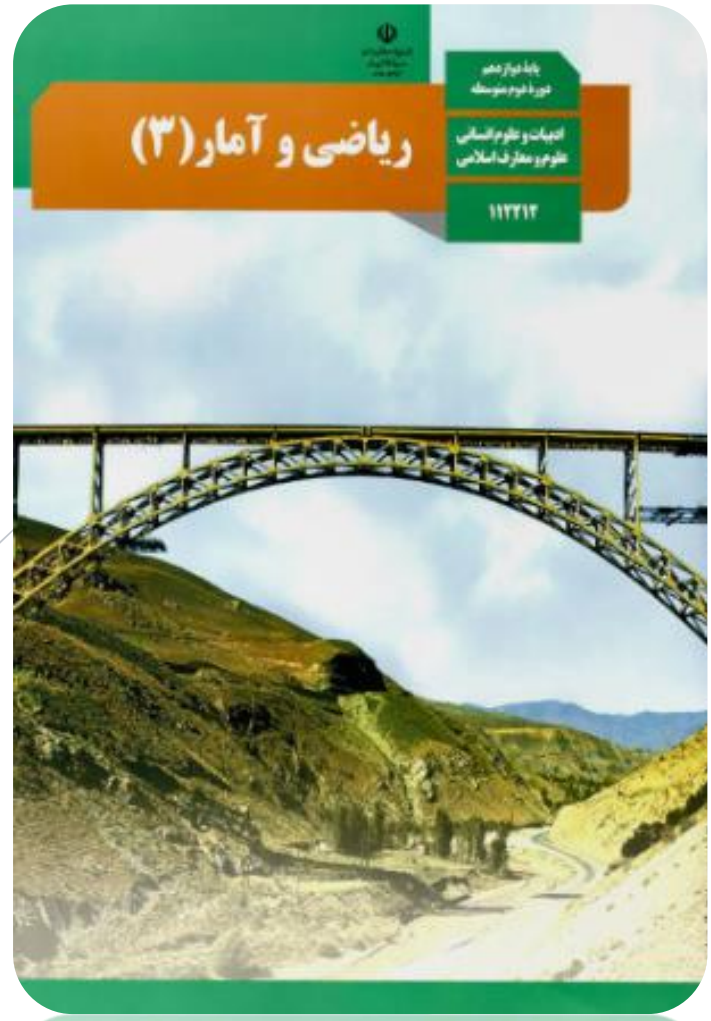
جزوه ریاضی و آمار ۳

پایه دوازدهم انسانی



مولف: سیدابوالفضل فاضلیان

به نام خدا

با توجه به اهمیت نمرات امتحانات نهایی در آزمون سراسری و چالش‌های دانش‌آموزان رشته انسانی با درس ریاضی، بر آن شدم جزوه‌ای خلاصه، کم حجم، شامل درسنامه و حل سوالات امتحان نهایی سال‌های گذشته، تالیف کنم.

با توجه به حجم بالای کار قطعاً اشتباهاتی در جزوه وجود دارد که از علاقه‌مندان پوزش‌می‌طلبم و خوشحال می‌شوم با شناسه شاد بنده به آدرس seyedfazelian@ در میان بگذارند، تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح شود.

در کانال گروه ریاضی استان همدان در شاد به آدرس riazihmd۱@ می توانید جزوه دیگر درس‌ها و مطالب متنوع دیگر را ملاحظه نمایید.

در پایان یادآوری می‌شوم استفاده از این جزوه به هرصورت مجاز و هزینه آن فقط دعا برای عاقبت بخیری نگارنده است.

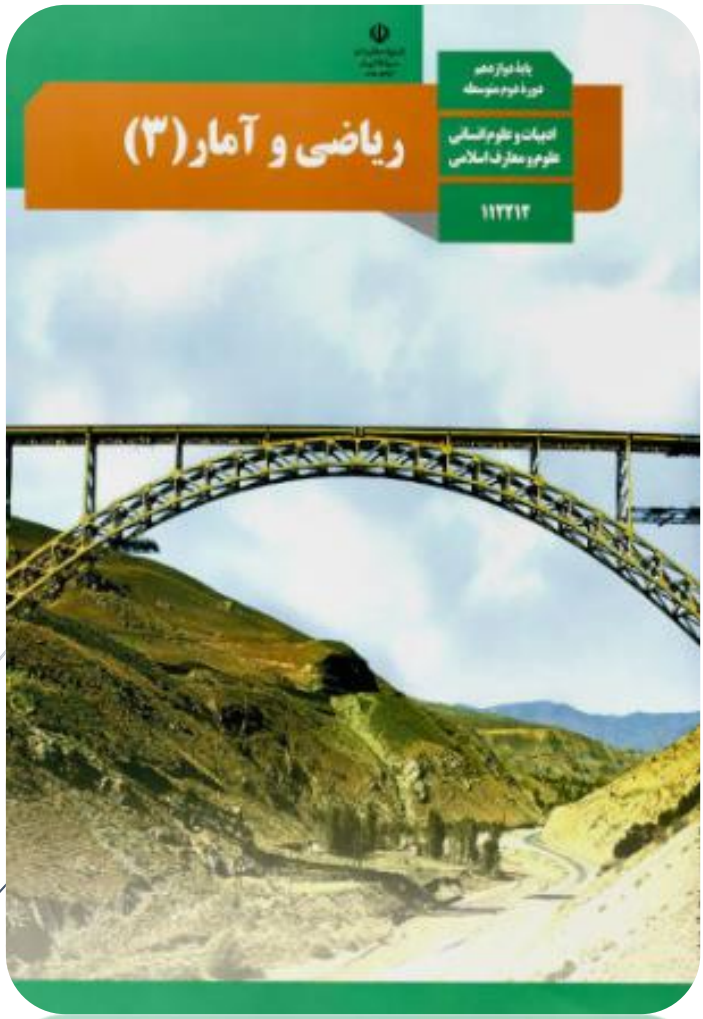
سیدابوالفضل فاضلیان

۱۴۰۳/۵/۲۸

جزوه ریاضی و آمار ۳

پایه دوازدهم انسانی

فصل اول: آمار و احتمال



مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

نکات و مفاهیم پایه در شمارش :

۱- اصل ضرب : فرض کنید انجام کاری k مرحله دارد. اگر مرحله اول را بتوان به m_1 طریق

تکیه بر "و"

انجام داد، مرحله دوم را به m_2 طریق و ... مرحله k ام را به m_k طریق

انجام داد، کل کار مورد نظر را می‌توان به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق انجام داد.

۲- اصل جمع : فرض کنید بتوان کاری را از k روش انجام داد. اگر روش اول به m_1 طریق،

تکیه بر "یا"

روش دوم به m_2 طریق و ... و روش k ام به m_k طریق ممکن باشد و بخواهیم

نقطه‌ای از این k روش را انتخاب کنیم، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$

یا روش اول یا روش دوم یا ...

طریق وجود دارد.

۳- جایگشت :

فرض کنید n شیء متمایز داریم. به هر حالت از قرار گرفتن این اشیاء در کنار هم یک جایگشت

می‌گوییم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز $n!$ است.

$$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad , \quad n! = n(n-1)(n-2)\dots \times 1$$

۴- تبدیل (ترتیب):

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا بعبارت دیگر تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آن‌ها ترتیب قرارگرفتن اهمیت داشته باشد را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و به آن تبدیل r شیء از n شیء متمایز گفته می‌شود و از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

۵- ترکیب:

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم و تعداد آن‌ها را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

سوال ۱)

با حروف کلمه " مهرسان " و بدون تکرار حروف (با معنی یا بی معنی):

الف) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت.

ب) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که با " م " شروع شوند.

الف) $6 \times 5 \times 4 = 120$

ب) $5 \times 4 \times \underset{م}{1} = 20$

سوال ۲)

با حروف کلمه "خورشید" و بدون تکرار حروف (با معنی یا بی معنی).

الف) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به " د " ختم شوند؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با " ی " شروع و به " خ " ختم شوند؟

الف) $\underset{د}{1} \times 5 \times 4 = 20$

ب) $\underset{خ}{1} \times 4 \times 3 \times \underset{ی}{1} = 12$

سوال ۳)

ارقام ۱ تا ۹ مفروض اند: (بدون تکرار ارقام)

الف) چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد ۴ رقمی زوج می‌توان نوشت؟

الف) $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

ب) $8 \times 7 \times 6 \times \underset{۸,۶,۴,۲}{4} = 1344$

سوال ٤)

با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۹ و۷ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

$$\boxed{۷} \times \boxed{۶} \times \boxed{۵} = ۲۱۰$$

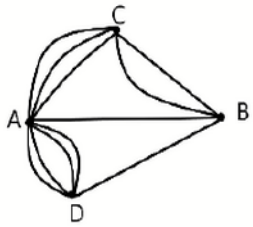
سوال ۵)

با ارقام $۱, ۲, ۴, ۷, ۹$ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

$$\boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \underset{۱,۷,۹}{\boxed{۳}} = ۳۶$$

سوال ۶)

بین چهار شهر A و B و C و D مطابق شکل زیر راه هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟



C → A → D : $۳ \times ۴ = ۱۲$

سوال ۷)

می‌خواهیم از بین ۲ سیب ، ۳ کیوی و ۴ نارنگی یک میوه انتخاب کنیم، به چند طریق می‌توانیم این میوه را انتخاب کنیم .

$$۲ + ۳ + ۴ = ۹$$

سوال ۸)

مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می تواند:

الف) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند؟

ب) یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند؟

پ) یک کتاب ریاضی انتخاب کرد.

$\binom{4}{1}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{3}{1}$

الف) $3+2+4=9$

ب) $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}=3\times2\times4=24$

پ) $\binom{3}{1}=3$

سوال ۹)

به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد.

$$\binom{9}{4}=\frac{9!}{4!(9-4)!}=\frac{9!}{4!\times5!}=\frac{9\times8\times7\times6\times5!}{4\times3\times2\times1\times5!}=21\times6=126$$

سوال ۱۰)

به چند طریق می‌توان ۳ توپ همرنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟

$$\binom{5}{3}+\binom{4}{3}=\frac{5\times4\times3}{6}+4=10+4=14$$

سوال ۱۱)

مجموعه پنج عضوی $\{1,2,4,6,8\}$ ، چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟

$$\binom{5}{2}=\frac{5\times4}{2}=10$$

نکات و مفاهیم پایه در احتمال :

۱- پدیده یا آزمایش تصادفی : پدیده ای است که نتیجه آن را نتوان قبل از رخ دادن ، به طور قطعی پیش بینی کرد .

۲- فضای نمونه ای : مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای می نامیم و آن را با S نمایش می دهیم .

۳- پیشامد تصادفی : هر زیرمجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد تصادفی در آن فضای نمونه ای می گویند و آن را A ، B ، C ، ... نشان می دهیم .

۴- اعمال روی پیشامدها : اگر A و B پیشامدهای تصادفی در فضای نمونه ای S باشند :

الف) اجتماع A و B : پیشامد $A \cup B$ را تعریف می کند که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد :

$$A \cup B = \{ x \in S \mid x \in A \ \vee \ x \in B \}$$

ب) اشتراک A و B : پیشامد $A \cap B$ را تعریف می کند که هر دو پیشامد A و B رخ دهند :

$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

پ) تفاضل A و B: پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد:

$$A-B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(از A اشتراک A و B را حذف می‌کنیم.)

ت) متمم یک پیشامد: پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد:

$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

$$(A' = S - A)$$

۵- **احتمال رخ دادن یک پیشامد**: احتمال وقوع پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}}$$

(تعداد اعضا)

دقت کنید برای یافتن $n(A)$ و $n(S)$ در صورت امکان با نوشتن پیشامد و فضای نمونه‌ای، تعداد اعضای آن‌ها را حساب کنید در غیر این صورت از اصل ضرب و جمع، جایگشت و ترکیب استفاده می‌کنیم.

۶- چند پیشامد خاص :

الف) اگر A تهی باشد آنگاه $P(A)=0$ است و به پیشامد A غیرممکن می‌گویند.

ب) اگر $A=S$ باشد آنگاه $P(A)=1$ است و به پیشامد A حتمی می‌گویند.

ج) اگر $A\cap B=\emptyset$ آنگاه A و B را پیشامدهای ناسازگار می‌گویند.

۷- چند قانون در احتمال :

۱) احتمال همیشه عددی بین ۰ و ۱ است یعنی $0\le P(A)\le 1$.

۲) $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۳) اگر A و B ناسازگار باشند در قانون ۲ ؛ $P(A\cap B)$ صفر می‌شود :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

۴*) $$1=P(S)=P(A\cup A')=P(A)+P(A')$$

پس قانون احتمال پیشامد متمم را داریم :

$$P(A')=1-P(A) \quad \checkmark$$

یا

$$P(A)=1-P(A') \quad \checkmark$$

سوال ۱۲)

در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف)مجموع اعداد رو شده مساوی ۱۰ باشد.

ب)اعداد رو شده از هر دو تاس یکسان و هر دو زوج باشد.

