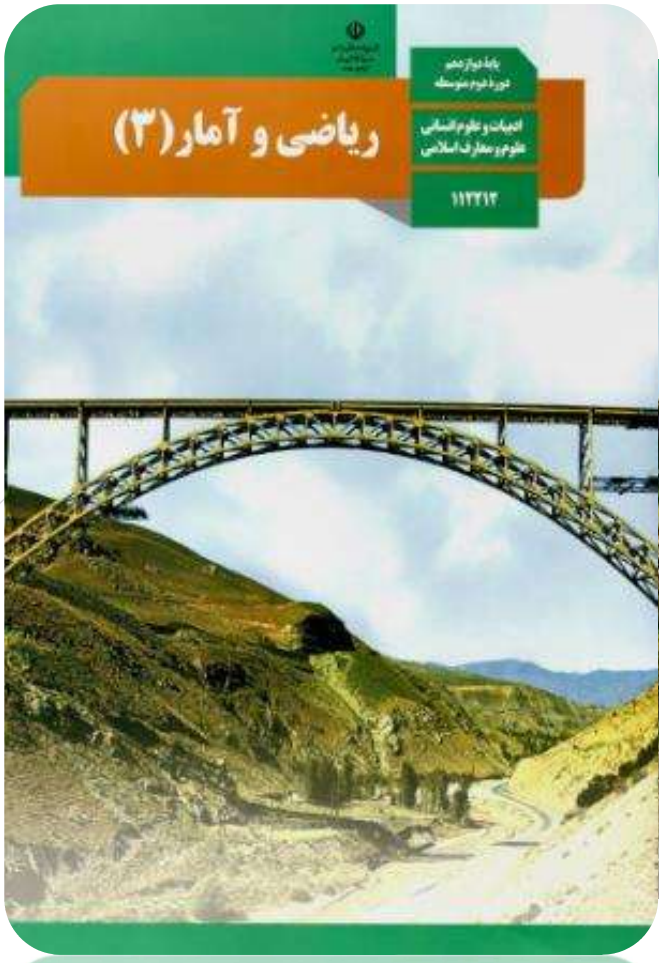
جزوه ریاضی و آمار ۳

پایه دوازدهم انسانی

فصل سوم: الگوهای غیرخطی



مولف: سیدابوالفضل فاضلیان

دنباله هندسی : دنباله ای است که هر جمله آن (به غیر جمله اول) از ضرب یک مقدار ثابت

به نام قدرنسبت یا نسبت مشترک در جمله قبلش بدست می آید.

مانند : $\dots, 48, 12, 3, \dots$ یا $\dots, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, \dots$

$\times 4$ $\times \frac{1}{4}$

جمله عمومی دنباله هندسی : اگر a_1 جمله اول و q یا قدرنسبت دنباله هندسی باشد، جمله عمومی یا

جمله دام آن عبارت است از : $a_n = a_1 q^{n-1}$

چند رابطه مهم در دنباله هندسی :

۱) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$: قدرنسبت در دنباله هندسی برابر تقسیم دو جمله متوالی است

۲) $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$: یافتن قدرنسبت هرگاه a_m و a_n دو جمله از دنباله هندسی را داشته باشیم

۳) a, b, c : سه جمله متوالی دنباله هندسی $\Leftrightarrow b^2 = ac$ رابطه واسطه یا میانگین هندسی

۴) $q^{k+1} = \frac{b}{a}$: درج واسطه هندسی : اگر بین دو عدد a و b، k عدد طوری قرار دهیم که دنباله هندسی حاصل شود

۲ در دنباله‌های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جملهٔ بعدی را بنویسید. سپس جملهٔ عمومی هر دنباله را به‌دست آورید.

الف) $\overset{a_1}{۲}, ۶, ۱۸, ۵۴, \boxed{۱۶۲}, \boxed{۴۸۶}, \ldots, a_n = ۲\times ۳^{n-۱}$

$\times ۳ \quad \times ۳ = r$

ب) $۵, ۱۰, ۲۰, ۴۰, \boxed{۸۰}, \boxed{۱۶۰}, \ldots, b_n = ۵\times ۲^{n-۱}$

$\times ۲ \quad \times ۲$

پ) $۶, -۶۰, ۶۰۰, -۶۰۰۰, \boxed{۶۰۰۰۰}, \boxed{-۶۰۰۰۰۰}, \ldots, c_n = ۶\times(-۱۰)^{n-۱}$

$\times(-۱۰) \quad \times(-۱۰)$

ت) $۴, ۲, ۱, \frac{۱}{۲}, \boxed{\frac{۱}{۴}}, \boxed{\frac{۱}{۸}}, \ldots, d_n = ۴\times(\frac{۱}{۲})^{n-۱}$

$\times \frac{۱}{۲} \quad \times \frac{۱}{۲}$

مثال: در یک دنباله هندسی جمله اول ۷ و قدر نسبت ۲ می‌باشد. جمله چندم ۲۲۴ است؟

① ② ③ ? ۷, ۱۴, ۲۸, ... ۲۲۴

$t_n = t_1 r^{n-1} \rightarrow ۲۲۴ = ۷\times ۲^{n-۱} \xrightarrow{\div ۷} ۳۲ = ۲^{n-۱}$

$\rightarrow ۲^{۵} = ۲^{n-۱} \rightarrow n-۱ = ۵ \rightarrow n = ۶$

مثال: جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

$\begin{cases} t_۳ = ۱۲ \\ t_۶ = ۹۶ \\ t_1, r = ? \end{cases}$

$r^{۶-۳} = \frac{t_۶}{t_۳} = \frac{۹۶}{۱۲} = ۸$

$r^۳ = ۸ \rightarrow r = ۲$

$t_۳ = ۱۲ = t_1 \times ۲^{۳-۱} \rightarrow ۱۲ = t_1 \times ۲^۲ \rightarrow ۱۲ = ۴t_1 \rightarrow t_1 = ۳$

مثال: میانگین هندسی دو عدد ۴ و ۹ را بیابید.

$$b^2 = ac = 4 \times 9 = 36 \longrightarrow b^2 = 36 \longrightarrow b = \pm 6$$

مثال: دنباله هندسی $\ldots, \frac{1}{2}, x, 2$ نخست کاهشی (نزولی) است. x را بیابید.

