ۰ = ۰$

$\lim_{x \to 0^-} (x+3)[x] = (0+3) \times (-1) = -3$

$-3 \neq 0$ این حد موجود نیست

۲) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + 3x}{[x]+1} = \frac{2^2 + 3 \times 2}{[2^-]+1} = \frac{10}{1+1} = \frac{10}{2} = 5$

$1 < x < 2 \leftarrow$

۳) $\lim_{x \to 1^-} [-2x]$: $x < 1 \xrightarrow{\times(-2)} -2x > -2$

در نتیجه عبارت $-2x$ بزرگتر از -2 و نزدیک آن است پس $-2 < -2x < -2$

$\lim_{x \to 1^-} [-2x] = -2$

با جدولگذاری هم به همین نتیجه می‌رسیم.

۴) $\lim_{x \to 3} x + [\frac{x}{3}]$

$x \to 3^+ : x > 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{x}{3} > 1$ پس $\frac{x}{3}$ بزرگتر از یک و نزدیک آن است.

$1 < \frac{x}{3} < 2 \rightarrow \lim_{x \to 3^+} x + [\frac{x}{3}] = 3 + 1 = 4$

پس x کوچکتر از ۳ و نزدیک آن است: $x \to 3^- : x < 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{x}{3} < 1$

$0 < \frac{x}{3} < 1 \to \lim_{x \to 3^-} x + [\frac{x}{3}] = 3 + 0 = 3$

$3 \neq 3$ پس این حد موجود نیست.

۵) $\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \frac{\sqrt{2-2}}{[2^+]+2} = \frac{0}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$

۶) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} x[x] = \frac{1}{2} \times 0 = 0$

$0 < x < 1$

۷) $\lim_{x \to \frac{5}{2}} 2[x] = 2 \times 2 = 4$

$2 < x < 3$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی-حد در بی‌نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت دوم: رفع ابهام صفرصفرم

جلسه دوم

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

اگر محاسبه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ خواسته شده باشد و بعد از قرار دادن a به جای x، صورت و مخرج هر دو صفر شوند با توجه به نوع صفر ۲ حالت خواهیم داشت.

صفرها دو دسته اند: ۱ـ صفر مطلق (خود صفر) ۲ـ صفر نسبی یا حدی ($0^{\pm}$)

(نزدیک صفر)

نوع اول: $\frac{0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

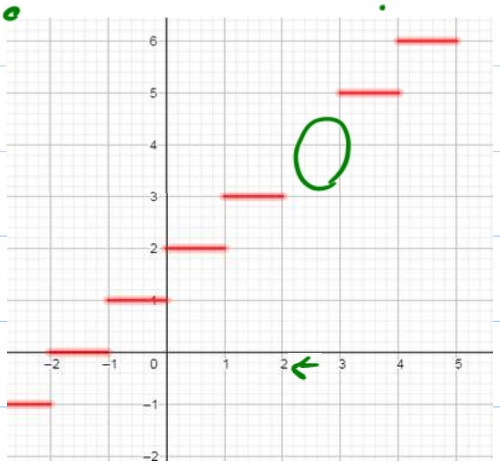
نوع دوم: $\frac{0^{\pm}}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

نوع سوم: $\frac{0}{0^{\pm}}$ صورت صفر مطلق و مخرج غیر صفر (صفر حدی) پس حد کسر صفر می‌شود.

نوع چهارم: $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$ به این حالت، حالت مبهم می‌گوییم و باید رفع ابهام شود.

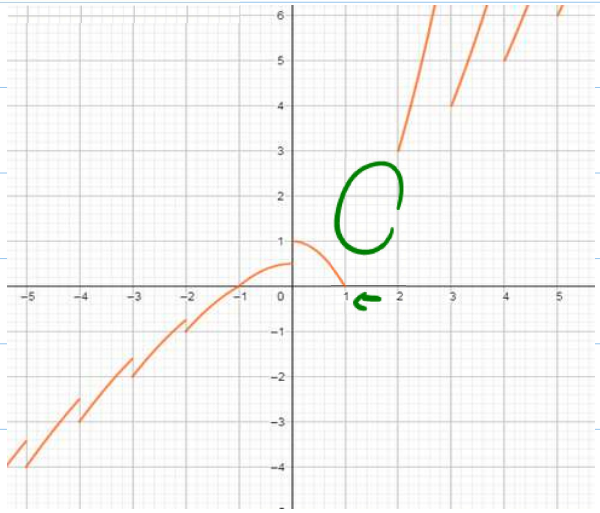
مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 2^+}\frac{[x]^2-4}{[x]-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$ حد وجود ندارد

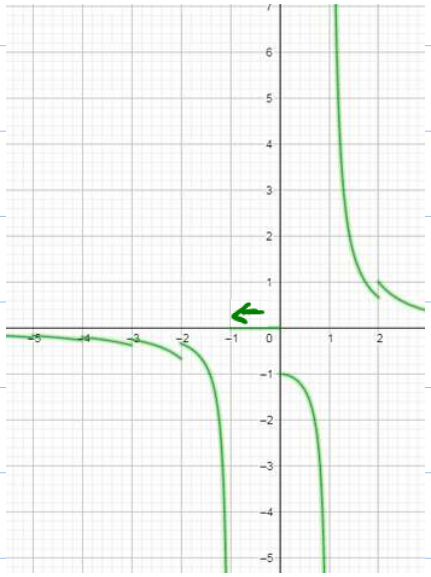


حد موجود نیست

ب) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{[x]-1} = \frac{1^+-1}{1-1} = \frac{0^+}{0}$ مطلق



ب) $\lim_{x \to -1^+} \frac{[x]+1}{x^2-1} = \frac{-1+1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$



مثال: کنکور تجربی ۹۹

حاصل $\lim_{x \to -2^-} \frac{[x]+3}{x+2}$، کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ✓ ۳) صفر ۴) ۱

گزینه ۲

$\frac{-2+3}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

چون $x \to a$ صورت و مخرج هردو صفر شده اند پس هم صورت و هم مخرج عامل $(x-a)$ را دارا هستند. به $(x-a)$ عامل ابهام یا صفرکننده می‌گوییم.

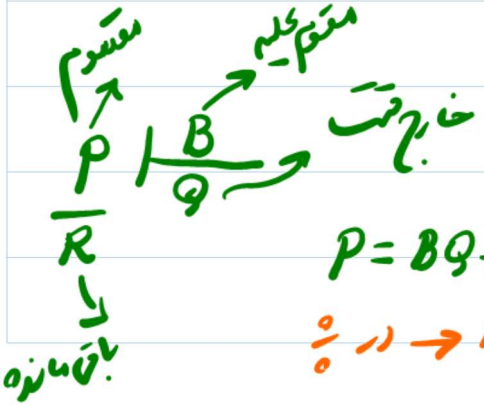
الف) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ وقتی صورت و مخرج هردو چندجمله‌ای باشند.

با استفاده از روش های تجزیه (فاکتورگیری و ریشه‌ها) عامل ابهام را در صورت و مخرج ایجاد و با یکدیگر حذف می‌کنیم تا حد قابل محاسبه باشد.

تبصره: هرگاه نتوانیم با ریشه‌ها یا فاکتورگیری عامل ابهام را ایجاد کنیم، چاره‌ای جز تقسیم آن عبارت بر عامل ابهام نداریم. در این صورت به جای آن عبارت حاصل ضرب $(x-a)$ (در خارج قسمت) در مقسوم‌علیه را می‌نویسیم.

