حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل دوم : مشتق

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

قسمت اول: تناوب

جلسه اول: صفحات ۲۴ و۲۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تابع متناوب :

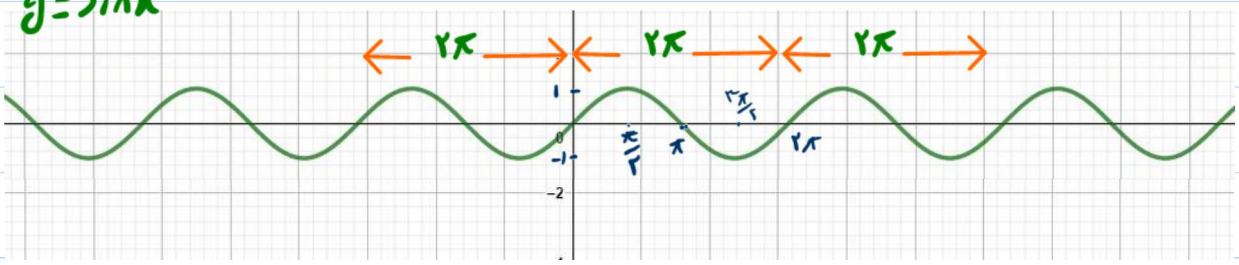
اگر در تابعی برای هر مقدار از دامنه تابع، عددی $f(x+T)=f(x)$ برقرار باشد، جز اضافه کردن T، اثری روی مقدار تابع نداشته باشد، می‌گوییم f متناوب است.

به کوچک‌ترین مقدار مثبت T دوره تناوب می‌گوییم.

به عبارت دیگر در توابع متناوب، قسمتی از نمودار در حال تکرار شدن است. به کوچکترین اندازه افقی این قسمت تکرار شونده دوره تناوب می‌گوییم.

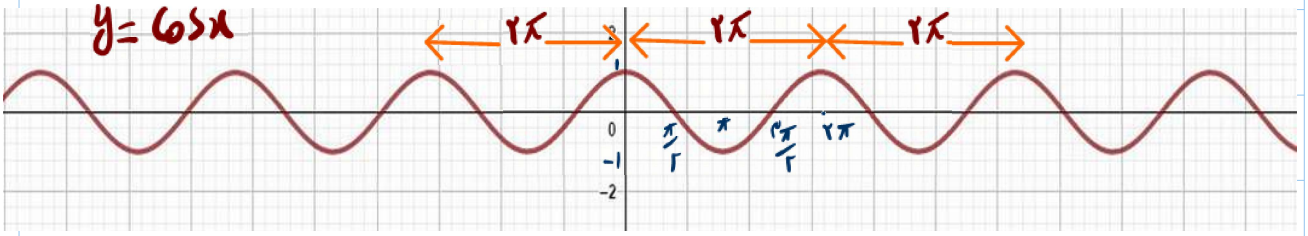
مثال : دوره تناوب توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را بیابید.

$y=\sin x$



$T=2\pi$

$y=\cos x$



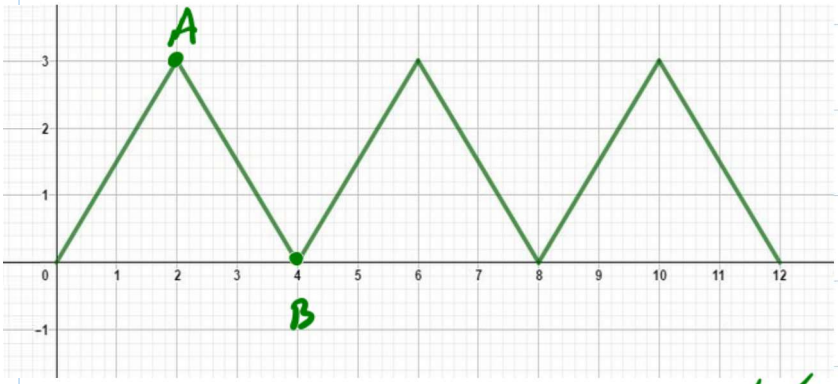
$T=2\pi$

نکته: اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد، اضافه یا کم کردن مضارب صحیح

T، مقدار تابع را تغییر نمی‌دهد: $f(x+kT)=f(x)$

مثال: اگر قسمتی از نمودار تابع f به شکل زیر باشد، $f(1399)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$



$T=4$

باید مضربی از ۴ را به ۱۳۹۹ اضافه یا کم کنیم تا عددی بین ۰ تا ۴ بدست آید.

$$f(1399)=f(1399+(-349)4)=f(1399-1396)=f(3)$$

خط AB: $A(2,3), B(4,0)$ $\quad m=\frac{0-3}{4-2}=-\frac{3}{2}$

$$y-0=-\frac{3}{2}(x-4) \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+6$$

$$f(3)=-\frac{3}{2}(3)+6=-\frac{9}{2}+6=\frac{3}{2}$$

گزینه ۲

مثال: ضابطه تابع متناوب f در بازه $(0,1)$ به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ است. اگر دوره تناوب تابع برابر یک باشد، $f(-0/46)$ کدام است؟

۱) ۸٪ ۲) ۶٪ ۳) تعریف نشده ۴) ۴٪

گزینه ۱ $f(-0,46)=f(-0,46+1)=f(0/54)=\sqrt{0/54}=0/8=8\%$

نکته: اگر دوره تناوب $f(x)$ برابر T باشد، دوره تناوب $af(bx+c)+d$ برابر $\frac{T}{|b|}$ است. یعنی برای محاسبه دوره تناوب فقط به ضریب x توجه می‌کنیم.

سایر ضرایب و انتقال‌ها اثری روی دوره تناوب ندارند.

مثال: دوره تناوب $y=2f(6x-1)+4$ برابر ۲ است. دوره تناوب $g(x)=-f(3x)-1$ را بیابید.

$y: \quad 2=\frac{T_f}{6} \Rightarrow T_f=12$

$g: \quad T_g=\frac{T_f}{3}=\frac{12}{3}=4$

نتیجه: دوره تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)+d$ ، $y=a\cos(bx+c)+d$ برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است.

مثال: اگر دوره تناوب تابع $f(x)=k\cos(kx)+3$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۴

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{k} \Rightarrow k\pi=8\pi \longrightarrow k=8$$

$$f(x)=8\cos 8x+3 \Rightarrow f(0)=8\cos(8\times 0)+3=8\times 1+3=11$$ گزینه ۱

نکته: گاهی اوقات لازم است با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی، تابع را ساده تر تا حد امکان ساده کنیم، سپس دوره تناوب را محاسبه کنیم.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x)=\cos^2 x-\cos^4 x$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) 2π

$$f(x)=\cos^2 x-\cos^4 x=\cos^2 x(1-\cos^2 x)=\cos^2 x\sin^2 x$$

یادآوری : $\sin 2x = 2\sin x \cos x \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\sin^2 2x$

یادآوری : $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$

$T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ گزینه ۲

مثال : اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \sqrt{2}\cos^2(mx-4)$ برابر $\frac{4\pi}{3}$ باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$f(x) = \sqrt{2} \times \frac{1+\cos 2(mx-4)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\cos(2mx-8))$

گزینه ۱

$T = \frac{2\pi}{|2m|} \Rightarrow 2\pi|m| = 2\pi \Rightarrow |m| = \frac{4\pi}{3\pi} = \frac{4}{3} \Rightarrow m = \pm\frac{4}{3}$

نکته: دوره تناوب توابع $y=\tan ax$ ، $y=\cot ax$ برابر است با $T=\frac{\pi}{|a|}$.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ کدام است؟

۱) 4π ۲) 2π ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

$$f(x)=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$$ گزینه ۲

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

قسمت دوم: بررسی توابع مثلثاتی با ضابطه $y = asinbx + c$ یا

$$y = acosbx + c$$

جلسه دوم: صفحات ۲۶ تا ۲۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

بررسی توابع مثلثاتی به صورت $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$

پارامتر a باعث انبساط یا انقباض عمودی تابع سینوس و کسینوس می‌شود و پارامتر c یک انتقال عمودی را نتیجه می‌دهد. پس مقادیر ماکزیمم و مینیمم این گونه توابع عبارتند از:

$$y_{max}=|a|+c \qquad y_{min}=-|a|+c$$

در درس قبل هم دیدیم پارامتر b که باعث انبساط یا انقباض افقی می‌شود، در دوره تناوب مؤثر است و $T=\frac{2\pi}{|b|}$.