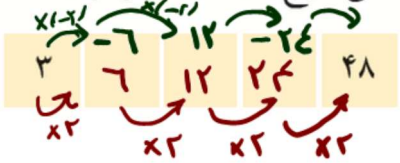
$$x^2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \longrightarrow x = \pm 1$$

کاهشی: جمله‌ی دنباله کاهشی می‌باشد

$x=1$: $2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$

$x=-1$: $2, -1, \frac{1}{2}, \ldots$ ✓

مثال: بین ۳ و ۴۸ سه واسطهٔ هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟



$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

$$\begin{cases} n=3 \\ a=3 \\ b=48 \end{cases} \longrightarrow r^{3+1} = \frac{48}{3} = 16 \longrightarrow r^4 = 2^4 \longrightarrow r = \pm 2$$

$r=2 \rightarrow 3, 6, 12, 24, 48$

$r=-2 \rightarrow 3, -6, 12, -24, 48$

تذکر: رابطه بازگشتی برای دنباله هندسی به صورت $a_{n+1} = r a_n$ است.

مانند $2, -4, 8, -16, \ldots$ $\quad a_1 = 2, \ a_{n+1} = (-2) a_n$

مجموع n جمله اول در یک دنباله هندسی :

مجموع n جمله اول دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \qquad q \neq 1$$

اثبات :

$$S_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} \qquad (1)$$

$$\times q \Longrightarrow qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n \qquad (2)$$

$(1) - (2) \Rightarrow$

$$S_n - qS_n = (a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}) - (a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n \Rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$\div(1-q) \Longrightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$
$$q \neq 1$$

اگر $q = 1$ باشد عضو دنباله به صورت $a_1, a_1, \ldots, a_1$ باشد $S_n = na_1$

مثال: مجموع هفت جمله اول دنباله هندسی ... و ۳, ۶, ۱۲ را بیابید.

$$S_7 = 3 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 3 \times \frac{1-128}{1-2} = 3 \times \frac{-127}{-1} = 3 \times 127 = 381$$

مثال: در دنباله هندسی $a_3 = 6$ و $a_7 = 192$، مقدار S_{10} را محاسبه کنید.

$$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \Rightarrow q^{7-3} = \frac{a_7}{a_3} \Rightarrow q^4 = \frac{192}{6} = 32 \rightarrow q^4 = 32$$

$$\Rightarrow q = 2$$

$$a_3 = a_1 q \Rightarrow 6 = a_1 \times 2 \rightarrow a_1 = 3$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 3 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 3 \times \frac{1-1024}{-1} = 3 \times 1023 = 3069$$

مثال: مجموع چند جمله دنباله هندسی ... و ۶, ۱۲, ۲۴, ... برابر ۱۰۲۶ است؟

$\times(-2)$ $\times(-2)$

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ q = -2 \\ S_n = 1026 \\ n = ? \end{cases} \qquad S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$1026 = 6 \times \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} \Rightarrow 1026 = 2\left(1-(-2)^n\right)$$

$$\div 2 \Rightarrow 1-(-2)^n = 513 \rightarrow -(-2)^n = 512$$

$\xrightarrow{\div(-1)} (-2)^n = -512 \rightarrow (-2)^n = (-2)^9 \rightarrow n = 9$

مثال: بین دو عدد ۴ و ۴۲۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی داده‌اند. مجموع این ۵ عدد چقدر است را بیابید.

$4, \square, \square, \square, 324 \qquad q^{k+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow q^{4+1} = \frac{324}{4}$

$\Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = \pm 3 \xrightarrow[\text{مسئله}]{\text{فرض}} q = 3$

$S_5 = 4 \times \frac{1-3^5}{1-3} = \frac{4(1-243)}{-2} = -2(-242) = 484$

مثال: در دنباله هندسی افزایشی $4, 6, 9, b, \ldots$ مجموع شش جمله اول را بدست آورید.

روش اول یافتن q: $q^{4-1} = \frac{a_4}{a_1} = \frac{9}{4} \rightarrow q^2 = \frac{9}{4} \rightarrow q = \pm\frac{3}{2}$

دنباله افزایشی $\longrightarrow q = \frac{3}{2}$

روش دوم یافتن q:

دنباله هندسی: $a^2 = 6 \times 9 = 36 \rightarrow a = \pm 6 \rightarrow a = 6$

$4, 6, 9, b, \ldots \Rightarrow q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$S_4 = 4 \times \frac{1-(\frac{3}{4})^4}{1-\frac{3}{4}} = 4 \times \frac{1-\frac{729}{256}}{\frac{1}{4}} = -8\left(\frac{256-729}{256}\right) = -\frac{-473}{8}$$

$$= \frac{473}{8}$$

مثال: در یک دنباله هندسی مجموع شش جمله اول ۲۸ برابر مجموع سه جمله اول است. مجموع ده جمله اول چند برابر مجموع پنج جمله اول است؟

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \times \frac{q^n-1}{q-1}$$

$$S_6 = 28 S_3 \Rightarrow a_1 \times \frac{q^6-1}{q-1} = 28 a_1 \times \frac{q^3-1}{q-1}$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{(q^3-1)(q^3+1)}{q-1} = 28 \frac{q^3-1}{q-1} \Rightarrow q^3+1 = 28 \rightarrow q^3 = 27$$

