ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

گردآوری: سید ابوالفضل خاموشیان

به نام خدا

با شروع پاندمی کرونا که منجر به تعطیلی آموزش حضوری در مراکز آموزشی گردید و آموزش مجازی به اشکال مختلف به عنوان یک شیوه آموزش به طور جدی معرفی شد، بر آن شدم برای آن دسته از دانش‌آموزانی که به صورت صحیحِ آموزش مجازی دسترسی ندارند و همکارانی که بستر مناسبی برای تدریس مجازی در اختیار نداشتند، مجموعه‌ای شامل فیلم و جزوه برای درس ریاضی۳ آماده کنم تا شاید در آن ایام سخت کمکی هر چند ناچیز به آموزش مفهومی ریاضیات و گسترش عدالت آموزشی شده باشد. آن دوران تمام شد ولی دیگر آموزش‌های تلفیقی و ترکیبی جای آموزش‌های سنتی را گرفت و فصلی جدید در امر آموزش گشوده شد.

با توجه به حجم بالای کار و تهیه همزمان فیلم و جزوه برای این درس و درس‌های دیگر قطعاً اشتباهاتی در جزوه وجود دارد که از علاقه‌مندان پوزش‌می‌طلبم و خوشحال می‌شوم با شناسه شاد بنده به آدرس @seyedfazelian در میان بگذارند تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح شود.

همانطور که خواهید دید جزوه به صورت جلسه‌ای و با قلم نوری تنظیم شده که فیلم هر جلسه در کانال آپارات https://www.aparat.com/s.a.fazelian در دسترس می‌باشد.

در پایان یادآوری می‌شوم استفاده از این جزوه به هرصورت مجاز و هزینه آن فقط دعا برای عاقبت بخیری نگارنده است.

سیدابوالفضل فاضلیان

۱۴۰۲/۱/۱۱

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل اول: تابع

درس اول: توابع چندجمله‌ای-توابع صعودی و نزولی

قسمت اول: (توابع چند جمله ای- آشنایی با تابع درجه سوم)

جلسه اول: صفحات ۲ تا ۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

توابع چند جمله‌ای :

توابعی که ضابطه آن‌ها به صورت $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ است و در آن a_n تا a_0 اعداد حقیقی و $a_n \neq 0$ است، تابع چند جمله‌ای درجه n نامیده می‌شود.

دقت کنید توان x ها باید اعداد حسابی باشند. بیشترین توان x ها درجه چند جمله‌ای است.

مثال : کدام‌یک از توابع زیر چند جمله‌ای است ؟

الف) $f(x)=\frac{1}{x}$ نیست

ب) $g(x)=4x^2+\sqrt{5}x-1$ هست (تابع درجه دوم)

پ) $k(x)=\sqrt{x+2}$ نیست

ت) $q(x)=7x+\frac{1}{2}$ هست (تابع خطی)

ث) $p(x)=\omega$ هست (ثابت)

ج) $k(x)=x^{\frac{1}{4}}+4x$ نیست

نکته: توابع خطی و همانی، ثابت و درجه دوم، همگی تابع چندجمله‌ای هستند.

$y=ax+b$ $y=x$ $y=c$ $y=ax^2+bx+c$

نکته: دامنه تمام توابع چندجمله‌ای $\mathbb{R}$ است. همچنین برد تمام توابع چندجمله‌ای از درجه فرد هم $\mathbb{R}$ است.

تابع چندجمله‌ای درجه سوم:

هر تابع با ضابطه $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ که در آن $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$ باشد را یک تابع چندجمله‌ای درجه سوم می‌نامیم.

مانند:

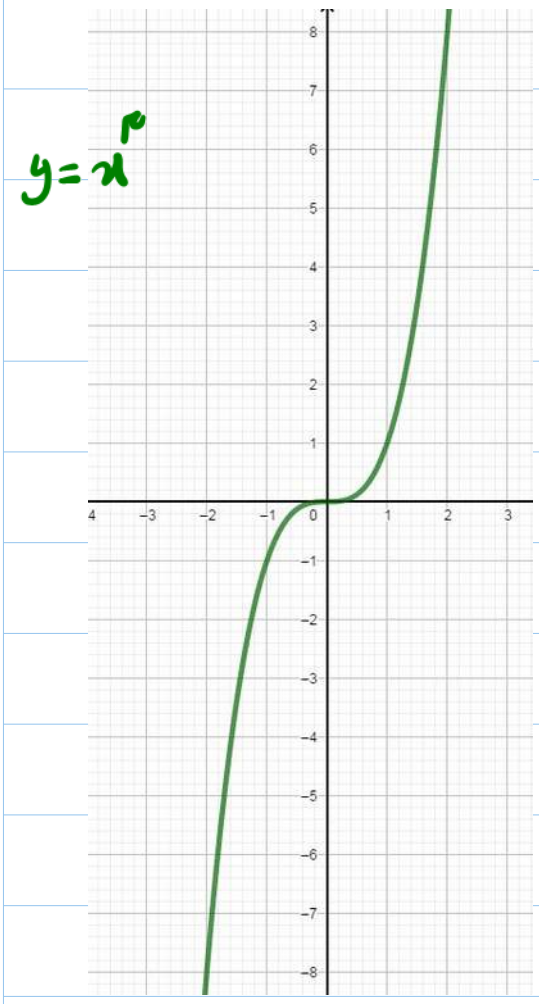
$$f(x)=2x^3-\frac{1}{4}x^2+\sqrt{5}x+\pi$$

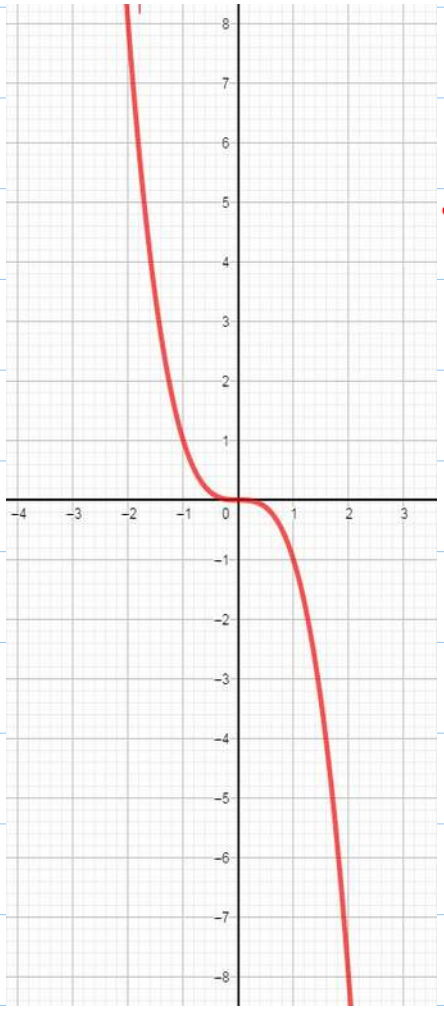
$$g(x)=8x^3+1 \quad , \quad h(x)=5x^3-7x^2$$

نمودار توابع $y=x^3$ و $y=-x^3$

x	-1	0	1	2
$y=x^3$	-1	0	1	8

x	-1	0	1	2
$y=-x^3$	1	0	-1	-8





هر دو نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن اند

تذکر: برای رسم توابع درجه سوم از قوانین انتقال برای رسم نمودارها کمک می‌گیریم.

مثال: نمودار تابع $f(x)=x^4+4x^3+4x+5$ را رسم کنید.

$1+4$

باید تابع درجه سوم را به صورت $y=k(x-a)^4+b$ در آوریم.

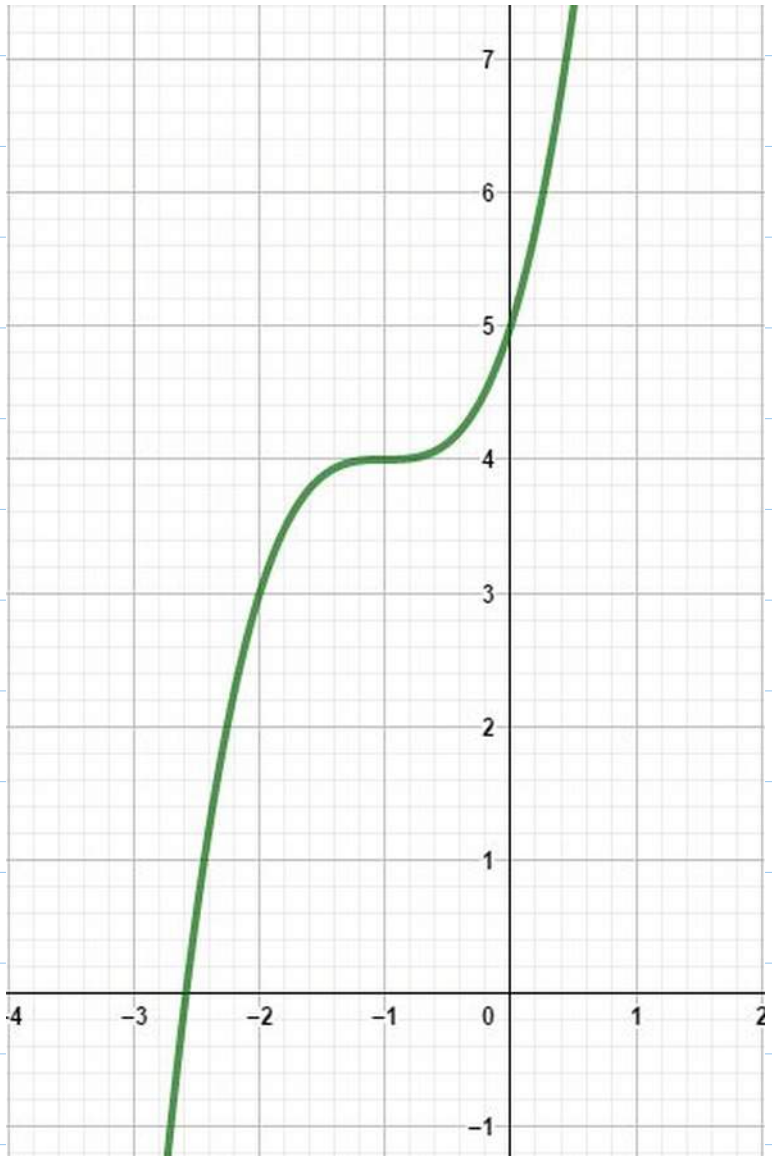
یادآوری: اتحاد مکعب دوجمله‌ای:

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+4ab^3+b^4$$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 4 = (x+1)^3 + 4$

اتحاد

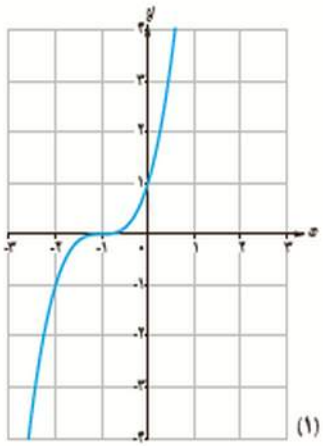
نمودار $y = x^3$ را چهار واحد به سمت بالا و یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

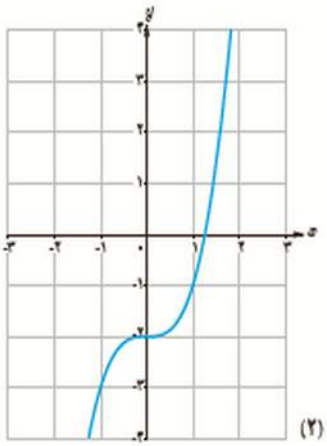


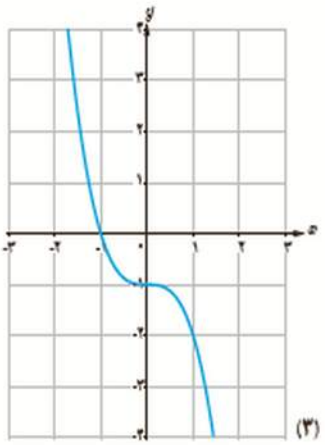
کار در کلاس

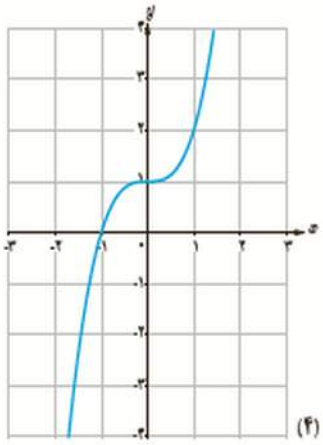
به کمک نمودار تابع $y=x^3$، ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

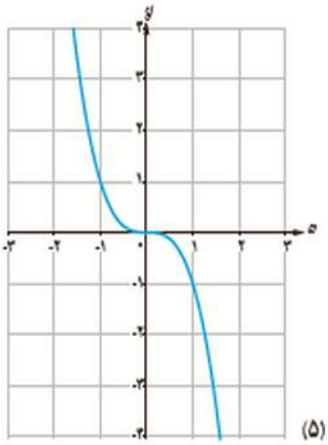
الف) $y=(x-1)^3+2$ ۶
ب) $y=(x-2)^3$ ۹
پ) $y=-x^3+1$ ۸
ت) $y=(x+1)^3-1$ ۷
ث) $y=-x^3$ ۵
ج) $y=(x+1)^3$ ۱
ج) $y=x^3+1$ ۴
ح) $y=-x^3-1$ ۳
خ) $y=x^3-2$ ۲

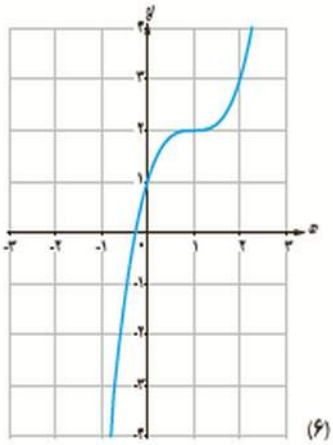

(۱)

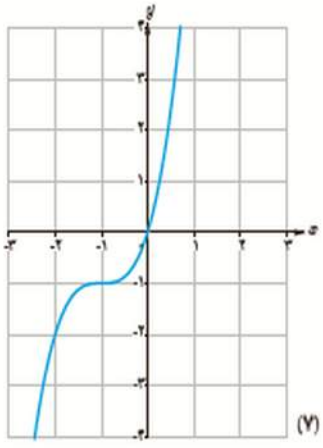

(۲)

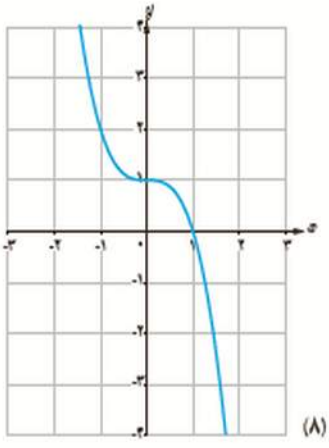

(۳)

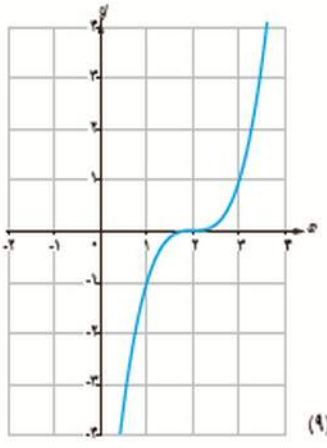

(۴)


(۵)


(۶)


(۷)


(۸)


(۹)

نکته : در توابع درجه سوم به صورت $y=k(x-a)^3+b$ ، نقطه (a,b) مرکز تقارن است. می‌توان از این نقطه در رسم سریع نمودار توابع درجه سوم کمک گرفت.

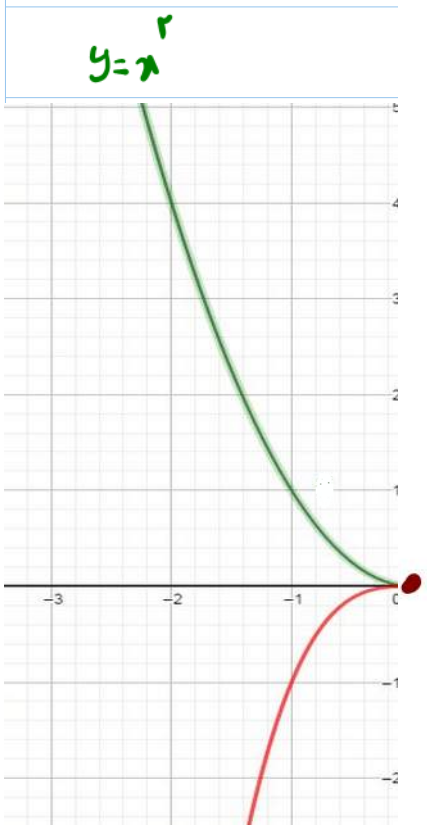
مثال : نمودار تابع $y=-(x-1)^3+2$ را رسم کنید.

پایه : $y=-x^3$

مرکز تقارن $(1,2)$



مقایسه نمودارهای $y=x^3$ و $y=x^2$:



$y=x^3$

۱- دو نمودار در نقاط $(1,1)$ و $(0,0)$ متقاطع‌اند.

۲- برای $x>1$ ، $y=x^3$ بالای $y=x^2$ است.

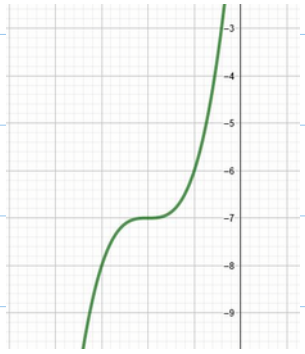
۳- برای $0<x<1$ و $x<0$ نمودار $y=x^2$ بالای $y=x^3$ است.

مثال: نمودار تابع $y=x^3+6x^2+12x+1$ از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

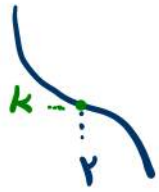
$y=x^3+3\times2x^2+3\times(2)^2x+8-8+1=(x+2)^3-7$ مرکز تقارن $(-2,-7)$

اتحاد

از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.



مثال: نمودار تابع $g(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ به شکل زیر است. مقدار a و b را بیابید.



مرکز تقارن $(2,k)$

در برخی: ضریب x^3 منفی یک

از روی نمودار: $g(x)=-(x-2)^3+k=-(x^3+3x^2(-2)+3x(-2)^2+(-2)^3)+k$

$g(x)=-x^3+6x^2-12x+8+k=-x^3+ax^2+bx+c$

$\begin{cases}a=6\\b=-12\end{cases}$

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل اول: تابع

درس اول: توابع چندجمله‌ای-توابع صعودی و نزولی

قسمت دوم: (توابع صعودی و نزولی)

جلسه دوم: صفحات ۶ تا ۱۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

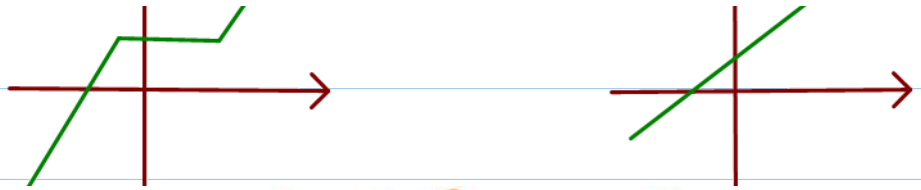
تعریف تابع صعودی :

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$f(x_2) \geq f(x_1)$ آنگاه تابع f را تابع صعودی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع صعودی ، با افزایش x ، y افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

مثال :



با حرکت از چپ به راست هیچگاه پائین نمی‌رویم

تعریف تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$f(x_2) > f(x_1)$ آنگاه تابع f را تابع اکیداً صعودی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع اکیداً صعودی ، با افزایش x ، y هم افزایش می‌یابد.

مثال :

با حرکت از چپ به راست همواره بالا می‌رویم.

تعریف تابع نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$f(x_2) \leq f(x_1)$ آنگاه تابع f را تابع نزولی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع نزولی، با افزایش x ها y کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

مثال:

با حرکت از چپ به راست هیچگاه بالا نمی‌رویم

تعریف تابع اکیداً نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$f(x_2) < f(x_1)$ آنگاه تابع f را تابع اکیداً نزولی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع اکیداً نزولی، با افزایش x، y کاهش می‌یابد.

مثال:

با حرکت از چپ به راست همواره پائین می‌رویم

نکته: هر تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و هر تابع اکیداً نزولی، نزولی هم هست.

ولی عکس این مطلب درست نیست.

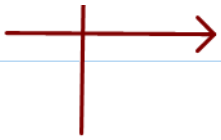
مثال: تابع $y=[x]$ صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.



نکته: اگر با افزایش x، y ثابت بماند می‌گوییم تابع ثابت است. تابع ثابت هم صعودی است

و هم نزولی.

مثال:



تعریف تابع اکیداً یکنوا: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی

باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعه A اکیداً یکنوا است.

تعریف تابع یکنوا: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم

تابع f روی مجموعه A یکنوا است.

نکته : اگر در تابعی با افزایش x و حرکت از چپ به راست روی نمودار، y گاهی ادامه افزایش و گاهی ادامه کاهش یابد، این تابع را **غیر یکنوا** می گوییم.

دقت کنید ممکن است تابعی روی دامنه اش غیر یکنوا باشد ولی روی زیر مجموعه هایی از دامنه اش یکنوا باشد.