مثال: مقادیر max، min و دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

الف) $y=3-\cos(\frac{1}{4}x)$ $\qquad T=\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$

$y_{max}=1-|-1|+3=1+3=4$ $\qquad y_{min}=-1-|-1|+3=-1+3=2$

ب) $y=-2\sin(\pi x)+\sqrt{3}$ $\qquad T=\frac{2\pi}{\pi}=2$

$y_{max}=|-2|+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$ $\qquad y_{min}=-|-2|+\sqrt{3}=-2+\sqrt{3}$

نکته: اگر نمودار تابعی به صورت $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ باشد، برای بدست آوردن ضابطه تابع فوق با داشتن a، b و c تشخیص بیشینه یا کمینه بودن تابع به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) اگر مقدار y ها از max یا min نمودار بیشتر شود تابع کمینه یا بیشینه است در غیر این صورت بیشینه یا کمینه نیست.

۲) با جمع و کم کردن روابط گفته شده برای مقادیر max و min داریم:

$$\begin{cases} y_{max}=|a|+c \\ y_{min}=-|a|+c \end{cases} \xrightarrow{+} y_{max}+y_{min}=2c \Rightarrow c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}$$

$$\Rightarrow y_{max}-y_{min}=2|a| \Rightarrow |a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}$$

۳) برای یافتن b از دوره تناوب کمک می‌گیریم ($T=\frac{2\pi}{|b|}$)

۴) برای تشخیص علامت a و b این‌گونه عمل می‌کنیم:

الف- در توابع بیشینه اگر نمودار بعد $x=0$ رو به صعودی داشته باشد، a و b هم‌علامت هستند یعنی: $ab>0$

و اگر نمودار به $x=0$ روند نزولی داشته باشد، a و b نیز هم‌علامت اند یعنی: $ab>0$

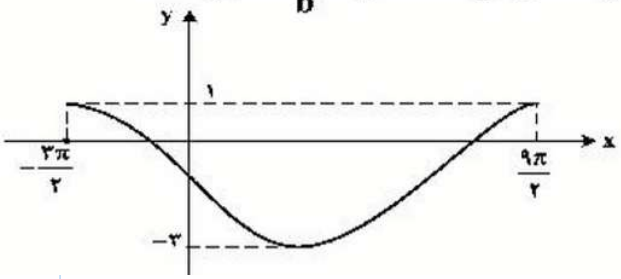
ب- در توابع کسینوسی اگر نمودار، روی محور yها، ماکزیمم داشته باشد $a>0$ است

و اگر مینیمم داشته باشد $a<0$ است.

با توجه به رابطه $\cos(-x)=\cos x$، b می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

مثال: کنکور سراسری ۹۹ تجربی:

شکل زیر، نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟



۱) -۲
۲) -۳
۳) -۴
۴) -۶

$T=\frac{۹\pi}{۲}-(-\frac{۳\pi}{۲})=\frac{۱۲\pi}{۲}=۶\pi \Rightarrow ۶\pi=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۳}$

$|a|=\frac{۱-(-۳)}{۲}=\frac{۱+۳}{۲}=۲$

چون $x=0$ تابع نزولی است پس $ab>0$ و درحالت داریم:

$\begin{cases} a=-۲ \\ b=\frac{۱}{۳} \end{cases}$: $\frac{a}{b}=\frac{-۲}{\frac{۱}{۳}}=-۶$

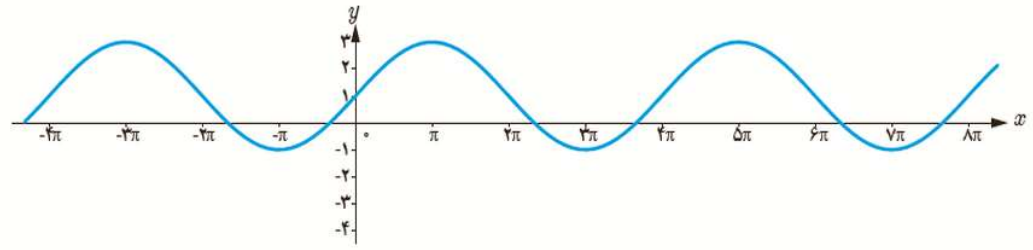
$\begin{cases} a=۲ \\ b=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$ $\frac{a}{b}=\frac{۲}{-\frac{۱}{۳}}=-۶$

گزینه ۴

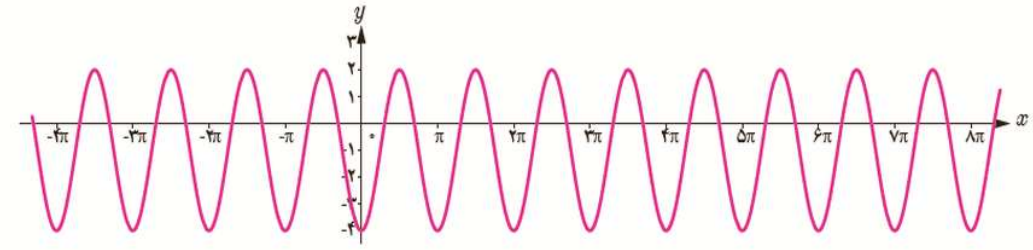
مثال: ضابطهٔ توابع زیر به صورت $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ است.

ضابطهٔ آن‌ها را مشخص کنید.

الف)



ب)



الف) $T=4\pi \Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{1}{2}$ تابع سینوسی است

$|a|=\frac{4-(-1)}{2}=\frac{5}{2}$ ، $c=\frac{4+(-1)}{2}=\frac{3}{2}$

چون $x=0$ تابع روند صعودی دارد پس $ab>0$:

ضابطهٔ تابع : $y=2\sin\frac{1}{2}x+1$ یا $y=-2\sin(-\frac{1}{2}x)+1$

ب) $T=\pi \Rightarrow \pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=2$ تابع کسینوسی

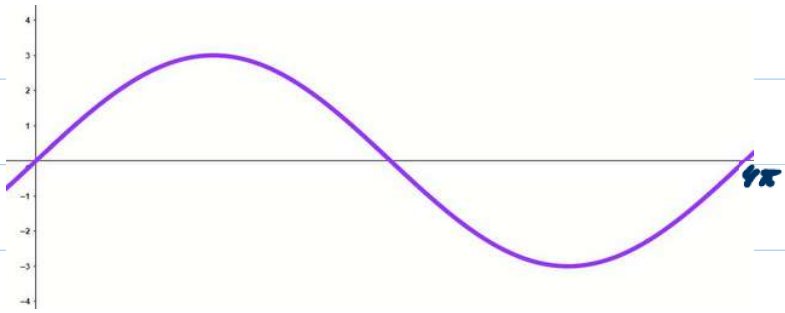
$|a|=\frac{2-(-4)}{2}=\frac{6}{2}=3$ ، $c=\frac{2+(-4)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

چون بعد y ها از min ی مقدار $a<0$ یعنی -3 است:

ضابطه تابع $y=-3\cos(-2x)-1$ یا $y=-3\cos 2x-1$

مثال: شکل زیر نمودار تابع $f(x)=a\sin bx$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶



$$T=4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi|b|=2\pi \Rightarrow |b|=\frac{2\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$$

$$|a|=\frac{3-(-3)}{2}=\frac{6}{2}=3$$

بعد از $x=0$ روند تابع صعودی است پس $ab>0$ است:

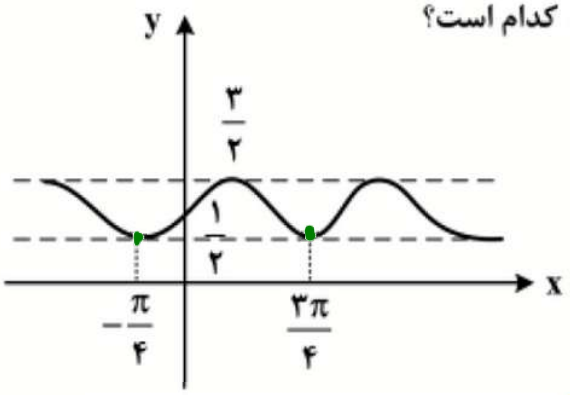
$$a=3,\ b=\frac{1}{2} \Rightarrow ab=3\times\frac{1}{2}=1$$

$$a=-3,\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow ab=-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

گزینه ۱

مثال: کنکور سراسری ۹۸ ریاضی :

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a\sin bx\cos bx$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۲

۴) ۳

معرف دوره تناوب ضریب Sin

$$y = 1 + a\sin bx\cos bx = 1 + \frac{1}{2}a\sin 2bx$$

$$T = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\pi}{4} = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow \pi|b| = \pi \Rightarrow |b| = 1$$

$$\left|\frac{1}{2}a\right| = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

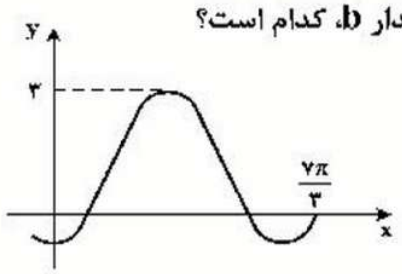
بعد از $n=0$ روند تابع صعودی است پس $ab > 0$ است :

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \quad a+b=2 \quad , \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \quad a+b=-2$$

گزینه ۳

مثال: کنکور سراسری ۹۹ تجربی

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{2} + x)$ است. مقدار b، کدام است؟



۱) ۲

۲) ۱

۳) -1

۴) -2

$$y = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = a + b\cos x$$

$$y_{max} = 3 = |b| + a$$

چون جواب‌ها از min جدا شده‌اند پس $b > 0$:

$$a - b = 3 \quad (1)$$

$$\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right) \xrightarrow{\text{قرینه}} 0 = a + b\cos\frac{7\pi}{3} \Rightarrow 0 = a + b\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

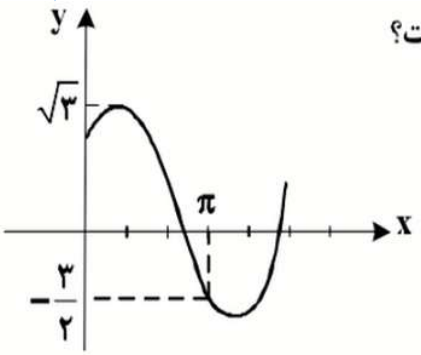
$$\Rightarrow 0 = a + b\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 0 = a + b\times\frac{1}{2} \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3b}{2} = -3 \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} \Rightarrow b = -2$$

گزینه ۴

مثال: کنکور سراسری ۹۸ تجربی :

شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\sqrt{3}$

۴) ۲

$$y_{max} = |b| + a \Rightarrow |b| + a = \sqrt{3}$$

چون تابع به ازای $x=0$ دومین صفر را در بین b با یک (ضریب x) هم علامت و مثبت است:

$$a+b=\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\left(\pi, -\frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\text{در تابع}} -\frac{3}{2} = a+b\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) \quad (-\sqrt{3}/2)$$

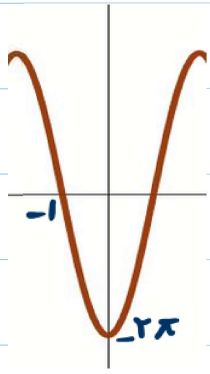
$$a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=\sqrt{3} \\ -\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow b+\frac{\sqrt{3}}{2}b=\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

$$b\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b=\sqrt{3}$$

گزینه ۳

مثال: نمودار تابع $f(x)=a\cos bx$ به صورت زیر است. $f\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟



۱) $2\sqrt{2}\pi$ ۲) $-2\sqrt{2}\pi$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

$$y_{min}=-|a|+0=-2\pi \Rightarrow |a|=2\pi$$

چون مقدار yها از min خود کمتر نمی‌شود $\Rightarrow a<0$ است:

$\Rightarrow -a = 2\pi \Rightarrow a = -2\pi$

چون $f(-1) = 0$ پس:

$0 = -2\pi(\cos(-b)) \Rightarrow \cos(-b) = 0 \Rightarrow -b = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$

اولین نقطه‌ای که تابع مقدار صفر می‌شود $\frac{\pi}{2}$ است.

$f(x) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} x$

$f(\frac{1}{2}) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = -2\pi \cos \frac{\pi}{4} = -2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\pi$

گزینه ۲

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

قسمت سوم: تانژانت

جلسه سوم: صفحات ۲۹ تا ۳۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تانژانت در دایره مثلثاتی :

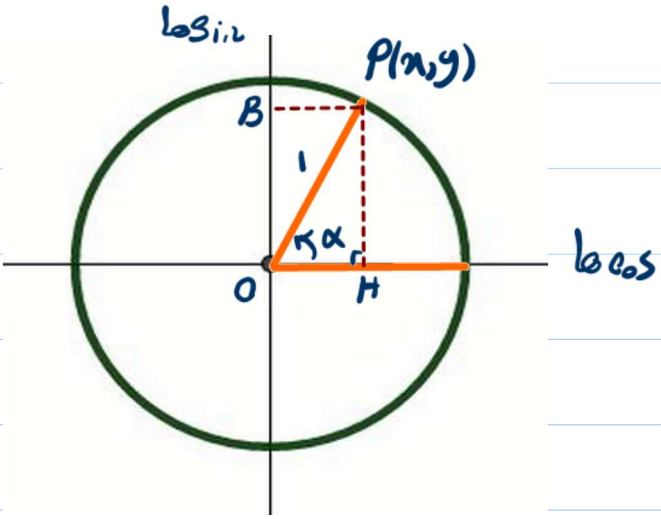
یادآوری : دایره مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدأ مختصات است.

ضلع دستهٔ هر زاویه در دایره مثلثاتی، بر قسمت مثبت محور xها واقع است.

اگر اندازه زاویه $\alpha > 0$ باشد به اندازه α در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت

دوران می‌کنیم و اگر $\alpha < 0$ باشد به اندازه α در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخیم.

اگر ضلع انتهایی زاویه محیط دایره را در نقطه $P(x,y)$ قطع کند داریم :

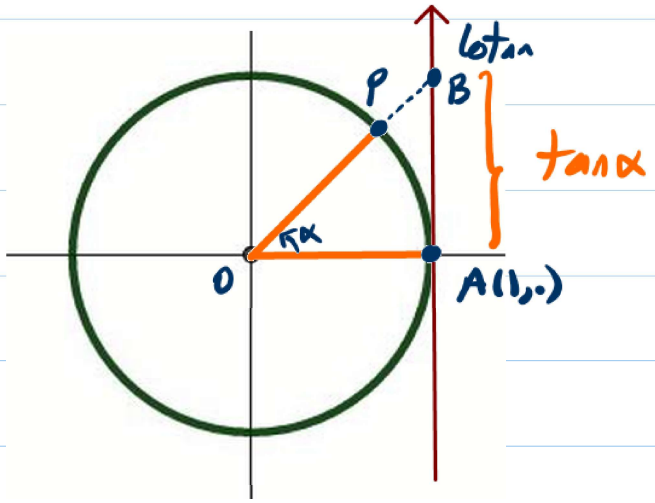


$\triangle OHP$: $\sin\alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{PH}{1} \Rightarrow \sin\alpha = PH = BO \Rightarrow y_P = \sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{OH}{1} \Rightarrow \cos\alpha = OH \Rightarrow x_P = \cos\alpha$

محور تانژانت ها را موازی محور سینوس ها و مماس بر دایره در نقطه $A(1,0)$ در نظر می گیریم. مبدأ این محور $A(1,0)$ است و جهت مثبت آن مانند محور سینوس هاست.