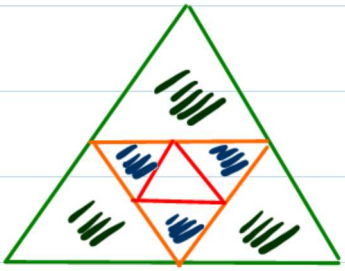
$$\rightarrow q = 3$$

$$S_{10} = k S_5 \rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = k$$

$$\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{a_1 \times \frac{q^{10}-1}{q-1}}{a_1 \times \frac{q^5-1}{q-1}} = \frac{q^{10}-1}{q^5-1} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{(q^5-1)(q^5+1)}{q^5-1}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = q^5+1 = 3^5+1 = 243+1 = 244$$

مثال: وسط اضلاع مثلث متساوی الاضلاعی را به هم وصل می‌کنیم و سه مثلث از چهار مثلث ایجاد شده را رنگ می‌کنیم. پس این کار را با مثلث باقی مانده تکرار می‌کنیم. حداقل چند مرحله باید رنگ آمیزی را انجام دهیم تا بیش از 99.9 درصد مساحت اولیه رنگ شود؟



مساحت مثلث اولیه $= S$

مرحله اول ، مرحله دوم ، مرحله سوم

$\frac{3}{4}S , \frac{3}{4}(\frac{1}{4}S) , \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^2 S , \dots$

دنباله هندسی : $a_1 = \frac{3}{4}S , q = \frac{1}{4} \quad S_n > \frac{999}{1000}S$

$$S_n = \frac{3}{4}S \times \frac{(\frac{1}{4})^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{3}{4}S \times \frac{\frac{1}{4^n} - 1}{-\frac{3}{4}} = S(1 - \frac{1}{4^n})$$

$$S_n > \frac{999}{1000}S \Rightarrow S(1 - \frac{1}{4^n}) > \frac{999}{1000}S$$

$$1 - \frac{999}{1000} > \frac{1}{4^n} \Rightarrow \frac{1}{1000} > \frac{1}{4^n} \xrightarrow{\text{معکوس}} 1000 < 4^n$$

باحدس و آزمایش $4^5 = 1024 \rightarrow 1000 < 4^5 \Rightarrow n \geq 5$

یادآوری و تکمیل :

در سال های قبل با مفهوم توان آشنا شدید. زمانی که عددی چند بار در خودش ضرب شود برای سادگی در نوشتن و خلاصه نویسی از توان استفاده می کنیم مانند :

$(-3)^2 = (-3)\times(-3)$ ، $\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$ ، $2^3 = 2\times2\times2$

یا به صورت کلی هرگاه $a\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$ می نویسیم : $\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ بار}} = a^n$

این تعریف فقط مربوط به توان طبیعی است .

خواص توان طبیعی :

اگر a و b اعداد حقیقی و n و m طبیعی باشند داریم :

۱) در ضرب اعداد توان دار با پایه های مساوی ، یکی از پایه ها را نوشته، توان ها را جمع می کنیم: $a^n \times a^m = a^{n+m}$

۲) در تقسیم اعداد توان دار با پایه های مساوی، یکی از پایه ها را نوشته، توان مخرج را از صورت کم می کنیم: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

۳) در ضرب اعداد توان دار با توان های مساوی، یکی از توان ها را نوشته، پایه ها را ضرب می کنیم: $a^n \times b^n = (ab)^n$

۴) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$ در تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی، یکی از توان‌ها را نوشته، پایه‌ها را تقسیم می‌کنیم:

۵) $(a^r)^s = a^{rs}$ اگر حاصل توان‌دار، دوباره به توان برسد، توان‌های قدیم و جدید ضرب می‌شوند:

توان صفر:

این نکته را هم در سال‌های گذشته دیدید که هر عدد به توان صفر برابر یک می‌شود نه تعریفی

مساوی با توان طبیعی دارد ولی چرا $a^0 = 1$ ؟

*اثبات: رابطه (۱) $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

رابطه (۲) $\frac{a^n}{a^n} = 1$

چون سمت چپ رابطه‌های ۱ و ۲ برابرند پس سمت راست آن‌ها هم برابرند پس

$$a^0 = 1$$

مثال: $(\sqrt{7})^0 = 1$ ، $(\frac{1}{2})^0 = 1$ ، $۴^0 = 1$

$(-9)^0 = 1$ ، ...

توان های صحیح منفی :

وقتی عددی حقیقی به توان یک عدد صحیح منفی می رسد باز هم باید تعریفی مشابه از توان طبیعی

داشته باشیم به این صورت که : $a^{-2} = \frac{1}{a^2} = (\frac{1}{a})^2$.

یعنی پایه را معکوس می کنیم و توان مثبت می شود .

اثبات : فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند که $m > n$ و $r = m - n$:

رابطه (۱) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-r}$

رابطه (۲) $\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}^{n \text{ بار}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{m \text{ بار}}} \xrightarrow[m>n]{\text{ساده کنیم}} \frac{1}{a^{m-n}} = \frac{1}{a^r}$

قرار a های حذف شده

مشابه اثبات قبل چون بین چپ عبارت ها با یکدیگر برابرند پس بین راست

هم برابری می شوند و داریم : $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

مثال:

۱) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{27}$ ۲) $(\frac{1}{2})^{-6} = 2^6 = 64$

۳) $\left(-\frac{۷}{۱}\right)^{-۲} = \left(-\frac{۱}{۷}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴۹}$

۴) $\left(\frac{۴}{۵}\right)^{-۳} = \left(\frac{۵}{۴}\right)^{۳} = \frac{۱۲۵}{۶۴}$

۵) $\frac{۱}{۹^{-۲}} = ۹^{۲} = ۸۱$

تذکر: تمام خواصِ توان طبیعی برای توان صحیح منفی هم برقرار است.