الف) $A=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

ب) $B=\{(2,2),(4,4),(6,6)\}$

سوال ۱۳)

یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم.

الف) فضای نمونه ای این آزمایش را بنویسید.

ب)پیشامد A که در آن سکه پشت وتاس عدد فرد بیاید را بنویسید.

الف) $S=\{(ر,1),(ر,2),(ر,3),(ر,4),(ر,5),(ر,6),(پ,1),(پ,2),\ldots,(پ,6)\}$

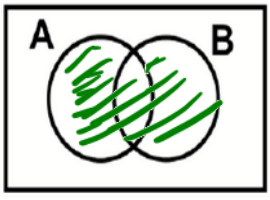
ب) $A=\{(پ,1),(پ,3),(پ,5)\}$

سوال ۱۴)

در شکل زیرپیشامد خواسته شده را سایه بزنید.

" پیشامد A یا B رخ دهد "

S



سوال ۱۵)

خانواده ای دارای ۲ فرزند است.

الف)فضای نمونه‌ای برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده بنویسید.

ب)احتمال آنکه هر دو فرزند از یک جنس باشد را به‌دست آورید.

پ)احتمال آنکه حداکثر یک فرزند پسر باشد را به‌دست آورید.

الف) $S=\{bb, gg, gb, bg\}$ $\quad n(S)=4$

ب) $A=\{bb, gg\}$, $n(A)=2 \Rightarrow P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

پ) $B=\{gb, bg, gg\}$ $\quad n(B)=3 \rightarrow P(B)=\frac{3}{4}$

سوال ۱۶)

هر یک از اعدادفرد طبیعی ۱ تا ۱۵ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت ها به طور تصادفی یک کارت را بر می‌داریم مطلوب است محاسبه احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

$S=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ $\quad n(S)=8$

$A=\{3, 9, 15\}$ $\quad n(A)=3$ $\quad P(A)=\frac{3}{8}$

سوال ۱۷)

یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه تاس حداکثر ۳ یا سکه رو بیاید.

$n(S)=6\times 2=12$

$A=\{(1,ر), \ldots (4,ر), (1,پ), (2,پ), (3,پ)\}$ $\quad n(A)=9 \rightarrow P(A)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

(4,ر) (3,پ)

سوال ۱۸)

یک تاکسی دارای ۴ سرنشین است ؛ مطلوبست محاسبه احتمال اینکه هر ۴نفر در ماه خرداد متولد شده باشند.

$$P(A) = \frac{1\times1\times1\times1}{12\times12\times12\times12} = \frac{1}{12^4}$$

سوال ۱۹)

خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.

الف)فضای نمونه‌ای برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.

ب)مطلوب است احتمال آنکه هر سه فرزند از یک جنسیت نباشند.

الف) $S = \{bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb, ggg\}, n(S)=8$

ب) $n(A)=6 \longrightarrow P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

سوال ۲۰)

فضای نمونه‌ای

می‌خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش آموز پایه یازدهم یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مطلوب است احتمال آن که ۴ نفر از اعضای تیم دانش آموز پایه دوازدهم و ۲ نفر از اعضای تیم دانش آموز پایه یازدهم با شند.

شامه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{4}\binom{4}{2}}{\binom{9}{6}} = \frac{5\times\frac{4\times3}{2}}{\frac{9\times8\times7}{6}} = \frac{30}{84}$$

$\binom{9}{6} = \binom{9}{3}$

سوال ۲۱)

از جعبه‌ای که شامل ۹ سیب سالم و ۲ سیب لکه‌دار است، ۴ سیب را به طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه سه سیب سالم و یک سیب لکه دار باشد.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{9}{3}\times\binom{2}{1}}{\binom{11}{4}}=\frac{84\times 2}{330}=\frac{84}{165}$$

$$\binom{11}{4}=\frac{11!}{4!\times 7!}=\frac{11\times 10\times 9\times 8\times 7!}{4\times 3\times 2\times 1\times 7!}=330$$

سوال ۲۲)

از بین ۲ دانش آموز رشته ریاضی و ۳ دانش آموز رشته تجربی و ۲ دانش آموز رشته انسانی، ۳ دانش آموز را به تصادف برای اردوی مشهد انتخاب می کنیم. چقدر احتمال دارد از هر رشته یک دانش آموز انتخاب شود؟

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{2\times 3\times 2}{\frac{7\times 6\times 5}{6}}=\frac{12}{35}$$

سوال ۲۳)

در کیسه ای ۴ مهره سفید، ۳ مهره زرد و ۲ مهره آبی وجود دارد. ۳مهره به تصادف از آن خارج می کنیم. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه رنگ سه مهره متفاوت باشد.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{2\times 3\times 4}{\frac{9\times 8\times 7}{6}}=\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$$

مقدمه

تحلیل اطلاعات پیرامون ما لازمه بهتر زندگی‌کردن و درست تصمیم گرفتن است. درک درستی از شاخص‌ها، نمودارها و مفاهیم آماری به ما کمک می‌کند که تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم.

مراحل پنج‌گانه

حل کردن مسائل مرتبط با آمار به صورت چرخه‌ای کامل شامل گام‌های زیر است:

۱) بیان مسئله

۲) طرح و برنامه‌ریزی

۳) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها

۴) تحلیل داده‌ها

۵) بحث و نتیجه‌گیری

نمودار زیر را به خاطر بسپارید:



تذکر مهم : فرایند حل مسئله را چرخه می‌نامیم زیرا اغلب پس از اجرای تمامی گام‌ها با روشن‌تر شدن ابعاد مختلف مسئله و براساس نتایج و تجربه به دست آمده، یک مسئله جدید دقیق‌تر شکل می‌گیرد. در واقع برای یافتن پاسخ پرسش اصلی تا رسیدن به یک جمع‌بندی منطقی یک مسئله چندین بار بازبینی می‌شود.

بررسی گام‌های چرخه آمار

گام اول (بیان مسئله)

طراحی یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. پس پیش از هر چیز باید مسئله‌ای که در دنیای واقعی وجود دارد به درستی درک شود و به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری بیان گردد. یعنی با توجه به اهداف، بودجه ،زمان و دیگر شرایط موجود جامعه آماری را محدود و هدف مطالعه را مشخص می‌کنیم.

گام دوم (طرح و برنامه‌ریزی)

اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه‌گیری در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد امکان به اطلاعات کمی(عددی) تبدیل کنیم. در این گام راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم و درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.

توجه: هر چه پراکندگی متغیر بیشتر باشد برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگتری نیاز داریم.

گام سوم (گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها)

در این گام به سازمان‌دهی داده‌ها می‌پردازیم و تا حد امکان از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم. ممکن است در مرحله اندازه-گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباه‌ها را تصحیح کرد. تبدیل واحدهای اندازه‌گیری یا محاسبه یک متغیر جدید بر اساس اطلاعات گردآوری شده در این گام انجام می پذیرد.

گام چهارم (تحلیل داده‌ها)

در این گام، داده‌ها را تحلیل می‌کنیم و نتایج را ارائه می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری متناسب با هدف‌های کار، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها است.

جا دارد در این گام به برخی مباحث مهم در آمار، که سال‌های قبل خوانده‌اید، نگاهی دوباره داشته باشیم و برخی از مطالب را تکمیل کنیم.

شاخص‌های مرکزی : به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکزند. مهمترین این شاخص‌ها میانگین و میانه هستند.

۱.میانگین: اگر n داده به صورت $x_n, ..., x_۲, x_۱$ داشته باشیم، میانگین آن‌ها را با نماد $\bar{X}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{X} = \frac{x_۱ + x_۲ + ... + x_n}{n}$$

۲.میانه: عددی است که داده‌ها را به دو دسته مساوی تقسیم می‌کند که یک دسته بزرگ‌تر و یک دسته کوچکتر از آن هستند. برای محاسبه آن، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. اگر تعداد داده‌ها فرد باشد داده وسطی و اگر زوج باشد میانگین دو داده وسطی ، میانه داده‌ها است.

شاخص‌های پراکندگی: دوری یا نزدیکی داده‌ها به شاخص‌های مرکزی را نشان می‌دهند. در واقع به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها، چگونه متراکم یا پراکنده شده-اند. مهمترین این شاخص‌ها دامنه تغییرات، انحراف معیار و دامنه‌میان‌چارکی است.

۱.دامنه تغییرات: اختلاف بزرگترین داده و کوچکترین داده است.

۲.انحراف معیار (SD): نشان دهنده اختلاف داده‌ها از میانگین است .در واقع با داشتن انحراف معیار می‌توانیم مشخص کنیم داده‌ها با میانگین چقدر فاصله دارند. برای محاسبه انحراف معیار n داده $x_n, ..., x_۲, x_۱$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$SD = \sqrt{\frac{(x_۱ - \bar{X})^۲ + (x_۲ - \bar{X})^۲ + ... + (x_n - \bar{X})^۲}{n}}$$

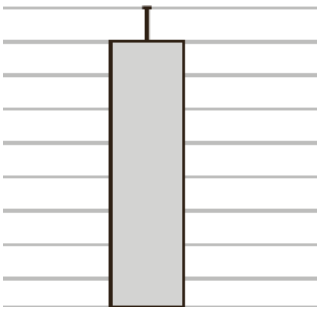
۳.دامنه میان‌چارکی (IQR): میانه داده‌های قبل از میانه را چارک اول و میانه داده‌های بعد از میانه را چارک سوم می‌نامیم. تفاضل چارک سوم و اول را دامنه میان چارکی می‌نامیم یعنی : $IQR = Q_۳ - Q_۱$.

یادآوری: به داده‌ای که مقدار آن بسیار بزرگتر یا بسیار کوچکتر از بقیه داده است، **داده دور افتاده** می‌گوییم.

نکته مهم: هنگامی که در بین داده‌ها داده دور افتاده داشته باشیم، از شاخص مرکزی میانه و از شاخص پراکندگی دامنه میان چارکی استفاده می‌کنیم.

معرفی دو نمودار مهم :

۱.نمودار میانگین-انحراف معیار: برای داده‌هایی که داده دور افتاده نداریم مناسب است. مستطیل نشان دهنده میانگین و میله روی آن به اندازه انحراف معیار بالا می‌آید.



۲.نمودار جعبه‌ای: برای داده‌هایی که در بین داده‌ها ، داده دور افتاده نیز وجود دارد مناسب است. مانند شکل از کوچکترین داده شروع کرده خطی افقی می کشیم تا به چارک اول برسیم. از چارک اول تا چارک سوم مستطیلی رسم می کنیم. در انتها از چارک سوم تا بزرگترین داده خط افقی رسم می کنیم. خط عمودی رسم شده داخل مستطیل نشان دهنده مکان میانه است.



تذکر: نمودار جعبه‌ای برای نشان دادن محل تراکم و محل پراکندگی داده‌ها مناسبتر است. همچنین اگر از الگوی توزیع داده‌ها و وجود داده‌های دور افتاده اطلاعی نداشته باشیم این نمودار برای متغیرهای کمی مطمئن‌تر است.

نکته مهم: برای متغیرهای کمی هم گزارش معیار گرایش به مرکز و هم گزارش معیار پراکندگی لازم است.

نکته مهم: برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

گام پنجم(بحث و نتیجه گیری)

در این گام با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا می‌کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم بسیار مهم است و چون تمامی افراد جامعه آماری را بررسی نکرده‌ایم، نتایج قطعی نیستند و در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم.

سوال: از جامعه‌ای با اندازه N به چند طریق می‌توانیم نمونه‌هایی با اندازه n داشته باشیم؟

یکپارچگی چرخه آمار در حل مسائل

در تمامی گام‌های حل مسئله مرتبط با آمار، کارگروهی و همکاری کارشناسان زمینه پژوهش مورد بررسی، امری واجب است. کیفیت اجرای هر یک از گام‌های چرخه آمار، گام‌های دیگر را به شدت تحت تاثیر قرار می دهد.

سوالات امتحان نهایی:

۱. (امتحان نهایی دی ۹۷) جاهای خالی زیر را پر کنید.

الف)راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم. گام.....چرخه آمار است.

ب) تعداد اعضای جامعه .....می‌باشد.

۲. (امتحان نهایی دی۹۷) در کدامیک از موارد زیر احتیاج به نمونه بیشتری داریم؟ چرا؟

الف) سن دانش آموزان یک کلاس

ب) معدل دانش آموزان یک کلاس

۳. (امتحان نهایی خرداد۹۸) جاهای خالی زیر را پر کنید.

الف) اگر در داده‌ها داده دور افتاده داشته باشیم، معیار پراکندگی .....مناسب است.

ب) داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد امکان از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم، گام .....چرخه آمار است.

۴. (امتحان نهایی شهریور۹۸) برای توصیف داده‌های کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش .....همراه باشد.

۵. (امتحان نهایی شهریور۹۸) درستی یا نادرستی هریک را مشخص کنید.

الف) طرح و برنامه ریزی، دومین گام برای یافتن داده‌ها است.

ب) هر چه جامعه بزرگتر شود ، اندازه نمونه ثابت است.

