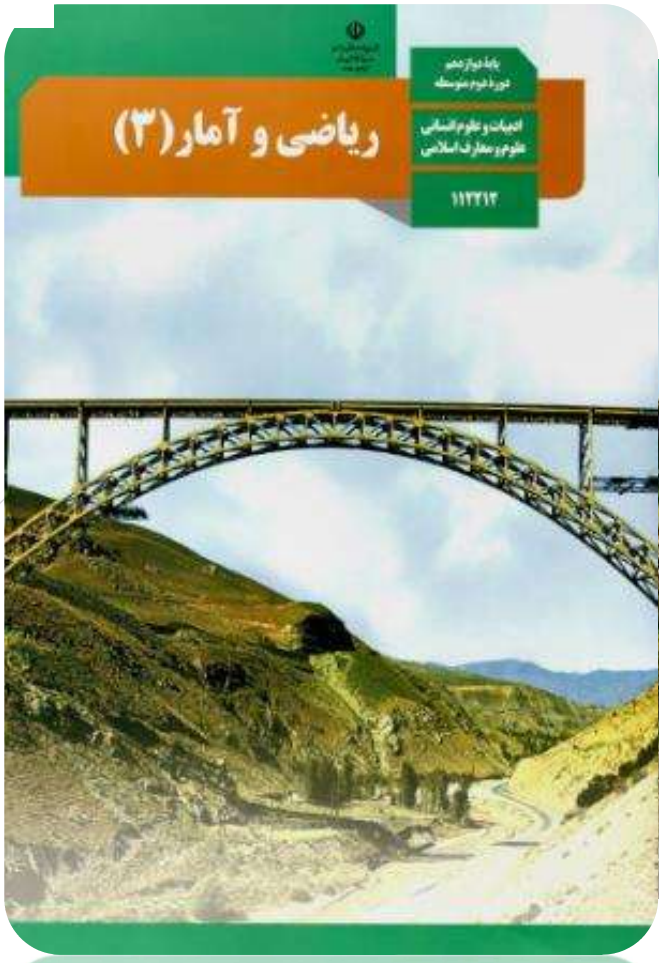
جزوه ریاضی و آمار ۳

پایه دوازدهم انسانی

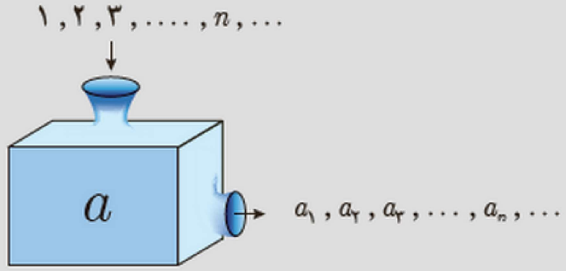
فصل دوم: الگوهای خطی



مولف: سیدابوالفضل فاضلیان

تعریف دنباله : همان‌طور که مشاهده شد، اگر a تابعی از $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد اعضای بُرد این تابع می‌تواند دنباله‌ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جملهٔ اول آن را $a(1)$، جملهٔ دوم را $a(2)$، جملهٔ سوم را $a(3)$، ... و جملهٔ nاُم را $a(n)$ در نظر می‌گیریم.

معمولاً جملات دنباله را به جای $a(n)$ با a_n نشان می‌دهند که آن را جملهٔ nاُم، جمله عمومی دنباله یا ضابطهٔ دنباله می‌نامند.



مثال : جمله عمومی دنباله‌های زیر را حدس بزنید.

الف) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ① ② ③ ④ ? ⑧ $\quad a_n = \frac{1}{n}$

ب) $2, 4, 6, 8, \ldots$ ① ② ③ ④ ? ⑧ $\quad b_n = 2n$

پ) $1, 3, 5, 7, \ldots$ ① ② ③ ④ ? ⑧ $\quad c_n = 2n - 1$

ت) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$ ① ② ③ ④ ? ⑧ $\quad d_n = \frac{3}{2^n}$

ث) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$ ① ② ③ ④ ⑤ $\quad t_n = (-1)^n \times n$

ج) ① ② ③ ④ ⑤
۰, ۳, ۸, ۱۵, ۲۴, ... $a_n = n^2 - 1$

ج) ① ② ③ ④
۲, ۶, ۱۲, ۲۰, ... $p_n = n^2 + n$

مثال: سه جمله اول دنباله‌های زیر را بنویسید.