مثال:

۱) $۵^{-۴} \times ۵^{-۲} = ۵^{-۴-۲} = ۵^{-۶} = \frac{۱}{۵^{۶}}$

۲) $۳^{-۷} \times ۲^{-۷} = (۳ \times ۲)^{-۷} = ۶^{-۷} = \frac{۱}{۶^{۷}}$

۳) $\frac{۶^{-۸}}{۶^{-۳}} = ۶^{-۸-(-۳)} = ۶^{-۸+۳} = ۶^{-۵} = \frac{۱}{۶^{۵}}$

۴) $\left(۴^{-۲}\right)^{۵^{ω}} = ۴^{-۱۰} = \frac{۱}{۴^{۱۰}}$

۵) $۸^{-۲} \times ۲^{۳} = (۲^{۳})^{-۲} \times ۲^{۳} = ۲^{-۶} \times ۲^{۳} = ۲^{-۳} = \frac{۱}{۲^{۳}} = \frac{۱}{۸}$

۶) $\frac{۴^{-۳}}{۸^{-۳}} = \left(\frac{۴}{۸}\right)^{-۳} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳} = ۲^{۳} = ۸$

توان های گویا :

حال با یک مثال وارد بحث اصلی خیر توان های گویا می شویم .

در آزمایشگاهی نوعی باکتری کشت داده می شود که وزن آن ها در هر ساعت دو برابر می شود.

اگر وزن آن ها در شروع آزمایش یک گرم باشد، وزن آن ها بعد از یک ساعت ۲ گرم و بعد از دو ساعت

۴ گرم و ... یعنی : $1, 2, 4, 8, \dots$

$\rightarrow \quad 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$

حال می خواهیم ببینیم وزن این باکتری ها بعد از نیم ساعت یا همان $\frac{1}{2}$ ساعت چقدر می شود.

اگر فرض کنیم بعد از نیم ساعت وزن باکتری ها b برابر شود، پس طبق الگوی بالا :

رابطه (۱) $\quad b = 2^{\frac{1}{2}}$

از طرفی فرض کردیم وزن باکتری ها بعد از نیم ساعت b برابر می شود. پس بعد از یک ساعت

وزن آن ها : $b \times b = b^2$ خواهد بود . ولی طبق دنباله بالا بعد از یک ساعت وزن باکتری ها

۲ برابر عددی که مجذور آن ۲ شود است پس $b^2=2$ یعنی $b=\sqrt{2}$ (رابطه ۲) : ①,② → $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

توان $\frac{1}{n}$ ام : اگر n عدد طبیعی بزرگتر مساوی ۲ باشد، توان $\frac{1}{n}$ ام عدد حقیقی و مثبت a را با $a^{\frac{1}{n}}$

نشان می‌دهیم و این طور تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

توان ۱ / مخرج = ریشه

مثال : هریک از عبارت‌های زیر را به صورت رادیکالی بنویسید .

$64^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{64^1}=\sqrt[6]{64}=2$

$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{3^1}=\sqrt{3}$

$81^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{81}=3$

$6^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{6}$

تذکر : برای توان های طبیعی قاعده مذب توان ها (توان جدید در قدیم) را در نظر گرفتیم.

می‌توانیم از این قاعده کمک بگیریم و توان‌های گویا را در حالت کلی تعریف کنیم :

مثلاً :

$$7^{\frac{3}{4}}=7^{3\times\frac{1}{4}}=(7^3)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{7^3}$$

توان $\frac{m}{n}$ ام : اگر a عددی حقیقی و مثبت ، m عددی صحیح و n عدد طبیعی باشد

توان $\frac{m}{n}$ ام ، a را با $a^{\frac{m}{n}}$ نشان می‌دهیم و اینطور تعریف می‌کنیم :

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ← توان ، ← فرجه

پس توان گویای هر عدد به صورت یک ریشه گیری بیان می‌شود مثلاً : $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1,4$

مثال: اعداد توان‌دار زیر را به صورت رادیکالی بنویسید.

$$5^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{5^2} = \sqrt[5]{25}$$

$$3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2} = \sqrt[7]{9}$$

$$81^{\frac{3}{4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{(3^3)^4} = 3^3 = 27 \\ (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^{4\times\frac{3}{4}} = 3^3 = 27 \end{cases}$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

تذکر: چون $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$ پس می‌توانیم بنویسیم : (۵)۰

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

مثلاً : $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{7^1} = (\sqrt{7})^1$

قوانین توان‌های گویا :

تمام قوانین توان طبیعی برای توان‌های گویا هم برقرار هستند.

مثال: حاصل عبارت زیر را به صورت رادیکالی بنویسید.

۱) $۳^{-\frac{۵}{۷}} = \frac{۱}{۳^{\frac{۵}{۷}}} = \frac{۱}{\sqrt[۷]{۳^{۵}}}$

۲) $\left((۱۶)^{\frac{۱}{۳}}\right)^{\frac{۳}{۴}} = (۱۶)^{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۴}} = ۱۶^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۱۶} = ۲$

۳) $۳^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{\frac{۲}{۵}} = ۳^{\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۵}} = ۳^{\frac{۵+۴}{۱۰}} = ۳^{\frac{۹}{۱۰}} = \sqrt[۱۰]{۳^{۹}}$

۴) $\frac{۷^{\frac{۳}{۵}}}{۷^{\frac{۱}{۴}}} = ۷^{\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۴}} = ۷^{\frac{۱۲-۵}{۲۰}} = ۷^{\frac{۷}{۲۰}} = \sqrt[۲۰]{۷^{۷}}$

۵) $۴^{\frac{۲}{۴}} \times ۵^{\frac{۲}{۴}} = ۲۰^{\frac{۲}{۴}} = \sqrt[۴]{۲۰^{۲}} = \sqrt[۴]{۴۰۰}$

۶) $\frac{۶^{\frac{۸}{۴}}}{۲^{\frac{۸}{۴}}} = ۳^{\frac{۸}{۴}} = \sqrt[۴]{۳^{۸}} = \sqrt[۴]{۳^{۶}\times۳^{۲}} = \sqrt[۴]{۳^{۳}}\times\sqrt[۴]{۹} = ۳^{\frac{۳}{۴}}\times\sqrt[۴]{۹} = ۹\sqrt[۴]{۹}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را در صورت امکان به صورت توان کسری بنویسید.