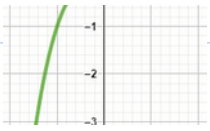
بررسی یکنوایی توابع معروف :

۱) $y = x^2$

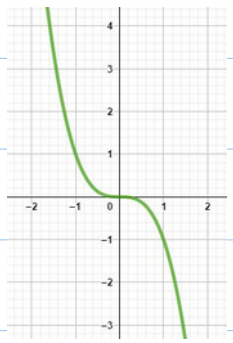
غیر یکنوا ولی در $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی

۲) $y = x^4$

اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

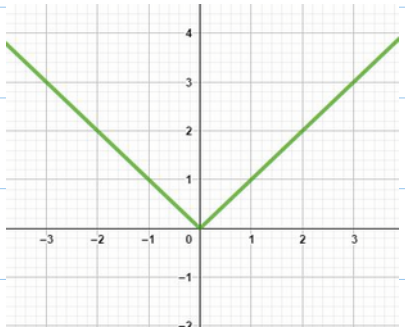


۳) $y = -x^4$



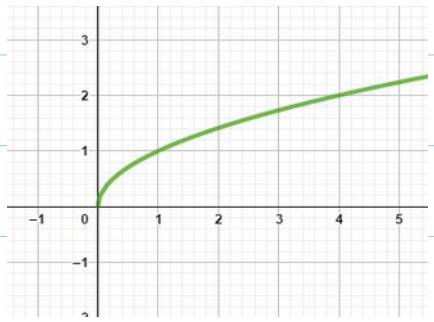
اکیداً یکنوا (اکیداً نزولی)

۴) $y=|x|$



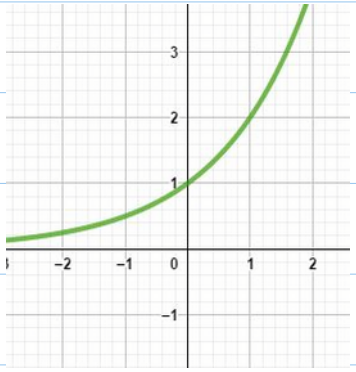
نزولی
ولی در $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی
و در $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی

۵) $y=\sqrt{x}$



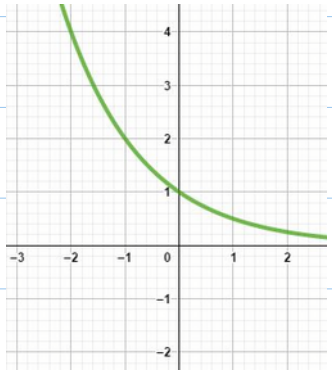
اکیداً نزولی (اکیداً صعودی)

۶) $y=a^x \quad (a>1)$



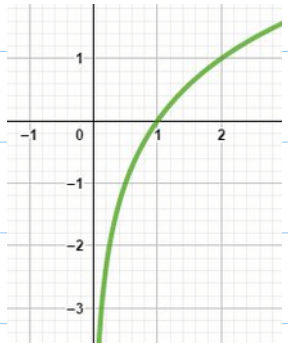
اکیداً نزولی (اکیداً صعودی)

۷) $y=a^x \quad (0<a<1)$



اکیداً نزولی (اکیداً نزولی)

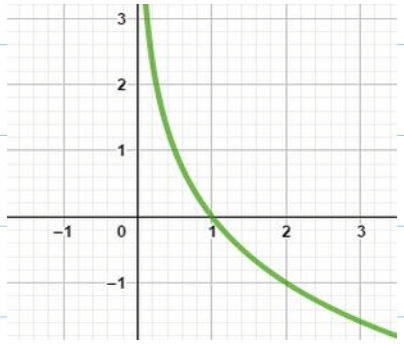
۸) $y=\log_a^x \quad (a>1)$



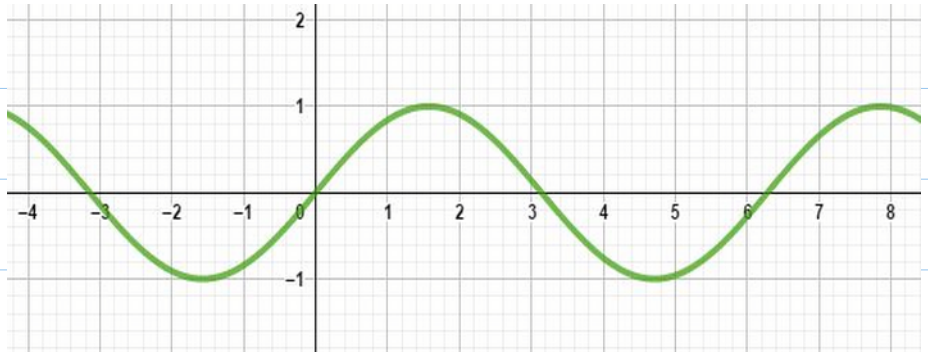
اکیداً نزولی (اکیداً صعودی)

۹) $y=\log_a^x \quad (0<a<1)$

اکیداً نزولی (اکیداً نزولی)

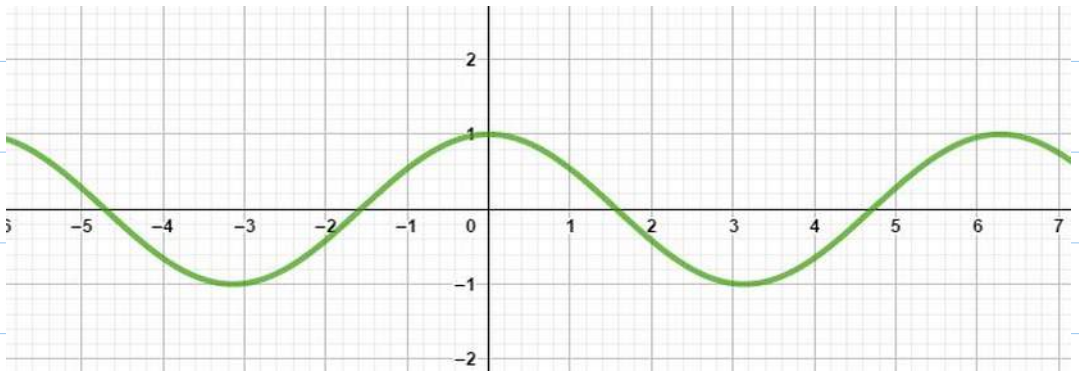


۱۰) $y=\sin x$



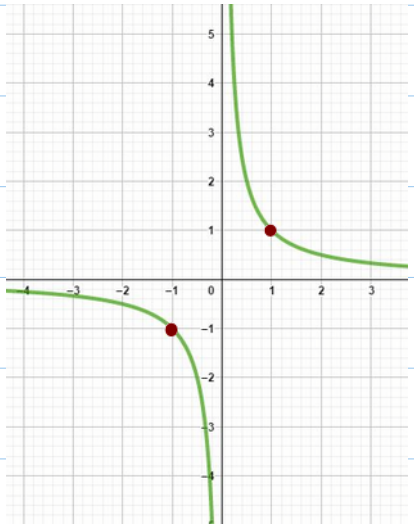
یک‌به‌یک است و می‌شود در $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ تابع اکیداً صعودی و در $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ تابع اکیداً نزولی است.

۱۱) $y=\cos x$



یک‌به‌یک است و می‌شود در $[0,\pi]$ تابع اکیداً نزولی و در $[\pi,2\pi]$ تابع اکیداً صعودی است.

۱۲) $y = \frac{1}{x}$



$-1 < 1 \rightarrow f(-1) < f(1)$

$-1 \quad 1$

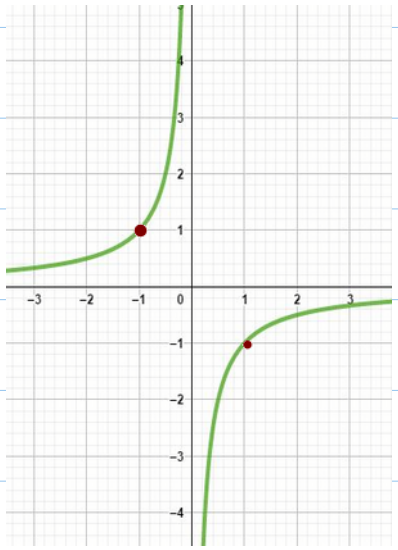
صعودی

نمودار تابع در $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ نزولی است

$x = 0$ مجانب قائم

$y = 0$ مجانب افقی

۱۳) $y = -\frac{1}{x}$



$-1 < 1 \rightarrow f(-1) > f(1)$

$-1 \quad 1$

نزولی

نمودار تابع در $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ صعودی است

$x = 0$ مجانب قائم

$y = 0$ مجانب افقی

مثال: با توجه به نمودار تابع f، یکنوایی آن را بررسی کنید.

الف)

نمودار تابع در $(-\infty, -2]$ و $(0, +\infty)$ نزولی

در $[-2, 0]$ صعودی

y برای دامنه در نظر...

ب)

یکنوا (نزولی)

ب)



اکیداً یکنوا (اکیداً نزولی)

ث)



اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

ت)



نه یکنوا

ج)



نه یکنوا

مثال: تابع $f=\{(1,2),(2,m-1),(3,7-m)\}$ صعودی است. حدود m را بیابید.

(۱) $1<2 \rightarrow f(1)\leq f(2) \Rightarrow 2\leq m-1 \Rightarrow 3\leq m$

(۲) $2<3 \rightarrow f(2)\leq f(3) \Rightarrow m-1\leq 7-m \Rightarrow 2m\leq 8 \rightarrow m\leq 4$

(۱) $\cap$ (۲) $\Rightarrow$ $3\leq m\leq 4$

مثال: تابع $f=\begin{cases} x-4 & x<-2 \\ 2 & -2\leq x<3 \\ -2x+4 & x\geq 3 \end{cases}$ روی بازه $(-\infty, a)$ صعودی است.

بیشترین مقدار برای a را محاسبه کنید.

ثابت

تابع صعودی : $(-\infty, 4)$

↓

a

اکیداً نزولی

اکیداً صعودی

$\Rightarrow a = 4$

نکته : طبق قضیه دیدیم تابع $y = ax^2 + bx + c$ روی $\mathbb{R}$ غیریکنوا است ولی

الف) $a > 0$



اکیداً نزولی در $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی در $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$

ب) $a < 0$



اکیداً صعودی در $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً نزولی در $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$

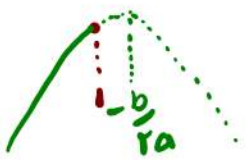
همچنین می‌توان گفت سهمی در هر بازه‌ای که راس سهمی درون آن بازه باشد غیریکنوا است.

مثال : تابع درجه دوم $f(x) = (k+2)x^2 + x$ با دامنه $(-\infty, 1]$ صعودی است.

حدود k را بیابید.

$a < 0 \Rightarrow k + 2 < 0 \Rightarrow k < -2$ (1)

$x_{\text{راس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(k+2)} \geq 1$



$$\frac{-1}{2(k+2)} - 1 \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{1}{2(k+2)} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+2k+4}{2(k+2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2k+5}{2(k+2)} \leq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-2	$+\infty$
$2k+5$	$-$	0	$+$	$+$
$2(k+2)$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2k+5}{2(k+2)}$	$+$	0	$-$	$+$

$$-\frac{5}{2} \leq k < -2 \quad (2) \Rightarrow (1) \cap (2) = -\frac{5}{2} \leq k < -2$$

مثال: تابع نمایی $y = (k^2-1)^x$ اکیداً صعودی است. حدود k را بدست آورید.

$$a > 1 \Rightarrow k^2 - 1 > 1 \Rightarrow k^2 > 2 \Rightarrow k > \sqrt{2} \text{ یا } k < -\sqrt{2}$$

قضیه:

الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a < b$.

ب) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a > b$.

اثبات : الف) چون تابع f اکیداً صعودی است پس اگر $a<b$ آنگاه $f(a)<f(b)$.

حکم — فرض

حال اگر حکس نقیض این گزاره بنویسیم اثبات زیر را می یابیم :

اگر $f(a)\leq f(b)$ آنگاه $a\leq b$ ■

ب) به عنوان تمرین، حل شود.

تذکر : پس می توان گفت اگر تابع f (اکیداً) صعودی باشد آن را از دو طرف نامساوی حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی کند ولی اگر f (اکیداً) نزولی باشد، با حذف آن از دو طرف، جهت نامساوی برعکس می شود.

مثال : اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد و $f(a^2-1)>f(3a+4)$، حدود a را بیابید.

$$f(a^2-1)>f(3a+4) \xrightarrow{f\text{ نزولی}} a^2-1<3a+4$$

$$a^2-3a-4<0 \Rightarrow (a+1)(a-4)<0 \Rightarrow -1<a<4$$

(ریشه‌ها: -1 و $+4$)

مثال: مجموعه جواب نامعادلات زیر را بیابید.

الف) $16 \geq 8^{3x-1}$ ، 2^{2x-2}

$$(2^4)^{2x-2} \geq (2^3)^{3x-1} \Rightarrow 2^{8x-8} \geq 2^{9x-3} \overset{a>1}{\underset{\text{اکیداً صعودی}}{\Longrightarrow}} 8x-8 \geq 9x-3$$

$$8x-9x \geq -3+8 \Rightarrow -x \geq 5 \Rightarrow x \leq -5 \rightarrow \text{مجموعه} = (-\infty, -5]$$

ب) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 2$ ، دامنه: $(x+1) > 0 \Rightarrow x > -1$ (۱)

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \overset{0<a<1}{\underset{\text{اکیداً نزولی}}{\Longrightarrow}} x+1 < \frac{1}{4} \rightarrow x < \frac{1}{4}-1$$

$$-1 < x < -\frac{3}{4} \rightarrow \text{مجموعه} = \left(-1, -\frac{3}{4}\right) \quad (2)\cap(1) \quad (1) \quad x < -\frac{3}{4} \quad (2)$$

پ) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2x+1} > (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{x+2}$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2x+1} > ((\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1})^{x+2} \Rightarrow (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2x+1} > (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-x-2}$$

$$\xrightarrow[\text{اکیداً نزولی}]{\overset{0<a<1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} 2x+1 < -x-2 \Rightarrow 2x+x < -2-1 \Rightarrow 3x < -3$$

$$\Rightarrow x < -1 \rightarrow \text{مجموعه} = (-\infty, -1)$$

نکته:

۱) اگر توابع f و g صعودی باشند آنگاه $g+f$ هم صعودی است.

۲) اگر توابع f و g نزولی باشند آنگاه $g+f$ هم نزولی است.

۳) اگر توابع f و g صعودی باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $g \times f$ هم صعودی است.

۴) اگر توابع f و g نزولی باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $g \times f$ هم نزولی است.

۵) اگر f صعودی باشد آنگاه $-f(x)$ نزولی است.

و اگر f نزولی باشد آنگاه $-f(x)$ صعودی است.

۶) اگر f صعودی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشد آنگاه $\frac{1}{f}$ نزولی است.

۷) اگر f نزولی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشد آنگاه $\frac{1}{f}$ صعودی است.

۸) اگر f صعودی و g نزولی باشد $g-f$ صعودی و $f-g$ نزولی است.

مثال: اگر f تابعی نزولی با مقادیر منفی باشد، کدام تابع نزولی است؟

۱) $y=2^x f(x)$ ✓ ۲) $y=\frac{f(x)}{2^x}$ ۳) $y=2^x+f(x)$ ۴) $y=2^x-f(x)$

تابع f تابعی نزولی با مقادیر منفی است. پس تابع $-f$ تابعی صعودی با مقادیر مثبت است.

همچنین تابع $y=2^x$ تابعی صعودی با مقادیر مثبت است. پس ضرب این دو تابع یعنی

$y=2^x\times(-f)=-2^x f$ تابعی صعودی است. پس $y=2^x f$ تابعی نزولی است.

مثال: اگر $f+g$ و $g-f$ توابعی نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشند، کدام تابع صعودی است؟

۱) f ۲) g ۳) $-f$ ۴) $-g$ ✓

$h=(f+g)+(g-f)=2g$ نزولی نزولی نزولی

$\Rightarrow k=-\frac{1}{2}(2g)=-g$ نزولی منفی صعودی

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل اول: تابع

درس دوم: ترکیب توابع

صفحه: ۱۱ تا ۱۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

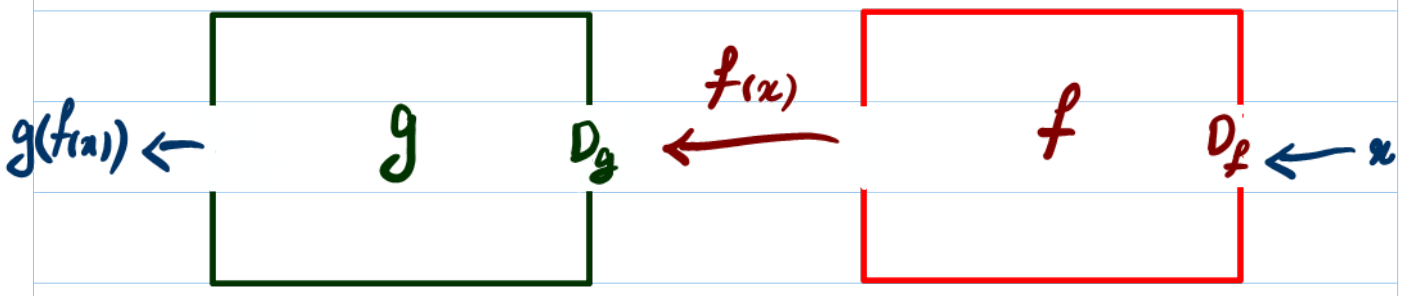
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

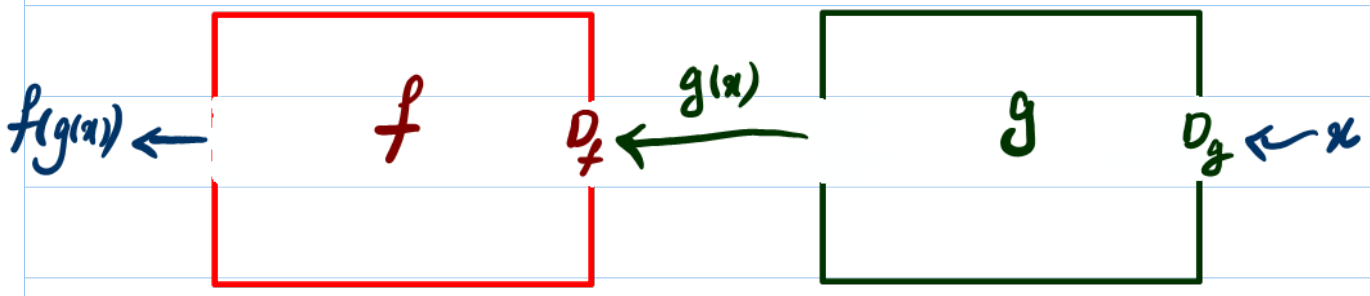
گروه ریاضی استان همدان

ترکیب توابع :

اگر f و g دو تابع باشند، ماشین این توابع را به صورت های زیر در نظر بگیرید :

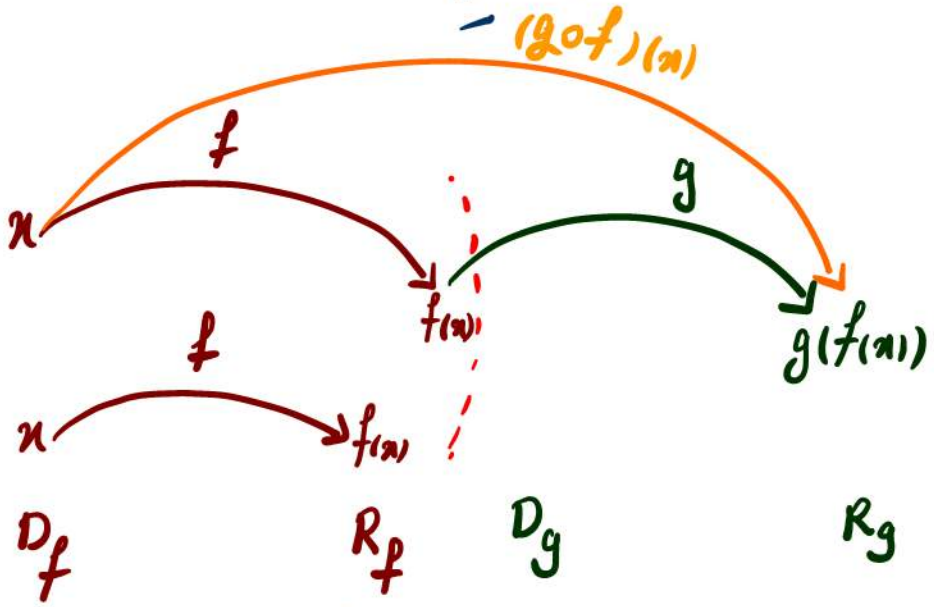


xهای که حق ورود به f را دارند جزئی از D_f هستند و در تابع f می شوند، عمل f روی x انجام می پذیرد و $f(x)$ تحویل داده می شود. اگر $f(x)$ها اجازه ورود به g را داشته باشند جزئی از D_g باشند، ماشین g روی $f(x)$ اثر کرده و $g(f(x))$ را به عنوان خروجی تحویل می دهد.



در شکل دوم، x هایی که حق ورود به g را دارند یعنی در دامنه g هستند وارد ماشین تابع می‌شوند و خروجی g(x) تحویل داده می‌شود. اگر g(x) اجازه ورود به f را داشته باشد یعنی در دامنه f باشند، ماشین f روی g(x) اثر کرده و f(g(x)) را تحویل می‌دهد.

همین مفهوم را در نمودار ون هم ببینیم.



تمرین: نموداری مشابه، نمودار بالا برای f(g(x)) رسم کنید.

تعریف: ترکیب g با f را با $g\circ f$ نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنه آن:

$$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

است و برای هر x در دامنه این تابع داریم:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

تذکر: به همین ترتیب $f\circ g$ با دامنه $\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ تعریف می‌شود که برای هر x در این دامنه خواهیم داشت: $(f\circ g)(x) = f(g(x))$.

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\cos x$ باشند، $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$ را بدست آورید.

یعنی در تابع f به جای x، $g(x)$ بگذارید: $(f\circ g)(x) = f(g(x))$

$$= \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$$

یعنی در تابع g به جای x، $f(x)$ بگذارید: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

$$= \cos\sqrt{1-x^2}$$

مثال: اگر $f=\{(1,2),(2,-1),(-1,1),(0,2)\}$ و $g=\{(1,1),(2,0),(3,-1)\}$ باشند، توابع fog و gof را تشکیل دهید.

fog: ست چپ ها ی g را می‌نویسیم و به g ها در برش نسبت می‌دهیم. بعد f را اثر می‌دهیم.

$$1 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 2$$
$$2 \to 0 \to 2$$
$$3 \to -1 \to 1$$

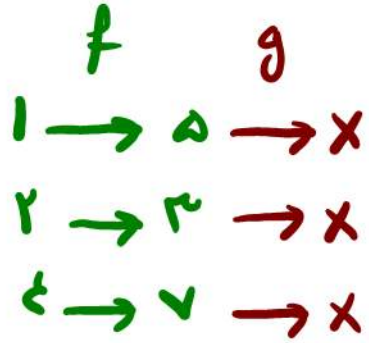
$$fog=\{(1,2),(2,2),(3,1)\}$$

gof: ست چپ ها ی f را می‌نویسیم و به f ها در برش نسبت می‌دهیم. بعد g را اثر می‌دهیم.