۶. (امتحان نهایی شهریور۹۸) در نمونه‌گیری زیر مصرف آب ۹ خانوار در یک دوره (برحسب متر مکعب) به دست آمده است. میانه، چارک اول و چارک سوم را مشخص کنید.

۱۳۰،۶۵،۷۵،۱۲۰،۵۰،۳۰،۷۰،۱۱۰،۴۰

۷. (امتحان نهایی خرداد۹۹) با توجه به چرخه آماری، نام هر گام را بنویسید.

الف) راهی برای رسیدن به پاسخ مساله پیدا می‌کنیم و به نمونه‌گیری و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.

ب) نتایج به دست آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.

۸. (امتحان نهایی شهریور۹۹) جاهای خالی زیر را پر کنید.

الف) هنگامی که داده دورافتاده نداشته باشیم، میانگین و..... شاخص‌های مناسب برای توصیف هستند.

ب) مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر.....نمودار جعبه‌ای است.

۹. (امتحان نهایی دی۹۹) جاهای خالی زیر را پر کنید.

الف) .....داده‌ای است که نصف داده‌ها از آن کمتر و نصف داده‌ها از آن بیشتر است.

ب) بیان مساله و فهم آن.....گام در چرخه آمار است.

پ) هر چه پراکندگی متغیر در جامعه بیشتر باشد، برای اطمینان از وجود تنوع، به اندازه نمونه..... نیاز داریم.

۱۰. (امتحان نهایی دی۹۹) درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) معیارهایی مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکزند.

ب) برای توصیف داده‌های کیفی گزارش درصد باید با گزارش تعداد همراه باشد.

پ) دامنه تغییرات از معیارهای گرایش به مرکز است.

۱۱. (امتحان نهایی خرداد۱۴۰۰) درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وقتی داده دورافتاده داریم، میانه معیار مناسبی برای توصیف داده‌ها می‌باشد.

ب) برای توصیف داده‌های کمی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد برابر باشد.

پ) مرتب کردن داده‌ها در گام دوم چرخه آمار اتفاق می‌افتد.

ت)طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهمترین گام رسیدن به پاسخ است که در بیان مسئله صورت می‌گیرد.

۱۲. (امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۰) گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) کدام نمودار، بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها متراکم‌تر و پراکنده‌تر است؟

۱)مستطیلی ۲) دایره‌ای ۳) میله‌ای ۴) جعبه‌ای

ب) گام سوم در چرخه آمار، در حل مسائل.....می باشد.

۱)بحث و نتیجه‌گیری ۲)گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها ۳)طرح و برنامه‌ریزی ۴)تحلیل داده‌ها

پ) اگر در داده‌ها، داده دورافتاده وجود نداشته باشد، کدام معیار گرایش به مرکز مناسب است؟

۱)مد ۲)انحراف معیار ۳)میانگین ۴)میانه

۱۳. (امتحان نهایی دی ۱۴۰۰)

الف) اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر موردنظر.....است.

ب) تعداد اعضای جامعه را .....جامعه می نامیم.

پ) نمودار.....بهتر نشان می‌دهد که داده ها کجا متراکم تر و کجا پراکنده ترند.

۱۴. (امتحان نهایی دی ۱۴۰۰) درستی یا نادرستی هریک از عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) هنگامی که داده دورافتاده داشته باشیم، می توانیم از میانه و دامنه میان چارکی استفاده کنیم.

ب) گردآوری و سازماندهی داده‌ها سومین گام در چرخه آمار است.

پ) برای توصیف داده‌های کیفی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد متفاوت باشد.

۱۵. (امتحان نهایی خرداد۱۴۰۱)

داده‌های زیر میزان حقوق ماهیانه(برحسب میلیون تومان) کارمندان یک شرکت خصوصی را نشان می‌دهد:

۸و۶و۶و۵و۱۱و۲۰و۹و۸و۳۵و۱۲و۱۰

الف) دامنه تغییرات و میانه داده‌های بالا را بیابید.

ب) آیا میانه گرایش به مرکز مناسبی برای توصیف این داده‌هاست؟ چرا؟

۱۶. (امتحان نهایی خرداد۱۴۰۱)

تفسیر نتایج بدست آمده، کدام گام در چرخه حل مسائل آماری است؟

۱)بیان مساله ۲)گردآوری داده‌ها ۳) تحلیل داده‌ها ۴) بحث و نتیجه‌گیری

۱۷. (امتحان نهایی شهریور۱۴۰۱)

در یک مطالعه آماری، برای اندازه‌گیری وزن افراد از دو واحد متفاوت استفاده شده است.

الف) این مورد مربوط به اجرای نادرست کدام یک از گام‌های چرحه آمار در حل مسائل است؟

ب) این اجرای نادرست بر کدام گام های این چرخه اثر می‌گذارد؟

۱۸. (امتحان نهایی شهریور۱۴۰۱)

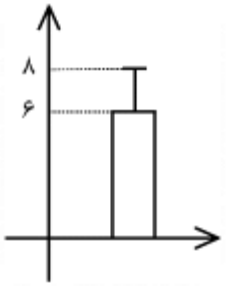
برای بررسی میزان مطالعه افراد یک شهر، آیا انتخاب نمونه از بین افراد عضو کتابخانه عمومی آن شهر، روش نمونه‌گیری مناسبی است؟چرا؟

۱۹. (امتحان نهایی دی ۱۴۰۱)

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) درگام پنجم چرخه آمار، نتایج بدست آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.

ت) در شکل مقابل انحراف معیار و میانگین به ترتیب ۶و۸ است.



۲۰. (امتحان نهایی دی ۱۴۰۱)

اگر داده‌ها برابر باشند، دامنه تغییرات آن‌ها ..... می‌شود.

۲۱. (امتحان نهایی دی ۱۴۰۱)

درصد قبولی دانش آموزان دو مدرسه A و B در درس ریاضی به ترتیب ۶۵ درصد و ۸۰ درصد بوده است. تعداد قبولی دانش آموزان کدام مدرسه بیشتر است؟ چرا؟

۲۲. (امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲)

الف) کدام گزینه جزء گام تحلیل داده‌ها در چرخه حل مسائل آماری محسوب نمی‌شود؟

۱) استفاده از نمودارها ۲) مرتب‌کردن داده‌ها ۳) گزارش معیارها ۴) تفسیر داده‌ها

ب) در یک نمودار جعبه‌ای اگر چارک اول برابر۳ و دامنه میان چارکی آن برابر ۱۱باشد، چارک سوم آن کدام است؟

۱)۱۴ ۲)۷ ۳)۸ ۴)۱۵

۲۳. (امتحان نهایی شهریور۱۴۰۲)

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است.

۲۴. (امتحان نهایی شهریور۱۴۰۲)

ب) مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر کمی.....است.

۲۵. (امتحان نهایی شهریور۱۴۰۲)

کدام گزینه جزء گام بحث و نتیجه‌گیری از چرخه حل مسائل آماری محسوب می‌شود؟

۱)نقد و بررسی ۲)سازماندهی ۳) شیوه اندازه‌گیری ۴) نمودارها و جدول‌ها

۲۶. (امتحان نهایی شهریور۱۴۰۲)

داده‌های ۵و۸و۵و۷و۸و۶و۸و۹و۷و۳۰و۵و۶ متوسط ساعت های تماشای تلویزیون تعدادی از دانش آموزان یک کلاس در هفته را نشان می‌دهد. کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی، برای توصیف داده‌های ((ساعت‌های تماشای تلویزیون)) مناسب‌تر است؟ چرا؟

سوال ۱)

جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

الف) راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم گام ..دوم.. چرخه آماز است.

ب)تعداد اعضای جامعه..... می‌باشد.
اندازه جامعه

سوال ۲)

جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

الف) اگر در داده‌ها داده دورافتاده داشته باشیم، معیار پراکندگی دامنه تغییرات . مناسب است.

ب) داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم، گام سوم . چرخه آمار است.

سوال ۳)

درستی و نادرستی هر یک را مشخص کنید.

الف) طرح و برنامه ریزی، دومین گام برای یافتن داده ها است. . درست

ب) هر چه جامعه بزرگ تر شود، اندازه نمونه ثابت می ماند.. نادرست

سوال ٤)

جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

الف) اگر $A \cap B = \varnothing$ باشد، دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم.

ب) فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس و دو سکه ۲٤...عضو دارد. $6 \times 2^2 = 24$

پ) پیشامد A'..... وقتی رخ دهد که پیشامد A رخ ندهد.

ت) گردآوری و پاک سازی داده‌ها،گام سوم..... در چرخه آمار است.

سوال ۵)

درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

الف)تساوی $\frac{۶!}{۳!} = ۲!$ همواره برقرار است. نادرست $۶\times۵\times۴\times۳! = ۱۲۰ \neq ۲!$

ب)خارج کردن ۲ مهره سفید از جعبه‌ای که در آن ۵ مهره سفید است، یک پیشامد حتمی است. درست

پ)در فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس، پیشامد رو شدن عددی بزرگتر از ۶ نشدنی است. درست

ت) نتیجه حل معادله $(x+۱)^۲ = ۰$ یک پدیده تصادفی است. نادرست

سوال۶)

جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

الف) به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی پیشامد می‌گوییم.

ب) فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه ۸ عضو دارد.

پ) پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می دهد که پیشامد A و B هر دو رخ دهند.

ت) هنگامی که داده دور افتاده نداشته باشیم، میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند.

ث)مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر کیفی نمودار جعبه‌ای است.

سوال۷)

درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

الف)طرح و برنامه ریزی دومین گام در چرخه آمار است. درست

ب)برای توصیف داده‌های کیفی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد متفاوت باشد. نادرست

پ)نتیجه یک آزمون چهار گزینه ای که نیمی از سوالات را شانسی پاسخ داده ایم یک پیشامد حتمی است. نادرست

ت) برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $۰! = ۱$ و $۱! = ۱$ تعریف می‌کنیم. درست

ث) تهی زیر مجموعه همه مجموعه ها می‌باشد. درست

سوال ۸)

جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

الف) پیشامد . A-B وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد.

ب) تعداد جایگشت های n تایی از n شیء متمایز، برابر است با . . . . n! .

پ) . میانه . . داده ای است که نصف داده ها از آن کمتر و نصف داده ها از آن بیشتر هستند.

ت) بیان مسأله و فهم آن . اولین . . گام در چرخه آمار است.

ث) هرچه پراکندگی متغیر درجامعه بیشتر باشد، برای اطمینان ازوجود تنوع، به اندازه نمونه بزرگتری . . . نیاز داریم.

سوال ۹)

درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) معیارهایی مانند میانگین و میانه به ما کمک می کنند بدانیم داده ها در کجا متمرکزند. درست

ب) برای توصیف داده های کیفی گزارش درصد باید با گزارش تعداد همراه باشد. درست

پ) دامنه تغییرات از معیارهای گرایش به مرکز می باشد. نادرست

ت) وقتی داده دور افتاده نداریم، میانه شاخص مناسب تری از میانگین برای توصیف داده ها می باشد. نادرست

ث) تهی را یک پیشامد حتمی می نامیم. نادرست

سوال ۱۰)

جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

الف) برای عدد صفر، فاکتوریل را به صورت ..... ۱ ... = !۰ تعریف می کنیم.

ب) اگرعملی طی دو مرحله اول و دوم انجام شود، به طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به m.n طریق انجام پذیر است.

پ) تعداد جایگشت های n تایی از n شی برابر با ..... n! .. است.

ت) اگر داده های دور افتاده داشته باشیم از نمودار جعبه‌ای ..... استفاده می‌کنیم.

ث) اگر پیشامد A حتمی باشد، احتمال آن برابر با .. ۱ .... است.

ج) هرگاه A و B دوپیشامد از فضای نمونه ای S باشند، به طوری که $A \cap B = \phi$ دراین صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می‌گوییم.

سوال ۱۱)

درستی یا نادرستی جمله های زیر را مشخص کنید.

الف)وقتی داده دور افتاده داریم ، میانه معیار مناسبی برای توصیف داده ها می باشد. درست

ب) برای توصیف داده های کمی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد برابر باشد. نادرست

پ) مرتب کردن داده ها درگام دوم چرخه آمار اتفاق می افتد. نادرست

ت)طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهمترین گام رسیدن به پاسخ است که در مرحله بیان مسئله صورت می‌گیرد. درست

سوال ۱۲)

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف)حاصل $\frac{۶!}{۳!}$ کدام است. $\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۱۲۰$

۱)۲۰ ۲)۳۰ ۳)۱۲۰ ✓ ۴)۳۵

ب)روش نمونه گیری مربوط به کدام مرحله چرخه آمار است؟

۱)طرح و برنامه ریزی ✓ ۲)بیان مساله ۳)بحث و نتیجه گیری ۴)تحلیل داده ها

پ)با ۸ نقطه متمایز واقع بر محیط دایره چند مثلث می توان تشکیل داد؟

۱)۴۲ ۲)۱۵ ۳)۲۰ ۴)۵۶ ✓

ت)حاصل عبارت $p(۲,۲)$ کدام است؟

۱)۱ ۲)صفر ۳)۲ ✓ ۴)۴

ت) $p(۲,۲)=\frac{۲!}{(۲-۲)!}=\frac{۲}{۱}=\frac{۲}{۰!}=۲$

پ) $\binom{۸}{۶}=\frac{۸\times۷\times۶}{۶}=۵۶$

سوال ۱۳)

جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

الف) پیشامد A' زمانی رخ می دهد که پیشامد ..... A ..... رخ ندهد.