۱) $\sqrt{۵^{۴}} = ۵^{\frac{۴}{۲}}$

۲) $\sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$

۳) $\frac{\sqrt[6]{2} \times \sqrt[2]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{1+3}{6}}}{2^{\frac{3}{4}}}$

$= \frac{2^{\frac{4}{6}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{4}}} = 2^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{8-9}{12}} = 2^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{12}}}$

۴) $\sqrt[5]{-3}$ نمی‌توان به صورت توان کسری نوشت

۵) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{6}} = \sqrt[21]{6} = 6^{\frac{1}{21}}$

۶) $\frac{5^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{5^{-\frac{1}{4}}}{5^{\frac{4}{4}}} = 5^{-\frac{1}{4}-\frac{4}{4}} = 5^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{5}{4}}}$

مثال: حاصل $\frac{64^{\frac{1}{6}} \times 125^{\frac{4}{3}}}{9^{\frac{3}{2}} - 8^{\frac{1}{3}}}$ را بیابید.

$64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$

$9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

$125^{\frac{4}{3}} = (5^3)^{\frac{4}{3}} = 5^4$

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\frac{2 \times 5^4}{27-2} = \frac{2 \times 5^4}{25} = \frac{2 \times 5^4}{5^2} = 2 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50$

مثال: اگر $a>0$، حاصل عبارت $\left(\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[4]{a^3}}\right)^{\frac{6}{7}}$ را محاسبه کنید.

$$\left(\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{6}{7}}=\left(a^{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{6}{7}}=\left(a^{\frac{16-9}{12}}\right)^{\frac{6}{7}}$$

$$=\left(a^{\frac{7}{12}}\right)^{\frac{6}{7}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$$

مثال: مقدار $\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}$ را به دست آورید.

$$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{4}}=\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt[3]{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times 4^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times(2^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}$$

$\frac{2}{3}=1$

عبارت $=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{3}}$

$$=2^1\times 2^1=4$$

یادآوری :

می دانیم $3^2 = 9$ ، $(-3)^2 = 9$. 3 و -3 را ریشه‌های دوم عدد 9 می‌گوییم .

وقتی می‌نویسیم $\sqrt{9}$ منظورمان فقط ریشه دوم مثبت آن یعنی 3 است . اگر بخواهیم

ریشه دوم منفی را نشان دهیم می‌نویسیم : $-\sqrt{9} = -3$

با توجه به اینکه هر عددی وقتی به توان 2 می‌رسد مثبت می‌شود ، پس اعداد منفی

ریشه دوم ندارند مثلاً -9 ریشه دوم ندارد زیرا : $(?)^2 = -9$

یعنی هیچ عددی وجود ندارد که وقتی به توان دو برسد -9 شود .

می‌دانیم $4^3 = 64$. 4 را ریشه سوم عدد 64 می‌نامیم و می‌نویسیم $\sqrt[3]{64} = 4$.

برخلاف ریشه دوم ، اعداد منفی هم ریشه سوم دارند مثلاً :

$$\sqrt[3]{-125} = -5 \quad , \quad \sqrt[3]{-27} = -3$$

حال تعاریف بالا را برای ریشه‌های n ام (n عدد طبیعی بزرگتر مساوی 2) تعمیم می‌دهیم .

تعریف : اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد ، b را یک ریشه n ام عدد حقیقی a می نامیم هرگاه :

$$b^n = a$$

$$3^2 = 9$$

نکته خیلی مهم :

- اگر n فرد باشد برای نمایش ریاضی ریشه n ام عدد حقیقی a از نماد رادیکال استفاده می کنیم و می نویسیم : $\sqrt[n]{a}$

و می خوانیم رادیکال a با فرجه n.

- اگر n زوج باشد و a هم عدد حقیقی مثبت در نظر گرفته شود زمانی که می نویسیم $\sqrt[n]{a}$ (رادیکال a با فرجه n) منظورمان فقط ریشه n ام مثبت عدد a است . اگر بخواهیم ریشه n ام منفی عدد a را نمایش دهیم می نویسیم $-\sqrt[n]{a}$

تأکید: هر عدد حقیقی دارای یک ریشه فرد است که اگر عدد مثبت باشد، ریشه هم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه هم آن منفی است.

هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه زوج است که قرینه یکدیگرند.

عددهای منفی ریشه زوج ندارند.

مثال: جدول زیر را برای ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ کامل کنید.

ریشه‌های هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌های ششم	ریشه پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوم	ریشه‌های دوم
$\sqrt[8]{64}$ و $-\sqrt[8]{64}$	$\sqrt[7]{64}$	$\sqrt[6]{64}=2$ و $-\sqrt[6]{64}=-2$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[3]{64}=4$	$\sqrt{64}=8$ و $-\sqrt{64}=-8$

مثال: جدول زیر را برای ریشه‌های مختلف عدد ۶۴- کامل کنید.

ریشه‌هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌ششم	ریشه پنجم	ریشه‌چهارم	ریشه سوم	ریشه دوم
وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64}=-4$	وجود ندارد

مثال: جدول‌های زیر را کامل کنید.