یادآوری

۱) رابطه تقسیم:



$$P = BQ + R$$

عامل ابهام

در $\frac{0}{0}$ $\to$ $R=0$ $\to$ $P=BQ$

۲) تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای :

روش اول :

$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2 \qquad \frac{-x^2}{x} = -x \qquad \frac{x}{x} = 1$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 + 1 & x+1 \\ \hline -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 + 1 & \\ -(-x^2 - x) & \\ \hline x + 1 & \\ -(x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

روش دوم (روش هورنر) : برای تقسیم درجه n بر درجه یک

ریشه مقسوم علیه $\rightarrow -1$

ضرائب مقسوم	۱	۰	۱	۲
	$1+1\times 1 = 0$	$-1(-1)+0 = 1$	$-1\times 2+1 = -1$	۲

باقی مانده ↑

خارج قسمت : $2x^2 - 1x + 1 \longrightarrow 2x^2 - x + 1$

مثال: حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to -۳} \frac{x^۲-۹}{x^۲+۳x} = \frac{۰}{۰}$ صورت را تجزیه می‌کنیم: $(x-(-۳))(x+۳)$

$$\lim_{x\to -۳} \frac{(x-۳)(x+۳)}{x(x+۳)} = \lim_{x\to -۳} \frac{x-۳}{x} = \frac{-۳-۳}{-۳} = \frac{-۶}{-۳} = ۲$$

۲) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{x^۲+۵x-۶} = \frac{۰}{۰}$ صورت را تجزیه می‌کنیم $(x-۱)$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x+۶)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x+۱}{x+۶} = \frac{۱+۱}{۱+۶} = \frac{۲}{۷}$$

۳) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۸x^۳-۱}{۶x^۲-۵x+۱} = \frac{۰}{۰}$ صورت را تجزیه می‌کنیم $(x-\frac{۱}{۲})$

$$۸x^۳-۱ = ۸(x^۳-\frac{۱}{۸}) = ۸(x-\frac{۱}{۲})(x^۲+\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴})$$

روش هورنر

	۶	۵-	۱
$\frac{۱}{۲}$	۶	$\frac{۱}{۲}\times ۶ - ۵ = -۲$	$\frac{۱}{۲}\times(-۲)+۱ = ۰$ ← باقی‌مانده

خارج قسمت: $۶x-۲$

$$۶x^۲-۵x+۱ = (x-\frac{۱}{۲})(۶x-۲)$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8(x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{(x-\frac{1}{2})(2x-2)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{2(2x-1)}$$

$$= 4\,\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{2-1} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

۴) $\lim_{x\to -4} \frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4} = \frac{0}{0}$ صورت کسر $(x+4)$ عامل

$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$

روش هورنر ۴-

	۱	۴	۱	۴
۱		$-4\times 1+4=0$	$-4\times 0+1=1$	$-4\times 1+4=0$

باقی مانده

صورت $x^2+1 = x^2+0x+1$

$x^3+4x^2+x+4 = (x+4)(x^2+1)$

$$\lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x^2+1)} = \lim_{x\to -4} \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{-4-1}{16+1} = \frac{-5}{17}$$

o) $\lim_{x \to -2} \frac{|x^2-4|}{x+2} = \frac{0}{0}$

x	$\to -2 \leftarrow$	2
x^2-4	$+ \quad 0 \quad -$	$0 \quad +$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{-(x^2-4)}{x+2} = \lim_{x \to -2^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = -(-2-2) = 4$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -2-2 = -4$$

چون حدهای یک‌طرفه برابر نیستند $x=-2$ حد ندارد.

ب) رفع ابهام: وقتی صورت یا مخرج و یا هر دو شامل عبارات رادیکالی هستند:

در این حالت از مفهوم گویا کردن و اتحادهای مزدوج یا چاق و لاغر استفاده می‌کنیم. به این صورت که با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارت رادیکالی (برای فرجه‌های ۲) یا عبارت چاق عبارت رادیکالی (برای فرجه‌های ۳)، عامل ابهام را ایجاد می‌کنیم.

مثال: حدود زیر را بیابید

۱) $\lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{x^۲-۴} = \frac{۰}{۰}$ ابهام عامل $(x-۲)$

مزدوج

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{x^۲-۴} \times \frac{x+\sqrt{۳x-۲}}{x+\sqrt{۳x-۲}} = \lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-(۳x-۲)}{(x-۲)(x+۲)(x+\sqrt{۳x-۲})}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۳x+۲}{(x-۲)(x+۲)(x+\sqrt{۳x-۲})} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)(x+۲)(x+\sqrt{۳x-۲})}$$

$$= \frac{۲-۱}{(۲+۲)(۲+\sqrt{۶-۲})} = \frac{۱}{۴(۴)} = \frac{۱}{۱۶}$$

۲) $\lim_{x\to 4} \frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} = \frac{0}{0}$ عامل ابهام: $(x-4)$

روش هورنر برای صورت

	3	-10	-8
4	3	$4\times 3-10=2$	$8-8=0$

خارج قسمت: $3x+2$ — باقی‌مانده

$3x^2-10x-8=(x-4)(3x+2)$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} \times \frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{3-\sqrt{x}-1}$$

مزدوج

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{2-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{-(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{4}+2)(12+2)(\sqrt{3-\sqrt{4}}+1)}{-1} = -112$$

۳) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2} = \frac{0}{0}$ عامل ابهام : x

مزدوج صورت

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2} \times \frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}+1} \times \frac{\sqrt{3x+4}+2}{\sqrt{3x+4}+2}$$

مزدوج مخرج

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(2x+1-1)(\sqrt{3x+4}+2)}{(3x+4-4)(\sqrt{2x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(\sqrt{3x+4}+2)}{3x(\sqrt{2x+1}+1)}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2+2}{1+1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

۴) $\lim_{x\to 2^-} \frac{|2x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ عامل ابهام $(x-2)$

x	-1		2
$2x^2-x-2$	$+$	0 $-$	0 $+$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x^2-x-2)}{2x-\sqrt{x^2+12}} \times \frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{2x+\sqrt{x^2+12}}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{4x^2-(x^2+12)}$$

$-x^2-12$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{\underbrace{3x^2-12}_{3(x^2-4)}}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x-2)(x+2)} = \frac{-(2+1)(4+4)}{3(2+2)} = \frac{-3\times 8}{3\times 4}$$

$$= -2$$

یادآوری اتحاد چاق و لاغر :

چاق — لاغر

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

نحوه ساختن عبارت چاق از روی عبارت لاغر :

۱ـ جمله اول چاق : برابر (توان دوم) جمله اول لاغر

۲ـ جمله دوم چاق : حاصل ضرب جمله اول در دوم لاغر با علامت قرینه

۳ـ جمله سوم چاق : برابر جمله دوم لاغر

مثال: کنکور تجربی ۹۸

- حدّ عبارت $\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x \to -8$، کدام است؟

۱) -24 ۲) -18 ۳) -12 ۴) -6

عامل اول $(x+8)$

$$\lim_{x\to -8} \frac{(x+8)(x+2)}{6(2+\sqrt[3]{x})} \times \frac{(4-2\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(4-2\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