ب) هر حالت از کنار هم قرار گرفتن ۵ شیء متمایز را یک ..... جایگشت ..... از آن ۵ شیء می نامیم.

پ) در ..... ترکیب ..... انتخاب r شیء از بین n شیء ، جابه جایی اشیاء اهمیت ندارد.

ت) بیان یا مفهوم مساله، ..... اولین ..... گام چرخه آماری در حل مسائل است.

ث) مقدار $\frac{۰!}{۱!}$ برابر ..... ۱ ..... است.

سوال ۱۴

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف)احتمال پیشامد نشدنی برابر کدام است؟

۱)صفر ✓ ۲)۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

ب)کدام نمودار، بهتر نشان می دهد که داده ها متراکم تر و پراکنده تر است؟

۱)مستطیلی ۲)دایره ای ۳)میله ای ۴)جعبه ای ✓

پ)گام سوم در چرخه آمار، در حل مسائل .....می باشد؟

۱)بحث و نتیجه گیری ۲)گردآوری و پاک سازی داده ها ✓ ۳)طرح و برنامه ریزی ۴)تحلیل داده ها

ت)اگر در داده ها، داده دور افتاده وجود نداشته باشد کدام معیار گرایش به مرکز مناسب است؟

۱)مد ۲)انحراف معیار ۳)میانگین ✓ ۴)میانه

سوال ۱۵

جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

الف) مجموعه .تهی.... زیر مجموعه همه مجموعه هاست.

ب) هرحالت از کنار هم قرار گرفتن ۷ شیء متمایز را یک جایگشت ..۷..ای.. از آن ۷ شیء می نامیم.

پ) اولین قدم برای یافتن داده ها و بررسی متغیر مورد نظر اندازه گیری یا سنجش است.

ت) تعداد اعضای جامعه را ..اندازه.. جامعه می نامیم.

ث) نمودار جعبه ای..... بهتر نشان می دهد که داده ها کجا متراکم تر و کجا پراکنده ترند.

سوال ۱۶

درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) فضای نمونه ای پرتاب سه سکه ۹ عضو دارد. نادرست $۲^۳=۸$

ب) در پرتاب یک تاس، احتمال وقوع عددی بیشتر از شش یک پیشامد حتمی است. نادرست

پ) هنگامی که داده دورافتاده داشته باشیم، می توانیم از میانه و دامنه میان چارکی استفاده کنیم. درست

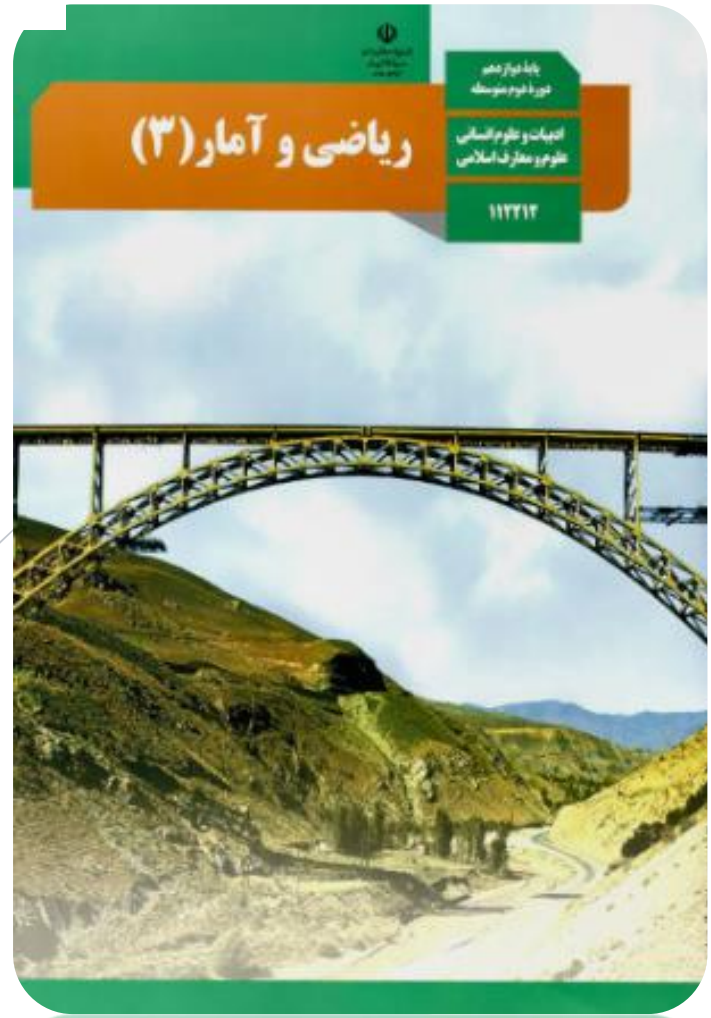
ت) گردآوری و سازماندهی داده ها سومین گام در چرخه آمار است. درست

ث) برای توصیف داده‌های کیفی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد متفاوت باشد. نادرست

جزوه ریاضی و آمار ۳

پایه دوازدهم انسانی

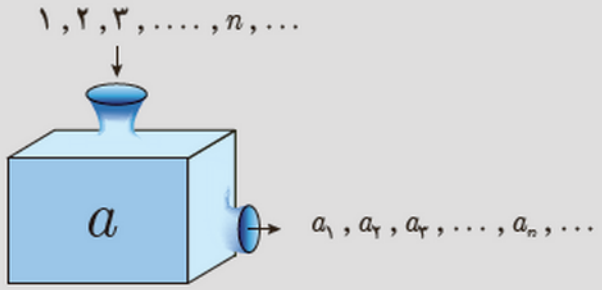
فصل دوم: الگوهای خطی



مولف: سیدابوالفضل فاضلیان

تعریف دنباله : همان‌طور که مشاهده شد، اگر a تابعی از $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد اعضای بُرد این تابع می‌تواند دنباله‌ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جملهٔ اول آن را $a(1)$، جملهٔ دوم را $a(2)$، جملهٔ سوم را $a(3)$، ... و جملهٔ nاُم را $a(n)$ در نظر می‌گیریم.

معمولاً جملات دنباله را به جای $a(n)$ با a_n نشان می‌دهند که آن را جملهٔ nاُم، جمله عمومی دنباله یا ضابطهٔ دنباله می‌نامند.



مثال : جمله عمومی دنباله‌های زیر را حدس بزنید.

الف) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ؟ (۱) (۲) (۳) (۴) (n) $a_n = \frac{1}{n}$

ب) $2, 4, 6, 8, \ldots$ ؟ (۱) (۲) (۳) (۴) (n) $b_n = 2n$

پ) $1, 3, 5, 7, \ldots$ ؟ (۱) (۲) (۳) (۴) (n) $c_n = 2n - 1$

ت) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$ ؟ (۱) (۲) (۳) (۴) (n) $d_n = \frac{3}{2^n}$

ث) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$ (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) $t_n = (-1)^n \times n$

ج) ① ② ③ ④ ⑤
$0, 3, 8, 15, 24, \ldots$ $\quad g_n = n^2 - 1$

ج) ① ② ③ ④
$2, 6, 12, 20, \ldots$ $\quad p_n = n^2 + n$

مثال: سه جمله اول دنباله‌های زیر را بنویسید.

الف) $a_n = 5n + 4$

$a_1 = 5 \times 1 + 4 = 9$

$a_2 = 5 \times 2 + 4 = 14$

$a_3 = 5 \times 3 + 4 = 19$

$9, 14, 19, \ldots$

ب) $b_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$

$b_1 = \dfrac{1+1}{2\times1+3} = \dfrac{2}{5}$ ، $b_2 = \dfrac{2+1}{2\times2+3} = \dfrac{3}{7}$ ، $b_3 = \dfrac{3+1}{2\times3+3} = \dfrac{4}{9}$

$\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \ldots$

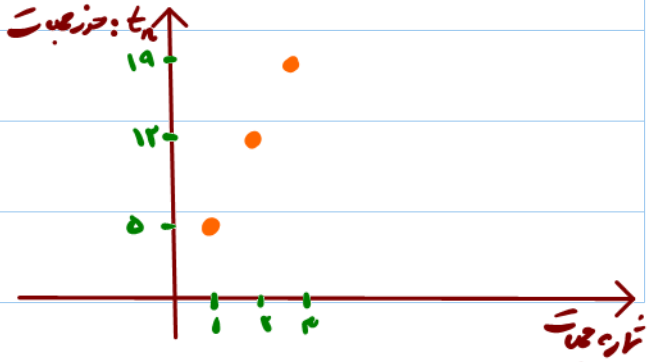
مثال: جمله عمومی دنباله $5, 12, 19, \ldots$ ($+7$ ، $+7$) را به دست آورید. این دنباله را رسم کنید.

$t_n = 7n - 2$

(تک‌محوری) صورت اول



(دستگاه مختصات) صورت دوم



دنباله حسابی : دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن یک مقدار ثابت به نام قدرنسبت یا اختلاف مشترک به جمله قبل از خودش بدست می‌آید.

مانند ... ۲، ۵، ۸، ۱۱، ... قدرنسبت = ۳

(+۳ +۳ +۳)

جمله عمومی دنباله حسابی : اگر جمله اول را با a_1 و قدرنسبت را با d نمایش دهیم، جمله عمومی دنباله حسابی از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

چند رابطه مهم در دنباله حسابی :

۱) قدرنسبت در دنباله حسابی برابر تفاضل دو جمله متوالی است : $d = a_{n+1} - a_n$ (جمله بعد، جمله قبل)

۲) با داشتن دو جمله از دنباله : $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$

۳) a, b, c سه جمله متوالی دنباله حسابی $\Leftrightarrow$ $b = \frac{a+c}{2}$ رابطه واسطه یا میانگین حسابی

۴) تعداد جملات دنباله حسابی با جمله اول a و جمله آخر b : $n = \frac{b-a}{d} + 1$

۵) درج واسطه حسابی: اگر بین دو عدد a و b، k عدد طوری قرار دهیم که دنباله حسابی حاصل شود : $d = \frac{b-a}{k+1}$

مثال: در دنباله‌ی حسابی جمله بیستم را حساب کنید. $3, 1, -1, \dots$

$t_1 = 3$ ، $d = -2$ $\quad t_{20} = 3 + (20-1)(-2) = 3 + (-38) = -35$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۶، جمله چندم ۸۷ است؟

$3, 9, 15, \dots, 87$ $\quad t_n = t_1 + (n-1)d$ $\quad 87 = 3 + (n-1)\times 6$

$87 = 3 + 6n - 6$ $\quad 90 = 6n \longrightarrow n = \frac{90}{6} = 15$

مثال: در دنباله‌ی حسابی t_n، حاصل $\frac{t_5 + 2t_{11}}{3}$ برابر کدام جمله است؟

۱) دهم ۲) نهم ۳) هشتم ۴) هفتم

$$\frac{t_1 + 4d + 2(t_1 + 10d)}{3} = t_1 + 8d = t_9$$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات اول تا سوم برابر ۳۰، مجموع چهار جمله‌ی بعدی برابر ۲۰۰ است. قدرنسبت جملات دنباله $a_2, a_5, a_8, \dots$ یعنی b_n کدام است؟

۱) ۹٫۲ ۲) ۹٫۴ ۳) ۱۰٫۲ ۴) ۱۰٫۸

$t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d = 30 \longrightarrow 3t_1 + 3d = 30$

$t_{12} + t_{13} + t_{14} + t_{15} = 200 \longrightarrow 4t_1 + 54d = 200$

$\begin{cases} 4t_1 + 6d = 60 \\ 4t_1 + 54d = 200 \end{cases} \xrightarrow{-2} \begin{cases} t_1 + d = 10 \\ 2t_1 + 27d = 100 \end{cases}$

$25d = 80 \longrightarrow d = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$

$d' = t_5 - t_2 = t_8 - t_5 = 3d = 3 \times 3\frac{1}{5} = 9\frac{3}{5}$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی $t_4 = 19$ و $t_9 = 64$ باشد، قدرنسبت و جمله اول را بیابید.

$$d = \frac{t_9 - t_4}{9-4} = \frac{64-19}{9-4} = \frac{45}{5} = 9$$

$t_4 = 19 = t_1 + (4-1)\times 9 \Rightarrow 19 = t_1 + 27 \Rightarrow t_1 = 19 - 27 = -8$

مثال: بین دو عدد ۳ و ۲۷، پنج واسطه حسابی می‌نویسیم. قدرنسبت رابطه بسط و جملات دنباله را بنویسید.

$$d=\frac{27-3}{5+1}=\frac{24}{6}=4 \qquad 3,7,11,15,19,24,27$$

مثال: اگر $\frac{1}{2}$ واسطه‌حسابی دو عدد $\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n+2}$ باشد، n را بیابید.