عدد	۱۶		۶۲۵		۱۰،۰۰۰		۳۱۲۵	
ریشه‌های چهارم	۲	-۲	۵	-۵	۱۰	-۱۰	$\sqrt[4]{5}$	$-\sqrt[4]{5}$

$\sqrt[4]{3125}=\sqrt[4]{625\times5}=\sqrt[4]{625}\times\sqrt[4]{5}$

عدد	-32	3125	-243	-1	-100000
ریشه پنجم	-2	5	-3	-1	-10

مثال : جدول زیر را کامل کنید.

$a>0$	n زوج	a دارای دو ریشهٔ nام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	$a=81$ $n=4$	۸۱ دارای دو ریشهٔ چهارم $3=\sqrt[4]{81}$ و $-3=-\sqrt[4]{81}$ است
	n فرد	a دارای یک ریشهٔ nام $\sqrt[n]{a}$ است.	$a=32$ $n=5$	۳۲ دارای ریشهٔ پنجم $2=\sqrt[5]{32}$ است
$a<0$	n زوج	ریشهٔ nام وجود ندارد	$a=-81$ $n=4$	ریشهٔ چهارم ۸۱- وجود ندارد
	n فرد	a دارای یک ریشهٔ nام $\sqrt[n]{a}$ است	$a=-8$ $n=3$	۸- دارای ریشهٔ سوم $-2=\sqrt[3]{-8}$ است.

مثال :

حاصل هر عبارت را به‌دست آورید :

$\sqrt[9]{-1}=-1$ $\quad\sqrt[8]{256}=2$ $\quad\sqrt[7]{128}=2$

$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}}=\frac{-1}{2}$ $\quad-\sqrt[4]{0/0016}=-0/2$ $\quad\sqrt[4]{625}=5$

$\sqrt[6]{0}=0$ $\quad\sqrt[7]{-128}=-2$

$\sqrt[n]{0}=0$

نکته : حاصل هر رادیکال با فرجه زوج، قطعاً مثبت است غیر از :

$\sqrt[\text{زوج}]{a}=b\rightarrow$ مثبت

مثبت

ویژگی های رادیکال :

۱) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & n \text{ فرد} \\ |a| & n \text{ زوج} \end{cases}$

۲) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & n \text{ فرد} \; ; \; a,b \in \mathbb{R} \\ \sqrt[n]{ab} & n \text{ زوج} \; ; \; a,b > 0 \end{cases}$ ، $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ — به شرط این

۳) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ به شرطی که اگر n زوج باشد، a مثبت باشد ؛

۴) $(\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} a & n \text{ فرد} \; ; \; a \in \mathbb{R} \\ a & n \text{ زوج} \; ; \; a > 0 \\ \text{تعریف نشده} & n \text{ زوج} \; ; \; a < 0 \end{cases}$

۵) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی

۶) $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ اگر m یا n زوج باشد ؛ a نامنفی

سوال : آیا $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ همواره برقرار است؟

خیر : $\sqrt[4]{(-3)^4} \neq (\sqrt[4]{-3})^4$ اگر n زوج باشد باید a مثبت باشد.

مثال : حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $\sqrt[۴]{(-۳)^۴} = |-۳| = ۳$

۲) $\sqrt[۵]{(-۲)^۵} = -۲$

۳) $\left(\sqrt[۳]{-۸}\right)^۴ = -۸$

۴) $\left(\sqrt[۸]{-۵}\right)^۸$ ← زوج ← تعریف نشده

۵) $\left(\sqrt[۵]{۲}\right)^۳ = \sqrt[۵]{۲^۳} = \sqrt[۵]{۸}$

۶) $\sqrt[۸]{(۱-\sqrt{۲})^۸} = |\underbrace{۱-\sqrt{۲}}_{\text{منفی}}| = -(۱-\sqrt{۲}) = \sqrt{۲}-۱$

۷) $\sqrt{۲^۵ a^۲} = \sqrt{۳۲a^۲} = \sqrt{۱۶ \times ۲a^۲} = \sqrt{۱۶} \times \sqrt{۲} \times \sqrt{a^۲} = ۴|a|\sqrt{۲}$

۸) $\sqrt[۴]{a^۴ b^۵} = \sqrt[۴]{a^۴} \times \sqrt[۴]{b^۴ \times b} = |a||b|\sqrt[۴]{b}$

۹) $\sqrt[۵]{\frac{۶۴a^{۱۵}}{b^۹}} = \frac{\sqrt[۵]{۶۴a^{۱۵}}}{\sqrt[۵]{b^۹}} = \frac{\sqrt[۵]{۲^۶ \times a^۳}}{\sqrt[۵]{b^۵ \times b^۴}}$ ← $(a^۳)^۵ = a^{۱۵}$

$= \frac{\sqrt[۵]{۲^۵ \times ۲ \times a^۳}}{b\sqrt[۵]{b^۴}} = \frac{۲a\sqrt[۵]{۲a^۳}}{b\sqrt[۵]{b^۴}}$

۱۰) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{2\times 2^2}}} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[8]{2}$

$\overset{1\times 3}{\nearrow}$

۲ را داخل رادیکال می‌کنیم و توان به اندازه خارج به آن می‌دهیم

۱۱) $\sqrt{-a} + \dfrac{\sqrt[3]{a^2}+2a}{\sqrt[4]{a^4}-2a}$

چون عبارت $\sqrt{-a}$ تعریف شده است پس a عددی منفی بوده است.

$$\sqrt{-a} + \frac{a+2a}{|a|-2a} = \sqrt{-a} + \frac{3a}{-a-2a} = \sqrt{-a} + \frac{3a}{-3a} = \sqrt{-a}-1$$

$\swarrow$

جمع‌بندی رشته‌ی ریاضی و توان گویا

۱) $a^0 = 1$

۲) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

۳) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

۴) $a^n \times b^n = (ab)^n$

۵) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

۶) $(a^n)^m = a^{n \times m}$

۷) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

۸) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

سوال ۱)

جاهای خالی را با اعداد مناسب تکمیل کنید.