6 ← $\sqrt[3]{x}+2$ ، $(x+8)$ ← $x+8$

$$= \lim_{x\to -8} \frac{(x+8)(x+2)(4-2\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{6(8+x)}$$

2^3 ، $(\sqrt[4]{x})^4$

$$= \frac{(-8+2)(4-2\sqrt[4]{-8}+\sqrt[3]{64})}{6} = \frac{-6(4-2(-2)+4)}{6}$$

$$= -1 \times 12 = -12$$

گزینه ۳

مثال: کنکور ریاضی ۹۹

حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$ ، کدام است؟

۱) $-1/5$ ۲) $-1/2$ ۳) $-0/8$ ۴) $-0/6$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}=\frac{0}{0}$$ حالت ابهام $(x-1)$

مزدوج صورت

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}\times\frac{2x+5+7\sqrt{x}}{2x+5+7\sqrt{x}}\times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{2x+\sqrt{3x+1}}$$

مزدوج مخرج

$$=\lim_{x\to 1}\frac{((2x+5)^2-49x)(2x+\sqrt{3x+1})}{(4x^2-(3x+1))(2x+5+7\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(4x^2+20x+25-49x)(2x+\sqrt{3x+1})}{(4x^2-3x-1)(2x+5+7\sqrt{x})}$$

$x=1$ و $\frac{25}{4}$ ریشه

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(4x^2-29x+25)(2x+\sqrt{3x+1})}{(4x^2-3x-1)(2x+5+7\sqrt{x})}$$

$x=1$ و $-\frac{1}{4}$ ریشه

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(4x-25)(12x+\sqrt{x^3+1})}{(x-1)(4x+1)(12x+5+7\sqrt{x})}$$

$$= \frac{(4-25)(12+2)}{(4+1)(12+5+7)} = \frac{-21\times 4}{5\times 14} = \frac{-3\times 2}{5} = -\frac{6}{5} = -1,2$$

گزینه ۲

گاهی اوقات حد به صورت $\frac{0}{0}$ یا مبهم یا هر دو توابع مثلثاتی باشند:

با استفاده از روابط مثلثاتی حل ابهام را ایجاد می‌کنیم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} = \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

۲) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = 2\cos 0 = 2 \times 1 = 2$

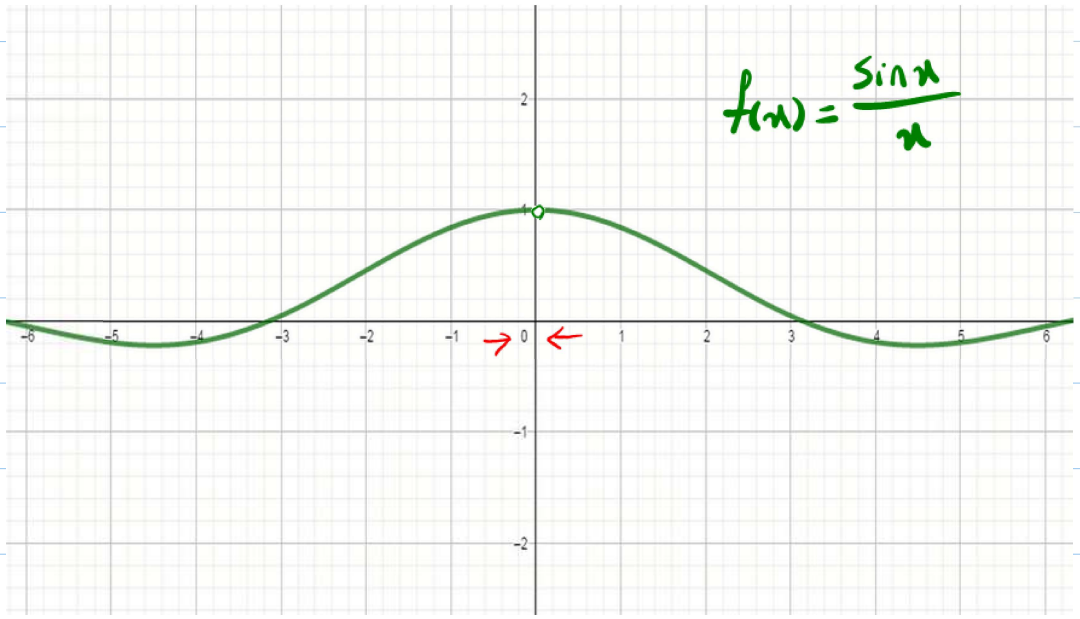
۳) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$

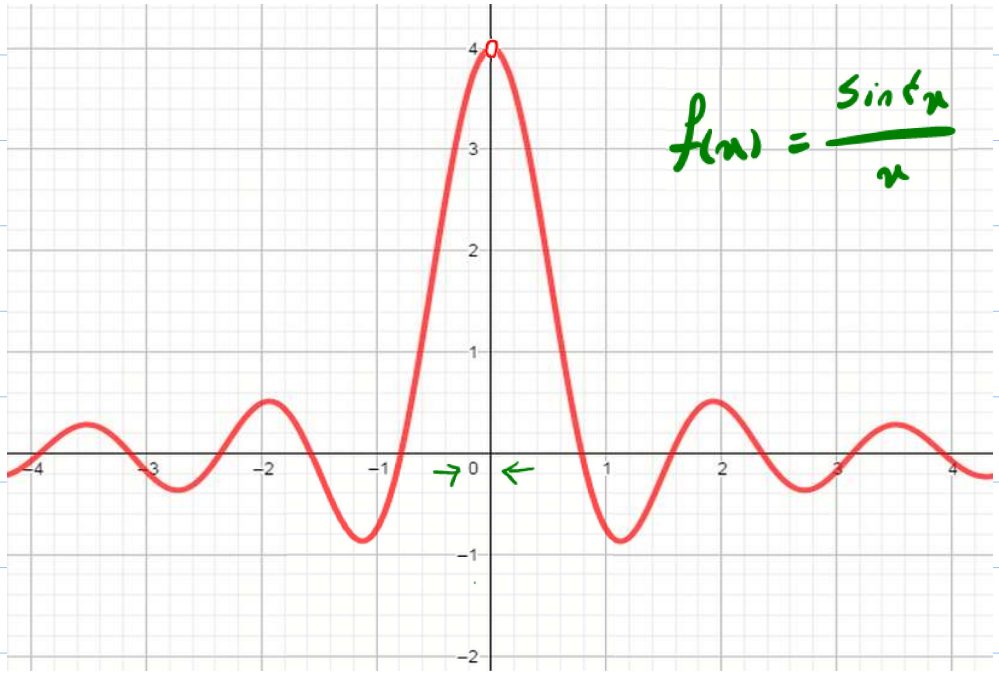
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow$ بنابراین $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \lim_{x \to \pi} \frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = 2\sin^2\frac{\pi}{2} = 2 \times 1 = 2$$

نکته: با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ در ۰ : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

و در حالت کلی $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m$.