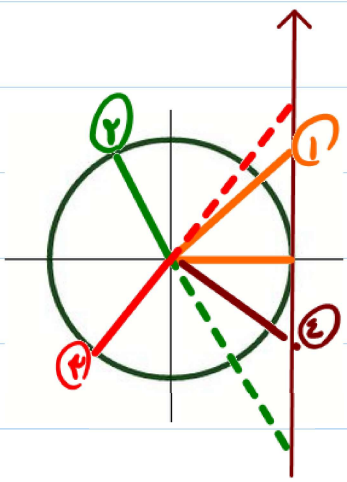
یعنی بالای A تانژانت مثبت و پایین A تانژانت منفی است.



اگر شعاع دایره را مقدار دهیم، محور تانژانت ها را قطع می کند.

$$\hat{OAB}: \quad \tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} \Rightarrow \tan\alpha = AB$$

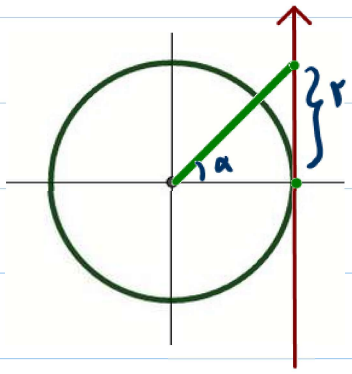
توجه: علامت تانژانت در نواحی چهارگانه به صورت زیر است:



	اول	دوم	سوم	چهارم
tan	+	−	+	−

نکته: در زاویه‌های $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و بطور کلی در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$، هرچقدر شعاع را امتداد دهیم محور تانژانت‌ها را قطع نمی‌کند. در این زاویه‌ها تانژانت تعریف نشده است.

مثال: در شکل زیر $\cos\alpha$ کدام است؟

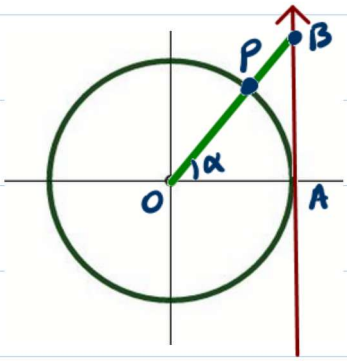


۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

$\tan\alpha = 2$ ، $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+4 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} \cos\alpha = \frac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ گزینه ۲

مثال: با توجه به داده‌های مقابل، اگر $P(2a-1, a)$ باشد، مساحت مثلث AOB چقدر است؟



۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$x_P = 2a-1 = \cos\alpha$

$y_P = a = \sin\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow a^2 + (2a-1)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 4a^2 - 4a + 1 - 1 = 0$

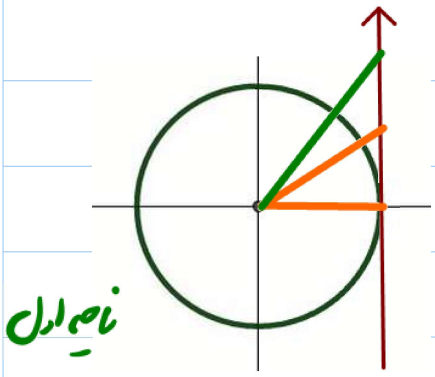
$5a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(5a-4) = 0 \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق ق} \\ 5a - 4 = 0 \longrightarrow a = \frac{4}{5} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos 2\alpha = 2 \times \frac{4}{5} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

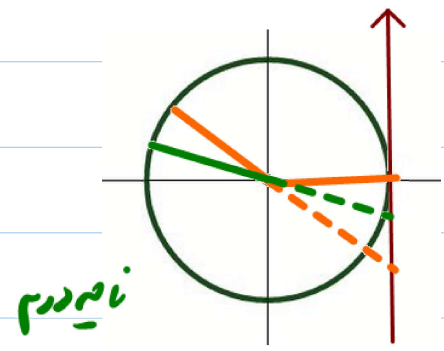
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{3} = AB$

$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times AB = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ گزینه ۲

نکته: در ربع‌های فواصل چهارگانه با افزایش زاویه، مقدار تانژانت هم افزایش می‌یابد.



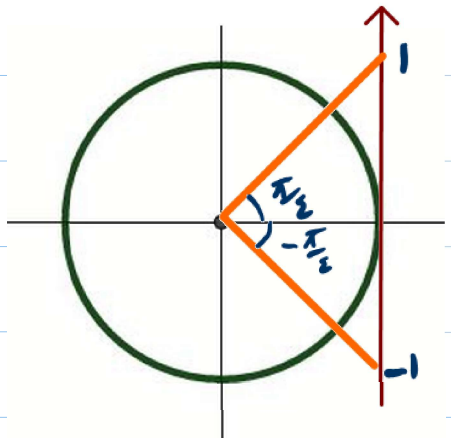
ناحیه اول



ناحیه دوم

برای زوایای سوم و چهارم به طور مشابه بحث می‌کنیم.

مثال: اگر $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ و $\tan x = \frac{2m-4}{5}$ باشد، بهدوره m را بیابید.



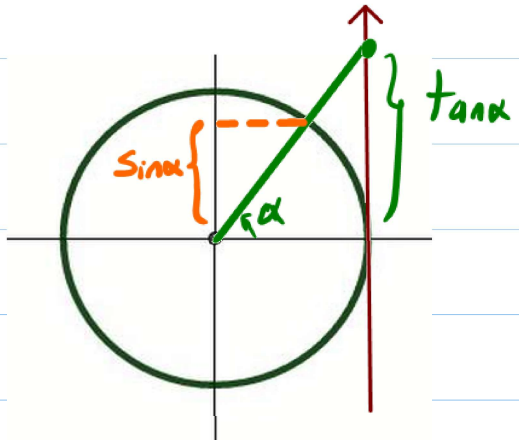
$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$-1 \leq \tan x \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq \frac{2m-4}{5} \leq 1 \quad \overset{\times 5}{\Rightarrow} \quad -5 \leq 2m-4 \leq 5$$

$$\overset{+4}{\Rightarrow} \quad -1 \leq 2m \leq 9 \quad \overset{\div 2}{\Rightarrow} \quad -1 \leq m \leq \frac{9}{2}$$