الف) $a_n = 5n + 4$

$a_1 = 5\times 1 + 4 = 9$

$a_2 = 5\times 2 + 4 = 14$

$a_3 = 5\times 3 + 4 = 19$

۹, ۱۴, ۱۹, ...

ب) $b_n = \frac{n+1}{2n+3}$

$b_1 = \frac{1+1}{2\times 1+3} = \frac{2}{5}$ و $b_2 = \frac{2+1}{2\times 2+3} = \frac{3}{7}$, $b_3 = \frac{3+1}{2\times 3+3} = \frac{4}{9}$

$\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots$

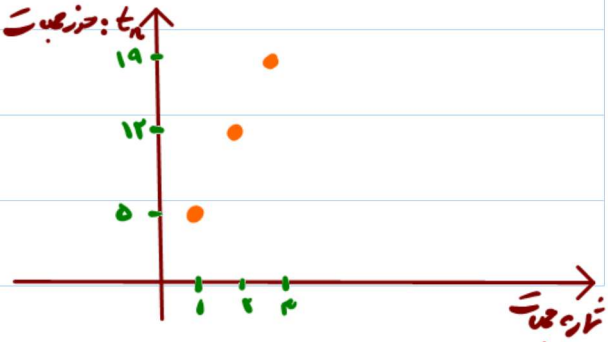
مثال: جمله عمومی دنباله ۵, ۱۲, ۱۹, ... را بدست آورید. این دنباله را رسم کنید. (+۷, +۷)

$t_n = 7n - 2$

(تک محوری) صورت اول



(دستگاه مختصات) صورت دوم



دنباله حسابی : دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن یک مقدار ثابت به نام قدر نسبت یا اختلاف مشترک به جمله قبل از خودش بدست می‌آید.

مانند ۲، ۵، ۸، ۱۱، ... قدر نسبت = ۳

(+۳ +۳ +۳)

جمله عمومی دنباله حسابی : اگر جمله اول را با a_1 و قدر نسبت را با d نمایش دهیم، جمله عمومی دنباله حسابی از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

چند رابطه مهم در دنباله حسابی :

۱) $d = a_{n+1} - a_n$: قدر نسبت در دنباله حسابی برابر تفاضل دو جمله متوالی است (جمله بعد − جمله قبل)

۲) $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$: با داشتن دو جمله از دنباله

۳) a, b, c سه جمله متوالی دنباله حسابی $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$ رابطه واسطه یا میانگین حسابی

۴) $n = \frac{b-a}{d} + 1$: تعداد جملات دنباله حسابی با جمله اول a و جمله آخر b

۵) درج واسطه حسابی: اگر بین دو عدد a و b، k عدد طوری قرار دهیم که دنباله حسابی حاصل شود : $d = \frac{b-a}{k+1}$

مثال: در دنباله‌ی مقابل جمله بیستم را حساب کنید. $3, 1, -1, \dots$

$t_1 = 3$ ، $d = -2$ $\quad t_{20} = 3 + (20-1)(-2) = 3 + (-38) = -35$

مثال: در یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۶، جمله چندم ۸۷ است؟

$3, 9, 15, \dots, 87$ $\quad t_n = t_1 + (n-1)d$ $\quad 87 = 3 + (n-1)\times 6$

$87 = 3 + 6n - 6$ $\quad 90 = 6n \longrightarrow n = \frac{90}{6} = 15$

مثال: در دنباله حسابی t_n، حاصل $\frac{t_5 + 2t_{11}}{3}$ برابر کدام جمله است؟

۱) دهم ۲) نهم ۳) هشتم ۴) هفتم

$$\frac{t_1 + 3d + 2(t_1 + 10d)}{3} = t_1 + 8d = t_9$$

مثال: در یک دنباله حسابی مجموع جمله اول تا سوم برابر ۳۰، مجموع چهار جمله بعدی برابر ۲۰۰ است. قدرنسبت جمله دنباله $b_n : a_2, a_6, a_{10}, \dots$ کدام است؟

۱) ۹٫۲ ۲) ۹٫۶ ۳) ۱۰٫۲ ۴) ۱۰٫۸

$t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d = 30 \rightarrow 3t_1 + 3d = 30$