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right) \Rightarrow 1=\frac{n+2+n}{n(n+2)} \Rightarrow n^2+2n=2n+2 \Rightarrow n^2=2 \Rightarrow n=\pm\sqrt{2}$$

تذکر: در بحث ما فقط کافی است از مفهوم دنباله حسابی استفاده کنیم.

۳ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ اول ۳ و مجموع سه جملهٔ بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_1+(t_1+d)+(t_1+2d)=3 \\ (t_1+3d)+(t_1+4d)+(t_1+5d)=39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3t_1+3d=3 \\ 3t_1+12d=39 \end{cases} \xrightarrow{\div 3} \begin{cases} t_1+d=1 \\ t_1+4d=13 \end{cases}$$

$$3d=12 \longrightarrow d=4$$

$$t_1+4=1 \longrightarrow t_1=-3$$

$$-3,1,5,9,13,17,\dots$$

تذکر: رابطه بازگشتی برای دنباله‌حسابی به صورت $a_{n+1}=a_n+d$ است.

مانند $4,7,10,13,\dots$ $\rightarrow$ رابطه بازگشتی $a_1=4$ ، $a_{n+1}=3+a_n$

دنباله‌های حسابی نتایج خوبی با مدل D هستند. بنابراین دنباله‌های با قدرت d به‌صورت به‌طور $t_n = dn + B$ است. (جمله دوم از جمله اول چند واحد بیشتر است.)

کلید تشخیص

مجموع n جمله اول در یک دنباله حسابی :

رابطه گاوس برای مجموع اعداد طبیعی تا n را به شکل زیر به دست آوردیم :

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$
$$+ \quad S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n} \Rightarrow 2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

از همین ایده کمک می‌گیریم و مجموع n جمله اول دنباله حسابی را می‌یابیم :

$$S_n = a_1 + (a_1+d) + \cdots + (a_1+(n-2)d) + (a_1+(n-1)d)$$
$$+ \quad S_n = (a_1+(n-1)d) + (a_1+(n-2)d) + \cdots + (a_1+d) + a_1$$

$$2S_n = \underbrace{(2a_1+(n-1)d) + (2a_1+(n-1)d) + \cdots + (2a_1+(n-1)d) + (2a_1+(n-1)d)}_{n}$$

$$2S_n = n(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه دوم : زمانی که جمله اول و آخر دنباله را داریم :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال : مجموع هشت جمله اول دنباله $-2, 3, 8, \ldots$ را بیابید.

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 5 \\ S_8 = ? \end{cases}$$

$$S_8 = \frac{8}{2}(2(-2) + (8-1)(5)) = 4(-4 + 35)$$

$$= 4 \times 31 = 124$$

مثال : حاصل $A = -2 + 1 + 4 + \ldots + 52$ را بدست آورید.

$$n = \frac{b-a}{d} + 1 \Rightarrow n = \frac{52-(-2)}{3} + 1 = \frac{54}{3} + 1 = 18 + 1 = 19$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{19} = \frac{19}{2}(-2 + 52) = \frac{19}{2} \times 50 = 19 \times 25 = 475$$

مثال : در یک دنباله حسابی جمله پنجم ۵۴ و جمله نهم ۷۷ هستند. مجموع دوازده جمله اول را بیابید.

$$d = \frac{a_n - a_m}{n-m} \Rightarrow d = \frac{a_9 - a_5}{9-5} = \frac{77-54}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_5 = a_1 + 4\times 4 \rightarrow 37 = a_1 + 24 \rightarrow a_1 = 29$

$S_{12} = \frac{12}{2}(2\times 29 + (12-1)4) = 6(58+44) = 6\times 124 = 744$

مثال: در یک دنباله حسابی، جمله n ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول را محاسبه کنید.

قدرنسبت

$a_1 = \frac{3}{2}\times 1 - 5 = \frac{3}{2} - 5$

$a_{15} = \frac{3}{2}\times 15 - 5 = \frac{45}{2} - 5$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}\left(\frac{3}{2} - 5 + \frac{45}{2} - 5\right)$

$S_{15} = \frac{15}{2}\left(\frac{48}{2} - 10\right) = \frac{15}{2}(24 - 10) = \frac{15}{2}\times 14 = 15\times 7 = 105$

مثال: مجموع چند جمله از دنباله حسابی $2, 5, 8, \ldots$ برابر 747 است؟

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 4 \\ S_n = 747 \end{cases}$

$S_n = \frac{n}{2}(2(2) + (n-1)4)$

$747 = \frac{n}{2}(4 + 4n - 4) = \frac{n}{2}(4n)$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(3n+1) = 747 \xrightarrow{\times 2} n(3n+1) = 1494$$

$$3n^2+n-1494=0 \Rightarrow \Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times 3(-1497)$$

$$\Delta = 1+17964 = 17965$$

$$n=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{17965}}{6}=\frac{-1\pm 134}{6}\begin{cases}\frac{-1+134}{6}=\frac{133}{6}=22 \\ \frac{-1-134}{6}=-\frac{135}{6} \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow n=22$$

مثال: در دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۴ حداقل چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بزرگ‌تر شود؟

$$\begin{cases} a_1=3 \\ d=4 \\ S_n>300 \\ n=? \end{cases}$$

$$S_n=\frac{n}{2}(2\times 3+(n-1)(4))=\frac{n}{2}(6+4n-4)$$

$$S_n=\frac{n}{2}(4n+2)=n(2n+1)$$

$$S_n=n(2n+1)>300$$

روش حدس‌گذاری: $n=12 \rightarrow 12(24+1)=12\times 25=300$

$$n=13 \rightarrow 13(26+1)=13\times 27=351$$

اگر حداقل ۱۳ جمله از این دنباله را جمع کنیم، حاصل از ۳۰۰ بزرگ‌تر می‌شود.

مثال: بین دو عدد ۱۵ و ۳۵ تعدادی واسطه حسابی قرار می‌دهیم تا مجموع همه اعداد ۲۲۵ شود.

قدرنسبت دنباله را بیابید.

$\underbrace{\quad}_{k \text{ تا عدد}}$

$15, \dots\dots, 35 \qquad S_{k+2} = 225$

$$S_{k+2} = \frac{k+2}{2}(15+35) \Rightarrow 225 = \frac{k+2}{2}(50)$$

$$\Rightarrow 25(k+2) = 225 \xrightarrow{\div 25} k+2 = 9 \longrightarrow k = 7$$

$$d = \frac{b-a}{k+1} = \frac{35-15}{7+1} = \frac{20}{8} = 2{,}5$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۵۱ را بیابید.

$3, 9, 15, \dots \qquad a_n = 3+(n-1)6 \Rightarrow a_n = 3+6n-6 \rightarrow a_n = 6n-3$

$$a_n < 151 \Rightarrow 6n-3 < 151 \longrightarrow 6n < 154 \longrightarrow n < 17{,}33$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 17$$

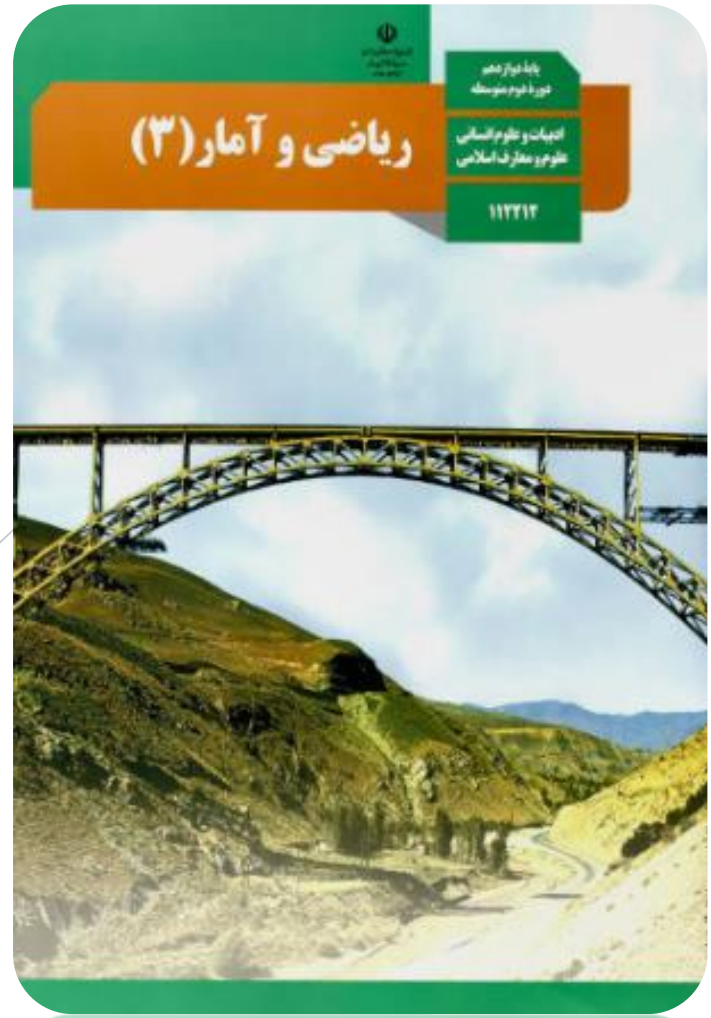
$$S_{17} = \frac{17}{2}\left(2(3)+(17-1)6\right) = \frac{17}{2}(6+96) = \frac{17}{2} \times 102 = 17 \times 51 = 867$$

($17-1 = 16$)

جزوه ریاضی و آمار ۳

پایه دوازدهم انسانی

فصل سوم: الگوهای غیرخطی



مولف: سیدابوالفضل فاضلیان

دنباله هندسی : دنباله ای است که هر جمله آن (به غیر جمله اول) از ضرب یک مقدار ثابت

به نام قدرنسبت یا نسبت مشترک در جمله قبلش بدست می آید.

مانند : $\dots, 48, 12, 3$ یا $\dots, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2$

$\times 4$ $\times \frac{1}{4}$

جمله عمومی دنباله هندسی : اگر a_1 جمله اول و q یا قدرنسبت دنباله هندسی باشد، جمله عمومی یا

جمله دلخواه آن عبارت است از : $a_n = a_1 q^{n-1}$

چند رابطه مهم در دنباله هندسی :

۱) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$: قدرنسبت در دنباله هندسی برابر تقسیم دو جمله متوالی است

۲) $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$: یافتن قدرنسبت هرگاه a_m و a_n دو جمله از دنباله هندسی را در دست باشیم

۳) a, b, c : سه جمله متوالی دنباله هندسی $\Leftrightarrow b^2 = ac$ رابطه واسطه یا میانگین هندسی

۴) $q^{k+1} = \frac{b}{a}$: درج واسطه هندسی : اگر بین دو عدد a و b، k عدد دلخواه قرار دهیم که دنباله هندسی حاصل شود

۲ در دنباله‌های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جملهٔ بعدی را بنویسید. سپس جملهٔ عمومی هر دنباله را به‌دست آورید.

الف) $2, 6, 18, 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \ldots, a_n = 2\times 3^{n-1}$

(a_1؛ ×۳ ، ×۳=r)

ب) $5, 10, 20, 40, \boxed{80}, \boxed{160}, \ldots, b_n = 5\times 2^{n-1}$

(×۲ ، ×۲)

پ) $6, -60, 600, -6000, \boxed{60000}, \boxed{-600000}, \ldots, c_n = 6\times(-10)^{n-1}$

(×(-۱۰) ، ×(-۱۰))

ت) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{4}}, \boxed{\frac{1}{8}}, \ldots, d_n = 4\times(\frac{1}{2})^{n-1}$

(×۱/۲ ، ×۱/۲)

مثال: در یک دنباله هندسی جمله اول ۷ و قدرنسبت ۲ می باشد. جمله چندم ۲۲۴ است؟

(۱) (۲) (۳) (?)

۷ , ۱۴, ۲۸ , ... ۲۲۴

$t_n = t_1 r^{n-1} \rightarrow 224 = 7\times 2^{n-1} \xrightarrow{\div 7} 32 = 2^{n-1}$

$\rightarrow 2^5 = 2^{n-1} \rightarrow n-1=5 \rightarrow n=6$

مثال: جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشد. دنباله را مشخص کنید.

$\begin{cases} t_3 = 12 \\ t_6 = 96 \\ t_1, r = ? \end{cases}$

$r^{6-3} = \frac{t_6}{t_3} = \frac{96}{12} = 8$

$r^3 = 8 \rightarrow r = 2$

$t_3 = 12 = t_1 \times 2^{3-1} \rightarrow 12 = t_1 \times 2^2 \rightarrow 12 = 4t_1 \rightarrow t_1 = 3$

مثال: میانگین هندسی دو عدد ۴ و ۹ را بیابید.

$$b^2 = ac = 4 \times 9 = 36 \longrightarrow b^2 = 36 \longrightarrow b = \pm 6$$

مثال: دنباله هندسی $2, x, \frac{1}{2}, \ldots$ بخش کاهشی (نزولی) است. x را بیابید.