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 0$$
$$2 \to -1 \to \times$$
$$-1 \to 1 \to 1$$
$$0 \to 2 \to 0$$

$$gof=\{(1,0),(-1,1),(0,0)\}$$

مثال: اگر $f=\{(1,5),(2,3),(4,7)\}$ ، $g=\{(5,12),(11,11)\}$ باشند آیا gof تشکیل می‌شود؟ چرا؟



حذر زدا : $R_f \cap D_g = \emptyset$

نتیجه : برای تشکیل gof باید $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ باشد.

برای تشکیل fog باید $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ باشد.

مثال: اگر $f(x)=\frac{2-2x}{x+1}$ ، $g(x)=\frac{x+2}{x-1}$ باشد، دامنه و ضابطه gof را بدست آورید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{\frac{2-2x}{x+1}+2}{\frac{2-2x}{x+1}-1}=\frac{\frac{2-2x+2x+2}{x+1}}{\frac{2-2x-x-1}{x+1}}$$

$$(gof)(x)=\frac{3x+1}{-3x}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{-1\} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \underbrace{\mathbb{R} - \{-1\}}_{1} \mid \underbrace{\frac{2x-2}{x+1} \in \mathbb{R} - \{1\}}_{2}\}$$

۲: $\frac{2x-2}{x+1} \neq 1 \rightarrow 2x-2 \neq x+1 \rightarrow x \neq 3 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{3\}$

$① \cap ②$

$D_{gof} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x^2 - 7$ باشند، دامنه و ضابطه fog را بیابید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2-7-2} = \sqrt{x^2-9}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \qquad D_g = \mathbb{R} \qquad D_f = [2, +\infty)$$

$$= \{\underbrace{x \in \mathbb{R}}_{1} \mid \underbrace{x^2 - 7 \in [2, +\infty)}_{2}\}$$

۲: $x^2 - 7 \geq 2 \rightarrow x^2 \geq 9 \rightarrow x \geq 3$ یا $x \leq -3$

$① \cap ②$: $D_{fog} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{۴-۲x}$ ، $g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}$ ، ضابطه fog را بنویسید. D_{fog}

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{۴-۲\times\frac{۶}{۳x-۵}}=\sqrt{۴-\frac{۱۲}{۳x-۵}}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

D_g: $۳x-۵\neq ۰ \rightarrow x\neq \frac{۵}{۳}$ $\quad D_g=\mathbb{R}-\{\frac{۵}{۳}\}$

D_f: $۴-۲x\geq ۰ \rightarrow -۲x\geq -۴ \xrightarrow{\div(-۲)} x\leq \frac{۴}{۲} \rightarrow D_f=(-\infty,\frac{۴}{۲}]$

$$D_{fog}=\{x\in \mathbb{R}-\{\tfrac{۵}{۳}\} \mid \underbrace{\frac{۶}{۳x-۵}}_{۲}\in \underbrace{(-\infty,\tfrac{۴}{۲}]}_{۱}\}$$

۲: $\frac{۶}{۳x-۵}\leq\frac{۴}{۲}\xrightarrow{\div۴}\frac{۲}{۳x-۵}\leq\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{۲}{۳x-۵}-\frac{۱}{۲}\leq ۰$

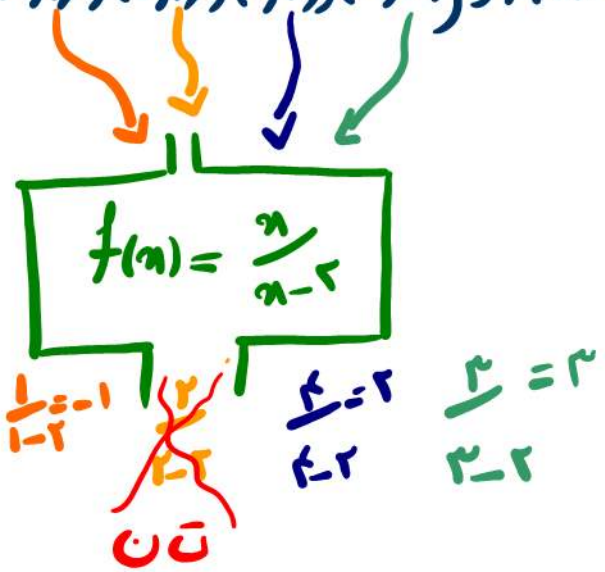
$$\frac{۴-۲x+۵}{۲(۳x-۵)}\leq ۰\rightarrow\frac{۹-۲x}{۲(۳x-۵)}\leq ۰$$

x		$\frac{۵}{۳}$		$\frac{۹}{۲}$
$۹-۲x$	$+$	$+$	۰	$-$
$۳x-۵$	$-$	۰	$+$	$+$
	$-$	$\nexists$	$+$	۰ $-$

۲ ق.م $=(-\infty,\frac{۵}{۳})\cup[۳,+\infty)$

$$①\cap②=D_{fog}=(-\infty,\tfrac{۵}{۳})\cup[۳,+\infty)$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{x}{x-2}$ و $g=\{(0,1),(1,2),(3,4),(5,3)\}$ باشد، fog را بیابید.



$$fog=\{(0,-1),(3,2),(5,3)\}$$

نکته: اگر f و fog را داشته باشیم و بخواهیم g را محاسبه کنیم. چون f را داریم، تابع fog را تشکیل می‌دهیم و با fog داده شده مساوی قرار می‌دهیم. معادله حاصل را حل می‌کنیم تا $g(x)$ بدست آید.

مثال: اگر $(fog)(x)=\frac{2x}{x-1}$ و $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ باشد، ضابطه $g(x)$ را بیابید.

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)+1}{g(x)-2}=\frac{2x}{x-1}$$

$$2x(g(x)-2)=(x-1)(g(x)+1)$$

$$2xg(x) - 4x = xg(x) + x - g(x) - 1$$

$$2xg(x) - xg(x) + g(x) = 4x + x - 1$$

$$xg(x) + g(x) = 5x - 1 \Rightarrow g(x)(x+1) = 5x - 1 \rightarrow g(x) = \frac{5x-1}{x+1}$$

نکته: اگر g و fog را داشته باشیم و ضابطه f را بدست آوریم، ابتدا g را مساوی t می‌گیریم و x را برحسب t بدست می‌آوریم و در fog قرار می‌دهیم تا $f(t)$ بدست آید. ($f(t)$ همان $f(x)$ است فقط به جای t، x می‌نویسیم.)

مثال: اگر $f(\frac{x+1}{x}) = \frac{2x}{x-1}$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

$$g(x) = \frac{x+1}{x} = \frac{t}{1} \rightarrow xt = x + 1 \rightarrow xt - x = 1$$

$$\rightarrow x(t-1) = 1 \rightarrow x = \frac{1}{t-1}$$

$$f(\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{t}) = \frac{2x}{x-1} \rightarrow f(t) = \frac{2 \times \frac{1}{t-1}}{\frac{1}{t-1} - 1} = \frac{\frac{2}{t-1}}{\frac{1-t+1}{t-1}}$$

$$f(t) = \frac{2}{-t+2} \xrightarrow{t \to x} f(x) = \frac{2}{2-x}$$

نکته: ترکیب تابعی خودش را به صورت $f \circ f$ می‌نویسند.

مثال: اگر $f=\{(2,1),(3,5),(7,2),(5,9),(4,3)\}$، $f \circ f$ را بیابید.

f f

$2 \to 1 \to x$

$3 \to 5 \to 9$

$7 \to 2 \to 1$

$5 \to 9 \to x$

$4 \to 3 \to 5$

$f \circ f=\{(3,9),(7,1),(4,5)\}$

مثال: اگر $f=\{(1,2),(3,-1),(4,5)\}$ باشد، $f \circ f^{-1}$، $f^{-1} \circ f$ را بیابید.

$f^{-1}=\{(2,1),(-1,3),(5,4)\}$

$f \circ f^{-1}$:

$2 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{f} 2$

$-1 \to 3 \to -1$

$5 \to 4 \to 5$

$f \circ f^{-1}=\{(2,2),(-1,-1),(5,5)\}$

$f^{-1}f$:

$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f^{-1}} 1$

$3 \to -1 \to 3$

$4 \to 5 \to 4$

$f^{-1}\circ f = \{(1,1),(3,3),(4,4)\}$

نکته: اگر f تابعی وارون پذیر باشد آنگاه:

$$(f^{-1}\circ f)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

$$(f\circ f^{-1})(x) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

توجه کنید عکس گزاره بالا هم درست است یعنی اگر دو تابع در دو تساوی بالا صدق کنند آنگاه f تابعی وارون پذیر است که وارون آن f^{-1} خواهد بود.

مثال: ثابت کنید $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$ ، $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$ وارون یکدیگرند.

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = -\frac{7}{2}\times\left(-\frac{2x+6}{7}\right) - 3$$

$$= \frac{2(x+3)}{2} - 3$$

$$= x + 3 - 3 = x$$

به عنوان تمرین ثابت کنید: $(g\circ f)(x) = x$

مثال: دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-1}$ داده شده‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a))=6$ باشد، a را بدست آورید.

$$f^{-1}(g(2a))=6 \longrightarrow g(2a)=f(4)=3$$

$$3=\frac{2a}{2a-1} \longrightarrow 6a-3=2a \longrightarrow 4a=3$$

$$\longrightarrow a=\frac{3}{4}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل اول: تابع

درس دوم: ترکیب تابع

قسمت دوم: تبدیل نمودار تابع

صفحات: ۱۵تا ۲۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

در این درس می خواهیم عددی مانند a را در دامنه و برد تابع f اثر دهیم و تغییرات f را بررسی کنیم.

الف) انتقال افقی و عمودی:

۱- $f(x \pm a)$: برای رسم نمودار $y=f(x+a)$ نمودار f را روی محور xها a واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $y=f(x-a)$ نمودار f را روی محور xها a واحد به سمت راست منتقل کنیم. (انتقال افقی)

همچنین نقطه (x_0-a, y_0) از نمودار تابع $y=f(x+a)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y=f(x)$ است.

دامنه تابع $f(x+a)$، xهای هستند که با ثبت می شوند $f(x+a)$

عبارت $(x+a)$ اجازه ورود به f را پیدا کند. $y \leftarrow f \leftarrow x+a \leftarrow x$

$$h(x)=f(x+a) \Rightarrow h(x_0-a)=f(x_0-a+a)=f(x_0)=y_0$$

۲- $f(x) \pm a$: برای رسم نمودار $y=f(x)+a$ نمودار f را روی محور yها a واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $y=f(x)-a$ نمودار

f را روی محور yها a واحد به سمت پایین منتقل کنیم. (انتقال عمودی)

همچنین نقطه (x_0, y_0+a) از نمودار تابع $y=f(x)+a$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y=f(x)$ است.

ب) انقباض و انبساط افقی و عمودی:

۱- $f(ax)$: اگر $0<a<1$ باشد نمودار f را در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می‌کنیم. (انبساط افقی)

اگر $a>1$ باشد نمودار f را در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض می‌کنیم. (انقباض افقی)

همچنین نقطه $(\frac{x_0}{a}, y_0)$ از نمودار تابع $y=f(ax)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y=f(x)$ است.

دامنه تابع $f(ax)$، xهایی هستند که با کدام xها ضرب شده‌اند تا ax شود.

$f(ax)$

اجازه ورود به f را بده $\leftarrow ax \leftarrow x$

$y \leftarrow f$

$h(x)=f(ax) \Rightarrow h(\frac{x_0}{a})=f(a\times\frac{x_0}{a})=f(x_0)=y_0$

نکته: در حالت انبساط و انقباض افقی xها یا طول نقاط f بر a تقسیم می‌شوند.

۲- $af(x)$: اگر $0<a<1$ باشد نمودار f را در راستای محور y ها با ضریب a منقبض می‌کنیم. (انقباض عمودی)

اگر $a>1$ باشد نمودار f را در راستای محور y ها با ضریب a منبسط می‌کنیم. (انبساط عمودی)

همچنین نقطه (x_0, ay_0) از نمودار تابع $y=af(x)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y=f(x)$ است.

نکته: در حالت انبساط و انقباض عمودی y یا عرض نقاط f در a ضرب می‌شوند.

پس انعکاس:

۱- $-f(x)$: نمودار f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

۲- $f(-x)$: نمودار f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

نکته: در انبساط و انقباض‌ها اگر a منفی باشد ابتدا a را مثبت می‌گیریم و انبساط یا انقباض لازم را روی آن می‌دهیم، پس انعکاس را اعمال می‌کنیم.

ت) ترکیبی :

اگر بخواهیم نمودار تابعی به صورت $y = af(bx+c)+d$ را رسم کنیم،

اولویت تأثیرها را به صورت زیر رعایت می‌کنیم :

$$c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d$$

یعنی اول داخل پرانتز تغییرات روی x را اعمال می‌کنیم بعد بیرون پرانتز

تغییرات روی y. دقت کنید باز هم داخل پرانتز اعمال عکس حال عادی رخ

می‌دهد یعنی اول انتقال افقی (c) و بعد انبساط یا انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{b}$.

درحالی که در بیرون پرانتز اول انبساط یا انقباض با ضریب a و بعد انتقال عمودی (d)

اعمال می‌شود (به یاد دارید در اولویت اعمال اولویت ضرب و تقسیم از جمع و تفریق

بالاتر بود)

ش) تأثیر قدر مطلق :

۱- $|f|$: نمودار f را رسم می‌کنیم، قسمتی از نمودار که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

۲- $f(|x|)$: قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور yها است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور yها است نسبت به محور yها رسم می‌کنیم.

نکته : برای رسم نمودارهای تبدیل یافته کافی است تأثیرات را روی چند نقطه (نقاط شکستگی یا نقاط ابتدا و انتها یا تقاطع با محورها) اعمال کنید و با هم چند نقطه نمودار را رسم کنید.

مثال : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

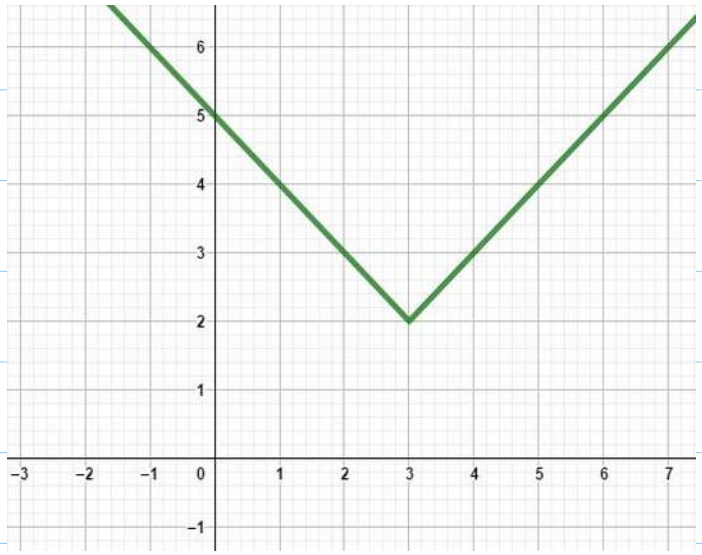
$|A| = |-A|$ یادآوری

$f(x) = |3-x| + 2$ داریم

انتقال افقی ۳ واحد به راست

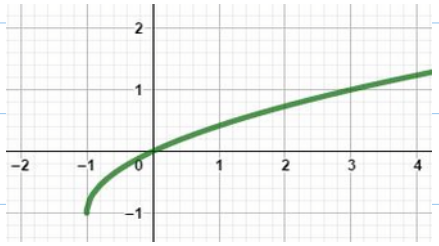
انتقال عمودی ۲ واحد به بالا

$f(x) = |-(3-x)| + 2 = |x-3| + 2$

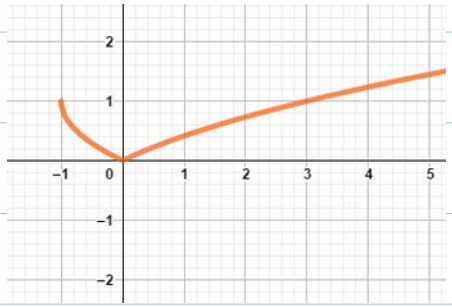


ب) $y = -|\sqrt{x+1} - 1|$

$y = \sqrt{x+1} - 1$ انتقال افقی یک واحد به چپ و انتقال عمودی یک واحد به پائین

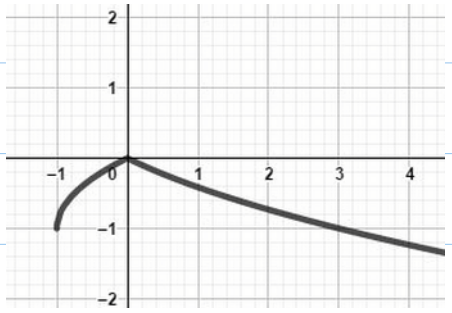


$y = |\sqrt{x+1} - 1|$



تأثیر قدرمطلق:
قسمتی که زیر محور xها است نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم

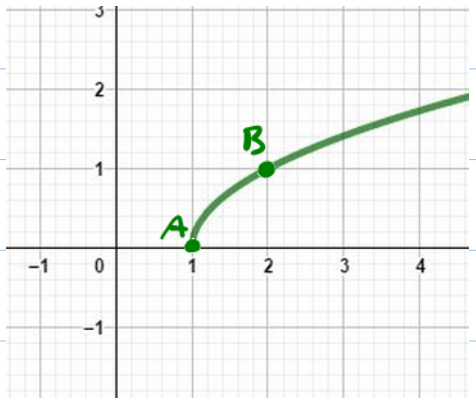
$y = -|\sqrt{x+1} - 1|$



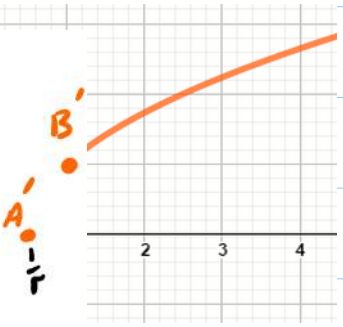
انعکاس:
نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

ب) $y=\sqrt{2x-1}+1$

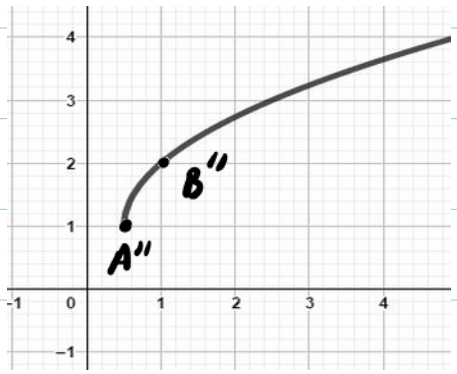
$y=\sqrt{x-1}$ انتقال افقی یک واحد به راست



$y=\sqrt{2x-1}$ انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$

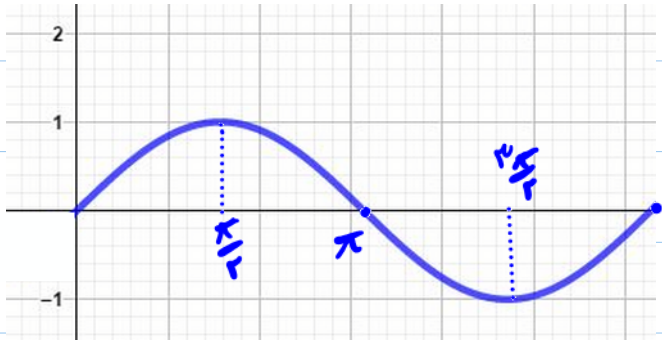


$y=\sqrt{2x-1}+1$ انتقال عمودی یک واحد به بالا

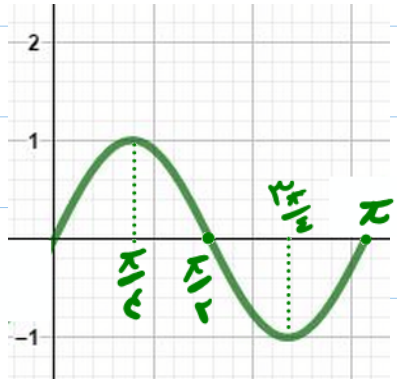


ج) $y=|2\sin 2x-1|$ $[0,\pi]$

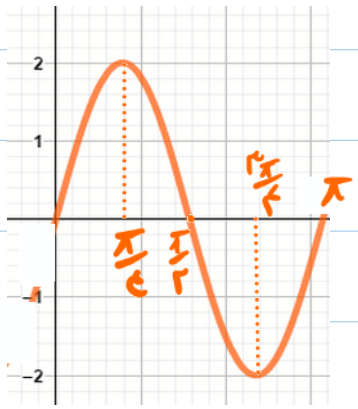
$y=\sin x$



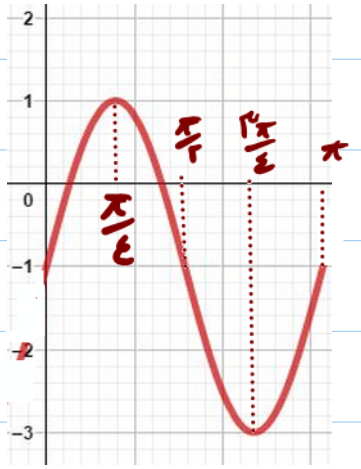
$y = \sin 2x$ انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$



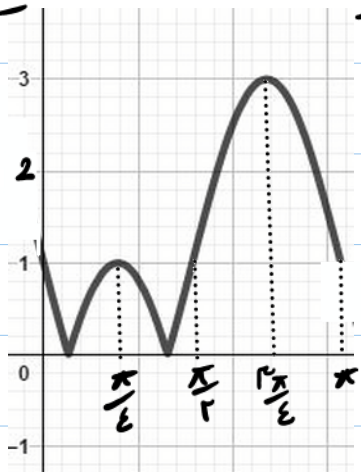
$y = 2\sin 2x$ انبساط عمودی با ضریب ۲



$y = 2\sin 2x - 1$ انتقال عمودی یک واحد پایین

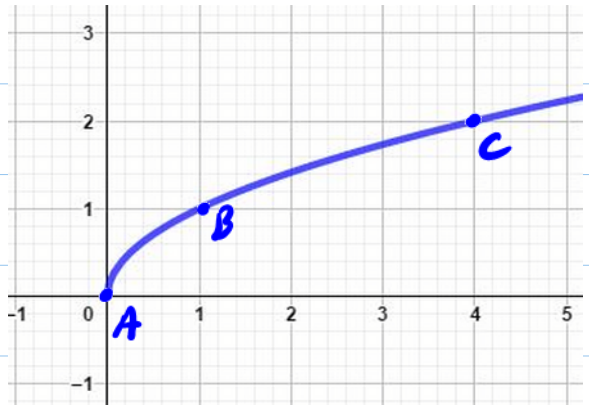


$y = |2\sin 2x - 1|$ تأثیر قدرمطلق: قسمتی که زیر محور xها است قرینه می‌کنیم.