$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4$

مثال: حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

حتی بهتر $\boxed{2\sin^2 x = 1 - \cos 2x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2 = 2\times 2^2 = 2\times 4 = 8$$

ب) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)(3+\cos x)}{x\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x(3+\cos x)}{x\sin 4x}$

صورت و مخرج تقسیم بر x^2 $\Longrightarrow$ $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\sin^2 x}{x^2}(3+\cos x)}{\frac{x\sin 4x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2(3+\cos x)}{\frac{\sin 4x}{x}}$

$$= \frac{2\times 1\times(3+1)}{4} = 2$$

ج) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ $\times \frac{\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2\left(\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x}\right)}$$

$\sqrt{\cos 0} + \sqrt{\cos 0} = 1+1 = 2$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-2\sin^2\frac{3x}{2}\right)-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}-\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2-\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{x}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}-\frac{9}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

ب) $\lim_{x\to 0}\left(\left([2x]+[-2x]\right)\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\lim_{x\to 0^+}[2x]+[-2x] = 0-1=-1$

$\lim_{x\to 0^-}[2x]+[-2x] = -1+0=-1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}[2x]+[-2x] = -1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{1-(1+x^2)}$$

(اتحاد مزدوج)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2\sin^2 \frac{x}{2})(1+\cos x+\cos^2 x)(1+\sqrt{1+x^2})}{-x^2}$$

$$= -2 \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 \times (1+1+1)(1+1) = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 6 = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(([2x]+[-2x]) \frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} \right) = -1 \times (-3) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-|x|\sin 2x}{4x^2-|x|\sin 4x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-(-x)\sin 2x}{4x^2-(-x)\sin 4x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+x\sin 2x}{4x^2+x\sin 4x} \xrightarrow{\div x^2} \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x\sin 2x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x\sin 4x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{1+\frac{\sin 2x}{x}}{4+\frac{\sin 4x}{x}} = \frac{1+2}{4+4} = \frac{3}{8}$$

مثال: کنکور ریاضی ۹۹ (خارج)

حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 2

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}} \times \frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2+3x-(2-x)}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|\left(\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x}{\sqrt{2}\left(-\sin\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

($-2+x$)

($x\to 0^-$: $\frac{x}{2}$ ناحیه سوم $\to \sin\frac{x}{2}<0$)

$$= \frac{-4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sin\frac{x}{2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

گزینه ۱

روش تغییر متغیر برای رفع ابهام ÷

در این روش حاصل عبارت کسری را برابر متغیر جدیدی مانند t می‌گیریم و با توجه به متغیر جدید حد را ساده و محاسبه می‌کنیم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \dfrac{\sin ۲x - ۱}{۴x - \pi}$

حاصل ابهام $x - \frac{\pi}{۴} = t$

$\begin{cases} x = t + \frac{\pi}{۴} \\ ۴x = ۴t + \pi \\ ۲x = ۲t + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$

$(x \to \frac{\pi}{۴} \Rightarrow t \to ۰)$

$$\lim_{t\to ۰} \frac{\sin(۲t+\frac{\pi}{۲}) - ۱}{۴t+\pi-\pi} = \lim_{t\to ۰} \frac{\cos ۲t - ۱}{۴t} = \lim_{t\to ۰} \frac{-(۱-\cos ۲t)}{۴t}$$

$$= -\frac{۱}{۴}\lim_{t\to ۰} \frac{۲\sin^{۲} t}{t} = -\frac{۱}{۲}\lim_{t\to ۰} \frac{\sin t}{t} \times \sin t$$

$$= -\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۰ = ۰$$

۲) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$

قرار می‌دهیم $x - \frac{\pi}{2} = t$

$(x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \to 0)$

$$\begin{cases} x = t + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2t + \pi \\ 2x = 2t + 2\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(2t+\pi)}{\cos(2t+2\frac{\pi}{2})} = \lim_{t \to 0} \frac{-\sin 2t}{\sin 2t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{-\sin 2t}{t}}{\frac{\sin 2t}{t}} = \frac{-2}{2}$$

به نام خدا

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی-حد در بی‌نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت سوم: تعریف حد بی‌نهایت

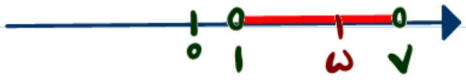
جلسه سوم: صفحات ۴۶ تا ۵۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

تعریف همسایگی: اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوییم.



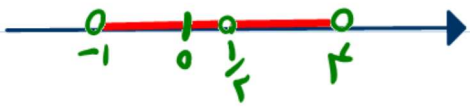
یک همسایگی x_0 (a,b)

مانند: 

$(۱,۷)$ یک همسایگی عدد ۳

تعریف همسایگی محذوف: اگر x_0 را از همسایگی بازش خارج کنیم، همسایگی محذوف x_0 بدست می‌آید. یعنی: $(a,b)-\{x_0\}$



مانند: 

$(-۱,۴)-\{\frac{۱}{۲}\}$ یک همسایگی محذوف $\frac{۱}{۲}$

تعریف همسایگی راست و چپ: اگر x_0 عددی حقیقی و مثبت باشد بازه $(x_0, x_0+۲)$ را یک همسایگی راست x_0 و بازه $(x_0-۲, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

مانند: 

$(۲,۵)$ یک همسایگی راست برای ۲ یا $۲+۳$



$(۲,۵)$ یک همسایگی چپ برای ۲ یا $۲-۲$

مثال: اگر بازه $(a-3, 2a+1)$ همسایگی صفر یک باشد، حدود a را بیابید.

$$a-3 < 1 < 2a+1$$

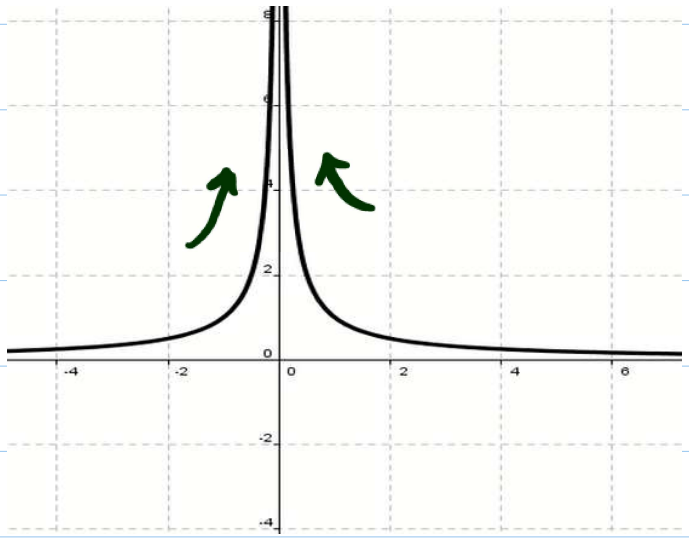
$$\begin{cases} a-3<1 \rightarrow a<4 \\ 2a+1>1 \rightarrow 2a>0 \rightarrow a>0 \end{cases}$$

$$\cap \rightarrow 0<a<4$$

می‌خواهیم حد تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ را در $x=0$ بررسی کنیم. تابع در $x=0$ تعریف نمی‌شود ولی

در یک همسایگی محذوف 0 وجود دارد.

x	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0.001	0.01	0.1	0.5
$y=f(x)$	2	10	100	1000	$+\infty$ $+\infty$	1000	100	10	2



تعریف: فرض کنید f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f به ازای xهایی که از هر دو طرف به a نزدیک شوند، به قدری بزرگ شوند که مقادیر متغیر x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشند می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

در این صورت می‌گوییم تابع f در a حد نامتناهی (مثبت بی‌نهایت) دارد.