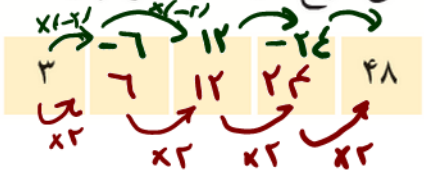
$$x^2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \longrightarrow x = \pm 1$$

کاهشی: جمله‌ات دنباله کاهشی می‌باشد

$2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$

$2, -1, \frac{1}{2}, \ldots$ ✓

مثال: بین ۳ و ۴۸ سه واسطهٔ هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟



$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

$$\begin{cases} n = 3 \\ a = 3 \\ b = 48 \end{cases} \longrightarrow r^{3+1} = \frac{48}{3} = 16 \longrightarrow r^4 = 2^4 \longrightarrow r = \pm 2$$

$r = 2 \rightarrow 3, 6, 12, 24, 48$

$r = -2 \rightarrow 3, -6, 12, -24, 48$

تذکر: رابطهٔ بازگشتی برای دنباله هندسی به صورت $a_{n+1} = r a_n$ است.

مانند $2, -4, 8, -16, \ldots$ $\quad a_1 = 2, \ a_{n+1} = (-2) a_n$

مجموع n جمله اول در یک دنباله هندسی :

مجموع n جمله اول دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \qquad q \neq 1$$

اثبات :

$$S_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} \qquad (1)$$

$$\times q \Longrightarrow qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n \qquad (2)$$

$(1) - (2) \Rightarrow$

$$S_n - qS_n = (a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}) - (a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n \Rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$\div(1-q) \Longrightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$q \neq 1$

اگر $q = 1$ باشد خواهیم دنباله به صورت $a_1, a_1, \ldots, a_1$ باشد $S_n = na_1$

مثال: مجموع هفت جمله اول دنباله هندسی ... و ۳, ۶, ۱۲, ۲۴ را بیابید.

$$S_7 = 3 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 3 \times \frac{1-128}{1-2} = 3 \times \frac{-127}{-1} = 3 \times 127 = 381$$

مثال: در دنباله هندسی $a_3 = 6$ و $a_7 = 192$، مقدار S_{10} را محاسبه کنید.

$$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \Rightarrow q^{7-3} = \frac{a_7}{a_3} \Rightarrow q^4 = \frac{192}{6} = 32 \rightarrow q^4 = 32$$

$$\Rightarrow q = 2$$

$$a_3 = a_1 q \Rightarrow 6 = a_1 \times 2 \rightarrow a_1 = 3$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 3 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 3 \times \frac{1-1024}{-1} = 3 \times 1023 = 3069$$

مثال: مجموع چند جمله دنباله هندسی ... و ۶, -۱۲, ۲۴, -۴۸ برابر ۱۰۲۶ است؟

$\times(-2)$ $\times(-2)$

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ q = -2 \\ S_n = 1026 \\ n = ? \end{cases} \qquad S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$1026 = 6 \times \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} \Rightarrow 1026 = 2\left(1-(-2)^n\right)$$

$$\div 2 \Rightarrow 1-(-2)^n = 513 \rightarrow -(-2)^n = 512$$

$\xrightarrow{\div(-1)} (-2)^n = -512 \rightarrow (-2)^n = (-2)^9 \rightarrow n = 9$

مثال: بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی داده‌اند. مجموع این ۵ عدد چقدر است را بیابید.

$4, \square, \square, \square, 324 \qquad q^{k+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow q^{4+1} = \frac{324}{4}$

$\Rightarrow q^5 = 81 \Rightarrow q = \pm 3 \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{فرض}} q = 3$

$S_5 = 4 \times \frac{1-3^5}{1-3} = \frac{4(1-243)}{-2} = -2(-242) = 484$

مثال: در دنباله هندسی افزایشی $4, a, 9, b, \ldots$ مجموع شش جمله اول را بدست آورید.

روش اول یافتن q: $q^{3-1} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{9}{4} \rightarrow q^2 = \frac{9}{4} \rightarrow q = \pm\frac{3}{2}$

دنباله افزایشی $\longrightarrow q = \frac{3}{2}$

روش دوم یافتن q:

دنباله هندسی: $a^2 = 4 \times 9 = 36 \rightarrow a = \pm 6 \rightarrow a = 6$

$4, 6, 9, b, \ldots \Rightarrow q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$S_4 = 4 \times \frac{1-(\frac{3}{2})^4}{1-\frac{3}{2}} = 4 \times \frac{1-\frac{729}{64}}{-\frac{1}{2}} = -8\left(\frac{64-729}{64}\right) = -\frac{-665}{8}$$

$$= \frac{665}{8}$$

مثال: در یک دنباله هندسی مجموع شش جمله اول ۲۸ برابر مجموع سه جمله اول است. مجموع ده جمله اول چند برابر مجموع پنج جمله اول است؟

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \times \frac{q^n-1}{q-1}$$

$$S_6 = 28 S_3 \Rightarrow a_1 \times \frac{q^6-1}{q-1} = 28 a_1 \times \frac{q^3-1}{q-1}$$

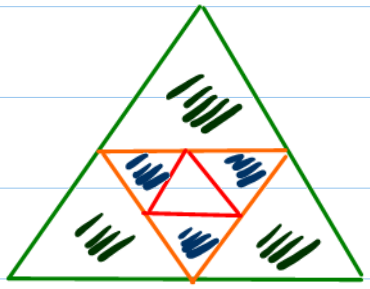
$$\xRightarrow{\text{تجزیه}} \frac{(q^3-1)(q^3+1)}{q-1} = 28 \frac{q^3-1}{q-1} \Rightarrow q^3+1 = 28 \rightarrow q^3 = 27 \rightarrow q = 3$$

$$\frac{S_{10}}{S_5} = k \rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = k$$

$$\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{a_1 \times \frac{q^{10}-1}{q-1}}{a_1 \times \frac{q^5-1}{q-1}} = \frac{q^{10}-1}{q^5-1} \xRightarrow{\text{تجزیه}} \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{(q^5-1)(q^5+1)}{q^5-1}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = q^5+1 = 3^5+1 = 243+1 = 244$$

مثال: وسط اضلاع مثلث متساوی الاضلاعی را به هم وصل می‌کنیم و سه مثلث از چهار مثلث ایجاد شده را رنگ می‌کنیم. پس این کار را با مثلث باقی مانده تکرار می‌کنیم. حداقل چند مرحله باید رنگ آمیزی را انجام دهیم تا بیش از 99,9 درصد مساحت اولیه رنگ شود؟



مساحت مثلث اولیه $= S$

مرحله اول: $\frac{3}{4}S$ ، مرحله دوم: $\frac{3}{4}(\frac{1}{4}S)$ ، مرحله سوم: $\frac{3}{4}(\frac{1}{4})^2 S$ ، ....

دنباله هندسی: $a_1 = \frac{3}{4}S$ ، $q = \frac{1}{4}$ $\quad S_n > \frac{999}{1000}S$

$$S_n = \frac{3}{4}S \times \frac{(\frac{1}{4})^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{3}{4}S \times \frac{\frac{1}{4^n} - 1}{-\frac{3}{4}} = S(1 - \frac{1}{4^n})$$

$$S_n > \frac{999}{1000}S \Rightarrow S(1 - \frac{1}{4^n}) > \frac{999}{1000}S$$

$$1 - \frac{999}{1000} > \frac{1}{4^n} \Rightarrow \frac{1}{1000} > \frac{1}{4^n} \xrightarrow{\text{معکوس}} 1000 < 4^n$$

با ماشین حساب $4^5 = 1024 \rightarrow 1000 < 4^5 \Rightarrow n \geq 5$

یادآوری و تکمیل :

در سال‌های قبل با مفهوم توان آشنا شدید. زمانی که عددی چندبار در خودش ضرب شود برای سادگی در نوشتن و خلاصه نویسی از توان استفاده می‌کنیم مانند :

$(-3)^2 = (-3)\times(-3)$ ، $\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$ و $2\times2\times2 = 2^3$

یا به صورت کلی هرگاه $a\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$ می‌نویسیم : $\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ بار}} = a^n$

این تعریف فقط مربوط به توان طبیعی است .

قوانین توان طبیعی :

اگر a و b اعداد حقیقی و r و s طبیعی باشند داریم :

۱) در ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی، یکی از پایه‌ها را نوشته، توان‌ها را جمع می‌کنیم: $a^r \times a^s = a^{r+s}$

۲) در تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی، یکی از پایه‌ها را نوشته، توان مخرج را از صورت کم می‌کنیم: $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

۳) در ضرب اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی، یکی از توان‌ها را نوشته، پایه‌ها را ضرب می‌کنیم: $a^r \times b^r = (ab)^r$

۴) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$ در تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی، یکی از توان‌ها را نوشته، پایه‌ها را تقسیم می‌کنیم:

۵) $(a^r)^s = a^{rs}$ اگر محدود توان‌دار، دوباره به توان برسد، توان‌های قدیم و جدید ضرب می‌شوند:

توان صفر:

این نکته را هم در سال‌های گذشته دیدیم که هر عدد به توان صفر برابر یک می‌شود که تعریفی مساوی با توان طبیعی داشت ولی چرا $a^0 = 1$ ؟

*اثبات: رابطه (۱) $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

رابطه (۲) $\frac{a^n}{a^n} = 1$

چون سمت چپ رابطه‌های ۱ و ۲ برابرند پس سمت راست آن‌ها هم برابرند پس

$$a^0 = 1$$

مثال: $(\sqrt{7})^0 = 1$ ، $(\frac{1}{2})^0 = 1$ ، $۲^0 = 1$

$(-9)^0 = 1$ ، ...

توان های صحیح منفی :

وقتی خواری حقیقی به توان یک عدد صحیح منفی می رسد باز هم باید تعریفی مشابه از توان طبیعی

داشته باشیم به این صورت که : $a^{-2} = \frac{1}{a^2} = (\frac{1}{a})^2$.

یعنی پایه را معکوس می کنیم و توان مثبت می شود .

*اثبات : فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند که $m > n$ و $r = m-n$:

رابطه (۱) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-r}$

رابطه (۲) $\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}^{n \text{ بار}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{m \text{ بار}}} \xrightarrow[m>n]{\text{ساده کنیم}} \frac{1}{a^{m-n}} = \frac{1}{a^r}$

↳ قرار a های مضرب تبرات

مشابه اثبات قبل چون سمت چپ عبارت ها با یکدیگر برابرند پس سمت راست

هم برابر می شوند و داریم : $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

مثال:

۱) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$ ۲) $(\frac{1}{2})^{-6} = 2^6 = 64$

۳) $\left(-\frac{۷}{۱}\right)^{-۲} = \left(-\frac{۱}{۷}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴۹}$

۴) $\left(\frac{۴}{۳}\right)^{-۳} = \left(\frac{۵}{۴}\right)^{۳} = \frac{۱۲۵}{۶۴}$

۵) $\frac{۱}{۹^{-۲}} = ۹^{۲} = ۸۱$

تذکر: تمام خواصِ توانِ طبیعی برای توانِ صحیحِ منفی هم برقرار است.

مثال:

۱) $۳^{-۴} \times ۳^{۲} = ۳^{-۴+۲} = ۳^{-۲} = \frac{۱}{۳^{۲}}$

۲) $۳^{-۷} \times ۲^{-۷} = (۳\times۲)^{-۷} = ۶^{-۷} = \frac{۱}{۶^{۷}}$

۳) $\frac{۶^{-۸}}{۶^{-۳}} = ۶^{-۸-(-۳)} = ۶^{-۸+۳} = ۶^{-۵} = \frac{۱}{۶^{۵}}$

۴) $\left(۴^{-۲}\right)^{\overset{\times}{۵}} = ۴^{-۱۰} = \frac{۱}{۴^{۱۰}}$

۵) $۸^{-۲} \times ۲^{۴} = (۲^{۳})^{-۲} \times ۲^{۴} = ۲^{-۶} \times ۲^{۴} = ۲^{-۴} = \frac{۱}{۲^{۴}} = \frac{۱}{۱۶}$

۶) $\frac{۴^{-۴}}{۸^{-۴}} = \left(\frac{۴}{۸}\right)^{-۴} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۴} = ۲^{۴} = ۱۶$

توان های گویا :

حال با یک مثال وارد بحث اصلی غیر توان های گویا می شویم .

در آزمایشگاهی نوعی باکتری کشت داده می شود که وزن آن ها در هر ساعت دو برابر می شود.

اگر وزن آن ها در شروع آزمایش یک گرم باشد، وزن آن ها بعد از یک ساعت ۲ گرم و بعد از ۲ ساعت ۴ گرم و ... یعنی :

$$1, 2, 4, 8, \dots$$

$$\rightarrow \quad 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$$

حال می خواهیم ببینیم وزن این باکتری ها بعد از نیم ساعت یا همان $\frac{1}{2}$ ساعت چقدر می شود.