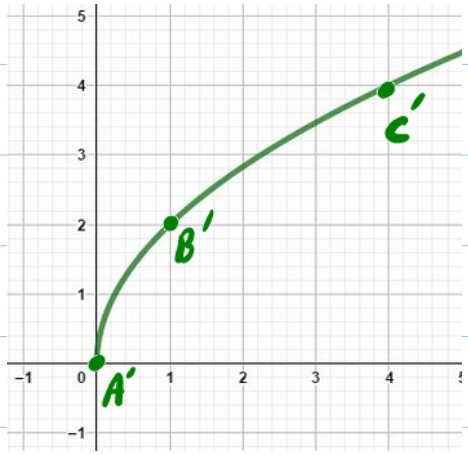


ث) $f(x) = -2\sqrt{x} + 1$

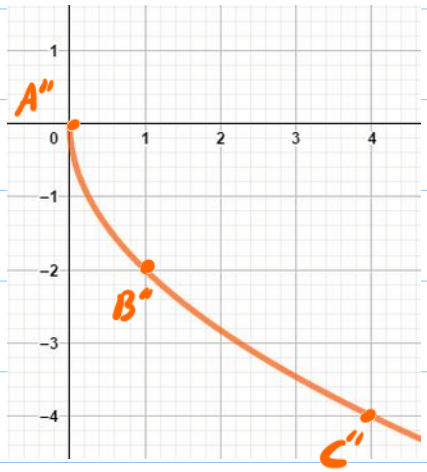
$y = \sqrt{x}$



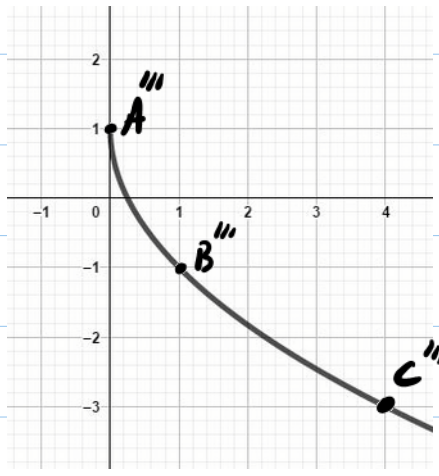
$y = 2\sqrt{x}$ انبساط عمودی با ضریب ۲



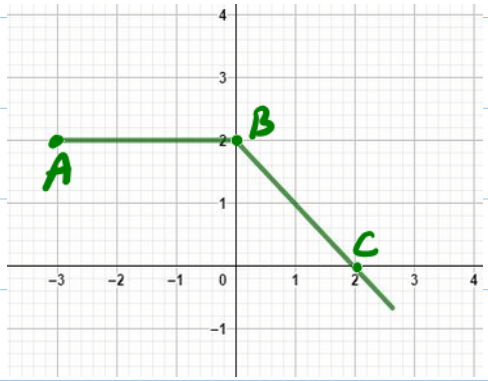
$y = -2\sqrt{x}$ انعکاس نسبت به محور xها



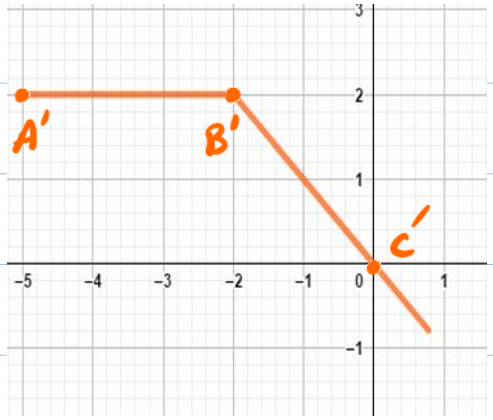
$f(x) = -2\sqrt{x} + 1$ انتقال محور یک واحد به



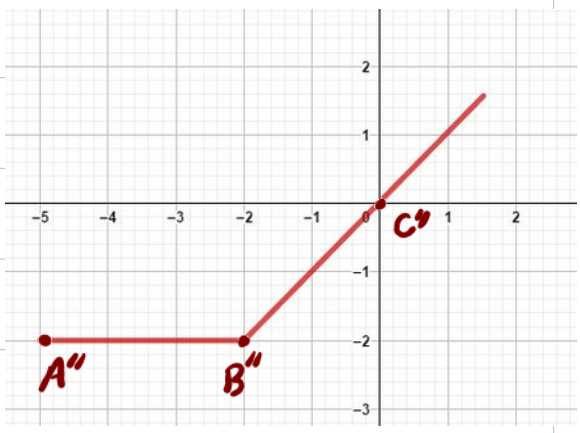
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=1-f(x+2)$ را رسم کنید.



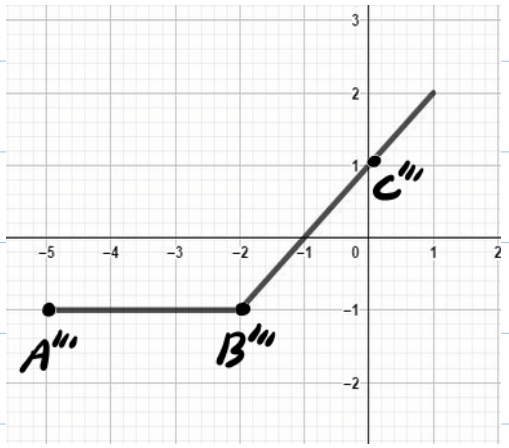
$y=f(x+2)$ انتقال افقی ۲ واحد چپ



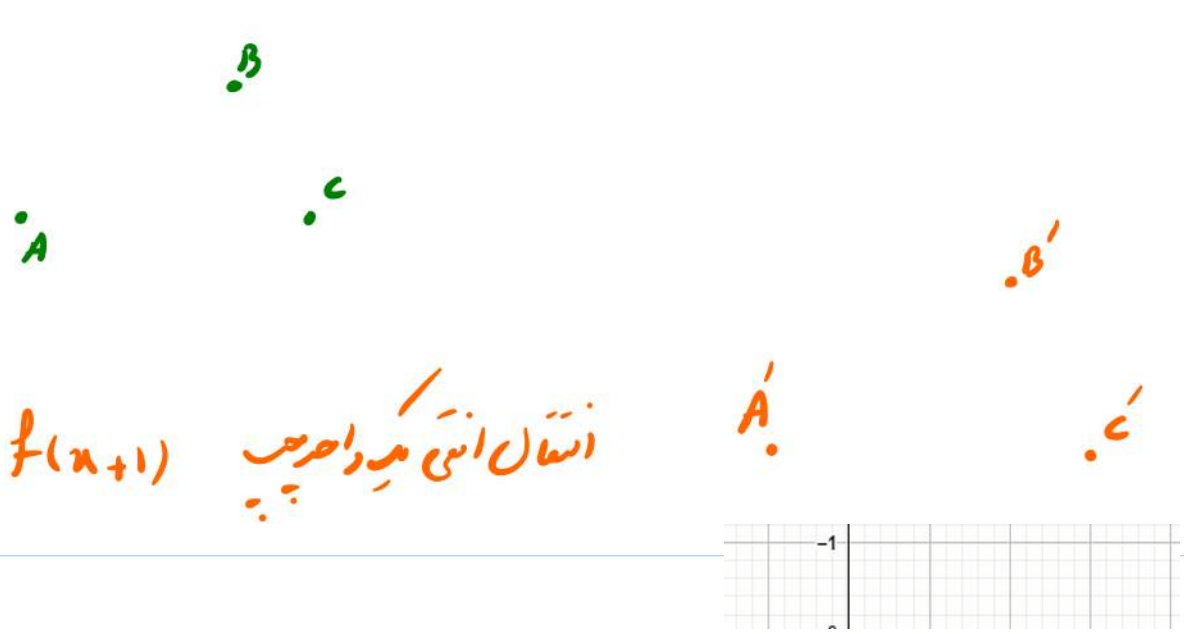
$y=-f(x+2)$ انعکاس نسبت به محور xها



$y=1-f(x+2)$ انتقال عمودی یک واحد بالا

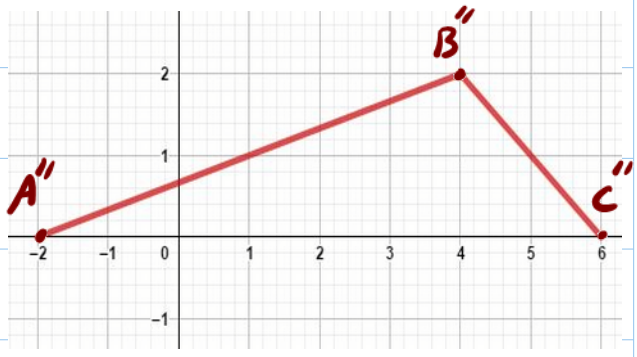


مثال : نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر است. نمودار $y=3f(\frac{1}{2}x+1)$ را رسم کنید.

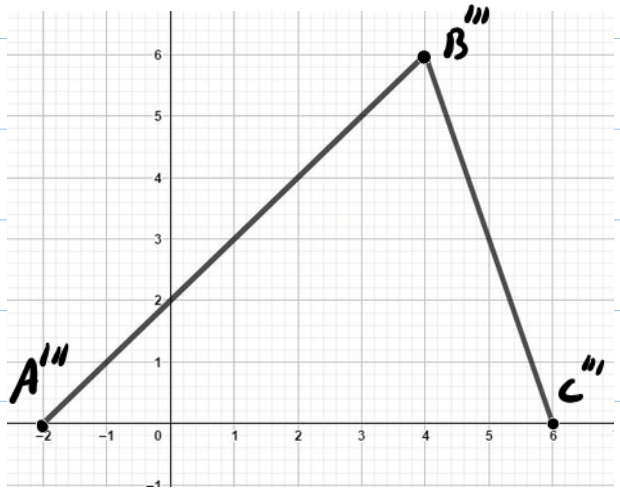


$y=f(x+1)$ انتقال افقی به اندازه ۱ واحد چپ

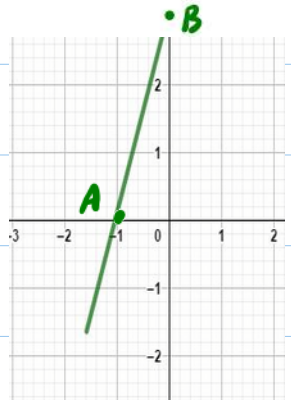
$y=f(\frac{1}{2}x+1)$ انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$



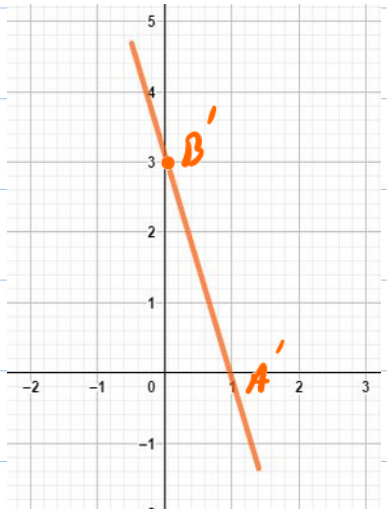
$y=3f(\frac{1}{2}x+1)$ انبساط عمودی با ضریب ۳



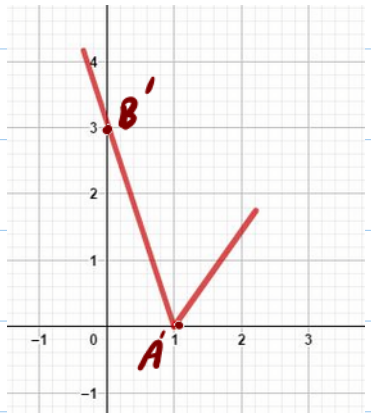
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=|f(-x)|-2$ را رسم کنید.



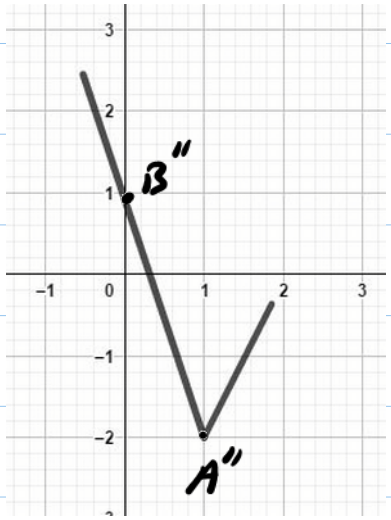
$y=f(-x)$ انعکاس: قرینه‌ت به محور yها



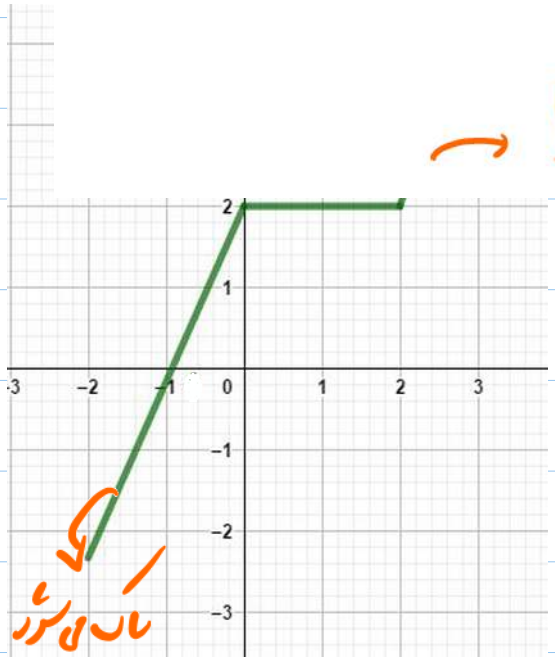
$y=|f(-x)|$ تأثیر قدرمطلق: قسمت‌هایی که زیر محور x است قرینه می‌شود.



$y=|f(-x)|-2$ انتقال عمودی ۲ واحد پایین



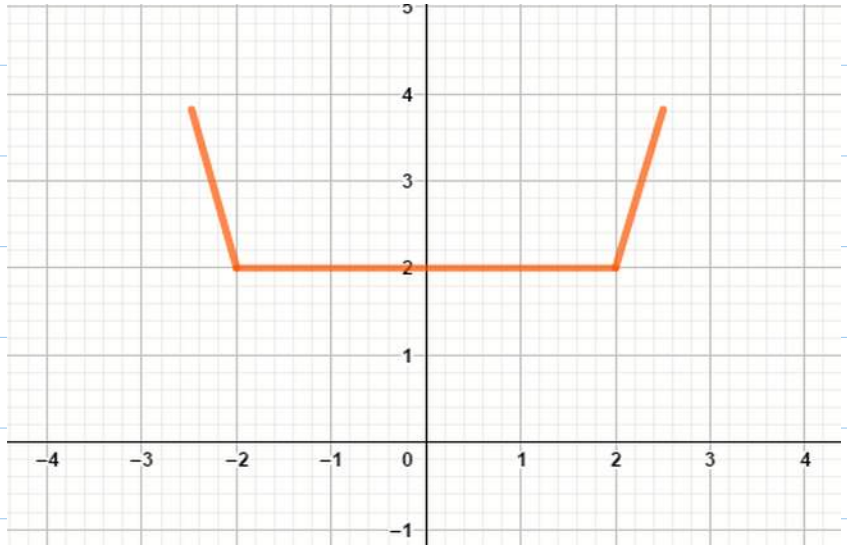
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ را رسم کنید.



قرینه‌ها نسبت به محور y ها ←

نمای شکل

$y=f(|x|)$



مثال: ضابطه نقاط نمودار تابع f را در نظر می‌گیریم. پس نمودار به دست آمده را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن رسم شده را بیابید.

$$f\left(\frac{x}{2}\right) \longrightarrow f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Rightarrow y=f\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

مثال: نمودار تابع $g(x)=2f(3x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم. سپس طول و عرض نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن بدست آمده است را بنویسید.

$$2f(3(x-1)) = 2f(3x-3)$$

$$\rightarrow 2f(3x-3)+2$$

عرض‌ها ↑ ضرب‌ها ↑

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left(2f(3(2x)-3)+2\right) = f(6x-3)+1$$

$$\Rightarrow \quad h(x)=f(6x-3)+1$$

مثال: منحنی تابع $y=|x-2|$ را سه واحد به چپ انتقال داده و قرینه شکل حاصل را نسبت به محور yها تعیین می‌کنیم و با ضریب $\frac{1}{2}$ انبساط محوری می‌دهیم. سپس قرینه آن را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم، معادله منحنی جدید را بدست آورید.

$f(x+3)$: $\quad y=|x+3-2|=|x+1|$

$f(-x+2)$: $y=|-x+1|$

$2f(-x+3)$: $y=2|-x+1|$

$-2f(-x+4)$: $y=-2|-x+1|=-2|1-x|$

مثال: با انجام متوالی کدام گزینه، نمودار $y=f(x)$ تبدیل به نمودار تابع $y=-\frac{1}{4}(1-x)$ می‌شود؟

۱) انتقال یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور عرض‌ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی

✓ ۲) انتقال یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور عرض‌ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای محوری

۳) انتقال یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور عرض‌ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی

۴) انتقال یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور عرض‌ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای محوری

گزینه ۲

$y=-\frac{1}{4}(1-x)$

- $-\frac{1}{4}$: انقباض محوری با ضریب $\frac{1}{4}$ / قرینه نسبت به محور xها
- $(1-x)$: قرینه نسبت به محور yها / انتقال افقی یک واحد چپ

مثال: کنکور ریاضی ۹۹

قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

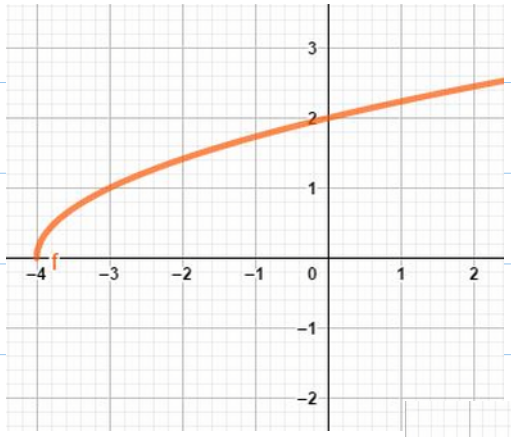
۱) $x=1$

$f(-x)$: $y=\sqrt{-x}$

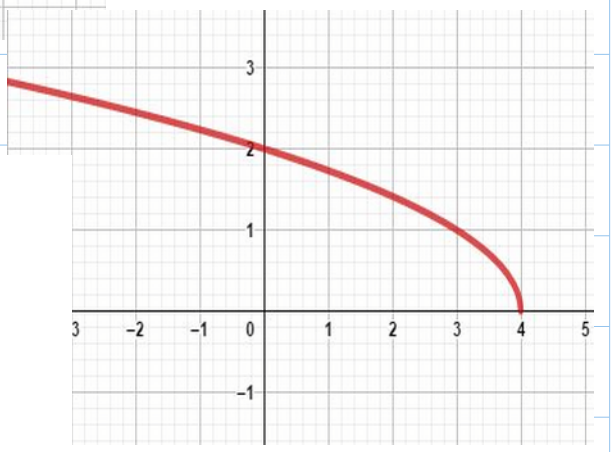
$f(-(x-4))$: $y=\sqrt{-(x-4)}=\sqrt{-x+4}=\sqrt{4-x}$

$y=\sqrt{4+x}$

۴ واحد به چپ

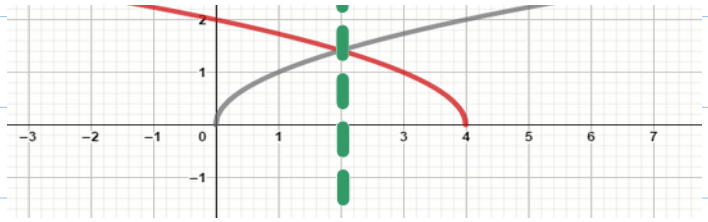


$y=\sqrt{4-x}$ انعکاس: قرینه نسبت به محور yها



$x=2$

$y=\sqrt{4-x}$



$y=\sqrt{x}$

قرینه $x=2$

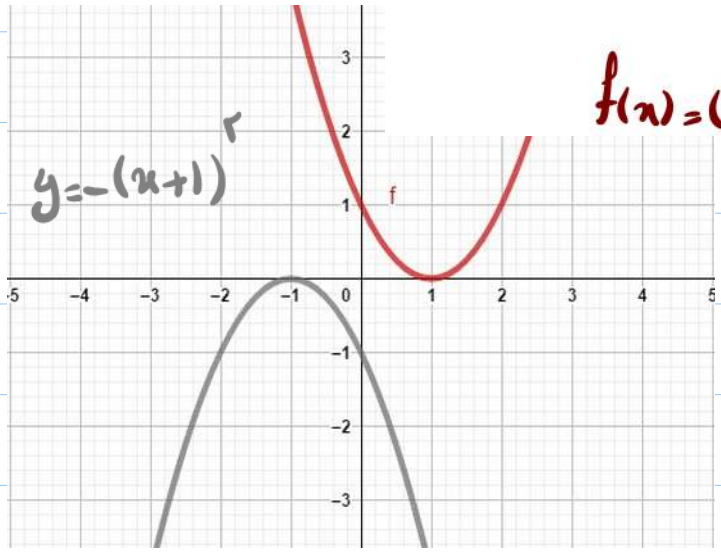
مثال: کنکور ریاضی ۹۹ (خارج)

ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

۱) ۲ ، ۰ ۲) ۱ ، −۱ ۳) ۲ ، −۱ ۴) ۱ ، −۲

$\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$ $\quad -y=(-x-1)^2=(x+1)^2$

$\Rightarrow y=-(x+1)^2 \xrightarrow{+4} g(x)=-(x+1)^2+4$



$f(x)=g(x) \Rightarrow (x-1)^2=-(x+1)^2+4 \rightarrow (x-1)^2+(x+1)^2=4$

روش تشریحی $\Rightarrow x^2-2x+1+x^2+2x+1=4 \rightarrow 2x^2+2=4 \rightarrow 2x^2=2$

$x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$ طول نقاط تلاقی : گزینه ۲

مثال: کنکور تجربی ۹۹

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $4\sqrt{15}$ ۲) $6\sqrt{7}$ ۳) $4\sqrt{17}$ ۴) $6\sqrt{10}$

$g(x)=\sqrt{x-12}+2$

$f(x)=g(x) \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{x-12}+2 \xrightarrow[2]{\text{به توان}} x=(x-12)+4\sqrt{x-12}+4$

$8=4\sqrt{x-12} \xrightarrow{\div 4} 2=\sqrt{x-12} \xrightarrow[2]{\text{به توان}} 4=x-12 \Rightarrow x=16$

$f(16)=\sqrt{16}=4$ نقطه برخورد $A(16,4)$

$OA=\sqrt{16^2+4^2}=\sqrt{256+16}=\sqrt{272}=\sqrt{16\times 17}=4\sqrt{17}$

گزینه ۳

مثال: کنکور تجربی ۹۹ (خارج)

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x\;;(x>1)$، مفروض است. قرینهٔ نمودار آن نسبت به محور xها را، ۱۶ واحد در امتداد محور yها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $4\sqrt{5}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$

قرینه‌ی نسبت به محور xها : $-f(x) = -(x-1)^2 + 1$

انتقال عمودی ۱۶ واحد بالا : $g(x) = -(x-1)^2 + 1 + 16 = -(x-1)^2 + 17$

$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 - 1 = -(x-1)^2 + 17$

$\Rightarrow 2(x-1)^2 = 18 \xrightarrow{\div 2} (x-1)^2 = 9$

$\Rightarrow x - 1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 3 \to x = 4 \\ x - 1 = -3 \to x = -2 \end{cases}$ غ ق ق

نقطه‌ی برخورد $A(4, 8)$ $\quad f(4) = (4-1)^2 - 1 = 8$

$OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$ گزینه ۱

نکته : گاهی اوقات مقصات نقطه‌ای روی $f(x)$ داده می‌شود و مقصات نقطه متناظر با آن در $af(bx+c)+d$ خواسته می‌شود. در این حالت تمام مواردی که برای رسم نمودار

این بار می‌خواهیم روی نقطه داده شده اعمال می‌کنیم. همچنین برای تأثیر b و c می‌گوییم، همگونی $y=bx+c$ را بدست آوردیم.