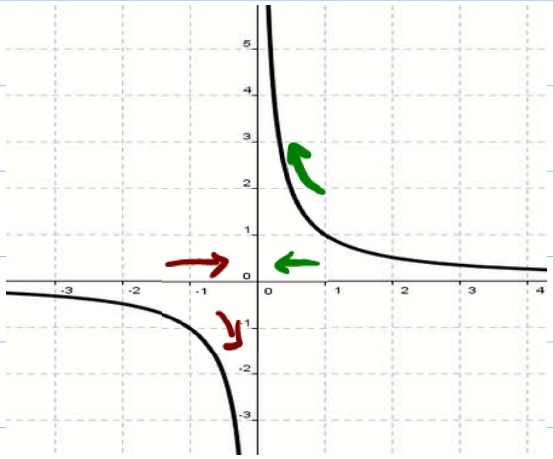
تذکر: اگر با شرایط تعریف بالا:

۱- مقادیر تابع f به ازای xها کوچک شوند، می‌نویسیم: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

۲- f در یک همسایگی راست نقطه a تعریف شده باشد و مقادیر تابع کوچک یا بزرگ شوند به ترتیب می‌نویسیم: $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ یا $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

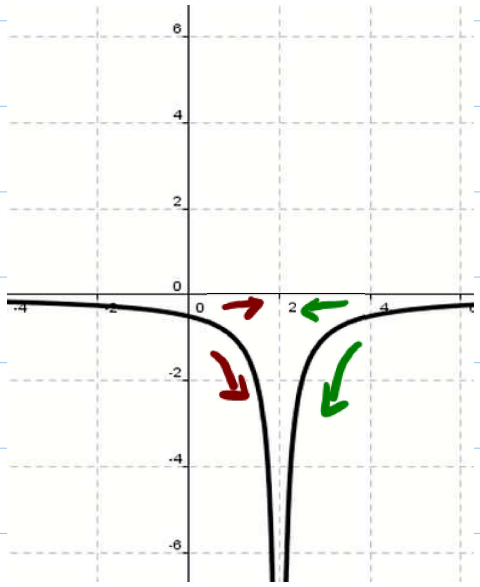
۳- f در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده باشد و مقادیر تابع کوچک یا بزرگ شوند به ترتیب می‌نویسیم: $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ یا $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

مثال :



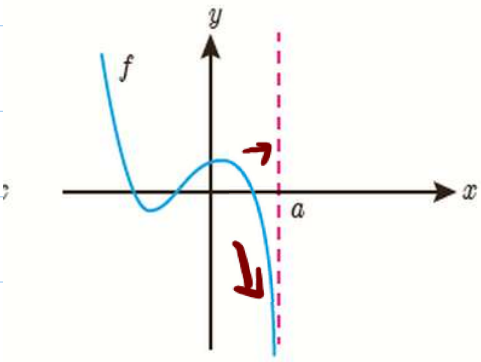
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

محاسبه حدی نهایت :

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ ، $\lim_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه a حد نامتناهی یا حدی نهایت دارد و علامت بی نهایت با توجه به علامت L و علامت صفر حدی تابع g در یک همسایگی محذوف a تعیین می شود. این نکته برای حد چپ و حد راست هم درست است.

پس : $\frac{\text{عدد}}{\text{۰ حدی}}=\infty$ (در حدی نهایت x به سمت یک عدد میل می کند و جواب حدی نهایت می شود.)

نکته : برای تشخیص علامت صفر حدی با توجه به ضابطه تابع معرف از جدول گذاری مقادیر نزدیک a یا جدول تعیین علامت و در صورت لزوم تابع مشتق آن استفاده می کنیم. همچنین در صورتی که حد چپ و راست در علامت صفر متفاوت باشد باید هر یک را جداگانه بررسی کرد.

کار در کلاس

۱ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{x-5}$

$=\frac{10}{5^--5}=\frac{10}{0^-}=-\infty$

5^- یعنی 4.9

x	$\to 5 \leftarrow$	
$x-5$	$-$	$+$

ب) $\lim_{x\to 5^+}\frac{2x}{x-5}$

$=\frac{10}{5^+-5}=\frac{10}{0^+}=+\infty$

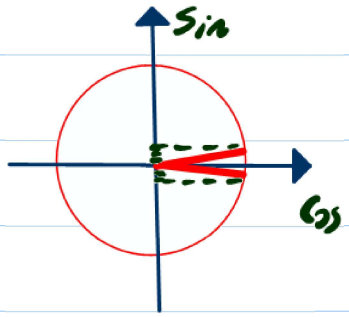
5^+ یعنی 5.1

پ) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{(0^\pm)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ت) $\lim_{x\to 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|0^\pm|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

ث) $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{-1}{|0^\pm|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

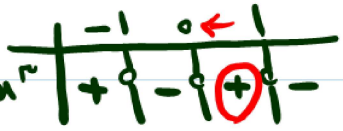
ج) $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{(0^\pm)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$



مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x-x^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

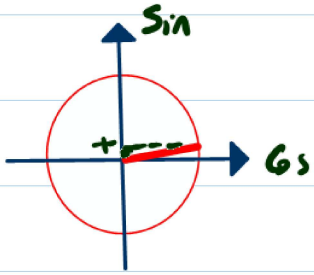
$x-x^3 = x(1-x^2)$



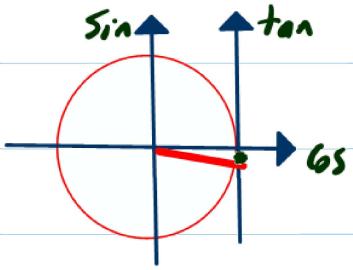
۲) $\lim_{x\to 2^-} \frac{2x-1}{(x-2)^2} = \frac{2\times 2-1}{(0^-)^2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

1.9

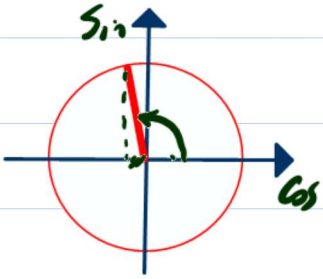
۳) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{1+1}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$



۶) $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x - 2}{\tan x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$



۵) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x} = \frac{\cos 2\frac{\pi}{2} - 1}{0} = \frac{\cos \pi - 1}{0} = \frac{-1-1}{0} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

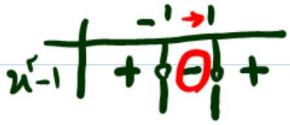


۷) $\lim_{x \to -2^+} \frac{x+1}{x+2} = \frac{-2+1}{-2^+ +2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$-1,9$

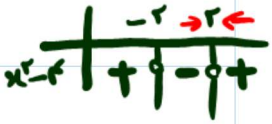


۷) $\lim_{x \to 1^-} \frac{[x]-1}{x^2-1} = \frac{0-1}{(1^-)^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$



۸) $\lim_{x \to 2} \frac{-[x]-1}{x^2-4}$

$\begin{cases} x \to 2^+ : \frac{-2-1}{0^+} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \\ x \to 2^- : \frac{-1-1}{0^-} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \end{cases}$



۹) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

۱۰) $\lim_{x \to 2} \frac{-4}{x^2-6x+8} = \frac{-4}{0}$

$\begin{cases} x \to 2^+ : \frac{-4}{0^-} = +\infty \\ x \to 2^- : \frac{-4}{0^+} = -\infty \end{cases}$



11) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{0}{0}$ حل با $(x-1)$

روش هورنر: برای تقسیم دو چند جمله‌ای بر دو جمله‌ای

$x^3-x^2-x+1 \mid x-1$, $x-1=0 \Rightarrow x=1$

	1	-1	-1	1
1	1	$1\times 1-1=0$	$1\times 0-1=-1$	$1\times(-1)+1=0$

ضرایب خارج قسمت: $1x^2+0x-1 = x^2-1$

ضرایب ← ریشه‌های مخرج کلیه

ضرب ـ جمع ← سطر اول

باقی مانده

درجه‌اش یک واحد کمتر از مخرج

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{1-2}{0} = \frac{-1}{0^+} = +\infty$$

$x^2-1 = (x-1)(x+1)$ ← 0/9

مثال: اگر $\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، a و b را بیابید.