اگر فرض کنیم بعد از نیم ساعت وزن باکتری ها b برابر شود، پس طبق الگوی بالا :

$$b = 2^{\frac{1}{2}} \qquad \text{رابطه (۱)}$$

از طرفی فرض کردیم وزن باکتری ها بعد از نیم ساعت b برابر می شود. پس بعد از یک ساعت وزن آن ها : $b \times b = b^2$ خواهد بود. ولی طبق دنباله بالا بعد از یک ساعت وزن باکتری ها

۲ برابر عدد ۲ گرم خواهد شد یعنی $b^2 = 2$ پس $b = \sqrt{2}$ (رابطه ۲) : ① ، ② $\rightarrow 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

توان $\frac{1}{n}$ ام : اگر n عدد طبیعی بزرگتر مساوی ۲ باشد، توان $\frac{1}{n}$ ام عدد حقیقی و مثبت a را با $a^{\frac{1}{n}}$

نشان می دهیم و این طور تعریف می کنیم :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

(توان ۱ ، زیر رادیکال ۲ ، خود عدد)

مثال : هریک از عبارت های زیر را به صورت رادیکالی بنویسید .

$64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64^1} = \sqrt[6]{64} = 2$

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3^1} = \sqrt{3}$

$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$

$6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$

تذکر : برای توان های طبیعی قاعده ضرب توان ها (توان جدید در قدیم) را داشتیم.

می توانیم از این قاعده کمک بگیریم و توان های گویا را در حالت کلی تعریف کنیم :

مثلاً :

$$7^{\frac{3}{2}} = 7^{3 \times \frac{1}{2}} = (7^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7^3}$$

توان $\frac{m}{n}$ ام : اگر a عددی حقیقی و مثبت ، m عددی صحیح و n عدد طبیعی باشد

توان $\frac{m}{n}$ ام ، a را با $a^{\frac{m}{n}}$ نشان می دهیم و اینطور تعریف می کنیم :

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (توان ← m، فرجه ← n)

پس توان گویای هر عدد به صورت یک ریشه گیری بیان می‌شود مثلاً : $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \simeq 1,4$

مثال: اعداد توان‌دار زیر را به صورت رادیکالی بنویسید.

$$5^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{5^2} = \sqrt[5]{25}$$

$$3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2} = \sqrt[7]{9}$$

$$81^{\frac{3}{4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{(3^3)^4} = 3^3 = 27 \\ (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^{4\times\frac{3}{4}} = 3^3 = 27 \end{cases}$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

تذکر: چون $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$ پس می‌توانیم بنویسیم : (۵>۰)

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

مثلاً : $7^{\frac{4}{2}} = \sqrt{7^4} = (\sqrt{7})^4$

قوانین توان‌های گویا :

تمام قوانین توان طبیعی برای توان‌های گویا هم برقرار هستند.

مثال: حاصل عبارت زیر را به صورت رادیکالی بنویسید.

۱) $۳^{-\frac{۳}{۷}} = \frac{۱}{۳^{\frac{۳}{۷}}} = \frac{۱}{\sqrt[۷]{۳^{۳}}}$

۲) $\left((۱۶)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۳}{۴}} = (۱۶)^{\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}} = ۱۶^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۱۶} = ۲$

۳) $۳^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{\frac{۲}{۵}} = ۳^{\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۵}} = ۳^{\frac{۵+۴}{۱۰}} = ۳^{\frac{۹}{۱۰}} = \sqrt[۱۰]{۳^{۹}}$

۴) $\frac{۷^{\frac{۳}{۵}}}{۷^{\frac{۱}{۴}}} = ۷^{\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۴}} = ۷^{\frac{۱۲-۵}{۲۰}} = ۷^{\frac{۷}{۲۰}} = \sqrt[۲۰]{۷^{۷}}$

۵) $۴^{\frac{۲}{۴}} \times ۵^{\frac{۲}{۴}} = ۲۰^{\frac{۲}{۴}} = \sqrt[۴]{۲۰^{۲}} = \sqrt[۴]{۴۰۰}$

۶) $\frac{۶^{\frac{۸}{۴}}}{۲^{\frac{۳}{۴}}} = ۳^{\frac{۸}{۴}} = \sqrt[۴]{۳^{۸}} = \sqrt[۴]{۳^{۶}\times۳^{۲}} = \sqrt[۴]{۳^{۳}}\times\sqrt[۴]{۹} = ۳^{\frac{۳}{۴}}\times\sqrt[۴]{۹} = ۹\sqrt[۴]{۹}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را در صورت امکان به صورت توان گویا بنویسید.

۱) $\sqrt{۵^{۳}} = ۵^{\frac{۳}{۲}}$

۲) $\sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$

۳) $\frac{\sqrt[6]{2} \times \sqrt[2]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{1+3}{2}}}{2^{\frac{3}{4}}}$

$= \frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{4}}} = 2^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{8-9}{12}} = 2^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{12}}}$

۴) $\sqrt[5]{-3}$ نمی‌توان به صورت توان کسری نوشت

۵) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{6}} = \sqrt[21]{6} = 6^{\frac{1}{21}}$

۶) $\frac{5^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{5^{-\frac{1}{4}}}{5^{\frac{4}{4}}} = 5^{-\frac{1}{4}-\frac{4}{4}} = 5^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{5}{4}}}$

مثال: حاصل $\frac{64^{\frac{1}{6}} \times 125^{\frac{4}{3}}}{9^{\frac{3}{2}} - 8^{\frac{1}{3}}}$ را بیابید.

$64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$

$9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

$125^{\frac{4}{3}} = (5^3)^{\frac{4}{3}} = 5^4$

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\frac{2 \times 5^4}{27-2} = \frac{2 \times 5^4}{25} = \frac{2 \times 5^4}{5^2} = 2 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50$

مثال: اگر $a>0$، حاصل عبارت $\left(\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[4]{a^3}}\right)^{\frac{6}{7}}$ را محاسبه کنید.

$$\left(\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{6}{7}}=\left(a^{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{6}{7}}=\left(a^{\frac{16-9}{12}}\right)^{\frac{6}{7}}$$

$$=\left(a^{\frac{7}{12}}\right)^{\frac{6}{7}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$$

مثال: مقدار $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2\sqrt[3]{4}}$ را به دست آورید.

$$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{4}}=\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt[3]{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times 4^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}\times(2^2)^{\frac{1}{6}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{3}}$$

$\frac{2}{3}=1$

عبارت $=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{3}}$

$$=2^1\times 2^1=4$$

یادآوری :

می دانیم $3^2=9$ ، $(-3)^2=9$. 3 و -3 را ریشه‌های دوم عدد 9 می‌گوییم .

وقتی می‌نویسیم $\sqrt{9}$ منظورمان فقط ریشه دوم مثبت آن یعنی 3 است . اگر بخواهیم

ریشه دوم منفی را نشان دهیم می‌نویسیم : $-\sqrt{9}=-3$

با توجه به اینکه هر عددی وقتی به توان 2 می‌رسد مثبت می‌شود ، پس اعداد منفی

ریشه دوم ندارند مثلاً -9 ریشه دوم ندارد زیرا : $(?)^2=-9$

یعنی هیچ عددی وجود ندارد که وقتی به توان دو برسد -9 شود .

می دانیم $4^3=64$. 4 را ریشه سوم عدد 64 می‌نامیم و می‌نویسیم $\sqrt[3]{64}=4$.

برخلاف ریشه دوم ، اعداد منفی هم ریشه سوم دارند مثلاً :

$$\sqrt[3]{-125}=-5 \quad , \quad \sqrt[3]{-27}=-3$$

حال تعاریف بالا را برای ریشه‌های n ام (n عدد طبیعی بزرگتر مساوی ۲) تعمیم می‌دهیم .

تعریف : اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد ، b را یک ریشه n ام عدد حقیقی a می نامیم هرگاه :

$$b^n = a$$

$$3^2 = 9$$

نکته خیلی مهم :

- اگر n فرد باشد برای نمایش ریاضی ریشه n ام عدد حقیقی a از نماد رادیکال استفاده می کنیم و می نویسیم : $\sqrt[n]{a}$

و می خوانیم رادیکال a با فرجه n.

- اگر n زوج باشد و a هم عدد حقیقی مثبت در نظر گرفته شود زمانی که می نویسیم $\sqrt[n]{a}$ (رادیکال a با فرجه n) منظورمان فقط ریشه n ام مثبت عدد a است . اگر بخواهیم ریشه n ام منفی عدد a را نمایش دهیم می نویسیم $-\sqrt[n]{a}$

تأکید: هر عدد حقیقی دارای یک ریشه فرد است که اگر عدد مثبت باشد، ریشه هم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه هم آن منفی است.

هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه زوج است که قرینه یکدیگرند.

عدد های منفی ریشه زوج ندارند.

مثال: جدول زیر را برای ریشه های مختلف عدد ۶۴ کامل کنید.

ریشه‌های هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌های ششم	ریشه پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوم	ریشه‌های دوم
$\sqrt[8]{64}$ $-\sqrt[8]{64}$	$\sqrt[7]{64}$	$\sqrt[6]{64}=2$ $-\sqrt[6]{64}=-2$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[3]{64}=4$	$\sqrt{64}=8$ و $-\sqrt{64}=-8$

مثال: جدول زیر را برای ریشه های مختلف عدد -64 کامل کنید.

ریشه‌هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌ششم	ریشه پنجم	ریشه‌چهارم	ریشه سوم	ریشه دوم
وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64}=-4$	وجود ندارد

مثال: جدول های زیر را کامل کنید.

عدد	۱۶		۶۲۵		۱۰،۰۰۰		۳۱۲۵	
ریشه‌های چهارم	۲	-2	۵	-5	۱۰	-10	$\sqrt[4]{5}5$	$-\sqrt[4]{5}5$

$\sqrt[4]{3125}=\sqrt[4]{625\times5}=\sqrt[4]{625}\times\sqrt[4]{5}$

عدد	-32	3125	-243	-1	-100000
ریشه پنجم	-2	5	-3	-1	-10

مثال : جدول زیر را کامل کنید.

$a>0$	n زوج	a دارای دو ریشهٔ nام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	$a=81$ $n=4$	۸۱ دارای دو ریشهٔ چهارم ۳ $=\sqrt[4]{81}$ و $-3=-\sqrt[4]{81}$ است
	n فرد	a دارای یک ریشه nام $\sqrt[n]{a}$ است.	$a=32$ $n=5$	۳۲ دارای ریشه پنجم $2=\sqrt[5]{32}$ است
$a<0$	n زوج	ریشهٔ nام وجود ندارد	$a=-81$ $n=4$	ریشه چهارم ۸۱- وجود ندارد
	n فرد	a دارای یک ریشه nام $\sqrt[n]{a}$ است	$a=-8$ $n=3$	۸- دارای ریشه سوم $-2=\sqrt[3]{-8}$ است.

مثال :

حاصل هر عبارت را به‌دست آورید :

$\sqrt[9]{-1}=-1$ $\quad\sqrt[8]{256}=2$ $\quad\sqrt[7]{128}=2$

$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}}=\frac{-1}{2}$ $\quad-\sqrt[4]{0/0016}=-0/2$ $\quad\sqrt[4]{625}=5$

$\sqrt[6]{0}=0$ $\quad\sqrt[7]{-128}=-2$

$\sqrt[n]{0}=0$

نکته : حاصل هر رادیکال با فرجه زوج، قطعاً مثبت است غیر از :

$\sqrt[\text{زوج}n]{a}=b\rightarrow$ مثبت

مثبت

ویژگی های رادیکال :

۱) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & n \text{ فرد} \\ |a| & n \text{ زوج} \end{cases}$

۲) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & n \text{ فرد} \; ; \; a,b \in \mathbb{R} \\ \sqrt[n]{ab} & n \text{ زوج} \; ; \; a,b > 0 \end{cases}$ و $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ با همان شرط

۳) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ به شرطی که اگر n زوج باشد، a مثبت باشد ؛

۴) $(\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} a & n \text{ فرد} \; ; \; a \in \mathbb{R} \\ a & n \text{ زوج} \; ; \; a > 0 \\ \text{تعریف نشده} & n \text{ زوج} \; ; \; a < 0 \end{cases}$

۵) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی

۶) $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ اگر m یا n زوج باشد؛ a نامنفی

سوال : آیا $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ همواره برقرار است؟

خیر : $\sqrt[4]{(-3)^4} \neq (\sqrt[4]{-4})^4$ اگر n زوج باشد باید a مثبت باشد.