$t_{12} + t_{13} + t_{14} + t_{15} = 200 \rightarrow 4t_1 + 54d = 200$

$\times -2$: $t_1 + d = 10$ ، $2t_1 + 27d = 100$

$25d = 80 \longrightarrow d = \frac{16}{5} = 3.2$

$d' = t_6 - t_2 = t_8 - t_6 = 2d = 2 \times 3.2 = 9.6$

مثال: در یک دنباله حسابی $t_4 = 19$ و $t_9 = 34$ باشد، قدرنسبت و جمله اول را بیابید.

$$d = \frac{t_9 - t_4}{9-4} = \frac{34-19}{9-4} = \frac{45}{5} = 9$$

$t_4 = 19 = t_1 + (4-1)\times 9 \Rightarrow 19 = t_1 + 27 \Rightarrow t_1 = 19 - 27 = -8$

مثال: بین دو عدد ۴ و ۲۷، پنج واسطه حسابی بنویسید. قدرنسبت را به دست آورید و جملات دنباله را بنویسید.

$$d = \frac{۲۷-۴}{۵+۱} = \frac{۲۳}{۶} = ۴$$

۴, ۷, ۱۱, ۱۵, ۱۹, ۲۳, ۲۷

مثال: اگر $\frac{۱}{۲}$ واسطه‌حسابی دو عدد $\frac{۱}{n}$ و $\frac{۱}{n+۲}$ باشد، n را بیابید.

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{n} + \frac{۱}{n+۲}\right) \Rightarrow ۱ = \frac{n+۲+n}{n(n+۲)} \Rightarrow n^۲ + ۲n = ۲n + ۲ \Rightarrow n^۲ = ۲ \Rightarrow n = \pm\sqrt{۲}$$

تذکر: در برخی سوالات فقط کافی است از مفهوم دنباله حسابی استفاده کنیم.

۳ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ اول ۳ و مجموع سه جملهٔ بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_۱ + (t_۱ + d) + (t_۱ + ۲d) = ۳ \\ (t_۱ + ۳d) + (t_۱ + ۴d) + (t_۱ + ۵d) = ۳۹ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳t_۱ + ۳d = ۳ \\ ۳t_۱ + ۱۲d = ۳۹ \end{cases} \xrightarrow{\div ۳} \begin{cases} t_۱ + d = ۱ \\ t_۱ + ۴d = ۱۳ \end{cases}$$

$$۳d = ۱۲ \longrightarrow d = ۴$$

$$t_۱ + ۴ = ۱ \longrightarrow t_۱ = -۳$$

$$-۳, ۱, ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, \dots$$

تذکر: رابطه بازگشتی برای دنباله‌حسابی به صورت $a_{n+1} = a_n + d$ است.

مانند ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ... $\rightarrow$ رابطه بازگشتی $a_۱ = ۴$ ، $a_{n+1} = ۳ + a_n$

دنباله‌های حسابی نتایج خطی با درجه ۱ هستند یعنی دنباله‌حسابی با قدرنسبت d جمله‌عمومی به صورت $t_n = dn + B$ است. (عبارت درجه اول برحسب n که ضریب n نشان‌دهنده قدرنسبت است.)

کلید تشخیص از صورت

مجموع n جمله اول در یک دنباله حسابی :

رابطه گاوس برای مجموع اعداد طبیعی تا n را به شکل زیر بدست آوردیم :

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$
$$+ \quad S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n} \Rightarrow 2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

از همین ایده کمک می‌گیریم و مجموع n جمله اول دنباله حسابی را می‌یابیم :

$$S_n = a_1 + (a_1+d) + \cdots + (a_1+(n-2)d) + (a_1+(n-1)d)$$
$$+$$
$$S_n = (a_1+(n-1)d) + (a_1+(n-2)d) + \cdots + (a_1+d) + a_1$$

$$2S_n = \underbrace{(2a_1+(n-1)d) + (2a_1+(n-1)d) + \cdots + (2a_1+(n-1)d) + (2a_1+(n-1)d)}_{n}$$

$$2S_n = n(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه دوم : زمانی که جمله اول و آخر دنباله را داریم :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال : مجموع هشت جمله اول دنباله $-2, 3, 8, \ldots$ را بیابید.