$\frac{-1}{0^+} = -\infty$ ← $\frac{2-3}{0^+} = -\infty$

ریشه مضاعف مخرج است پس:

$(x-2)^2 = x^2+ax+b$

$x^2-4x+4 = x^2+ax+b \longrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=4 \end{cases}$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی-حد در بی‌نهایت

درس دوم: حد در بی‌نهایت

جلسه چهارم: صفحات ۵۹ تا۶۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

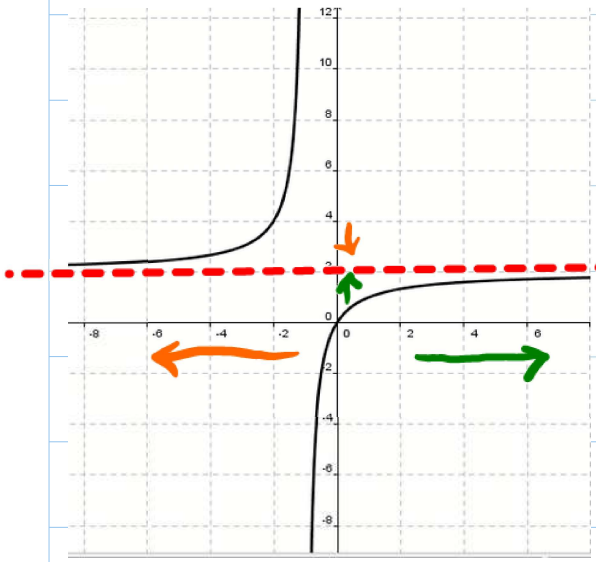
اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

حد در بی‌نهایت :



می‌خواهیم رفتار تابع $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ را به ازای

برخی مقادیر مثبت و منفی x در جدول زیر بررسی کنیم.

x	$-\infty \leftarrow -1000$	-1000	-100	-10	10	100	1000	$10000 \rightarrow +\infty$
$f(x)$	$2 \leftarrow 2,0002$	$2,0002$	$2,002$	$2,2$	$1,81$	$1,98$	$1,998$	$1,999 \rightarrow 2$

تعریف : فرض کنید تابع f روی بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد و مقادیر تابع f به هر اندازه که بخواهیم به عدد حقیقی L نزدیک شوند به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شده باشند در این صورت می‌نویسیم : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$.

تذکر : اگر در تعریف بالا، بازه $(-\infty,a)$ و مقادیر متغیر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شوند

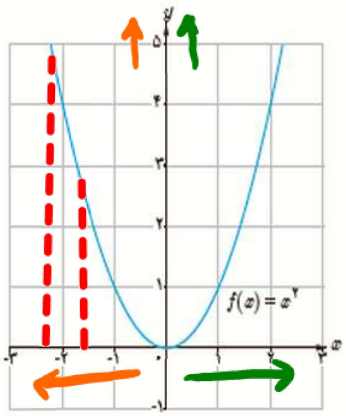
می‌نویسیم : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$.

نکته : در حد در بی‌نهایت x به سمت مثبت یا منفی بی‌نهایت میل می‌کند و جواب حد یک عدد است.

نکته: در برخی توابع، وقتی x به سمت بی نهایت میل می‌کند، مقدار تابع یعنی $f(x)$ هم به هر اندازه دلخواه بزرگ یا کوچک می‌شود، یعنی: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. به این حالت حد نامتناهی در بی نهایت می‌گوییم.

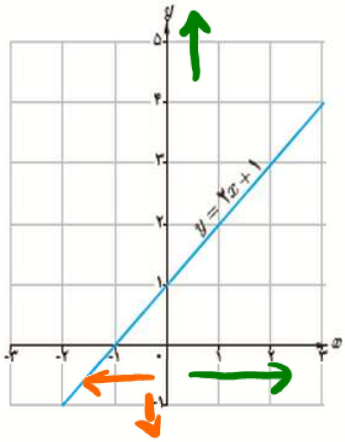
کار در کلاس

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



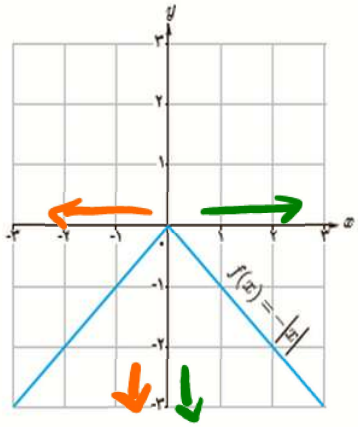
الف) $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$



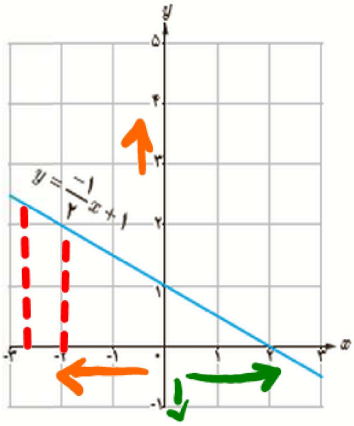
ب) $\lim_{x \to -\infty} (2x+1) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (2x+1) = +\infty$



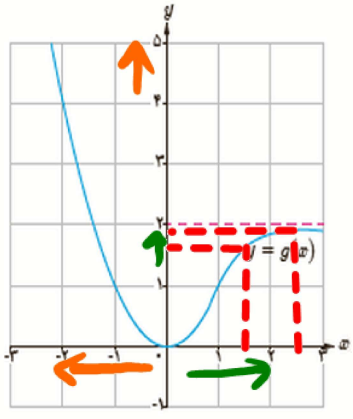
پ) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



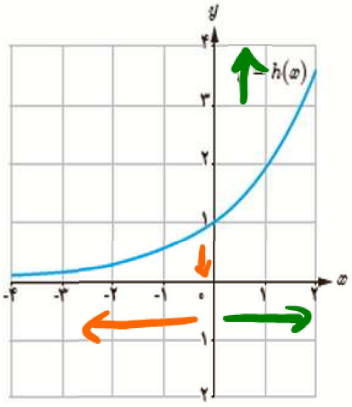
ت) $\lim_{x \to -\infty} (\frac{-1}{2}x + 1) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (\frac{-1}{2}x + 1) = -\infty$