مثال : حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$

۲) $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

۳) $\left(\sqrt[3]{-8}\right)^4 = -8$

۴) $\left(\sqrt[8]{-5}\right)^8 =$ تعریف نشده (زوج)

۵) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$

۶) $\sqrt[8]{(1-\sqrt{2})^8} = |1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$ (منفی)

۷) $\sqrt{2^3 a^2} = \sqrt{32a^2} = \sqrt{16 \times 2a^2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = 4|a|\sqrt{2}$

۸) $\sqrt[4]{a^4 b^5} = \sqrt[4]{a^4} \times \sqrt[4]{b^4 \times b} = |a||b|\sqrt[4]{b}$

۹) $\sqrt[5]{\frac{32a^{15}}{b^9}} = \frac{\sqrt[5]{32a^{15}}}{\sqrt[5]{b^9}} = \frac{\sqrt[5]{2^5 \times a^{15}}}{\sqrt[5]{b^5 \times b^4}}$ ، $(a^3)^5 = a^{15}$

$= \frac{\sqrt[5]{2^5 \times 2 \times a^{15}}}{b\sqrt[5]{b^4}} = \frac{2a^3 \times \sqrt[5]{2}}{b\sqrt[5]{b^4}}$

۱۰) $\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}} = \sqrt[۴]{\sqrt[۳]{\sqrt{۲\times۲^{۲}}}} = \sqrt[۱۲]{۲^{۳}} = \sqrt[۸]{۲}$

۲ را داخل رادیکال می‌کنم و توانی به اندازه خودم به آن می‌دهم

۱۱) $\sqrt{-a} + \dfrac{\sqrt[۳]{a^{۳}}+۲a}{\sqrt[۴]{a^{۴}}-۲a}$

چون عبارت $\sqrt{-a}$ تعریف شده است پس a عددی منفی بوده است.

$$\sqrt{-a} + \frac{a+۲a}{|a|-۲a} = \sqrt{-a} + \frac{۳a}{-a-۲a} = \sqrt{-a} + \frac{۳a}{-۳a} = \sqrt{-a}-۱$$

$|a| = -a$

جمع‌بندی رشته‌ی ریاضی و توان گویا

۱) $a^0 = 1$

۲) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

۳) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

۴) $a^n \times b^n = (ab)^n$

۵) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

۶) $(a^n)^m = a^{n \times m}$

۷) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

۸) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

سوال ۱)

جاهای خالی را با اعداد مناسب تکمیل کنید.

الف) ریشه پنجم عدد ۳۲ برابر .....۲..... است.

ب) ریشه های چهارم عدد ۱۶ برابر .....۲..... و .....-۲..... است.

پ) ریشه سوم عدد ۲۷ برابر .....۳..... است.

$\sqrt[5]{32}=2$, $2^5=32$, $?^5=32$

$(-2)^4=16$, $2^4=16$, $?^4=16$

$?^3=27$

سوال ۲)

عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.

الف) $4^{\frac{1}{3}}$ ب) $(0/8)^{\frac{2}{9}}$ پ) $\sqrt[5]{(21)^4}$ ت) $\sqrt[8]{(0/47)^3}$

الف) $4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{4^1}$ ب) $(/8)^{\frac{2}{9}}=\sqrt[9]{(/8)^2}$

پ) $\sqrt[9]{(21)^4}=21^{\frac{4}{5}}$ ت) $\sqrt[8]{(/47)^4}=(/47)^{\frac{4}{8}}$

سوال ۳)

هریک از عبارت های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

الف) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ ب) $\sqrt[7]{0/18}$

الف) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^3}$ ب) $(/18)^{\frac{1}{7}}$

سوال ۴)

عدد توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.

الف) $12^{-\frac{2}{11}}$ ب) $\sqrt[3]{25}$

الف) $12^{-\frac{2}{11}} = \frac{1}{12^{\frac{2}{11}}} = \frac{1}{\sqrt[11]{12^2}}$ ب) $25^{\frac{1}{3}}$

سوال ۵)

اعداد توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

الف) $\sqrt[3]{x^7}$ ب) $(m)^{\frac{3}{5}}$ پ) $(0/9)^{\frac{1}{6}}$

الف) $x^{\frac{7}{2}}$ ب) $\sqrt[5]{m^4}$ پ) $\sqrt[6]{0.9}$

سوال ۶)

عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.

الف) $3^{\frac{1}{5}}$ ب) $6^{\frac{1}{9}}$ پ) $\sqrt[4]{25}$ ت) $\sqrt[10]{3/7}$

الف) $\sqrt[5]{4}$ ب) $\sqrt[9]{6}$ پ) $25^{\frac{1}{4}}$ ت) $(3/7)^{\frac{1}{10}}$

سوال ۷)

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $2^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{2}}$

ب) $\left(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{m^{2}}\right)^{-4}$

الف) $(2\times 8)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

ب) $\left(m^{\frac{1}{2}-2}\right)^{-4} = \left(m^{\frac{-3}{2}}\right)^{-4} = m^{\frac{-3}{2}\times(-4)} = m^{6}$

سوال ۸)

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\left(\frac{3^{8}}{3^{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$

ب) 5×5^{2}

الف) $(4^{4})^{\frac{1}{2}} = 4^{2} = 9$

ب) $5^{3} = 125$

سوال ۹)

حاصل هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^{4}$

ب) $5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{-1}{3}}$

الف) $\frac{(a^{\frac{1}{2}})^4}{(a^{\frac{1}{4}})^4} = \frac{a^2}{a^1} = a^{2-1} = a$

ب) $5^{\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})} = 5^0 = 1$

سوال ۱۰)

حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (m, n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

الف) $(m^4n^3)^2\,(m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{6}})^6$ ب) $21^{\frac{2}{3}} \times (\frac{3}{7})^{\frac{2}{3}}$

الف) $m^8 \times n^6 \times m^4 \times n^1 = m^{11} \times n^7$

ب) $(27 \times \frac{3}{7})^{\frac{2}{4}} = 9^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt[4]{81}$

سوال ۱۱)

حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

الف) $(m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}})^2\,(m^2n^3)^{\frac{1}{2}}$ ب) $8^{\frac{2}{7}} \times (\frac{3}{2})^{\frac{2}{7}}$

الف) $m^{\frac{3}{4}\times 2} \times n^{\frac{1}{2}\times 2} \times m^{2\times\frac{1}{2}} \times n^{3\times\frac{1}{2}} = m^{\frac{3}{2}} \times n \times m \times n^{\frac{3}{2}}$

$= (mn)^{\frac{3}{2}} \times (mn)^1 = (mn)^{\frac{3}{2}+1} = (mn)^{\frac{5}{2}}$

ب) $(8\times\frac{9}{2})^{\frac{2}{7}} = 12^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{12^2} = \sqrt[7]{144}$

سوال ۱۲)

در هر یک از تساوی های زیر مقدار x را مشخص کنید.

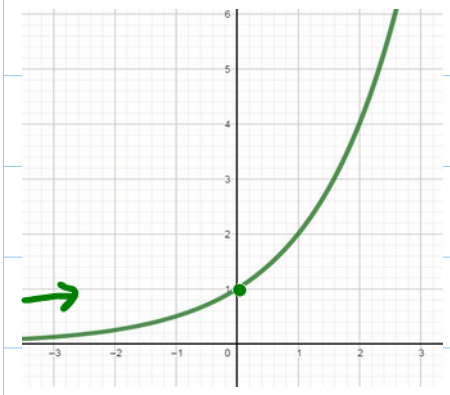
الف) $8^4 \times 9^x = 72^4$ ب) $(5^x)^6 = \frac{1}{5^2}$ پ) $(0/6)^1 \times (0/6)^x \times (0/6)^3 = (0/6)^8$

الف) $x=4$

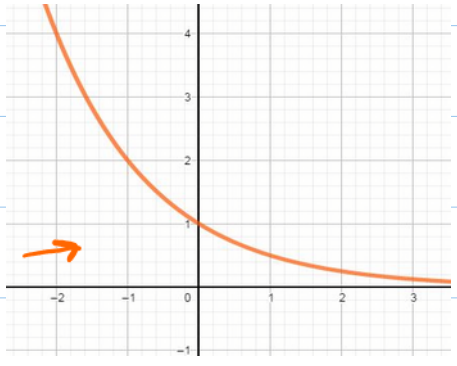
ب) $5^{6x} = 5^{-2} \Rightarrow 6x=-2 \rightarrow x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$

پ) $(\frac{3}{5})^{x+4} = (\frac{3}{5})^8 \rightarrow x+4=8 \rightarrow x=4$

تابع نمایی :



افزایشی $a>1$ $y=a^x$

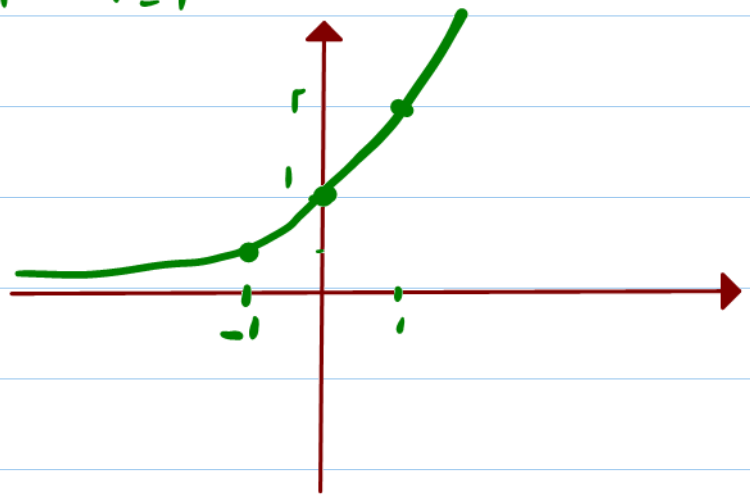


کاهشی $0<a<1$ $y=a^x$

سوال ۱۳)

نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = ۲^{x}$ را رسم کنید.

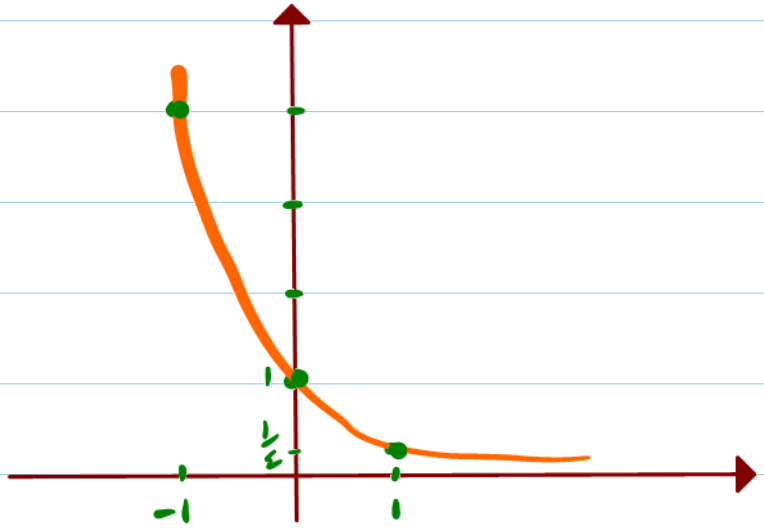
x	-۱	۰	۱
y	$۲^{-۱} = \frac{۱}{۲}$	$۲^{۰} = ۱$	$۲^{۱} = ۲$



سوال ۱٤)

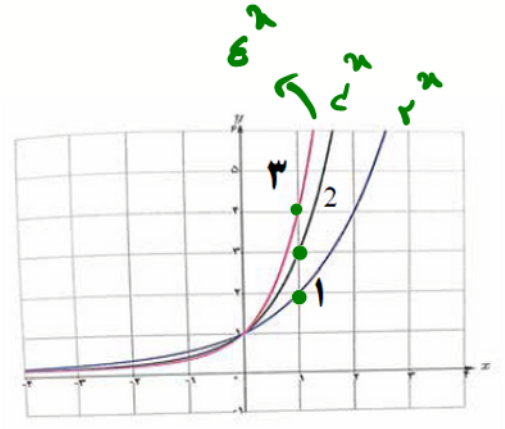
نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = (\frac{۱}{۴})^{x}$ را رسم کنید.

x	-۱	۰	۱
y	$(\frac{۱}{٤})^{-۱} = ٤$	$(\frac{۱}{٤})^{۰} = ۱$	$\frac{۱}{٤}$



سوال ۱۵)

نمودار های توابع $f(x)=۳^x$, $f(x)=۲^x$, $f(x)=۴^x$ در شکل زیر رسم شده اند. ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.



مسائل رشد و زوال

مقدار اولیه — مقدار نهایی — زمان

ضریب تغییرات

$f(t)=c(1+r)^t$: فرمول رشدنمایی

$f(t)=c(1-r)^t$: فرمول زوال نمایی

سوال ۱۶)

جمعیت کشوری در سال ۲۰۲۰ میلادی حدود ده میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال افزایش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۲۱ میلادی چند نفر خواهد بود.

$f(1)=10,000,000(1+\%01)^1=10,000,000\times 1.01=10,100,000$

سوال ۱۷)

پدر سارا قصد دارد مبلغ ۲۰ میلیون تومان را برای هزینه دانشگاه دخترش در بانکی سپرده گذاری کند. این بانک سالانه ۲۰٪ سود به سپرده ها پرداخت می کند. پدر سارا بعد از ۲ سال چه مبلغی را می‌تواند دریافت کند؟

$$f(2) = 20\,(1+\%2)^{2} = 20\times(1,2)^{2} = 20\times 1,44 = 28,8$$

سوال ۱۸)

جمعیت یک روستا، در سال ۱۳۹۶ حدود دو هزار نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این روستا با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۱۳۹۸ چند نفر خواهد بود؟

$$f(2) = 2,000\times(1-\%1)^{2} = 2000\times(\%99)^{2} = 2000\times 0.9801 = 1960,2$$