مثال: نقطه $A(-1,2)$ روی نمودار $y=f(x)$ است. نقطه متناظر با آن روی نمودار $y=4f(2x-5)-7$ کدام است؟ $A'(a,b)$ است. $a-b$ کدام است؟

۱) -2 ✓۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

$$t=2x-5 \Rightarrow t+5=2x \xrightarrow{\div 2} x=\frac{t+5}{2} \xrightarrow{-1} \frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2=a$$

$$b=2\times 4-7=-1 \Rightarrow A'(2,-1) \longrightarrow a-b=2-(-1)=3$$

گزینه ۲

نکته: در تابع $y=af(bx+c)+d$، a و d روی برد و b و c روی دامنه f تأثیرگذارند.

مثال: اگر دامنه تابع $y=f(x)$ بازه $(-5,14)$ باشد دامنه تابع $y=f(3x+4)$ را بیابید.

$$f(3x+4)$$
$$14 \quad 14$$
$$x \rightarrow 3x+4 \rightarrow f$$
$$-5 \quad -5$$

$$-5 < 3x+4 < 13 \xrightarrow{-4} -9 < 3x < 9$$

$$\xrightarrow{\div 3} -3 < x < 3$$

$$D_{f(3x+4)} = (-3, 3)$$

مثال: اگر دامنه تابع f بازه $(-2, 4)$ باشد، دامنه تابع $g(x) = 3f(x+1) - 1$ را بیابید.

دامنه

$$-2 < f(x) < 4 \longrightarrow -2 < f(x+1) < 4 \xrightarrow{\times 3} -6 < 3f(x+1) < 12$$

$$\xrightarrow{-1} -7 < 3f(x+1) - 1 < 11 \Rightarrow -7 < g(x) < 11$$

$$R_{g(x)} = (-7, 11)$$

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل اول: تابع

درس سوم: تابع وارون

صفحه: ۲۴ تا ۲۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

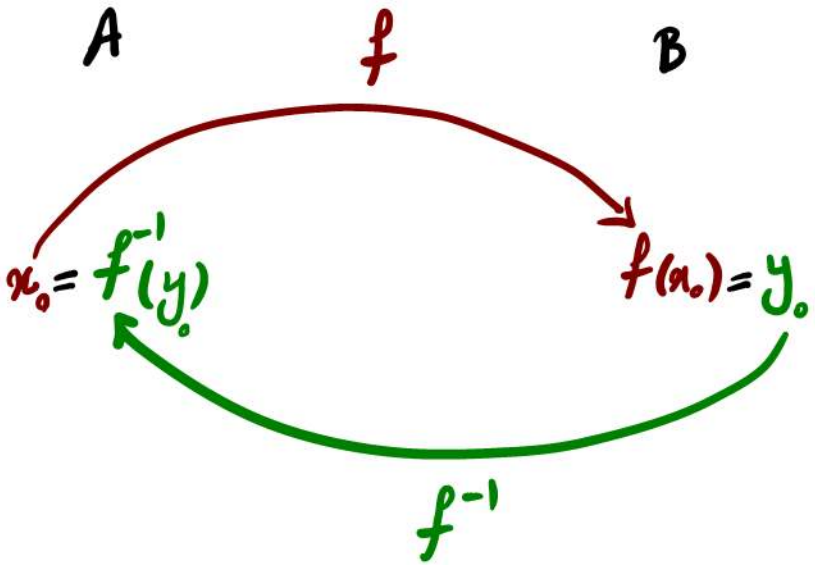
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

وارون تابع :

برای برخی توابع ، تابعی دیگر وجود دارد که عکس تابع اصلی عمل کرده و خروجی را به ورودی تبدیل می‌کند . به چنین تابعی ، تابع عکس یا تابع وارون می‌گویند.

تعریف : وارون تابع f رابطه‌ای است که در آن به ازای هر خروجی f ، به ورودی مربوطه می‌رسیم . مثلاً اگر تابع f عدد x_0 از دامنه را به y_0 از برد ببرد ، وارون تابع f که آن را با f^{-1} نشان می‌دهند عضو y_0 را به عنوان تصویری از دامنه خودش به x_0 از مجموعه برد می‌برد .



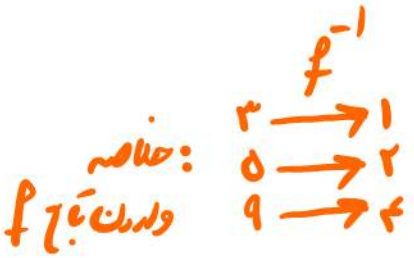
مثال :

$f(x) = 2x + 1$

$f(1) = 3$ ، $f(2) = 5$ ، $f(4) = 9$

$1 = f^{-1}(3)$ ، $2 = f^{-1}(5)$ ، $4 = f^{-1}(9)$

$f^{-1}(y)$



خلاصه وارون تابع f

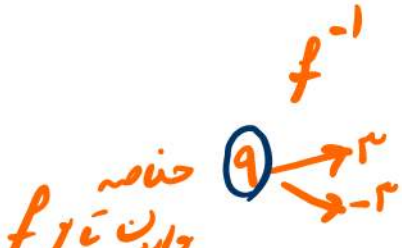
$f(x) = x^2$

وارون تابع خود تابع است :

$f(3) = 9$ ، $f(-3) = 9$

$3 = f^{-1}(9)$ ، $-3 = f^{-1}(9)$

$f^{-1}(y)$



خلاصه وارون تابع f

تابع وارون پذیر : اگر وارون تابع f ، تابع باشد ، f را وارون پذیر می‌گوییم.

نکته : تابع f وارون پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد

۱) محاسبه وارون تابع از روی نمایش زوج مرتبی :

کافی است جای مولفه اول و دوم را عوض کنیم : $f^{-1}=\{(y,x)\mid (x,y)\in f\}$

مثال: وارون پذیر است $f=\{(1,6),(-1,5),(2,4)\}$ الف)

$$f^{-1}=\{(6,1),(5,-1),(4,2)\}$$

وارون پذیر نیست $g=\{(2,3),(4,-1),(5,2),(7,3)\}$ ب)

تابع نیست : $g^{-1}=\{(3,2),(-1,4),(2,5),(3,7)\}$ سه رابطه

۲) محاسبه وارون تابع از روی نمایش نمودار ون :

کافی است جهت فلش‌ها یا جای دایره‌ها را عوض کنیم .

مثال :

f		f^{-1}	
۲	۱	۱	۲
۴	۳	۳	۴
۵	۸	۸	۵

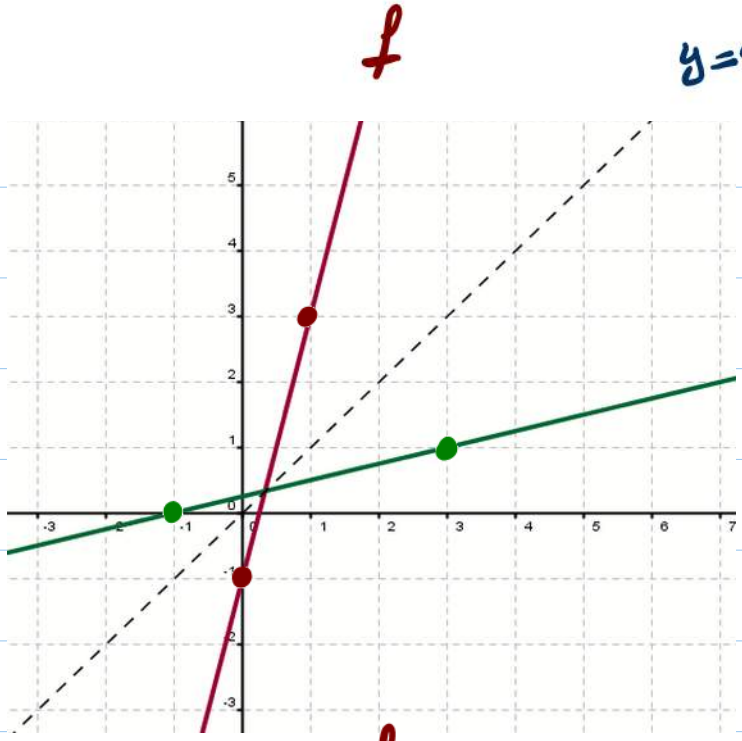
وارون پذیر

۱۳ محاسبه وارون تابع از روی نمایش دستگاه مختصات :

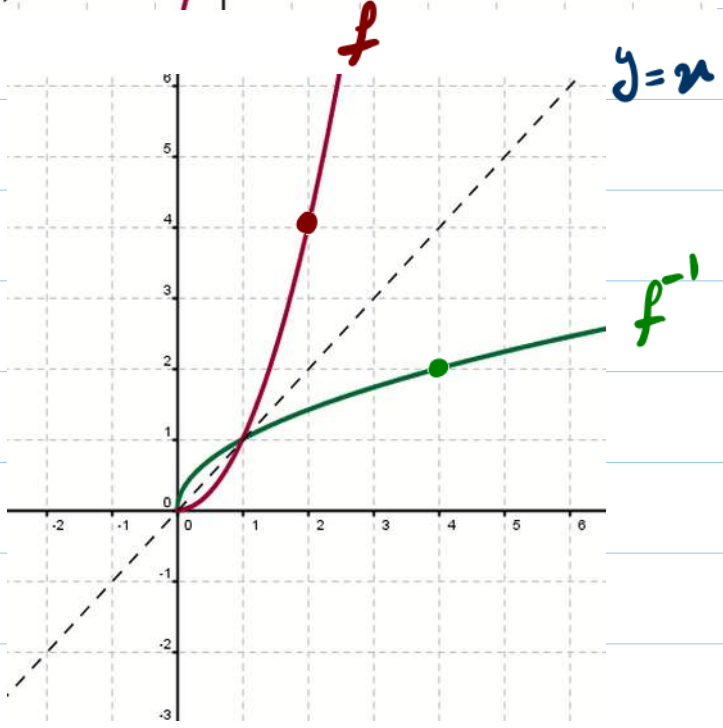
کافی است قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ (نیم‌ساز ناحیه اول و سوم) بیابیم

زیرا دو نقطه (x,y) و (y,x) نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.

مثال:



تذکر: بهتر است برای دقیق‌تر شدن نمودار f^{-1} چند نقطه روی f پیدا کنیم و جای x و y را عوض کنیم تا نقطه‌ای روی f^{-1} به دست آید.



چند نکته : اگر f وارون پذیر باشد آنگاه

۱- اگر $f(a)=b$ آنگاه $f^{-1}(b)=a$. به عبارت دیگر اگر نقطه (a,b) روی نمودار تابع f باشد آنگاه نقطه (b,a) روی نمودار f^{-1} است .

۲- $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$

۳- $D_{f^{-1}}=R_f$ ، $D_f=R_{f^{-1}}$

۴- اگر f و f^{-1} در نقطه (a,b) متقاطع باشند آنگاه $f(a)=b$, $f(b)=a$.

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{18-x}+\sqrt[3]{18+x}$ باشد مقدار $f(9)+f^{-1}(4)$ را بیابید .

$$f(9)=\sqrt{18-9}+\sqrt[3]{18+9}=3+3=6$$

$$f^{-1}(4)=9$$

$$f(9)+f^{-1}(4)=4+9=10$$

مثال: اگر $g=\{(2,4),(3,2),(1,5),(5,-1)\}$ و $f=\{(3,2),(2,3),(4,-1),(5,6)\}$

$f^{-1}(a)+g^{-1}(2)=6$ ، مقدار $g(a)$ را بدست آورید.

$$g(3)=2 \rightarrow g^{-1}(2)=3$$

$$f^{-1}(a)+3=6 \rightarrow f^{-1}(a)=3 \rightarrow f(3)=a=2$$

$$g(a)=g(2)=4$$

مثال: نمودار تابع $f(x)=-x^3+mx+n$ در نقطه $(\frac{1}{3},-1)$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند.

مقدار m,n را بیابید.

$$f(-1)=\frac{1}{3} \rightarrow \underbrace{-(-1)^3}_{+1}-m+n=\frac{1}{3} \rightarrow -m+n=-\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$f(\tfrac{1}{3})=-1 \rightarrow -\frac{1}{27}+\frac{1}{3}m+n=-1 \rightarrow \frac{1}{3}m+n=-1+\frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{3}m+n=\frac{-26}{27} \xrightarrow{\times 3} m+3n=-\frac{26}{9} \quad (2)$$

$$\begin{cases} -m+n=-\frac{2}{3} \\ m+3n=-\frac{26}{9} \end{cases}$$

$$4n=\frac{-32}{9}$$

$$\rightarrow n=-\frac{32}{9\times 4}=-\frac{8}{9} \rightarrow -m-\frac{8}{9}=-\frac{2}{3}$$

$$m=\frac{2}{3}-\frac{8}{9}=\frac{-2}{9}$$

۴) یافتن ضابطه تابع وارون :

اگر تابع به صورت ضابطه نمایش داده شده باشد، مراحل زیر را انجام می‌دهیم :

۱- به جای $f(x)$ ، y قرار می‌دهیم .

۲- مانند یک معادله به آن نگاه می‌کنیم که می‌خواهیم x را بیابیم یعنی x را برحسب y می‌یابیم .

۳- به جای x ، $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x قرار می‌دهیم .

مثال: وارون توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=4x-7$

$$y=4x-7 \rightarrow y+7=4x \xrightarrow{\div 4} \frac{y+7}{4}=x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+7}{4}$$

۲) $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$

$$y=\frac{3x+2}{x-1} \rightarrow yx-y=3x+2 \rightarrow yx-3x=2+y$$

$$x(y-3)=2+y \rightarrow x=\frac{2+y}{y-3} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-3}$$

۳) $y=3-\sqrt{x+1}$

$$\sqrt{x+1}=3-y \xrightarrow[\text{توان ۲}]{} x+1=(3-y)^2 \rightarrow x=(3-y)^2-1$$

$$f^{-1}(x)=(3-x)^2-1$$

روش دوم

$$x+1=9-6y+y^2 \rightarrow x=y^2-6y+8$$

$$f^{-1}(x)=x^2-6x+8$$

تذکر: اگر تابعی یک به یک نباشد پس وارون پذیر نیست ولی می‌توانیم با محدود کردن دامنه تابع آن را یک به یک کنیم و وارونش را به دست آوریم.

مثال: با محدود کردن دامنه تابع $f(x)=x^2+4x+5$، ضابطه تابع وارون را بیابید.

$$D=(-\infty,-\frac{b}{2a}]=(-\infty,-\frac{4}{2}]=(-\infty,-2]$$

با این دامنه تابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می‌شود.

$f(x) = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1$

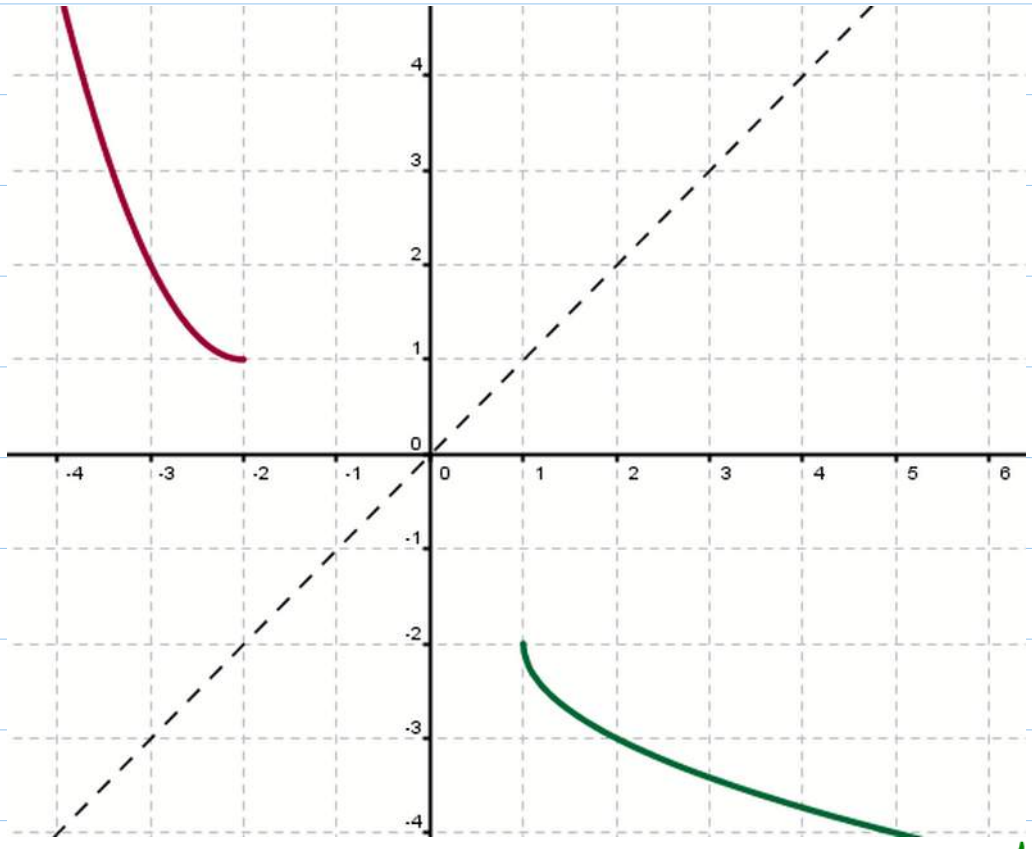
$x+2 \;|\; a \;|\; -2$

$y = (x+2)^2 + 1 \longrightarrow y-1 = (x+2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y-1} = |x+2|$

$\sqrt{y-1} = -(x+2) \rightarrow \sqrt{y-1} = -x-2$

$x = -2 - \sqrt{y-1} \longrightarrow f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x-1}$

f: $x \leq -2$



f^{-1}

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} 7x+2 & x<1 \\ 5x+4 & x\geq 1 \end{cases}$ ، آیا وارون f را بیابید.

دامنهٔ f^{-1} :

$$D_{f^{-1}} = R_f$$

$$x<1 \xrightarrow{\times 7} 7x<7 \xrightarrow{+2} 7x+2<9$$

$$x\geq 1 \xrightarrow{\times 5} 5x\geq 5 \xrightarrow{+4} 5x+4\geq 9$$

ضابطهٔ f^{-1} :

$$y=7x+2 \rightarrow y-2=7x \rightarrow x=\frac{y-2}{7} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-2}{7}$$

$$y=5x+4 \rightarrow y-4=5x \rightarrow x=\frac{y-4}{5} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-4}{5}$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x-2}{7} & x<9 \\ \frac{x-4}{5} & x\geq 9 \end{cases}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

مطالب تکمیلی

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تابع متناوب :

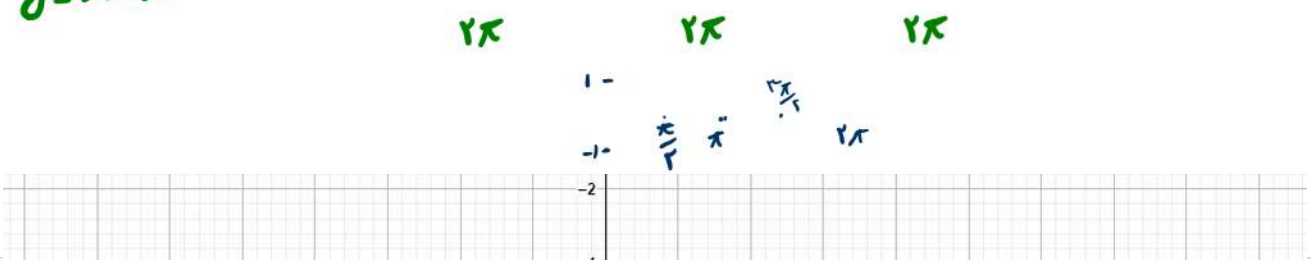
اگر در تابعی برای هر مقدار از دامنه تابع، تساوی $f(x+T)=f(x)$ برقرار باشد، حتی اضافه کردن T، اثری روی مقدار تابع نداشته باشد، می‌گوییم f متناوب است.

به کوچک‌ترین مقدار مثبت T دوره تناوب می‌گوییم.

به عبارت دیگر در توابع متناوب، قسمتی از نمودار در حال تکرار شدن است. به کوچکترین اندازه افقی این قسمت تکرار شونده دوره تناوب می‌گوییم.