ث) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

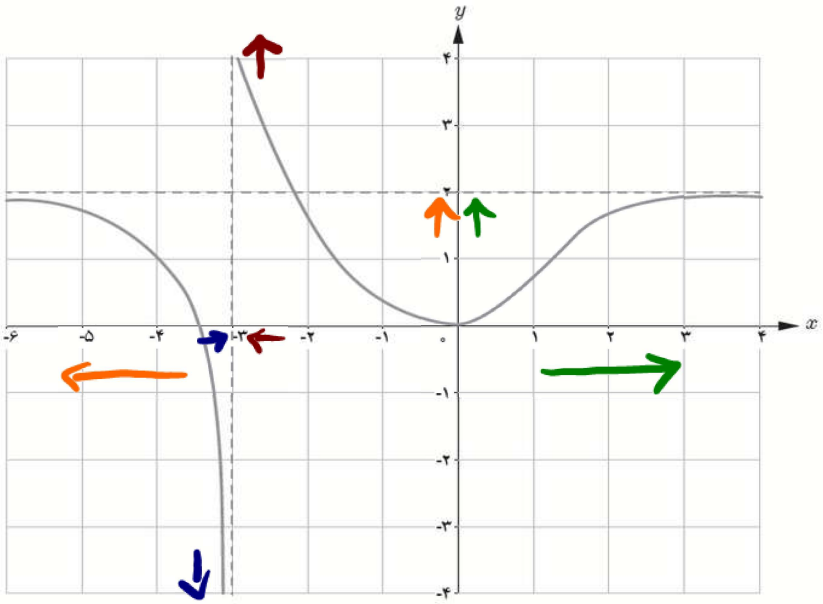
$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2$



ج) $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

مثال: با توجه به نمودار توابع داده شده حدود خواسته شده را بیابید.

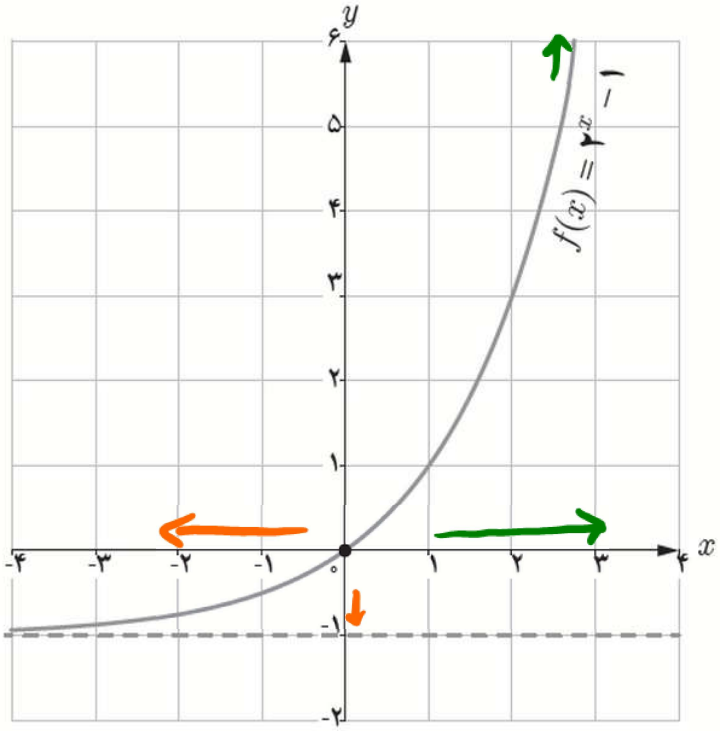


$\lim_{x \to (-۳)^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to (-۳)^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ۲$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ۲$

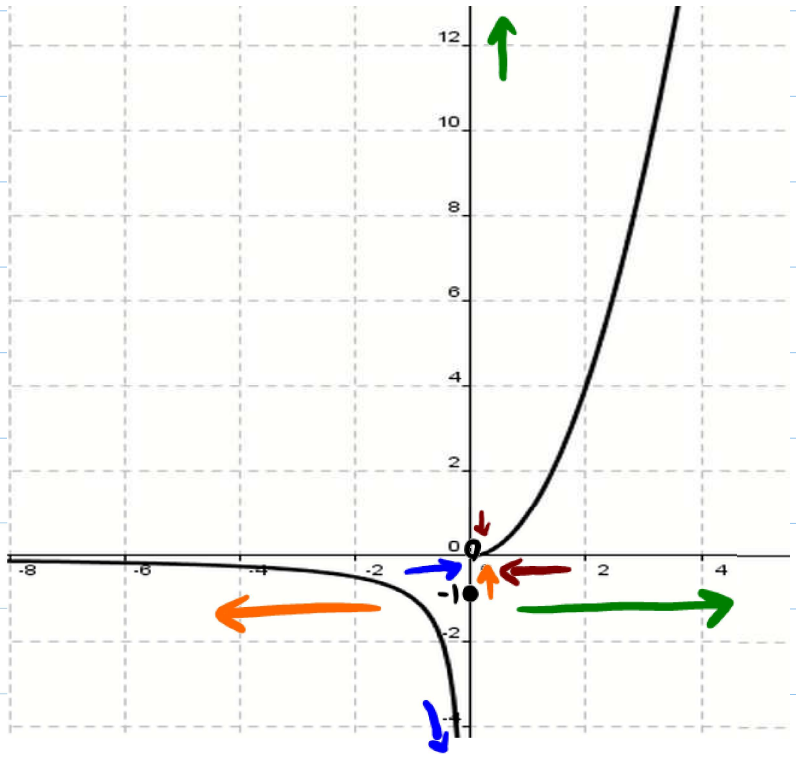


$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -۱$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بیابید.

$$g(x)=\begin{cases} x^{2} & x>0 \\ -1 & x=0 \\ \frac{1}{x} & x<0 \end{cases} \qquad : \lim_{x\to 0^{+}} g(x)\ ,\ \lim_{x\to 0^{-}} g(x)\ ,\ \lim_{x\to -\infty} g(x)\ ,\ \lim_{x\to +\infty} g(x)$$



$\lim_{x\to 0^{+}} g(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^{-}} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$

محاسبه حد در بی‌نهایت از روی ضابطه :

۱۱ از قاعده های زیر، بعد از جایگذاری $+\infty$ یا $-\infty$ به جای x، در محاسبه حد در بی‌نهایت‌ها استفاده می‌کنیم. $(a \in \mathbb{R} - \{0\})$

۱) $a \times \infty = \infty$

۲) $a + \infty = \infty$

* ۳) $\frac{a}{\infty} = 0$

۴) $\frac{\infty}{a} = \infty$

۵) $(\infty)^a = \infty \quad (a \in \mathbb{N})$

۶) $+\infty + \infty = +\infty$

۷) $-\infty - \infty = -\infty$

۸) $\infty - \infty$: حالت مبهم

۹) $\infty \times \infty = \infty$

۱۰) $\frac{\infty}{\infty}$: حالت مبهم

۱۲) $\sqrt{+\infty} = +\infty$

۱۳) $a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

$\rightarrow 2^{+\infty} = +\infty$

۱۴) $a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$

$\rightarrow 3^{-\infty} = \left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty} = 0$

۲) در محاسبه حد در بی نهایت چندجمله‌ای های درجه n، از جمله‌ای که توان متغیر تا کمتر از n است صرف نظر می کنیم.

۳) برای محاسبه حد در بی نهایت توابع گویی که صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند، ابتدا از نکته ۲ استفاده می کنیم و از درجات کمتر صرف نظر می کنیم. سه حالت رخ می دهد:

الف) درجه صورت از مخرج بیشتر است. در این حالت حد نامتناهی می شود یعنی $+\infty$ یا $-\infty$.