الف) ریشه پنجم عدد ۳۲ برابر .....۲..... است.

ب) ریشه های چهارم عدد ۱۶ برابر .....۲..... و .....-۲..... است.

پ) ریشه سوم عدد ۲۷ برابر .....۳..... است.

$\sqrt[5]{32}=2$, $2^5=32$, $?^5=32$

$2^4=16$, $(-2)^4=16$, $?^4=16$

$?^3=27$

سوال ۲)

عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.

الف) $4^{\frac{1}{3}}$ ب) $(0/8)^{\frac{2}{9}}$ پ) $\sqrt[5]{(21)^4}$ ت) $\sqrt[8]{(0/47)^3}$

الف) $4^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{4^1}$ ب) $(/8)^{\frac{2}{9}}=\sqrt[9]{(/8)^2}$

ب) $\sqrt[9]{(21)^4}=21^{\frac{4}{5}}$ ت) $\sqrt[8]{(/47)^4}=(/47)^{\frac{4}{8}}$

سوال ۳)

هریک از عبارت های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

الف) $(\frac{1}{5})^{\frac{3}{4}}$ ب) $\sqrt[7]{0/18}$

الف) $\sqrt[4]{(\frac{1}{5})^3}$ ب) $(/18)^{\frac{1}{7}}$

سوال ۴)

عدد توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.

الف) $12^{-\frac{2}{11}}$ ب) $\sqrt[3]{25}$

الف) $12^{-\frac{2}{11}} = \frac{1}{12^{\frac{2}{11}}} = \frac{1}{\sqrt[11]{12^2}}$ ب) $25^{\frac{1}{3}}$

سوال ۵)

اعداد توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

الف) $\sqrt[3]{x^7}$ ب) $(m)^{\frac{3}{5}}$ پ) $(0/9)^{\frac{1}{6}}$

الف) $x^{\frac{7}{2}}$ ب) $\sqrt[5]{m^4}$ پ) $\sqrt[6]{0.19}$

سوال ۶)

عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.

الف) $3^{\frac{1}{5}}$ ب) $6^{\frac{1}{9}}$ پ) $\sqrt[4]{25}$ ت) $\sqrt[10]{3/7}$

الف) $\sqrt[5]{4}$ ب) $\sqrt[9]{6}$ پ) $25^{\frac{1}{4}}$ ت) $(3/7)^{\frac{1}{10}}$

سوال ۷)

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $2^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{2}}$

ب) $\left(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{m^{2}}\right)^{-4}$

الف) $(2\times 8)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

ب) $\left(m^{\frac{1}{2}-2}\right)^{-4} = \left(m^{\frac{-3}{2}}\right)^{-4} = m^{\frac{-3}{2}\times(-4)} = m^{6}$

سوال ۸)

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\left(\frac{3^{8}}{3^{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$

ب) 5×5^{2}

الف) $(4^{4})^{\frac{1}{2}} = 4^{2} = 9$

ب) $5^{3} = 125$

سوال ۹)

حاصل هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^{4}$

ب) $5^{\frac{-1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}}$

الف) $\frac{(a^{\frac{1}{4}})^{4}}{(a^{\frac{1}{4}})^{4}} = \frac{a^{2}}{a^{1}} = a^{2-1} = a$

ب) $5^{\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})} = 5^{0} = 1$

سوال ۱۰)

حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (m, n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

الف) $(m^{4}n^{3})^{2}\,(m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{6}})^{6}$ ب) $21^{\frac{2}{3}} \times (\frac{3}{7})^{\frac{2}{3}}$

الف) $m^{8} \times n^{6} \times m^{4} \times n^{1} = m^{11} \times n^{7}$

ب) $(21 \times \frac{3}{7})^{\frac{2}{4}} = 9^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{9^{2}} = \sqrt[4]{81}$

سوال ۱۱)

حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.(m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

الف) $(m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}})^{2}\,(m^{2}n^{3})^{\frac{1}{2}}$ ب) $8^{\frac{2}{7}} \times (\frac{3}{2})^{\frac{2}{7}}$

الف) $m^{\frac{3}{4}\times 2} \times n^{\frac{1}{2}\times 2} \times m^{2\times\frac{1}{2}} \times n^{3\times\frac{1}{2}} = m^{\frac{3}{2}} \times n \times m \times n^{\frac{3}{2}}$

$= (mn)^{\frac{3}{2}} \times (mn)^{1} = (mn)^{\frac{5}{2}+1} = (mn)^{\frac{5}{2}}$

ب) $(8\times\frac{9}{2})^{\frac{2}{7}} = 12^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{12^2} = \sqrt[7]{144}$

سوال ۱۲)

در هر یک از تساوی های زیر مقدار xرا مشخص کنید.