نکته: با استفاده از دایره مثلثاتی می‌توان گفت: $|\sin\alpha| < |\tan\alpha|$

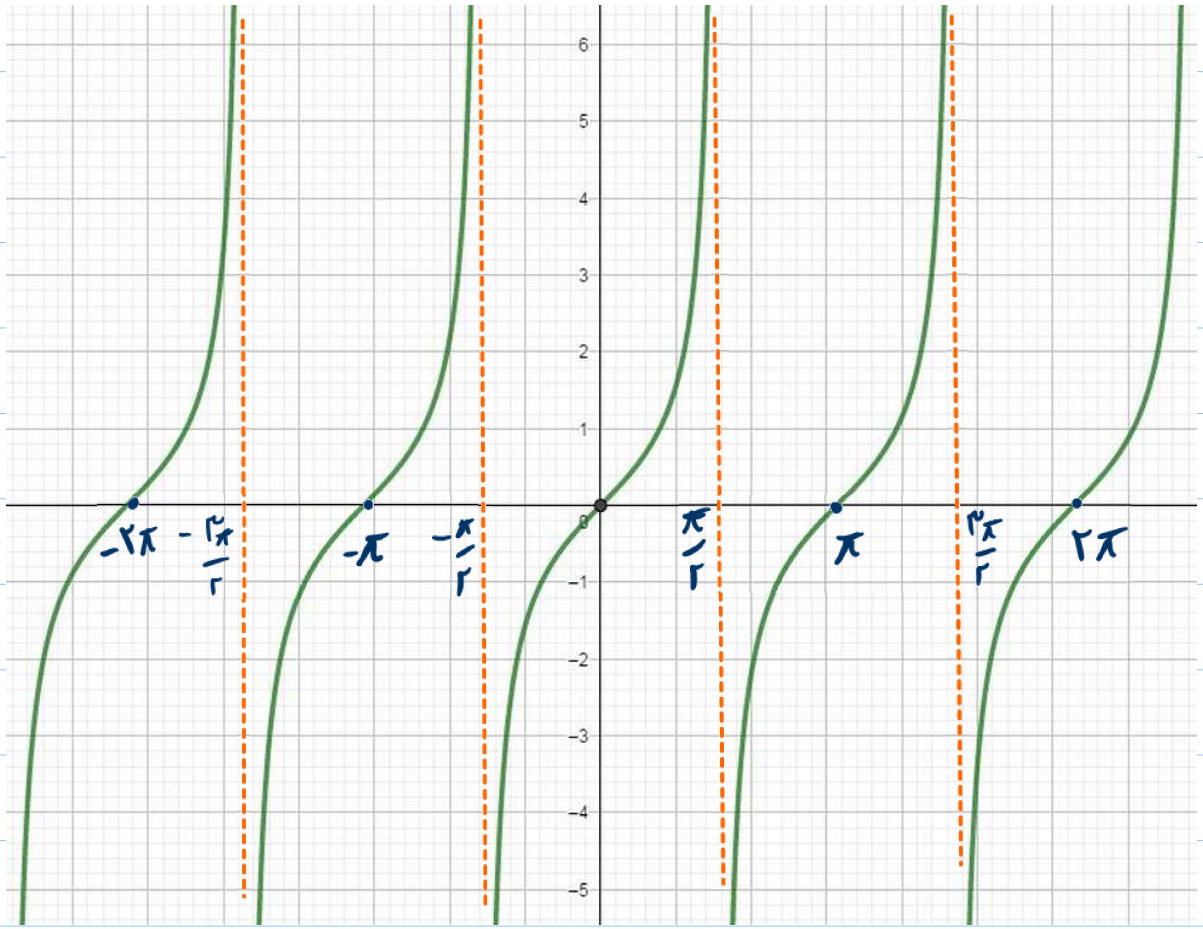


تابع تانژانت

$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

اگر x عددی حقیقی باشد و $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$، تابعی که به هر x تانژانت آن را نسبت می‌دهد تابع تانژانت نامیده می‌شود.

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \tan x$ با در نظر گرفتن دایره مثلثاتی به نمودار زیر می‌رسیم:



پس درباره تابع $f(x)=\tan x$ می‌توان گفت:

۱- $D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

۲- $R_f = \mathbb{R}$

۳- تابع تانژانت، تابعی متناوب است و $T=\pi$

۴- تابع تانژانت یکنوا است ولی در بازه‌هایی که در آن تعریف می‌شود، نه بازه‌های که شامل $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ها نیستند، اکیداً صعودی است.

تذکر: دوره تناوب تابع $y=a\tan(bx+c)+d$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

مثال: دامنه تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{2})$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $x\neq k$ ۲) $x\neq 2k+1$ ۳) $x\neq 2k$ ۴) $\mathbb{Z}$

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{2} \neq k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \neq k\pi$$

$$\times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq k\pi \times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq 2k$$

گزینه ۳

مثال: اگر $f(x)=\tan x-\frac{1}{\tan x}$، دوره تناوب تابع $\frac{1}{f}$ را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}$$

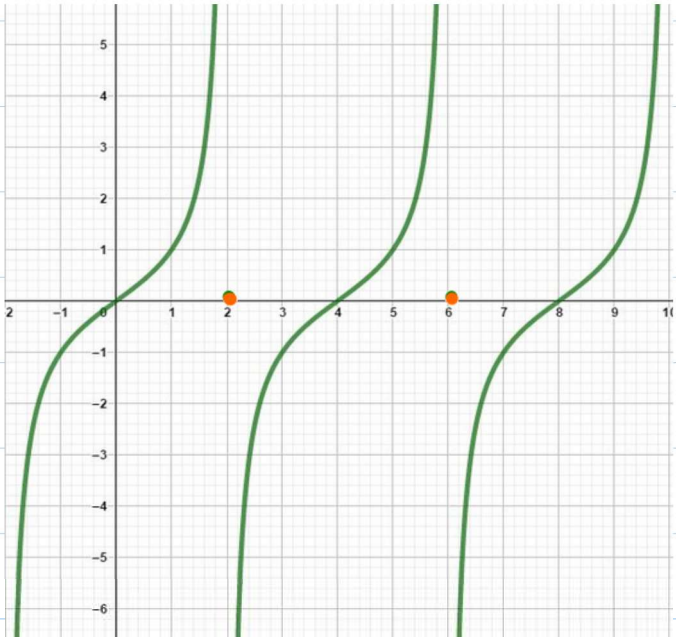
$$=-2\cot 2x=-\frac{2}{\tan 2x}$$

$$\frac{1}{f}=-\frac{1}{2}\tan 2x \Rightarrow T_{\frac{1}{f}}=\frac{\pi}{2}$$

مثال: تابع f با ضابطه $f(x)=\tan(\frac{\pi}{4}x)$ و دامنه $(2,a)$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

حداکثر مقدار a کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

باید طول تمام فاصله بر $\frac{\pi}{4}$ تقسیم یا در $\frac{4}{\pi}$ ضرب شود:



حداکثر مقدار برای a برابر ۶

تابع در بازه $(2,a)$ اکیداً صعودی

باشد ۶ است. پس گزینه ۳ درست است.

به نام خدا

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

قسمت اول: معادلات سینوسی و کسینوسی

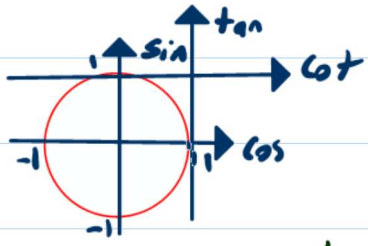
جلسه چهارم: صفحات ۳۵ تا ۴۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

یادآوری :

۱) جدول نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف :

	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تن	0	تن	0
cot	تن	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تن	0	تن



۲) جدول علامت نسبت‌های مثلثاتی :

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

۳) نسبت‌های مثلثاتی زاویه $(-\alpha)$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

۴) دو زاویه متمم: α, β متمم اند. $\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ (۹۰°)

$\sin\alpha=\cos\beta$, $\sin\beta=\cos\alpha$

$\tan\alpha=\cot\beta$, $\tan\beta=\cot\alpha$

مثال: $30+60=90$

$\sin 30=\cos 60=\frac{1}{2}$

$\sin 60=\cos 30=\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵) نسبت‌های متشابه $(k\pi\pm\alpha)$ $k\in\mathbb{Z}$

الف) اگر ضریب π عددی زوج باشد آن را از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می‌کنیم.