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 5 \\ S_8 = ? \end{cases}$$

$$S_8 = \frac{8}{2}(2(-2) + (8-1)(5)) = 4(-4 + 35)$$

$$= 4 \times 31 = 124$$

مثال : حاصل $A = -2 + 1 + 4 + \ldots + 52$ را بدست آورید.

$$n = \frac{b-a}{d} + 1 \Rightarrow n = \frac{52-(-2)}{3} + 1 = \frac{54}{3} + 1 = 18 + 1 = 19$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{19} = \frac{19}{2}(-2 + 52) = \frac{19}{2} \times 50 = 19 \times 25 = 475$$

مثال : در یک دنباله حسابی جمله پنجم 54 و جمله نهم 74 هستند. مجموع دوازده جمله اول را بیابید.

$$d = \frac{a_n - a_m}{n-m} \Rightarrow d = \frac{a_9 - a_5}{9-5} = \frac{74-54}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_5 = a_1 + 4\times 4 \rightarrow 37 = a_1 + 24 \rightarrow a_1 = 29$

$S_{12} = \frac{12}{2}(2\times 29 + (\underset{\sim}{12}-1)4) = 6(58+44) = 6\times 124 = 744$

مثال: در یک دنباله حسابی، جمله n ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول را محاسبه کنید.

قدرت n

$a_1 = \frac{3}{2}\times 1 - 5 = \frac{3}{2} - 5$

$a_{15} = \frac{3}{2}\times 15 - 5 = \frac{45}{2} - 5$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}\left(\frac{3}{2} - 5 + \frac{45}{2} - 5\right)$

$S_{10} = \frac{10}{2}\left(\frac{48}{2} - 10\right) = \frac{10}{2}(24 - 10) = \frac{10}{2}\times 14 = 10\times 7 = 105$

مثال: مجموع چند جمله از دنباله حسابی $2, 5, 8, \ldots$ برابر 247 است؟

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 3 \\ S_n = 247 \end{cases}$

$S_n = \frac{n}{2}(2(2) + (n-1)3)$

$247 = \frac{n}{2}(4 + 3n - 3) = \frac{n}{2}(3n+1)$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(3n+1) = 734 \xrightarrow{\times 2} n(3n+1) = 1468$$

$$3n^2+n-1468=0 \Rightarrow \Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times 3(-1467)$$

$$\Delta = 1+17688 = 17689$$

$$n=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{17689}}{6}=\frac{-1\pm 133}{6}\begin{cases}\frac{-1+133}{6}=\frac{132}{6}=22 \\ \frac{-1-133}{6}=-\frac{134}{6} \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow n=22$$

مثال: در دنباله حسابی با جمله اول ۴ و قدرنسبت ۴ حداقل چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بزرگ‌تر شود؟

$$\begin{cases} a_1=4 \\ d=4 \\ S_n>300 \\ n=? \end{cases}$$

$$S_n=\frac{n}{2}(2\times 4+(n-1)(4))=\frac{n}{2}(8+4n-4)$$

$$S_n=\frac{n}{2}(4n+2)=n(2n+1)$$

$$S_n=n(2n+1)>300$$

روش حدس‌گذاری: $n=12 \rightarrow 12(24+1)=12\times 25=300$

$n=13 \rightarrow 13(26+1)=13\times 27=351$

اگر حداقل ۱۳ جمله از این دنباله را جمع کنیم، حاصل از ۳۰۰ بزرگ‌تر می‌شود.

مثال: بین دو عدد ۱۵ و ۳۵ تعدادی واسطه حسابی قرار می‌دهیم تا مجموع همه اعداد ۲۲۵ شود.

تعداد این جملات را بیابید.

$$\underbrace{15, \dots, 35}_{k+2 \text{ تا عدد}} \qquad S_{k+2} = 225$$

$$S_{k+2} = \frac{k+2}{2}(15+35) \Rightarrow 225 = \frac{k+2}{2}(50)$$

$$\Rightarrow 25(k+2) = 225 \xrightarrow{\div 25} k+2 = 9 \rightarrow k = 7$$

$$d = \frac{b-a}{k+1} = \frac{35-15}{7+1} = \frac{20}{8} = 2,5$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۵۱ را بیابید.

$$3, 9, 15, \dots \qquad a_n = 3+(n-1)6 \Rightarrow a_n = 3+6n-6 \rightarrow a_n = 6n-3$$

$$a_n < 151 \Rightarrow 6n-3 < 151 \rightarrow 6n < 154 \rightarrow n < 17,33$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 17$$

$$S_{17} = \frac{17}{2}(2(3)+(17-1)6) = \frac{17}{2}(6+96) = \frac{17}{2} \times 102 = 17 \times 51 = 867$$