ب) درجه صورت و مخرج برابر هستند. در این حالت با تقسیم ضرائب متغیر، مقدار حد محاسبه می شود.

ج) درجه مخرج از صورت بیشتر است. در این حالت مقدار حد صفر می شود.

۴) هرگاه در صورت یا مخرج عبارت رادیکالی داشتیم، از درجات کوچکتر از درجه عبارت زیر رادیکال صرف نظر می کنیم و در صورت امکان عبارت را توان از زیر رادیکال خارج می کنیم.

کار در کلاس

۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-1}$ ب) $\lim_{t\to-\infty}\frac{1-5t^2}{t^2+3t}$ پ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-3x}$

الف) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3$ ب) $\lim_{t\to-\infty}\frac{-5t^2}{t^2}=-5$

پ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-3x}=0$ $\quad \frac{1}{-\infty}=0$ $\quad$ (از $1x^0$)

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد.

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{-x+2} = -1$

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{100x}{x+4} = 100$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-5x+4}{7x^3-11x^2-6x}$ ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+4}{x^3+x-8}$ پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{7x^3} = \frac{2}{7}$

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{2x^3} = 0$ یا $\frac{5}{-\infty} = 0$

پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7}{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} -2x^4 = -2\times(+\infty) = -\infty$

مثال: حدهای زیر را بیابید

۱) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3+x+1}{x^3-x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3}{x^3} = 5$

۲) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{x^2+x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

۳) $\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{2x^3} = -\frac{1}{2}$

۴) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x^2-1)(x+1)}{x^3-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3$

۵) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3}|x|}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($x\to+\infty \Rightarrow x>0$)

۶) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

۷) $\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2-\sqrt{x-3}}{5x^2-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2}{5x^2} = \frac{6}{5}$

۸) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sqrt{x^4+3x+1}}{5x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sqrt{x^4}}{5x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x^2}{5x^2}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت

جلسه پنجم: مجانب‌ها

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تعریف مجانب یک منحنی :

خطی است که فاصله منحنی از آن در بی نهایت به صفر نزدیک می شود.

۱) مجانب قائم :

خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می نامیم هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد :

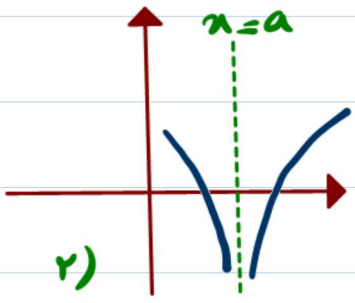
$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

مانند :



۱)



۲)

$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

مثال: مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ را بدست آورید.

حد تابع را در $x=-1$ از طرف ریشه مخرج محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

نمودار این تابع از طرف مجانب قائم مانند (۲) است.

نکته: در توابع گویای ریشه‌های مخرج مشکوک مجانب قائم بودن هستند. اگر حد تابع در این نقاط بی‌نهایت شود آن‌گاه خط (ریشه مخرج $=x$) مجانب قائم است.

تذکر ۱) در توابع گویایی که صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند، اگر ضابطه تابع را ساده کنیم به طوری که عامل مشترکی در صورت و مخرج نباشد، به طور قطع ریشه‌های مخرج مجانب قائم هستند.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{(x^2-x-6)(x-4)}$ چند مجانب قائم دارد؟

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-4)(x+2)(x-3)}=\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$$

پس $x=-2$ و $x=2$ مجانب‌های قائم‌اند.

تذکر ۲) در توابعی که صورت یا مخرج چندجمله‌ای نیستند، اگر در نقطه‌ای حد مخرج صفر شود حد صورت صفری غیرصفر نشود، نمودار در آن نقطه مجانب قائم دارد. دقت کنید برای اینکه حد صورت و مخرج تعریف نشود باید تابع حداقل در سمت چپ یا راست نقطه تعریف نشده باشد.

مثال: نمودار تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x}(x+2)}$ چند مجانب قائم دارد؟

فقط یک مجانب قائم $x=0$ دارد. دقت کنید چون $(0,+\infty)=D_f$ پس تابع در اطراف $x=-2$ تعریف نشده است.

مثال: به ازای چه مقدار a تابع $f(x)=\frac{x-1}{x^2+ax+9}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

دو حالت داریم:

۱) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد: $\Delta=0 \rightarrow a^2-36=0 \rightarrow a=\pm 6$

۱۲ فقط یکی از ریشه‌های مخرج باید ریشه صورت باشد تا بعد از ساده کردن صورت و مخرج با یک ریشه برای مخرج باقی بماند.

پس $x=1$ باید ریشه مخرج هم باشد،

$x=1 : 1^2+a(1)+9=0$

$\Rightarrow a=-10$

$f(x)=\frac{x-1}{x^2-10x+9}=\frac{x-1}{(x-1)(x-9)} \Rightarrow x=9$ مجانب قائم

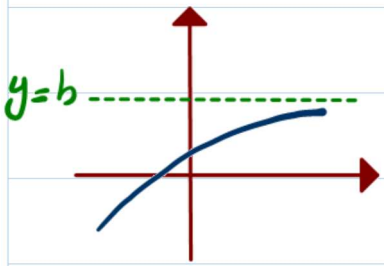
پس به ازای $a=\pm 6, a=-10$ این تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

۲) مجانب افقی:

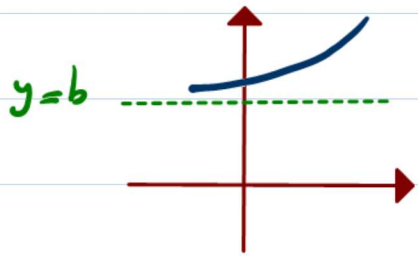
خط $y=b$ را مجانب افقی نمودار تابع f می‌نامیم هرگاه حداقل یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$

مانند:



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$



$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$

پس برای یافتن معادله مجانب افقی تابع f کافی است حد تابع f را وقتی $x \to \pm\infty$ حساب کنیم.

مثال: معادله مجانب افقی $f(x) = \frac{x}{2x - |x-1|}$ را بیابید.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x - (x-1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2x + (x-1)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3x-1} = \frac{1}{3}$$

پس نمودار تابع دو مجانب افقی $y = 1$ و $y = \frac{1}{3}$ دارد.

مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ در چه وضعیت نسبت به مجانب افقی آن قرار دارد؟

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \text{مجانب افقی}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3} = \frac{x+3-4}{x+3} = 1 - \frac{4}{x+3}$$

نمودار پایین مجانب افقی : $x \to +\infty : \frac{4}{x+3} \to 0^+ \to f(x) < 1$

نمودار بالای مجانب افقی : $x \to -\infty : \frac{4}{x+3} \to 0^- \to f(x) > 1$

بین اطراف $y=1$ سنزار به صورت : ---------- است.

مثال: سنزار تابع $f(x)=\frac{x^2+mx+1}{x^2+2}$ مجانب افقی خود را قطع نمی‌کند. حدود m را بیابید.

مجانب افقی $y=0$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

پس باید معادله $f(x)=0$ جواب نداشته باشد تا سنزار f خط $y=0$ را قطع نکند :

$$\frac{x^2+mx+1}{x^2+2}=0 \rightarrow x^2+mx+1=0 \;:\; \Delta=m^2-4<0$$

$$\Rightarrow -2<m<2$$