$\sin(2k\pi\pm\alpha)=\sin(\pm\alpha)$

$\cos(2k\pi\pm\alpha)=\cos(\pm\alpha)$

ب) اگر ضریب π عددی فرد باشد آن را از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می‌کنیم اما نسبت متشابه را قرینه می‌کنیم.

$\sin((2k+1)\pi\pm\alpha)=-\sin(\pm\alpha)$

$\cos((2k+1)\pi\pm\alpha)=-\cos(\pm\alpha)$

ج) ضریب π چه زوج و چه فرد باشد آن را از کمان‌های $\tan$ و $\cot$ حذف می‌کنیم.

$\tan(k\pi\pm\alpha)=\tan(\pm\alpha)$

$\cot(k\pi\pm\alpha)=\cot(\pm\alpha)$

۶) نسبت های مثلثاتی $\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$

همیشه فرض می کنیم α حاده است و ناحیه ای که زاویه $\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ در آن است را مشخص می کنیم و علامت نسبت را تشخیص می دهیم. حال مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ را حذف کرده و اسم نسبت را به صورت زیر تغییر می دهیم.

$\sin \to \cos$, $\cos \to \sin$, $\tan \to \cot$, $\cot \to \tan$

$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \underbrace{\sin}_{\text{نسبت}} \cos\alpha$

$\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \underbrace{\cos}_{\text{نسبت}} \sin\alpha$

$\tan\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \underbrace{\tan}_{\text{نسبت}} \cot\alpha$

$\cot\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \underbrace{\cot}_{\text{نسبت}} \tan\alpha$

مثال: نسبت های مثلثاتی زیر را برحسب α بنویسید.

۱) $\sin(2805\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$ (2805 فرد) $\quad \underbrace{\quad}_{-\sin\alpha}$

۲) $\cos\left(\frac{33\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$ (33 فرد)

۳) $\cos(24\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (24 زوج)

۴) $\sin\left(\frac{25\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{24\pi + \pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(12\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ($\frac{\pi}{2}$ مضرب فرد)

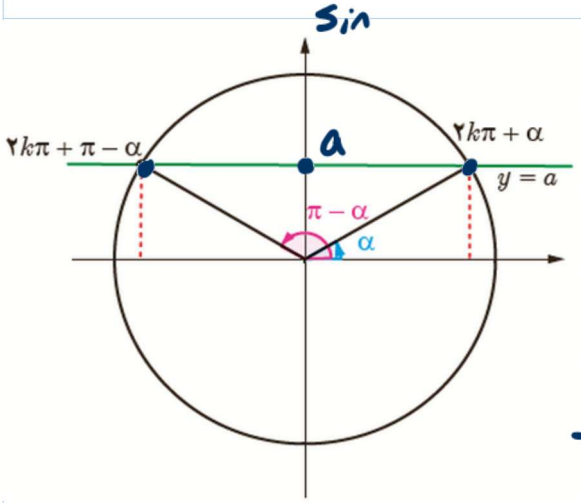
$= +\cos\alpha$

معادلات مثلثاتی

به معادلاتی که مجهول در کمان یا نسبت مثلثاتی قرار می‌گیرد، معادلات مثلثاتی می‌گویند.

روش مشهوری حل معادله $\sin x = a$:

$\alpha + \beta = \pi \xrightarrow{\text{مکمل}} \sin\alpha = \sin\beta$



روی محور sin مقدار a را مشخص و از این نقطه خطی بر محور sin عمود می‌کنیم تا دایره مثلثاتی را قطع کند. نقاط برخورد همان x یا جواب‌ها مورد نظر است. البته توجه داشته باشید که فرمول عمومی x، جواب کلی معادله است.

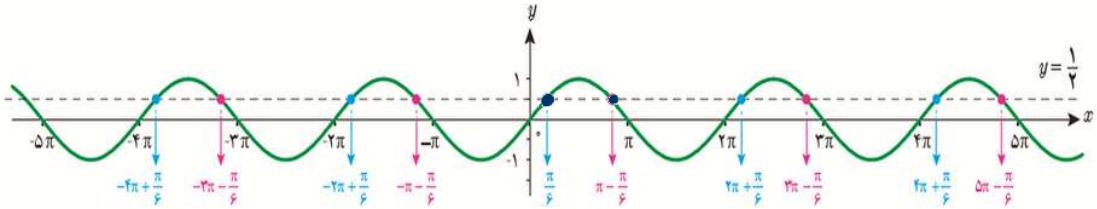
نتیجه:

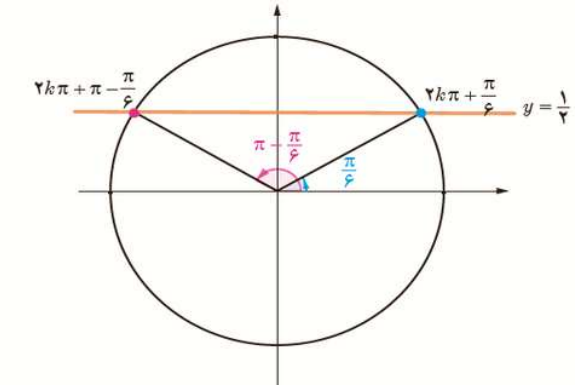
$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

تعمیم ↝ $\sin\bigcirc = \sin\square \Rightarrow \begin{cases} \bigcirc = 2k\pi + \square \\ \bigcirc = 2k\pi + (\pi - \square) \end{cases}$

نکته مهم: اگر معادله به صورت استاندارد گفته شده نبود، باید از روابط این بخش‌های مثلثاتی و جبری عبارت و در صورت لزوم تغییر متغیر استفاده کرده و به شکل $\sin x = \sin\alpha$ یا $\cos x = \cos\alpha$ برسیم.

مثال: چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است مثال بزنید.





$$\sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$

ب) $۴\sin x + \sqrt{۸} = ۰$

الف) $۲\sin x = \sqrt{۳} \xrightarrow{\div ۲} \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳}$

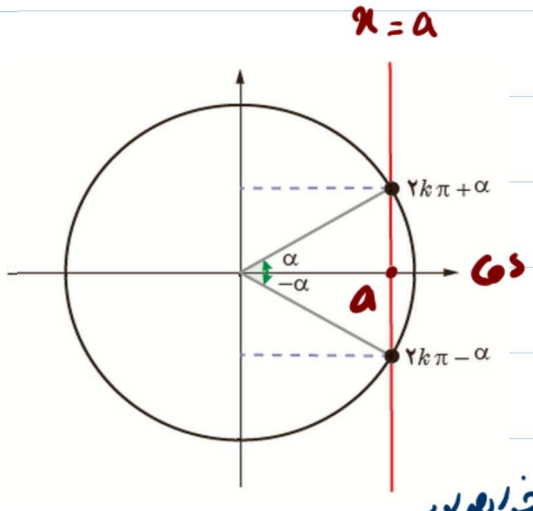
$$\begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

ب) $۴\sin x = -\sqrt{۸} \xrightarrow{\div ۴} \sin x = -\frac{\sqrt{۸}}{۴} = -\frac{۲\sqrt{۲}}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{۴})$

$$\begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{۴}) = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

روش شهودی حل معادله $\cos x = a$:



روی محور cos مقدار a را انتخاب و از این نقطه خطی بر محور cos عمود می‌کنیم تا دایره مثلثی را در نقاط x و $-x$ قطع کند. نقطه برخورد‌ها x یا جواب معادله روی خط خواهد بود.