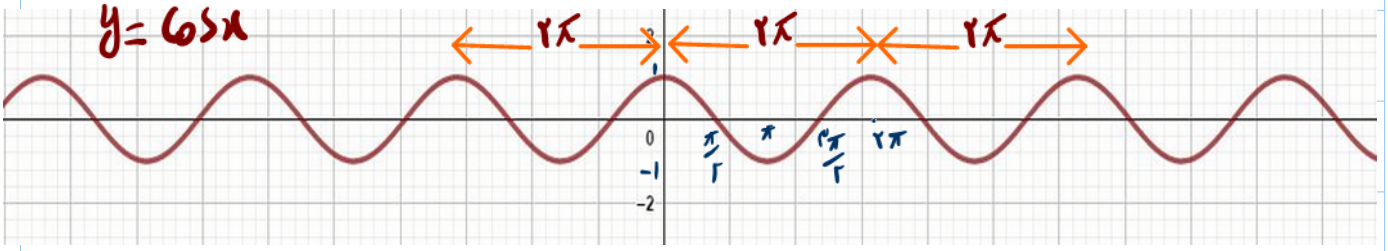
مثال : دوره تناوب توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را بیابید.

$y=\sin x$



$T=2\pi$

$y=\cos x$



$T=2\pi$

نکته: اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد، اضافه یا کم کردن مضارب صحیح

T، مقدار تابع را تغییر نمی‌دهد: $f(x+kT)=f(x)$

مثال: اگر قسمتی از نمودار تابع f به شکل زیر باشد، $f(1399)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$



$T=4$

باید مقداری از ۴ را به ۱۳۹۹ اضافه یا کم کنیم تا عددی بین ۰ تا ۴ بدست آید.

$$f(1399)=f(1399+(-349)4)=f(1399-1396)=f(3)$$

خط AB : $A(2,4), B(4,0)$ $\quad m=\frac{0-4}{4-2}=-\frac{4}{2}$

$$y-0=-\frac{4}{2}(x-4) \Rightarrow y=-\frac{4}{2}x+6$$

$$f(3)=-\frac{4}{2}(3)+6=-\frac{9}{2}+6=\frac{3}{2}$$

گزینه ۲

مثال: ضابطه تابع متناوب f در بازه $(0,1)$ به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ است. اگر دوره تناوب تابع برابر ۱ باشد، $f(-0/46)$ کدام است؟

۱) ۸٪ ۲) ۶٪ ۳) تعریف نشده ۴) ۴٪

گزینه ۱ $f(-0,46)=f(-0,46+1)=f(0/54)=\sqrt{0/54}=0/8=8\%$

نکته: اگر دوره تناوب $f(x)$ برابر T باشد، دوره تناوب $af(bx+c)+d$ برابر $\frac{T}{|b|}$ است. یعنی برای محاسبه دوره تناوب فقط به ضریب x توجه می‌کنیم.

سایر ضرایب و انتقال‌ها اثری روی دوره تناوب ندارند.

مثال: دوره تناوب $y=2f(6x-1)+4$ برابر ۲ است. دوره تناوب $g(x)=-f(3x)-1$ را بیابید.

$y: \quad 2=\frac{T_f}{4} \Rightarrow T_f=12$

$g: \quad T_g=\frac{T_f}{3}=\frac{12}{3}=4$

نتیجه: دوره تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)+d$ ، $y=a\cos(bx+c)+d$ برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است.

مثال: اگر دوره تناوب تابع $f(x)=k\cos(kx)+3$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۴

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{k} \Rightarrow k\pi=8\pi \longrightarrow k=8$$

$$f(x)=8\cos 8x+3 \Rightarrow f(0)=8\underbrace{\cos 8\times 0}_{1}+3=8\times 1+3=11$$ گزینه ۱

نکته: گاهی اوقات لازم است با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی، تابع را ساده تا حد امکان ساده کنیم، سپس دوره تناوب را محاسبه کنیم.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x)=\cos^2 x-\cos^4 x$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) 2π

$$f(x)=\cos^2 x-\cos^4 x=\cos^2 x(1-\cos^2 x)=\cos^2 x\sin^2 x$$

یادآوری : $\sin 2x = 2\sin x \cos x \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\sin^2 2x$

یادآوری : $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$

$T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ گزینه ۲

مثال : اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \sqrt{2}\cos^2(mx-4)$ برابر $\frac{3\pi}{4}$ باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$f(x) = \sqrt{2} \times \frac{1+\cos 2(mx-4)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\cos(2mx-8))$

گزینه ۱

$T = \frac{3\pi}{4} = \frac{2\pi}{|2m|} \Rightarrow 3\pi|m| = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{8\pi}{3\pi} = \frac{4}{3} \Rightarrow m = \pm\frac{4}{3}$

نکته: دوره تناوب توابع $y=\tan ax$, $y=\cot ax$ برابر است با $T=\frac{\pi}{|a|}$.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ کدام است؟

۱) 4π ۲) 2π ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

$$f(x)=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$$ گزینه ۲

بررسی توابع مثلثاتی به صورت $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$

پارامتر a باعث انبساط یا انقباض عمودی تابع سینوس و کسینوس می‌شود و پارامتر c یک انتقال عمودی را نتیجه می‌دهد. پس مقادیر ماکزیمم و مینیمم این گونه توابع عبارتند از:

$$y_{max}=|a|+c \qquad y_{min}=-|a|+c$$

در درس قبل هم دیدیم پارامتر b که باعث انبساط یا انقباض افقی می‌شود، در دوره تناوب مؤثر است و $T=\frac{2\pi}{|b|}$.

مثال: مقادیر max، min و دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

الف) $y=3-\cos(\frac{1}{4}x)$ $\qquad T=\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$

$y_{max}=1-|-1|+3=1+3=4$ $\qquad y_{min}=-1-|-1|+3=-1+3=2$

ب) $y=-2\sin(\pi x)+\sqrt{3}$ $\qquad T=\frac{2\pi}{\pi}=2$

$y_{max}=|-2|+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$ $\qquad y_{min}=-|-2|+\sqrt{3}=-2+\sqrt{3}$

نکته: اگر نمودار تابعی به صورت $y=a\cos bx+c$ یا $y=a\sin bx+c$ باشد، برای سریع‌تر کردن ضابطه تابع هنگ یافتن پارامترهای a، b، c و تشخیص سینوسی یا کسینوسی بودن تابع به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) اگر مقدار yها از max یا min نمودار شروع کند، تابع کسینوسی است در غیر این صورت سینوسی است.

۲) با جمع و کم کردن روابط گفته شده برای مقادیر max و min داریم:

$$\begin{cases} y_{max}=|a|+c \\ y_{min}=-|a|+c \end{cases} \xrightarrow{+} y_{max}+y_{min}=2c \Rightarrow c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}$$

$$\Rightarrow y_{max}-y_{min}=2|a| \Rightarrow |a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}$$

۳) برای یافتن b از دوره تناوب کمک می‌گیریم ($T=\frac{2\pi}{|b|}$)

۴) برای تشخیص علامت a و b این‌گونه عمل می‌کنیم:

الف- در توابع سینوسی اگر نمودار از مبدا $x=0$ روند صعودی داشته باشد، a و b هم‌علامت هستند یعنی: $a\times b>0$

و اگر نمودار به ازای $x=0$ روند نزولی داشته باشد، a و b نیز هم‌علامت اند یعنی: $ab>0$

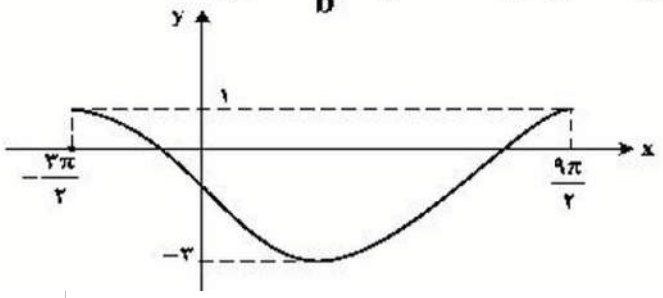
ب- در توابع کسینوسی اگر نمودار، روی محور yها، ماکزیمم داشته باشد $a>0$ است

و اگر مینیمم داشته باشد $a<0$ است.

با توجه به رابطه $\cos(-x)=\cos x$، b می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

مثال: کنکور سراسری ۹۹ تجربی :

شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟



۱) -۲
۲) -۳
۳) -۴
۴) -۶

$T = \frac{۹\pi}{۲} - (-\frac{۳\pi}{۲}) = \frac{۱۲\pi}{۲} = ۶\pi \Rightarrow ۶\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳}$

$|a| = \frac{۱-(-۳)}{۲} = \frac{۱+۳}{۲} = ۲$

چون به ازای $x=0$ تابع نزولی است پس $ab<0$ و در حالت داریم:

$\begin{cases} a=-۲ \\ b=\frac{۱}{۳} \end{cases}$: $\frac{a}{b} = \frac{-۲}{\frac{۱}{۳}} = -۶$

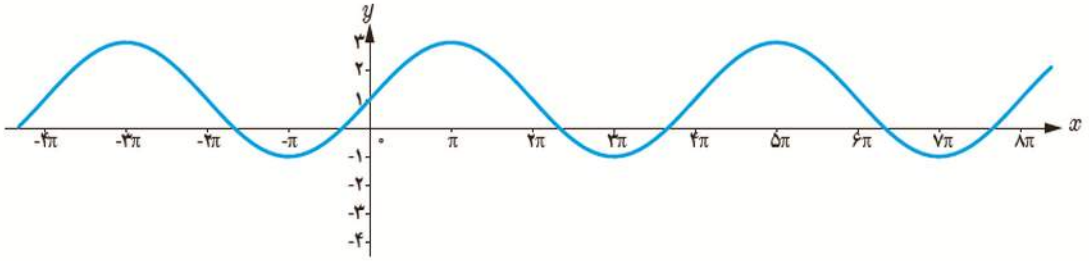
$\begin{cases} a=۲ \\ b=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$ $\frac{a}{b} = \frac{۲}{-\frac{۱}{۳}} = -۶$

گزینه ۴

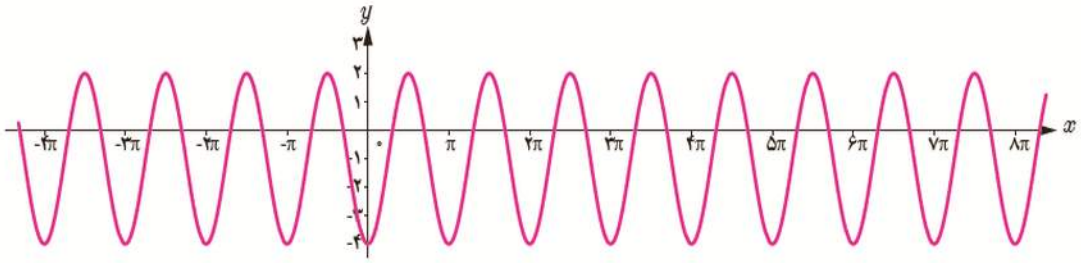
مثال: ضابطهٔ توابع زیر به صورت $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ است.

ضابطهٔ آن‌ها را مشخص کنید.

الف)



ب)



الف) $T=4\pi \Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{1}{2}$ تابع سینوسی است

$|a|=\frac{4-(-1)}{2}=\frac{5}{2}=2$, $c=\frac{4+(-1)}{2}=\frac{3}{2}=1$

چون $x=0$ تابع دو نمودی دارد پس $ab>0$:

ضابطهٔ تابع : $y=2\sin\frac{1}{2}x+1$ یا $y=-2\sin(-\frac{1}{2}x)+1$

ب) $T=\pi \Rightarrow \pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=2$ تابع کسینوسی

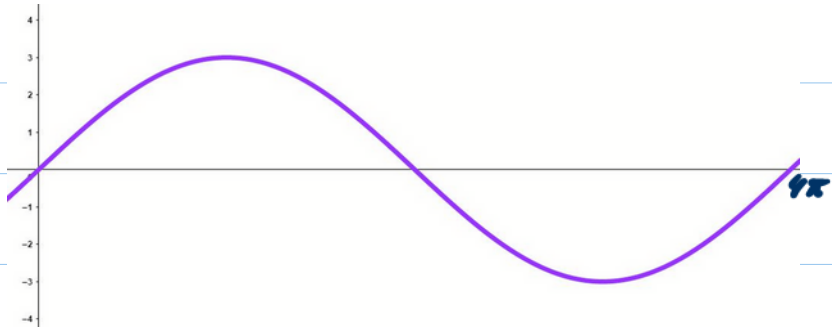
$|a|=\frac{2-(-4)}{2}=\frac{6}{2}=3$, $c=\frac{2+(-4)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

چون بعد y ها از min ی مثبت پس $a<0$ یعنی -3 است:

ضابطه تابع $y=-3\cos(-2x)-1$ یا $y=-3\cos 2x-1$

مثال: شکل زیر نمودار تابع $f(x)=a\sin bx$ است. مقدار ab کدام است؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4



$$T=4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi|b|=2\pi \Rightarrow |b|=\frac{2\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$$

$$|a|=\frac{3-(-3)}{2}=\frac{6}{2}=3$$

بعد از $x=0$ روند تابع صعودی است پس $ab>0$ است:

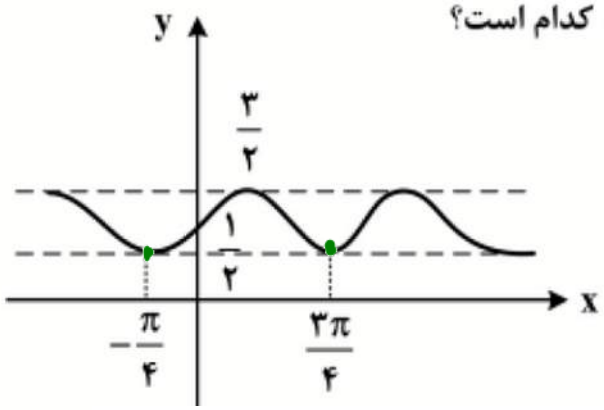
$$a=3,\ b=\frac{1}{2} \Rightarrow ab=3\times\frac{1}{2}=1$$

$$a=-3,\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow ab=-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

گزینه 1

مثال: کنکور سراسری ۹۸ ریاضی :

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = ۱ + a\sin bx\cos bx$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) ۳

مضرب دوره متناسب ضریب Sin

$$y = ۱ + a\sin bx\cos bx = ۱ + \frac{۱}{۲}a\sin ۲bx$$

$$T = \frac{۳\pi}{۴} - (-\frac{\pi}{۴}) = \frac{۴\pi}{۴} = \pi \Rightarrow \pi = \frac{۲\pi}{|۲b|} \Rightarrow \pi|b| = \pi \Rightarrow |b| = ۱$$

$$|\frac{۱}{۲}a| = \frac{\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow |a| = ۱$$

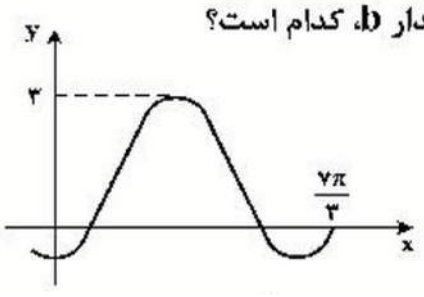
بعد از $x=۰$ روند تابع صعودی است پس $ab>۰$ است :

$$\begin{cases} a=۱ \\ b=۱ \end{cases} \quad a+b=۲ \quad , \quad \begin{cases} a=-۱ \\ b=-۱ \end{cases} \quad a+b=-۲$$

گزینه ۴

مثال: کنکور سراسری ۹۹ تجربی

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x)$ است. مقدار b، کدام است؟



۱) ۲

۲) ۱

۳) -۱

۴) -۲

$$y = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = a + b\cos x$$

$$y_{max} = 4 = |b| + a$$

چون ماکزیمم‌ها از min بیشتر شده است پس $b < 0$:

$$a - b = 4 \quad (1)$$

$$\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right) \xrightarrow{\text{قرینه}} 0 = a + b\cos\frac{7\pi}{4} \Rightarrow 0 = a + b\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

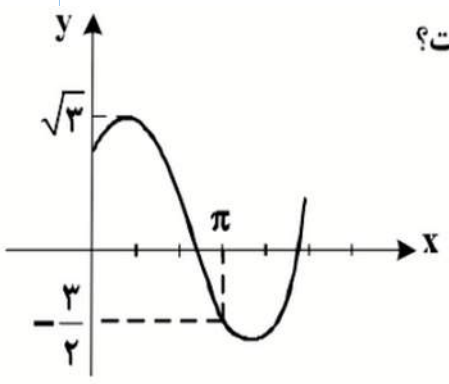
$$\Rightarrow 0 = a + b\cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 = a + b\times\frac{1}{2} \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 4 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3b}{2} = -4 \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} \Rightarrow b = -2$$

گزینه ۴

مثال : کنکور سراسری ۹۸ تجربی :

شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\sqrt{3}$
۴) ۲

$$y_{max} = |b| + a \Rightarrow |b| + a = \sqrt{4}$$

چون تابع به ازای $x=0$ روند صعودی دارد پس b با یک (ضریب x) هم‌علامت و مثبت است:

$$a+b=\sqrt{۳} \qquad (۱)$$

$$(\pi, -\frac{۳}{۲}) \xrightarrow{\text{در تابع}} -\frac{۳}{۲} = a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{۳}) \quad (-\sqrt{۳}/۲)$$

$$a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}b=-\frac{۳}{۲} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{cases} a+b=\sqrt{۳} \\ -\left(a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}b=-\frac{۳}{۲}\right) \end{cases} \Rightarrow b+\frac{\sqrt{۳}}{۲}b=\sqrt{۳}+\frac{۳}{۲}$$

$$b\left(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\sqrt{۳}\left(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) \Rightarrow b=\sqrt{۳}$$ گزینه ۳

مثال: نمودار تابع $f(x)=a\cos bx$ به صورت زیر است. $f(\frac{1}{۲})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}\pi$ ۲) $-\sqrt{۲}\pi$ ۳) $\sqrt{۶}\pi$ ۴) $-\sqrt{۶}\pi$

-1

-۲π

$$y_{min}=-|a|+۰=-۲\pi \Rightarrow |a|=۲\pi$$

چون نمودار ما از min شروع کرده پس $a<۰$ است:

$\Rightarrow -a = 2\pi \Rightarrow a = -2\pi$

چون $f(-1) = 0$ پس :

$a = -2\pi(\cos(-b)) \Rightarrow \cos(-b) = 0 \Rightarrow -b = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$

اولین نقطه‌ای که تابع $\cos$ قبل از $x = 0$ برابر صفر می‌شود $-\frac{\pi}{2}$ است.

$f(x) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} x$

$f(\frac{1}{2}) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = -2\pi \cos \frac{\pi}{4} = -2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\pi$

گزینه ۲

تانژانت در دایره مثلثاتی :

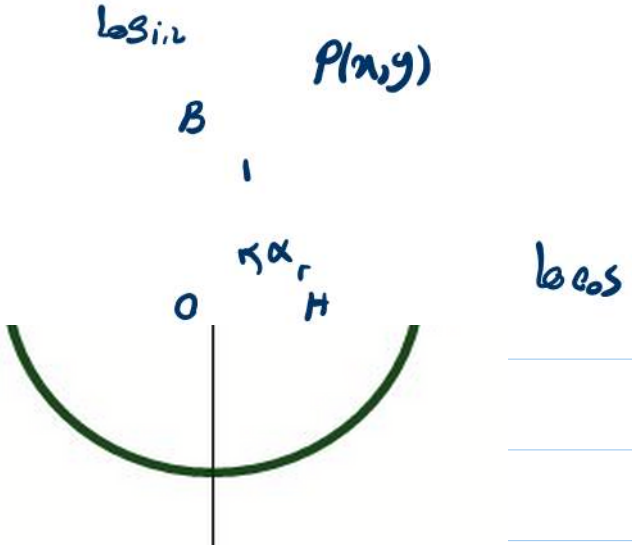
یادآوری : دایره مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدأ مختصات است.

ضلع انتهای هر زاویه در دایره مثلثاتی، بر قسمت مثبت محور xها واقع است.

اگر اندازه زاویه $\alpha > 0$ باشد به اندازه α در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت

دوران می‌کنیم و اگر $\alpha < 0$ باشد به اندازه α در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخیم.

اگر ضلع انتهایی زاویه محیط دایره را در نقطه $P(x,y)$ قطع کند داریم :

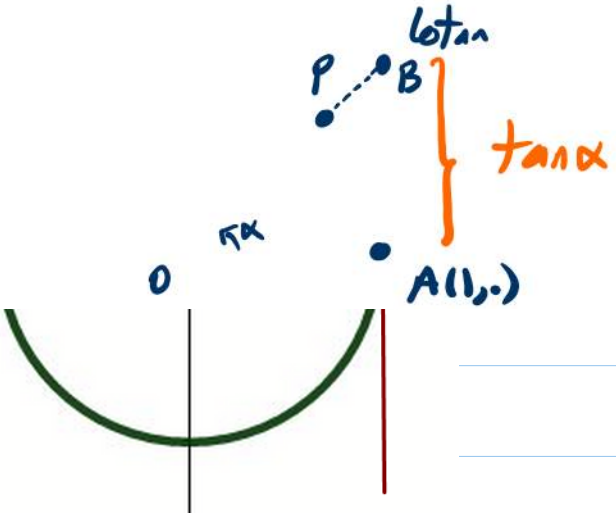


$\triangle OHP$: $\sin\alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{PH}{1} \Rightarrow \sin\alpha = PH = BO \Rightarrow y_P = \sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{OH}{1} \Rightarrow \cos\alpha = OH \Rightarrow x_P = \cos\alpha$

محور تانژانت ها را موازی محور سینوس ها و مماس بر دایره در نقطه $A(1,0)$ در نظر می گیریم. مبدأ این محور $A(1,0)$ است و جهت مثبت آن مانند محور سینوس هاست.

یعنی بالای A تانژانت مثبت و پایین A تانژانت منفی است.



اگر شعاع دایره را واحد در نظر بگیریم، محور تانژانت ها را در B قطع می کند.

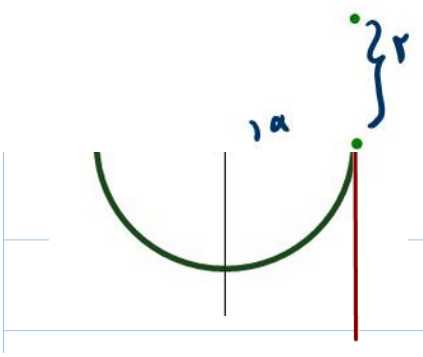
$$\hat{OAB}: \quad \tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} \Rightarrow \tan\alpha = AB$$

توجه: علامت تانژانت در نواحی چهارگانه به صورت زیر است:



نکته : در زاویه‌های $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و بطور کلی در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ ، هرچقدر شعاع را امتداد دهیم محور تانژانت‌ها را قطع نمی‌کند. در این زاویه‌ها تانژانت تعریف نشده است.