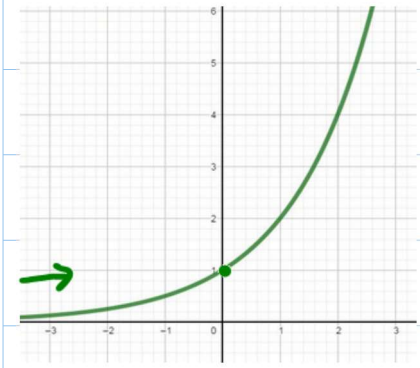
الف) $8^4\times 9^x = 72^4$ ب) $(5^x)^6 = \frac{1}{5^2}$ پ) $(0/6)^8\times(0/6)^x\times(0/6)^3 = (0/6)^1$

الف) $x=4$

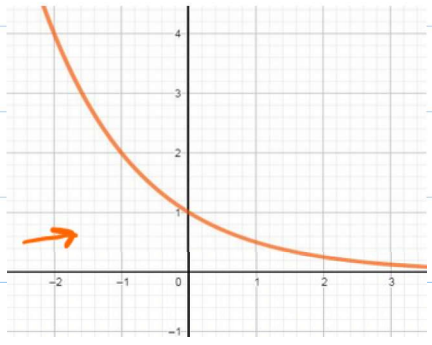
ب) $a^{6x} = a^{-2} \Rightarrow 6x=-2 \rightarrow x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$

پ) $(\%6)^{x+4} = (\%6)^8 \rightarrow x+4=8 \rightarrow x=4$

تابع نمایی :



$y=a^x$ $a>1$ افزایشی

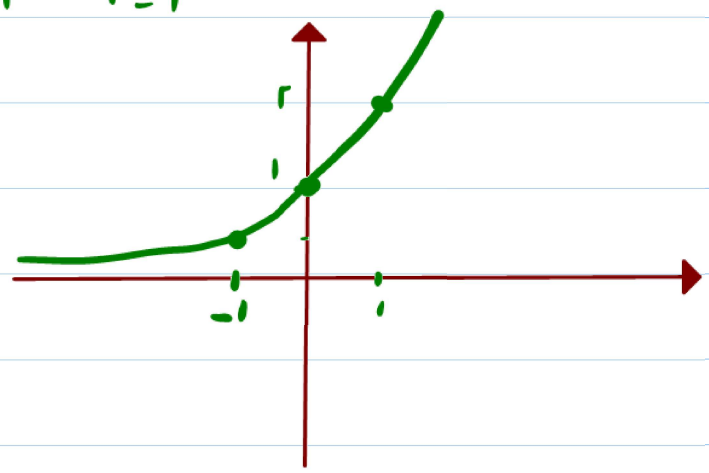


$y=a^x$ $0<a<1$ کاهشی

سوال ۱۳)

نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = ۲^{x}$ را رسم کنید.

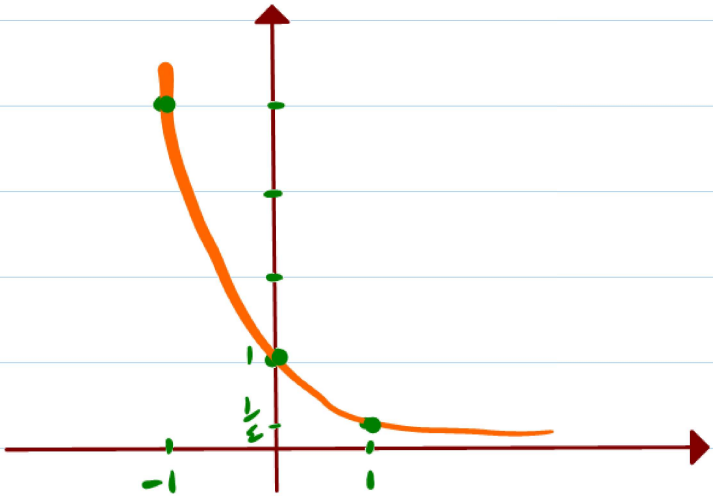
x	-۱	۰	۱
y	$۲^{-۱} = \frac{۱}{۲}$	$۲^{۰} = ۱$	$۲^{۱} = ۲$



سوال ۱٤)

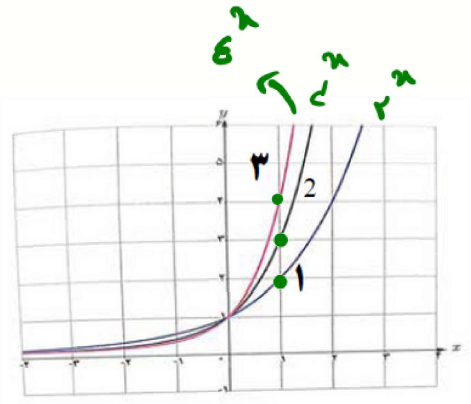
نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = (\frac{۱}{۴})^{x}$ را رسم کنید.

x	-۱	۰	۱
y	$(\frac{۱}{۴})^{-۱} = ۴$	$(\frac{۱}{۴})^{۰} = ۱$	$\frac{۱}{۴}$



سوال ۱۵)

نمودار های توابع $f(x)=۳^x$ ، $f(x)=۲^x$ ، $f(x)=۴^x$ در شکل زیر رسم شده اند. ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.



مسائل رشد و زوال

$f(t)=c(1+r)^t$: تابع رشد نمایی

$f(t)=c(1-r)^t$: تابع زوال نمایی

سوال ۱۶)

جمعیت کشوری در سال ۲۰۲۰ میلادی حدود ده میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال افزایش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۲۱ میلادی چند نفر خواهد بود.

$f(1)=10,000,000(1+\%01)^1=10,000,000\times 1.01=10,100,000$

سوال ۱۷)

پدر سارا قصد دارد مبلغ ۲۰ میلیون تومان را برای هزینه دانشگاه دخترش در بانکی سپرده گذاری کند. این بانک سالانه ۲۰٪ سود به سپرده ها پرداخت می کند. پدر سارا بعد از ۲ سال چه مبلغی را می‌تواند دریافت کند؟

$$f(2) = 20(1+\%2)^2 = 20\times(1,2)^2 = 20\times 1,44 = 28,8$$

سوال ۱۸)

جمعیت یک روستا، در سال ۱۳۹۶ حدود دو هزار نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این روستا با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۱۳۹۸ چند نفر خواهد بود؟

$$f(2) = 2,000\times(1-\%1)^2 = 2000\times(\%99)^2 = 2000\times\%98.1 = 1960,2$$