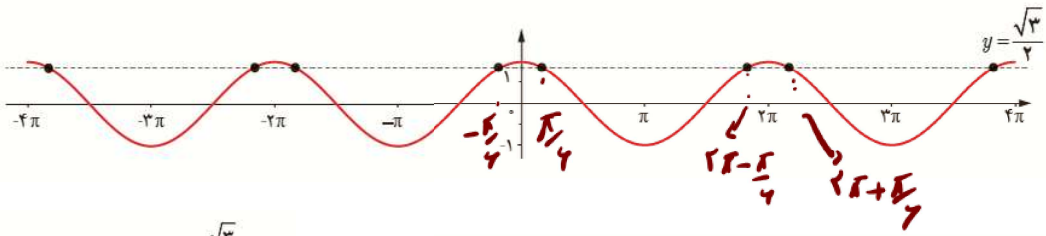
نتیجه:

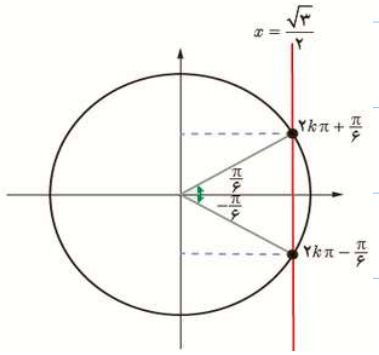
$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

تعمیم

$$\cos \square = \cos \triangle \Rightarrow \square = 2k\pi \pm \triangle$$

مثال: چند زاویه که مقدار کسینوس آنها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است مثال بزنید.





$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$ (جواب عمومی (کلی))

مثال : جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

k	-1	0
x	$-2\pi \pm \frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{3}$

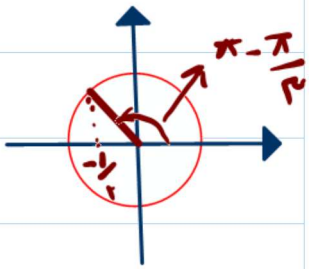
مثال : معادلهٔ مثلثاتی $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید

$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$

$\Delta = 81 - (4 \times 2 \times (-5)) = 81 + 40 = 121$

$\cos x = \frac{9 \pm 11}{4}$ $\begin{cases} \frac{9+11}{4} = 5 \times & -1 \le \cos x \le 1 \\ \frac{9-11}{4} = -\frac{1}{2} \checkmark \end{cases}$

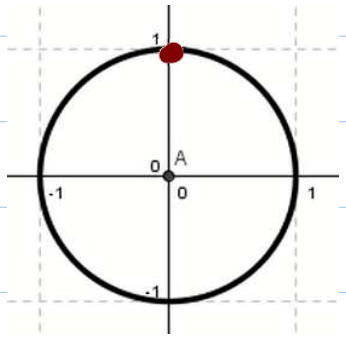
$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos(2\frac{\pi}{3})$



$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

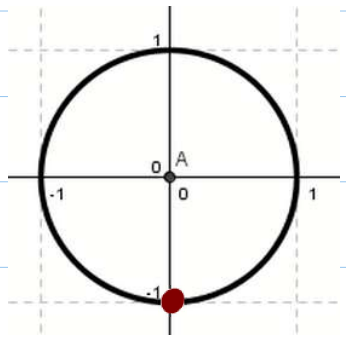
حالت‌های خاص:

$\sin\alpha = 1$



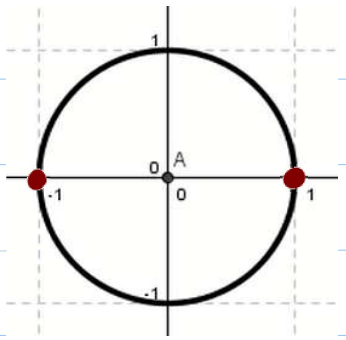
$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin x = -1$



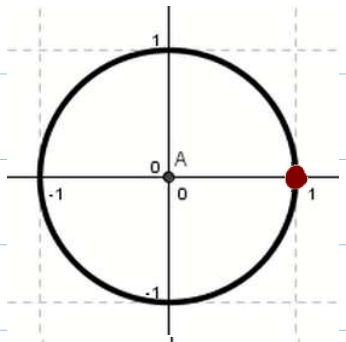
$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$\sin x = 0$



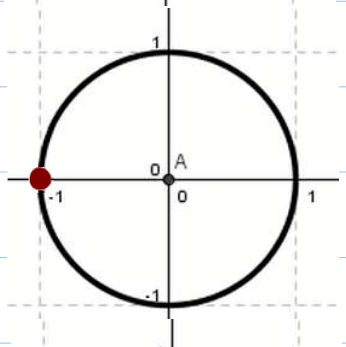
$x = k\pi$

$\cos x = 1$



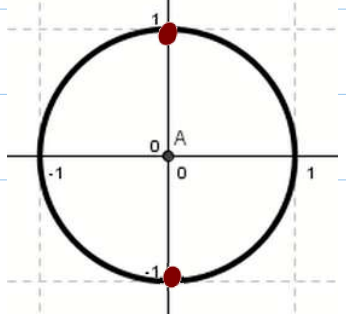
$x = 2k\pi$

$\cos x = -1$



$x = (2k+1)\pi$

$\cos x = 0$



$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{۲}=\sin ۳x$ → $۱=\sin ۳x$ حالت خاص

$۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\div ۳} x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$

ب) $\cos ۲x-\cos x+۱=۰$ → $۲\cos^۲x-۱-\cos x+۱=۰$

$۲\cos^۲x-\cos x=۰ \rightarrow \cos x(۲\cos x-۱)=۰$ ⟨ $\cos x=۰$; $۲\cos x-۱=۰$

$x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$

$۲\cos x=۱ \rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳} \rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

پ) $\cos x=\cos ۲x$

$۲x=۲k\pi\pm x$

$۲x=۲k\pi+x \rightarrow x=۲k\pi$

$۲x=۲k\pi-x \rightarrow ۳x=۲k\pi \rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}$

ت) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$ $\rightarrow$ $1 - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

$-2\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$ $\quad \Delta = 9 - (4 \times (-2)(2)) = 9 + 16 = 25$

$\sin x = \dfrac{3 \pm 5}{-4} \begin{cases} \frac{8}{-4} = -2 \times & -1 \le \sin x \le 1 \\ \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} & \end{cases}$

$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ $\quad \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ $\rightarrow$ $1 - \sin^2 x - \sin x - \frac{1}{4} = 0$

$-\sin^2 x - \sin x + \frac{3}{4} = 0$ $\rightsquigarrow$ $\Delta = (-1)^2 - (4 \times (-1)(\frac{3}{4}))$

$= 1 + 3 = 4$

$\sin x = \dfrac{1 \pm 2}{-2} \begin{cases} \frac{3}{-2} & \times \ -1 \le \sin x \le 1 \\ \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} & \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + 5\frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0$ $\rightsquigarrow$ $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\Delta = 1 - (4 \times 2 \times (-1)) = 1 + 8 = 9$

$\sin x = \dfrac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} & \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + 5\frac{\pi}{6} \end{cases} \\ -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} & \end{cases}$

مثال : معادله ی مثلثاتی $2\sin x+\sqrt{2}=\sqrt{8}$ را حل کنید.

$$2\sin x=\sqrt{8}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2} \xrightarrow{\div 2} \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال : جواب‌های معادله $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ را به‌دست آورید.

$$2\sin x\cos x=2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

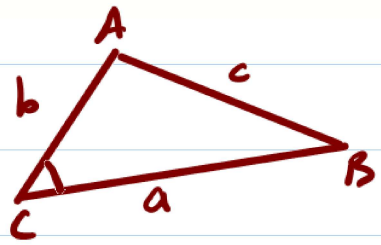
$$\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x=k\pi+\frac{\pi}{6} \\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x=k\pi+\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

$$S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin\hat{C}$$



$$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin\hat{C} \longrightarrow 3 = 6\sin\hat{C}$$

$$\sin\hat{C} = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} \hat{C} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{\pi}{6} \checkmark \\ \hat{C} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{5\pi}{6} \checkmark \end{cases}$$