مثال : در شکل زیر $\cos\alpha$ کدام است؟

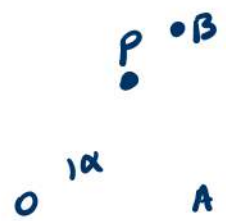


۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

$\tan\alpha = 2$ ، $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+4 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} \cos\alpha = \frac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ گزینه ۲

مثال : با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، اگر $P(2a-1, a)$ باشد، مساحت مثلث AOB چقدر است؟



۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$x_P = 2a-1 = \cos\alpha$

$y_P = a = \sin\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow a^2 + (2a-1)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 4a^2 - 4a + 1 - 1 = 0$

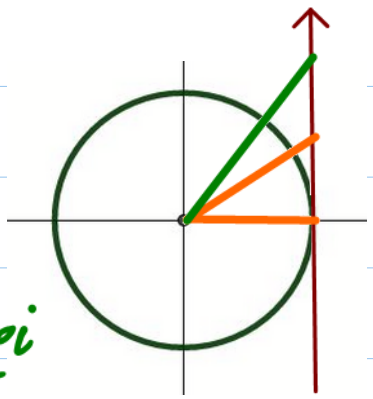
$5a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(5a-4) = 0 \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق ق} \\ 5a - 4 = 0 \longrightarrow a = \frac{4}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos\alpha = 2 \times \frac{4}{5} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} \end{cases}$

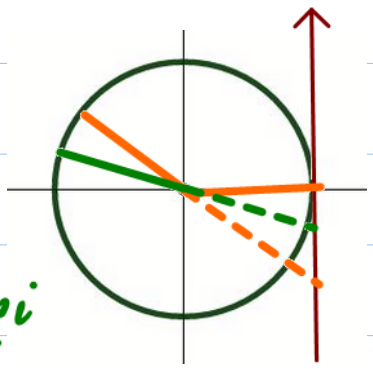
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{3} = AB$

$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times AB = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ گزینه ۲

نکته: در ربع‌های فرجی چهارگانه با افزایش زاویه، مقدار تانژانت هم افزایش می‌یابد.



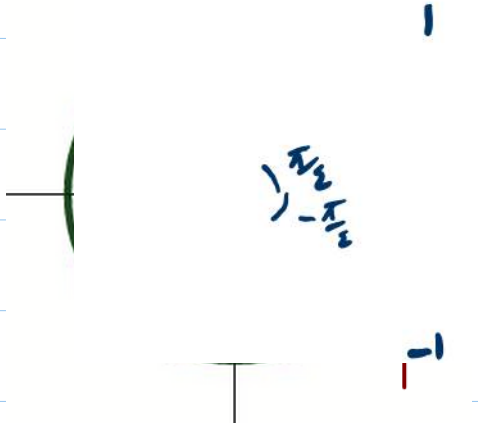
ناحیه اول



ناحیه دوم

برای نواحی سوم و چهارم به طور مشابه عمل می‌کنیم.

مثال: اگر $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ و $\tan x = \frac{2m-4}{5}$ باشد، مقدار m را بیابید.



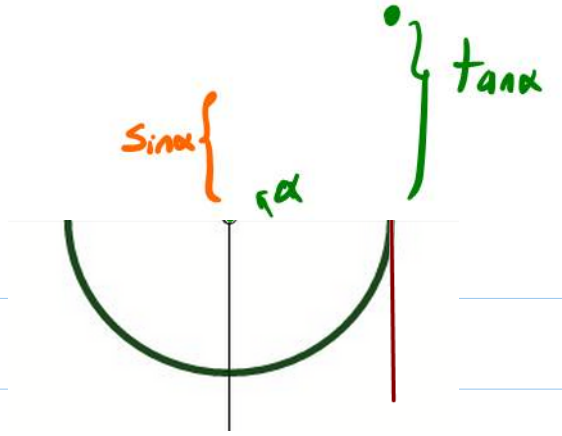
$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$-1 \leq \tan x \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq \frac{2m-4}{5} \leq 1 \quad \xrightarrow{\times 5} \quad -5 \leq 2m-4 \leq 5$$

$$\xrightarrow{+4} \quad -1 \leq 2m \leq 9 \quad \xrightarrow{\div 2} \quad -1 \leq m \leq 4.5$$

نکته: با استفاده از دایره مثلثاتی می‌توان گفت: $|\sin\alpha| < |\tan\alpha|$

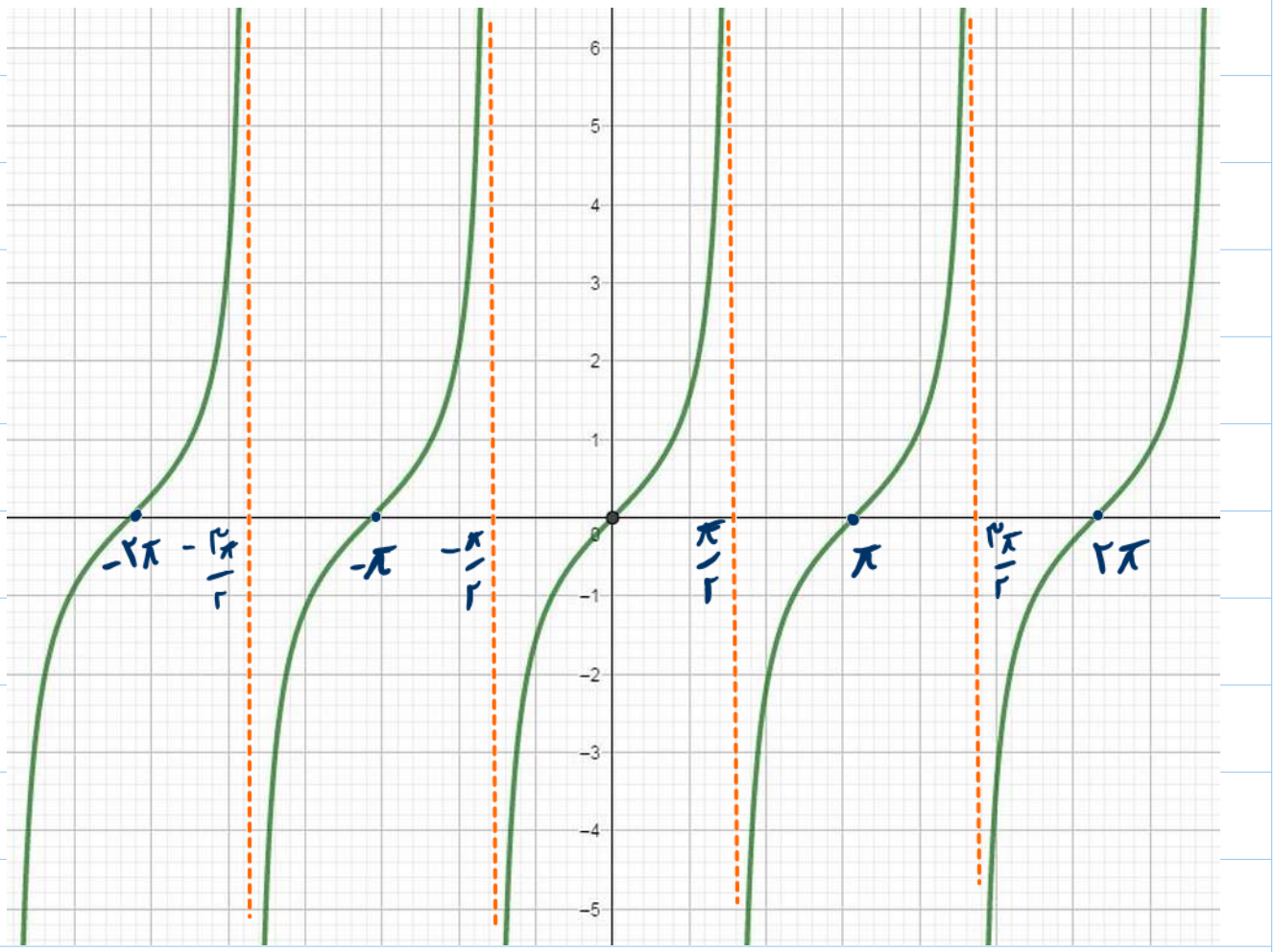


تابع تانژانت

$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$

اگر x عددی حقیقی باشد و $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$، تابعی که به هر x تانژانت آن را نسبت می‌دهد تابع تانژانت نامیده می‌شود.

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \tan x$ با در نظر گرفتن دایره مثلثاتی به نمودار زیر می‌رسیم:



پس درباره تابع $f(x)=\tan x$ می‌توان گفت :

۱- $D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

۲- $R_f = \mathbb{R}$

۳- تابع تانژانت، تابعی متناوب است و $T = \pi$

۴- تابع تانژانت یک‌به‌یک نیست ولی در بازه‌هایی که در آن تعریف می‌شود، یک‌به‌یک است.

مثلاً در بازه‌هایی که شامل $k\pi + \frac{\pi}{2}$ها نیستند، اکیداً صعودی است.

تذکر: دوره تناوب تابع $y = a\tan(bx+c)+d$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

مثال: دامنه تابع $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2})$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $x \neq k$ ۲) $x \neq 2k+1$ ۳) $x \neq 2k$ ۴) $\mathbb{Z}$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \neq k\pi$$

$$\times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq k\pi \times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq 2k$$

گزینه ۳

مثال: اگر $f(x)=\tan x-\frac{1}{\tan x}$، دوره تناوب تابع $\frac{1}{f}$ را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}$$

$$=-2\cot 2x=-\frac{2}{\tan 2x}$$

$$\frac{1}{f}=-\frac{1}{2}\tan 2x \Rightarrow T_{\frac{1}{f}}=\frac{\pi}{2}$$

مثال: تابع f با ضابطه $f(x)=\tan(\frac{\pi}{4}x)$ و دامنه $(2,a)$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

حداکثر مقدار a کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

باید طول تمام نقاط بر $\frac{\pi}{4}$ تقسیم یا در $\frac{4}{\pi}$ ضرب شود:

حداکثر مقدار برای a برابر

تابع در بازه $(2,a)$ اکیداً صعودی

باشد، 4 است. پس گزینه ۳ درست است.

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل دوم : مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان

جلسه سوم: صفحات ۴۲و۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

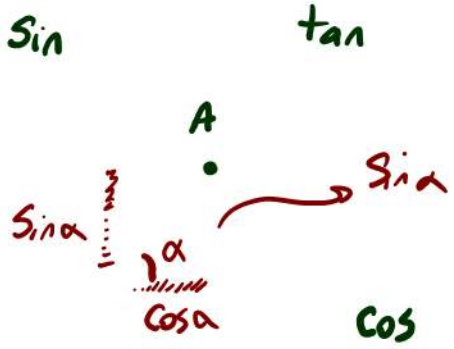
اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

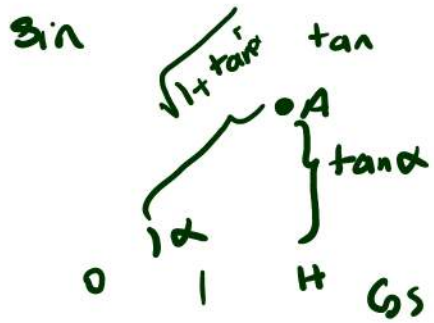
یادآوری روابط سال‌های گذشته :



۱) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \\ \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \end{cases}$

۲) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۳) $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \tan\alpha\cot\alpha = 1$



ΔOAH : $AO^2 = AH^2 + OH^2$

$AO^2 = \tan^2\alpha + 1$

$AO = \sqrt{1+\tan^2\alpha}$

$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

۴) $\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

✓ $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$

۵) ✓ $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cot^2\alpha} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\cot^2\alpha$

$\cos^2\alpha = \frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$

نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ رابطه مادر

مثال: ثابت کنید $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\tan\alpha \times \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

شکل دیگر $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ رابطه مادر

مثال : ثابت کنید:

الف) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

اثبات : $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

ب) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

اثبات : $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

پ) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

اثبات : $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} - \dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

جمع بندی :

$$\cos 2\theta = \begin{cases} \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ 2\cos^2\theta - 1 \\ 1 - 2\sin^2\theta \\ \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \end{cases}$$

۱ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{12}{13} \xrightarrow{\text{حاده } \alpha} \sin\alpha = \frac{12}{13}$$

الف) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = \frac{-119}{169}$

ب) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\times\frac{12}{13}\times\frac{5}{13} = \frac{120}{169}$

مثال: ثابت کنید:

الف) $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

اثبات: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \rightarrow 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$\rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

ب) $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$

اثبات: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \rightarrow 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$\rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \Rightarrow \sin^2 22{,}5 = \frac{1}{2}(1-\cos 45^\circ)$$

$$\Rightarrow \sin^2 22{,}5 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\rightarrow \sin 22{,}5 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \rightarrow \cos 22{,}5 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

مثال: ثابت کنید $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

اثبات: سمت چپ $= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$ *

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل دوم : مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

قسمت دوم: حل معادلات مثلثاتی

جلسه چهارم: صفحات ۴۳تا۴۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری :

۱) جدول نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف :

	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تن	0	تن	0
cot	تن	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تن	0	تن

۲) جدول علامت نسبت‌های مثلثاتی :

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

۳) نسبت‌های مثلثاتی زاویه $(-\alpha)$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\quad$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

۴) دو زاویه متمم: α, β متمم اند. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}=90^\circ \Rightarrow$

$\sin\alpha=\cos\beta$, $\sin\beta=\cos\alpha$

$\tan\alpha=\cot\beta$, $\tan\beta=\cot\alpha$

مثال: $30+60=90$

$\sin 30=\cos 60=\frac{1}{2}$

$\sin 60=\cos 30=\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵) نسبت‌های مثلثاتی $(k\pi\pm\alpha)$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

الف) اگر ضریب π عددی زوج باشد آن را از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می‌کنیم.

$\sin(2k\pi\pm\alpha)=\sin(\pm\alpha)$

$\cos(2k\pi\pm\alpha)=\cos(\pm\alpha)$

ب) اگر ضریب π عددی فرد باشد آن را از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می‌کنیم اما نسبت مثلثاتی را قرینه می‌کنیم.

$\sin((2k+1)\pi\pm\alpha)=-\sin(\pm\alpha)$

$\cos((2k+1)\pi\pm\alpha)=-\cos(\pm\alpha)$

ج) ضریب π چه زوج و چه فرد باشد آن را از کمان‌های $\tan$ و $\cot$ حذف می‌کنیم.

$\tan(k\pi\pm\alpha)=\tan(\pm\alpha)$

$\cot(k\pi\pm\alpha)=\cot(\pm\alpha)$

۶) نسبت های مثلثاتی $\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$

همیشه فرض می کنیم α حاده است و ناحیه ای که زاویه $\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ در آن است را مشخص می کنیم و علامت نسبت را تشخیص می دهیم. حال مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ را حذف کرده و اسم نسبت را به صورت زیر تغییر می دهیم.

$\sin \to \cos$ ، $\cos \to \sin$ ، $\tan \to \cot$ ، $\cot \to \tan$

$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \underbrace{\sin}_{\text{علامت}} \cos\alpha$

$\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \underbrace{\cos}_{\text{علامت}} \sin\alpha$

$\tan\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \underbrace{\tan}_{\text{علامت}} \cot\alpha$

$\cot\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \underbrace{\cot}_{\text{علامت}} \tan\alpha$

مثال: نسبت های مثلثاتی زیر را برحسب α بنویسید.

۱) $\sin(270\pi - \alpha) \overset{\text{فرد}}{=} -\sin(-\alpha) \overset{-\sin\alpha}{=} \sin\alpha$

۲) $\cos(33\pi + \alpha) \overset{\text{فرد}}{=} -\cos\alpha$

۳) $\cos(24\pi - \alpha) \overset{\text{زوج}}{=} \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

۴) $\sin\left(\frac{25\pi}{2} + \alpha\right) \overset{\text{مضرب فرد } \frac{\pi}{2}}{=} \sin\left(\frac{24\pi + \pi}{2} + \alpha\right) = \sin(12\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha)$ دوم

$= +\cos\alpha$

معادلات مثلثاتی

به معادلاتی که مجهول در کمان یا زاویه‌ی مثلثاتی قرار می‌گیرد، معادلات مثلثاتی می‌گوییم.

روش شهودی حل معادله $\sin x = a$:

$\alpha + \beta = \pi \xrightarrow{\text{مکمل}} \sin\alpha = \sin\beta$

روی محور $\sin$ مقدار a را مشخص و از این نقطه خطی بر محور $\sin$ عمود می‌کنیم تا دایره مثلثاتی را قطع کند. نقاط برخورد همان xها یا جواب‌ها مورد نظر است. البته توجه داشته باشید که فرمول عمومی x، جواب کلی معادله است.



نتیجه:

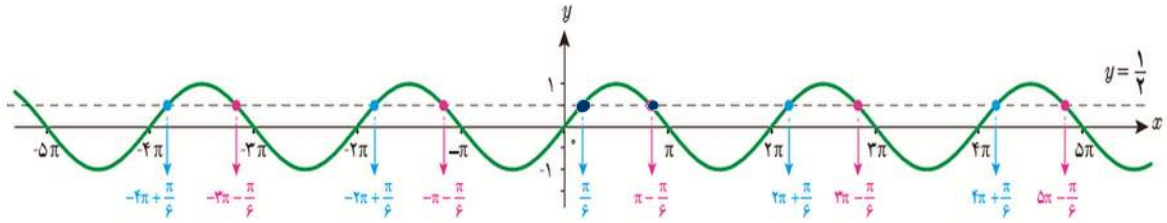
$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

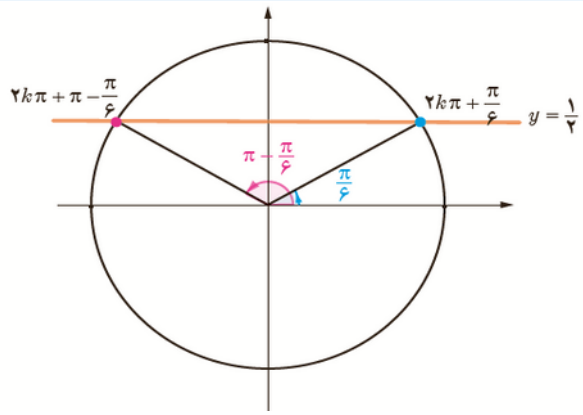
تعمیم ↝ $\sin\bigcirc = \sin\square \Rightarrow \begin{cases} \bigcirc = 2k\pi + \square \\ \bigcirc = 2k\pi + (\pi - \square) \end{cases}$

جای خالی

عبارت و

مثال: چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است مثال بزنید.





$$\sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$

ب) $۴\sin x + \sqrt{۸} = ۰$

الف) $۲\sin x = \sqrt{۳} \xrightarrow{\div ۲} \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳}$

$$\begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

ب) $۴\sin x = -\sqrt{۸} \xrightarrow{\div ۴} \sin x = -\frac{\sqrt{۸}}{۴} = -\frac{۲\sqrt{۲}}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{۴})$

$$\begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{۴}) = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

روش شهودی حل معادله $\cos x = a$:

$x = a$

روی محور cos مقدار a را انتخاب و از این نقطه

خطی بر محور cos عمود می‌کنیم تا دایره مثلثاتی

را قطع کند. نقطه برخورد‌ها x یا جواب‌ها در بازه خواسته‌شده.

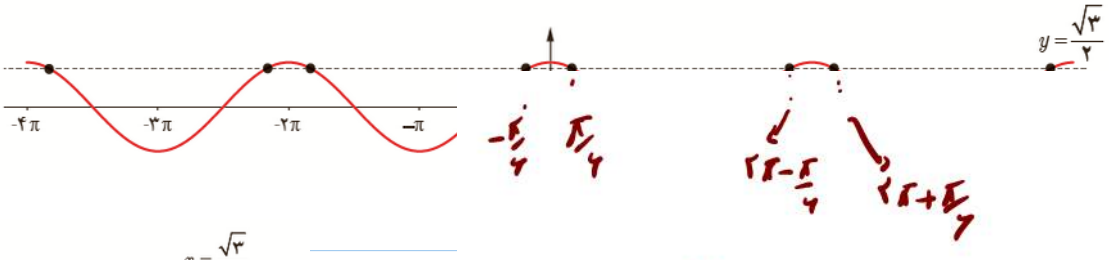
نتیجه:

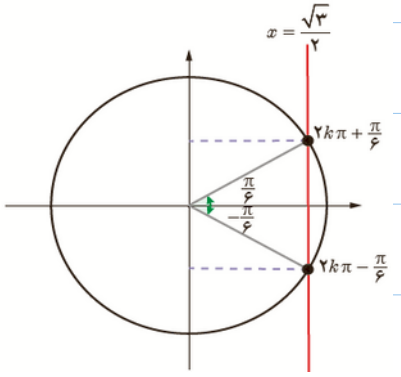
$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

تعمیم

$$\cos \bigcirc = \cos \square \Rightarrow \bigcirc = 2k\pi \pm \square$$

مثال: چند زاویه که مقدار کسینوس آن‌ها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است مثال بزنید.