دو مثلث

به نام خدا

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

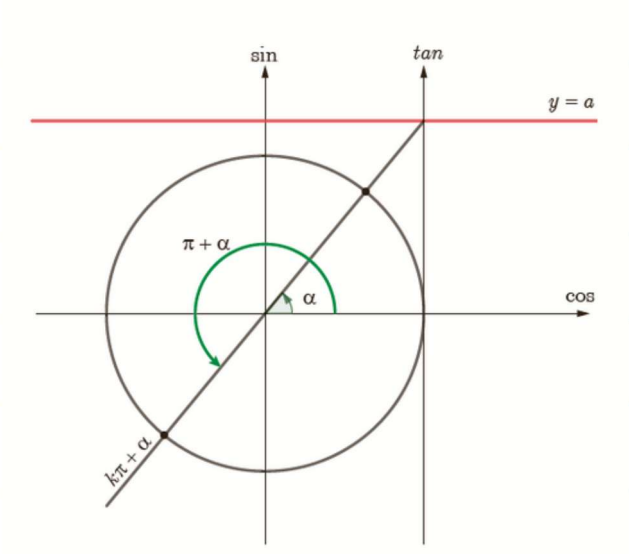
قسمت دوم: معادلات تانژانتی و رابطه

تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه

جلسه پنجم: صفحات ۴۱تا۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

روش شعوری حل معادله $\tan x = a$



روی محور tan مقدار a را مشخص می‌کنیم.

x هایی که tan آن‌ها برابر a می‌شود را جدا می‌کنیم.

جواب معادله همین‌ها هستند.

برای حل معادله $\tan x = a$ ابتدا زاویه‌ای را پیدا می‌کنیم که تانژانت آن برابر a شود.

اگر آن زاویه α باشد، برای یافتن جواب‌های کلی این معادله داریم:

$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

مثال: جواب‌های کلی معادلات زیر را بدست آورید.

۱) $\tan x = -1 \Rightarrow \tan x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

۲) $\tan 3x = \tan 2x \Rightarrow 3x = k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi$

۳) $\tan x - 3\cot x = 0 \Rightarrow \tan x - \frac{3}{\tan x} = 0 \Rightarrow \frac{\tan^2 x - 3}{\tan x} = 0$

$\Rightarrow \tan^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan x = \tan(\pm\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

نکته مهم: از آنجایی که معادلات تانژانتی محدودیت دامنه دارند، باید جواب به دست آمده را در دامنه چک کرد. همچنین در حل معادلات مثلثاتی کسری و رادیکالی هم باید به دامنه توجه کرد.

مثال: جواب‌های معادله $\sin^2 x + \tan x = 2\cot 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ را بیابید.

نکته: $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$

$\cot x - \tan x + \tan x = \cos^2 x \longrightarrow \cot x = \cos^2 x$

$\longrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{1} \longrightarrow \cos^2 x(\sin x) = \cos x$

$\longrightarrow \cos^2 x(\sin x) - \cos x = 0 \longrightarrow \cos x(\sin x \cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (در دامنه تانژانت تعریف نشده)

$\sin x \cos x - 1 = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = 1 \longrightarrow \sin 2x = 2$ جواب ندارد

یا $\sin x = -1$

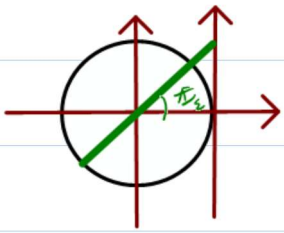
معادله جواب ندارد

مثال: مجموعه جواب های معادله $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ را بیابید.

به توان ۲

$$\Rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{\div \cos x} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$



xهایی که در ربع سوم هستند نمی توانند جواب معادله باشند

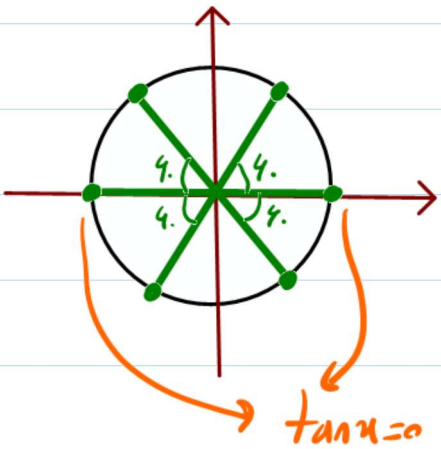
زیرا sin و cos در ربع سوم منفی هستند و زیر رادیکال جذر نمی تواند منفی باشد پس:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

مثال: جواب کلی معادله $\frac{\tan 3x + \tan x}{\tan x} = 1$ را بیابید.

$$\tan 3x + \tan x = \tan x \Rightarrow \tan 3x = 0 \rightarrow 3x = k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$



در $x = k\pi$ ، $\tan x$ تعریف شده است، جواب قبول می شود

پس باید آن ها را از جواب کلی کم کرد:

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

یادآوری :

سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان :

۱) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

۲) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان (2α)

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

تانژانت مجموع و تفاضل دو کمان

۱) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

۲) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

اثبات ۱)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

صورت و مخرج را بر $\cos\alpha\cos\beta$ تقسیم می‌کنیم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad\square$$

رابطه ۲ به طریق مشابه ثابت می‌شود.

مثال: $\tan 15^\circ$ و $\tan 105^\circ$ را محاسبه کنید.

$$\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\times\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

$$\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

مثال: تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\tan 3x+\tan x+\sqrt{3}\tan 3x\tan x=\sqrt{3}$ در بازه $(0,\pi)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\tan 3x + \tan x = \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan 3x \tan x$$

$$\tan 3x + \tan x = \sqrt{3}(1 - \tan 3x \tan x)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 3x + \tan x}{1 - \tan 3x \tan x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan(3x + x) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 4x = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$$

k	0	1	2	3
x	$\frac{\pi}{12}$ ✓	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{4\pi}{12}$ ✓	$\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}$ ✓	$\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{10\pi}{12}$

$$\tan 3x = \tan 3\times\frac{10\pi}{12} = \tan 5\times\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{5\pi}{6}$$ ترین گزینه

جواب گزینه ۳ است.

تانژانت دو برابر کمان:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

اثبات:

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$ ☐

مثال: اگر $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و انتهای کمان x در ربع اول باشد، مقدار $\tan 2x$ را بیابید.

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{5}}{3})^2}$$

$$\Rightarrow 1+\tan^2 x = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5} \rightarrow \tan^2 x = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$$

$$\overset{\sqrt{}}{\Rightarrow} \tan x = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2 \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{1-(\frac{2}{\sqrt{5}})^2}$$

x در ربع اول

$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$$

مثال: اگر $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ را محاسبه کنید.

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \frac{1}{5} \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}$$

$$= \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1+\tan\alpha = 5-5\tan\alpha \Rightarrow 7\tan\alpha = 4 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2(\frac{2}{3})}{1-(\frac{2}{3})^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4\times 9}{5\times 3} = \frac{12}{5}$$

مثال: معادله $\tan 2x = 2\tan x$ در بازه $(0, \frac{5\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 2\tan x$$

$$\Rightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - 2\tan x = 0 \Rightarrow \tan x\left(\frac{2}{1-\tan^2 x} - 2\right) = 0$$

$$\tan x = 0 \longrightarrow x = \pi, 2\pi \quad (1), (2)$$

$$\frac{2}{1-\tan^2 x} - 2 = 0 \longrightarrow \frac{2}{1-\tan^2 x} = 2 \Rightarrow \frac{1-\tan^2 x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1-\tan^2 x = \frac{2}{3} \rightarrow 1-\frac{2}{3} = \tan^2 x \rightarrow \frac{1}{3} = \tan^2 x$$

$$\xrightarrow{\surd} \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\longrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{6}$	$\pi+\frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ (3)	$2\pi+\frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$ (4)
	(1)	$\pi-\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (5)	$2\pi-\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ (6)

۶ جواب دارد.