$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (جواب عمومی (کلی))

مثال : جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

k	-1	0
x	$-2\pi \pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{3}$

مثال:

$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$

$\Delta = 81 - (4 \times 2 \times (-5)) = 81 + 40 = 121$

$\cos x = \frac{9 \pm 11}{4}$ $\begin{cases} \frac{9+11}{4} = 5 \times & -1 \le \cos x \le 1 \\ \frac{9-11}{4} = -\frac{1}{2} \checkmark \end{cases}$

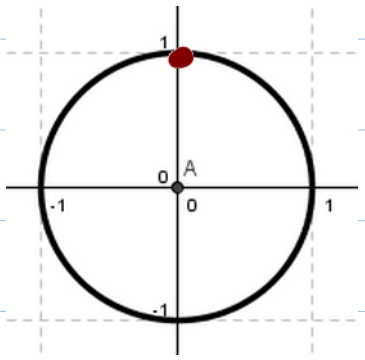
$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos(2\frac{\pi}{3})$



$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

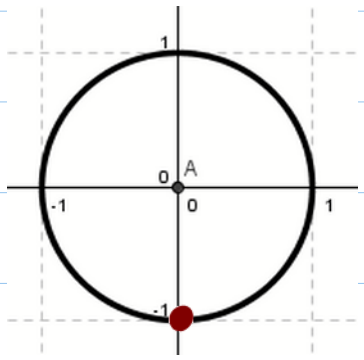
حالت‌های خاص:

$\sin x = 1$



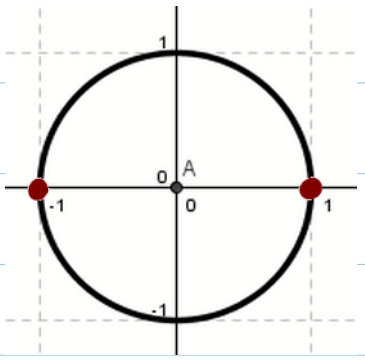
$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin x = -1$



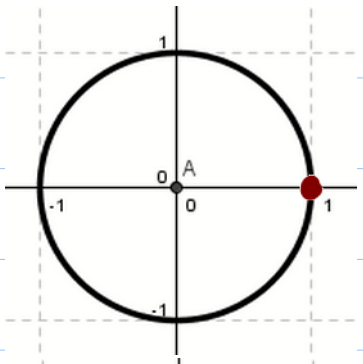
$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$\sin x = 0$



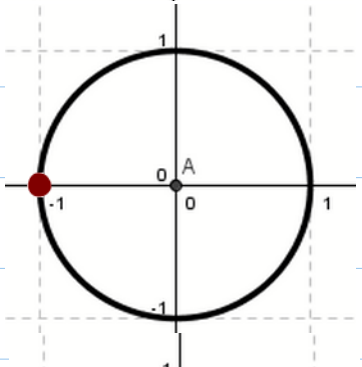
$x = k\pi$

$\cos x = 1$



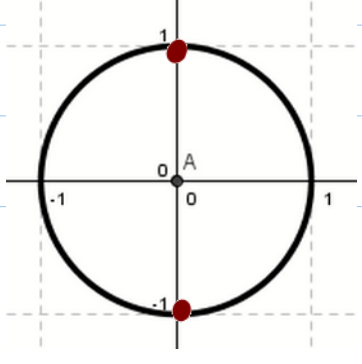
$x = 2k\pi$

$\cos x = -1$



$x = (2k+1)\pi$

$\cos x = 0$



$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۳ معادلات زیر را حل کنید.

لف

حالت خاص $\rightarrow 1=\sin 2x$

$2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} x=\frac{2k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$

$\rightarrow 2\cos^2 x-1-\cos x+1=0$

$2\cos^2 x-\cos x=0 \rightarrow \cos x(2\cos x-1)=0$ $\begin{cases}\cos x=0 \\ 2\cos x-1=0\end{cases}$

$\begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{2} \\ 2\cos x=1 \rightarrow \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\end{cases}$

پ) $\cos x=\cos 2x$

$2x=2k\pi\pm x$

$\begin{cases} 2x=2k\pi+x \rightarrow x=2k\pi \\ 2x=2k\pi-x \rightarrow 3x=2k\pi \rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$

$\rightarrow 1-2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

$-2\sin^2 x-3\sin x+2=0 \qquad \Delta=9-(4\times(-2)(2))=9+16=25$

$\sin x=\dfrac{3\pm 5}{-4}\begin{cases}\dfrac{8}{-4}=-2 & \times \quad -1\le \sin x\le 1\\ \dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\sin x=\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}\begin{cases}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\pi-\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$

$\rightarrow 1-\sin^2 x-\sin x-\dfrac{1}{4}=0$

$-\sin^2 x-\sin x+\dfrac{3}{4}=0 \rightarrow \Delta=(-1)^2-(4\times(-1)(\dfrac{3}{4}))$

$=1+3=4$

$\sin x=\dfrac{1\pm 2}{-2}\begin{cases}\dfrac{3}{-2} & \times \quad -1\le \sin x\le 1\\ \dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}\rightarrow \sin x=\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6} & \begin{cases}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\end{cases}\end{cases}$

ج) $\sin x-\cos 2x=0$

$\sin x-(1-2\sin^2 x)=0 \rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$\Delta=1-(4\times 2\times(-1))=1+8=9$

$\sin x=\dfrac{-1\pm 3}{4}\begin{cases}\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\rightarrow \sin x=\sin\dfrac{\pi}{6} & \begin{cases}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\end{cases}\\ -1\rightarrow x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

: حل

$$2\sin x = \sqrt{4} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \xrightarrow{\div 2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

: حل

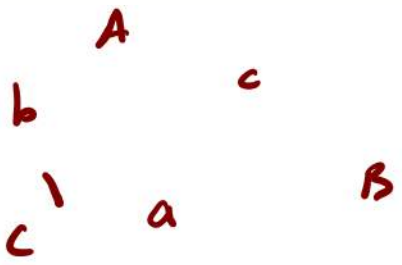
$$2\sin x \cos x = 2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sin 2x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{2\pi/3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

$S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin\hat{C}$



$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin\hat{C} \longrightarrow 3 = 6\sin\hat{C}$

$\sin\hat{C} = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} \hat{C} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{\pi}{6} \checkmark \\ \hat{C} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{5\pi}{6} \checkmark \end{cases}$

دو مثلث

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

پایه دوازدهم تجربی

فصل سوم: حد بی نهایت و حد در بی نهایت

درس اول: حد بی نهایت

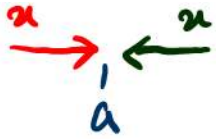
یادآوری مفهوم حد

جلسه اول: صفحات ۵۰ و۵۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

یادآوری :

۱) مفهوم میل کردن : اگر x به عدد a نزدیک و نزدیک‌تر شود ولی هیچ‌گاه برابر a نشود می‌گوییم x به a میل می‌کند و می‌نویسیم : $x \to a$

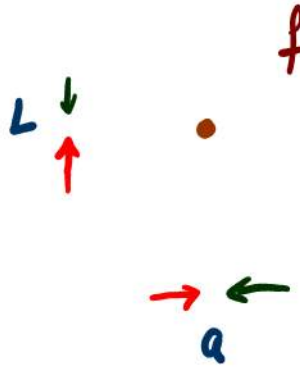


$x \to a^+$: هرگاه x از مقادیر بزرگ‌تر از a به a نزدیک شود . در این حالت می‌گوییم x از طرف راست به a میل می‌کند.

$x \to a^-$: هرگاه x از مقادیر کوچک‌تر از a به a نزدیک شود . در این حالت می‌گوییم x از طرف چپ به a میل می‌کند.

۲) مفهوم حد : وقتی می‌گوییم می‌خواهیم حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند را حساب کنیم یعنی می‌خواهیم ببینیم وقتی x به عدد a نزدیک می‌شود

مقدار تابع یا همان y به چه عددی نزدیک می‌شود.



نحوه نوشتن حد: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

وقتی می‌خوانیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند برابر L می‌شود.

۳) چند نکته:

الف) برای محاسبه حد تابع در نقطه a، تابع باید اطراف این نقطه تعریف شده باشد ولی لزومی ندارد در خود a تعریف شده باشد.

ب) هرگاه x از سمت راست به a میل کند و مقادیر تابع به L_1 نزدیک شوند می‌نویسیم:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$ و می‌خوانیم حد راست تابع f در a برابر L_1 است.

پ) هرگاه x از سمت چپ به a میل کند و مقادیر تابع به L_2 نزدیک شوند می‌نویسیم:

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$ و می‌خوانیم حد چپ تابع f در a برابر L_2 است.

ت) زمانی تابع f در a حد دارد که مقدار حد چپ و راست موجود و برابر باشند.

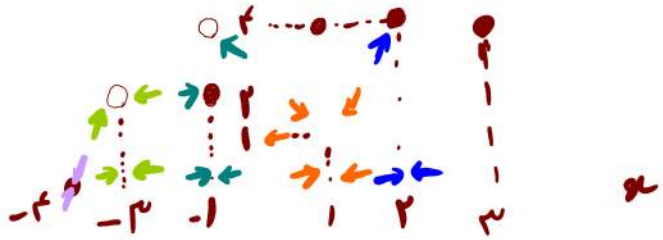
ث) به طوری که اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$. کلا درباره $f(a)$ یکی از حالت‌های زیر را داریم:

الف) $f(a)$ موجود نیست.

ب) $f(a)$ موجود است ولی با مقدار حد برابر نیست ($f(a)\neq L$)

پ) $f(a)$ موجود و برابر مقدار حد است ($f(a)=L$)

مثال: نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای خواسته شده را بیابید.



۱) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ ولی مقدار تابع ۲

۲) $\lim_{x\to -۳} f(x) = ۲$ مقدار تابع تعریف نشده

۳) $\lim_{x\to -1} f(x)$ حد ندارد
- $\lim_{x\to -1^-} f(x) = ۲$ ⇒ مقدار تابع
- $\lim_{x\to -1^+} f(x) = ۴$

۴) $\lim_{x\to ۲} f(x)$ حد ندارد
- $\lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۴$
- $\lim_{x\to ۲^+} f(x)$ وجود ندارد

۵) $\lim_{x\to -۴} f(x) = ۰$

۴) محاسبه حد :

برای محاسبه حد یک تابع وقتی $x \to a$ کافی است به جای x ، a بگذاریم.

اگر حاصل حد رشتی به دست آمد ، همان مقدار حد تابع است . در محاسبه تابع

به نکات زیر توجه کنید .

۱) در توابع چند ضابطه‌ای زمانی که محاسبه حد در نقاطی که ضابطه تابع عوض می‌شود

مدنظر باشد باید حد راست و چپ را از ضابطه‌های مربوط به آن محاسبه کنیم .

۲) در توابع رادیکالی با فرجه زوج اگر a در شرط عبارت زیر رادیکال باشد باید

حد چپ و راست را در a حساب کنیم .

۳) در توابع قدر مطلقی اگر a در شرط عبارت داخل قدر مطلق باشد در صورت لزوم (حاصلت مبهم)

با تعیین علامت و حذف قدر مطلق‌ها آن را به تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم.

۴) در توابع شامل جزء صحیح ، اگر عبارت درون جزء صحیح مقدار صحیح می‌شود ، مقدار جزء صحیح

را حساب می‌کنیم ولی اگر مقدار صحیح شد باید حد چپ و راست محاسبه شود.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-(x+3)^2}{\sin x+2\cos x} = \frac{\sqrt{4+0}-(0+3)^2}{\sin 0+2\cos 0} = \frac{2-9}{0+2\times 1} = \frac{-7}{2}$

ب) $\lim_{x\to 3} \sqrt{3x-9}$

$\lim_{x\to 3^+} \sqrt{3x-9} = 0$

$\lim_{x\to 3^-} \sqrt{3x-9}$ = حد ندارد

تعریف نشده ← حد چپ

x	3
$3x-9$	$-$ 0 $+$

پ) $\lim_{x\to 1} \begin{cases} x+3 & x<1 \\ x^2+2 & x\geq 1 \end{cases}$ = حد ندارد

$\lim_{x\to 1^+} (x^2+2) = 1^2+2 = 3$

$\lim_{x\to 1^-} (x+3) = 1+3 = 4$

ت) $\lim_{x\to 1} \frac{1+x[x]}{[x]+3}$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{1+x[x]}{[x]+3} = \frac{1+1\times 1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{1+x[x]}{[x]+3} = \frac{1+1\times 0}{0+3} = \frac{1}{3}$

حد ندارد

حد توابع کسری وقتی به صورت $\frac{0}{0}$ برمی‌خورد :

صفرها دو دسته‌اند : ۱ـ صفر مطلق (خود صفر)

۲ـ صفر نسبی یا حدی ($0^{\pm}$)

باتوجه به دو دسته بودن صفرها، پس ۴ نوع $\frac{0}{0}$ داریم :

نوع اول : $\frac{0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد .

نوع دوم : $\frac{0^{\pm}}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

نوع سوم : $\frac{0}{0^{\pm}}$ صورت صفر مطلق و مخرج غیرصفر (صفر حدی) پس حد کسر صفر می‌شود.

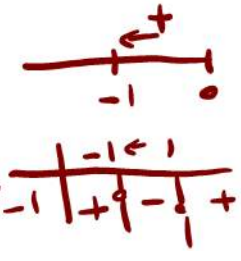
نوع چهارم : $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$ به این حالت، حالت مبهم می‌گوییم و باید رفع ابهام شود .

مثال : حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{[x]^2-4}{[x]-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ حد ندارد

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{[x]-1} = \frac{1^+-1}{1-1} = \frac{0^+}{0}$ حد ندارد

پ) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{[x]+1}{x^2-1} = \frac{-1+1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$ حد دارد



چگونه رفع ابهام $\frac{0}{0}$ را برای هم بیاموزیم:

چون $x \to a$ صورت و مخرج هر دو صفر شده اند پس هم صورت و هم مخرج

عامل $(x-a)$ را دارا هستند. به $(x-a)$ عامل ابهام یا صفر کننده می گوییم.

الف) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ وقتی صورت و مخرج هر دو چند جمله ای باشند.

با استفاده از روش های تجزیه (فاکتورگیری و اتحادها) عامل ابهام را از صورت و مخرج

ایجاد و با یکدیگر حذف می کنیم تا حد قابل محاسبه باشد.

تبصره: هرگاه نتوانیم با اتحادها یا فاکتورگیری عامل ابهام را ایجاد کنیم، چاره ای

جز تقسیم آن عبارت بر عامل ابهام نداریم. در این صورت به جای آن عبارت

حاصل ضرب $(x-a)$ (طبق الگوی مستوم کلیه) در خارج قسمت را می نویسیم.

یادآوری و تکمیل:

رابطه تقسیم $\frac{P}{R} \left| \frac{B}{Q} \right.$ $\qquad P = BQ + R$

هرگاه R صفر شده می گوییم P بر B بخش پذیر است.

قضیه : در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه : اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

$f(x) \mid x-a$
$R \quad\quad Q$

$f(x)=(x-a)Q+R$ **اثبات :**

$\rightarrow x=a \rightarrow f(a)=(a-a)Q+R \rightarrow f(a)=R$

کار در کلاس

۱ در چندجمله‌ای $f(x)=3x^2-5x-2$، مقدار $f(2)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$f(2)=3\times 2^2-5\times 2-2=12-10-2=0$

$f(x)$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است.

تقسیم چندجمله‌ای $3x^2-5x-2$ بر $x-2$:

$3x^2-5x-2$ | $x-2$
$-(3x^2-6x)$ | $3x+1$
$x-2$
$-(x-2)$
0

$\frac{3x^2}{x}=3x$

$\frac{x}{x}=1$

باقی‌مانده تقسیم

۲ چندجمله‌ای $g(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید :

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

الف)

$x+1=0 \rightarrow x=-1 \longrightarrow g(-1)=R$

$g(-1)= 2\times(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -2+1+1=0$

بله زیرا باقی‌مانده صفر شد.

ب)

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \hline -(2x^3+2x^2) & 2x^2-x+1 \\ \hline -x^2+1 & \\ -(-x^2-x) & \\ \hline x+1 & \\ -(x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\frac{2x^3}{x} = 2x^2$

$\frac{-x^2}{x} = -x$

$\frac{x}{x} = 1$

پ)

$2x^3+x^2+1 = (x+1)(2x^2-x+1)$

تجزیه

۳ نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+5x^2-3x-10$ بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر است.

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$f(-2)=R \Rightarrow f(-2)=2(-2)^3+5(-2)^2-3(-2)-10$

$=-16+20+6-10=-26+26=0$

کار در کلاس

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+3x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x^3-13x^2+24x-9}$

الف) $\dfrac{9-9}{9-9}=\dfrac{0}{0}$

$x-(-3)=x+3$

عامل ابهام

$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)}=\dfrac{-3-3}{-3}=\dfrac{-6}{-3}=2$

$x\to -3$

ب) $\dfrac{4\times\frac{1}{4}-4\times\frac{1}{2}+1}{2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1-2+1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}=\dfrac{0}{0}$

عامل ابهام $(x-\frac{1}{2})$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$$

$$x \to \frac{1}{2}$$

$4x^2 - 4x + 1$ ÷ $x - \frac{1}{2}$ = $2x - 1$

$-(4x^2 - 2x)$

$-2x + 1$

$-(-2x + 1)$

0

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x - \frac{1}{2})(4x - 2)}{(x - \frac{1}{2})(2x + 2)}$$

$2x^2 + x - 1$ ÷ $x - \frac{1}{2}$ = $2x + 2$

$-(2x^2 - x)$

$2x - 1$

$-(2x - 1)$

0

$$= \frac{4 \times \frac{1}{2} - 2}{2 \times \frac{1}{2} + 2} = \frac{2 - 2}{1 + 2} = \frac{0}{3} = 0$$

ب) $$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{6x^3 + 2x^2 - 12x + 6} = \frac{0}{0}$$

$x \to \frac{1}{2}$

صورت $4x^2 - 1 = 4(x^2 - \frac{1}{4}) = 4(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$

مخرج $6x^3 + 2x^2 - 12x + 6$ ÷ $x - \frac{1}{2}$ = $6x^2 + 8x - 12$

$-(6x^3 - 3x^2)$

$5x^2 - 12x + 6$

$-(5x^2 - 2x)$

$-10x + 6$

$-(-10x + 5)$

1

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})(2x^2-12x+18)} = \frac{4(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}{2\times\frac{1}{4}-12\times\frac{1}{2}+18}$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{2}-6+18} = \frac{4}{\frac{25}{2}}$$

$$= \frac{8}{25}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل سوم: حد بی نهایت و حد در بی نهایت

درس اول: حد بی نهایت

رفع ابهام صفرصفرم در توابع

کسری رادیکالی

جلسه دوم: صفحات ۵۲ و ۵۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

ب) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در حالتی صورت یا مخرج و یا هر دو شامل عبارات رادیکالی هستند:

در این حالت از مفهوم گویا کردن و اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر استفاده می‌کنیم. به این صورت که با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارت رادیکالی (بسته به مرحله‌ها ۲) یا عبارت چاق عبارت رادیکالی (بسته به مرحله‌ها ۳)، عامل ابهام را ایجاد می‌کنیم.

کار در کلاس

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

عامل ابهام $(x+1)$ $= \frac{0}{0}$

یادآوری اتحاد مزدوج $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

مزدوج همدیگرند

$x+\sqrt{2x+3}$ مزدوج $x-\sqrt{2x+3}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)\times(x-\sqrt{2x+3})}{(x+\sqrt{2x+3})\times(x-\sqrt{2x+3})} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2-(\sqrt{2x+3})^2}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2-(2x+3)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2-2x-3}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{(x+1)(x-3)} = \frac{(-1-1)(-1-\sqrt{2(-1)+3})}{-1-3}$$

$$= \frac{-2\times(-1-1)}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$\frac{0}{0} =$ حالت مبهم $(x-1)$

$$(x-\sqrt{x}) \xrightarrow{\text{مزدوج}} (x+\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-\sqrt{x})\times(x+\sqrt{x})}{(x-1)(x+2)x(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{(1+2)(1+1)} = \frac{1}{6}$$

$\frac{0}{0} =$ حالت مبهم $(x+1)$

یادآوری اتحاد چاق و لاغر:

عبارت چاق — عبارت لاغر

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

نحوه ساختن عبارت چاق از روی عبارت لاغر :

۱ـ جمله اول چاق : مربع (توان دوم) جمله اول لاغر

۲ـ جمله دوم چاق : حاصل ضرب جمله اول در دوم لاغر با علامت قرینه

۳ـ جمله سوم چاق : مربع جمله دوم لاغر

لاغر — چاق

$$\lim_{x \to -1} \frac{(\sqrt[3]{x}+1) \times (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{(x+1)(x+2) \times (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 + 1^3}{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)}{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{1}{(-1+2)(1+1+1)}$$

$$= \frac{1}{3}$$

مثال: حدود زیر را بیابید :

الف) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}$

ب) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

پ) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

ت) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$

ث) $\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$

ج) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

چ) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-6x+5}$

ح) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$

الف ـ ب ـ ث و چ بعنوان تمرین

(پ)

عامل (ها) م : $(x-\frac{1}{2})$

تجزیه صورت : $8(x^3-\frac{1}{8})=8(x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$ ، $(\frac{1}{2})^3$

تجزیه مخرج : $(x-\frac{1}{2})(2x-2)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-5x+1 & x-\frac{1}{2} \\ -(2x^2-x) & 2x-2 \\ \hline -4x+1 & \\ -(-2x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8(x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{(x-\frac{1}{2})(2x-2)}=\frac{8(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})}{1-2}=\frac{8\times\frac{3}{4}}{-1}$$

$$=-6$$

ت) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$

تجزیه با $(x-1)$

صورت: $(x-1)(x^2+x+1)$

مخرج: $(x-1)(x^2+1)$

$x^3-x^2+x-1 \mid x-1$

$-(x^3-x^2)$

$x-1$

$-(x-1)$

0

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

ج) $\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

تجزیه با $(x-1)$

مزدوج مخرج

مزدوج صورت

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-\sqrt{x})\times(x+\sqrt{x})\times(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\times(x+\sqrt{x})\times(\sqrt{x}+1)}$$

ساده

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{1(1+1)}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

ج) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$

حل المرفوع : x

مزدوج المقام — مزدوج البسط

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{2x+1}-1)\times(\sqrt{2x+1}+1)\times(\sqrt{3x+4}+2)}{(\sqrt{3x+4}-2)\times(\sqrt{2x+1}+1)\times(\sqrt{3x+4}+2)}$$

ضرب

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(2x+1-1)(\sqrt{3x+4}+2)}{(3x+4-4)(\sqrt{2x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(\sqrt{3x+4}+2)}{3x(\sqrt{2x+1}+1)}$$

$$= \frac{2(2+2)}{3(1+1)} = \frac{4}{3}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

درس اول: حد بی‌نهایت

تعریف حد بی‌نهایت

جلسه سوم: صفحات ۵۴ تا ۵۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تعریف همسایگی: اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوییم.



(a,b) یک همسایگی x_0

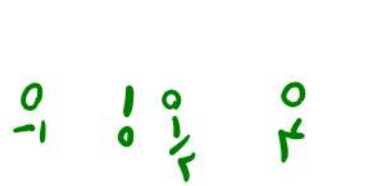
$(1,7)$ یک همسایگی کوچک ۳ است: مانند



تعریف همسایگی محذوف: اگر x_0 را از همسایگی بازش خارج کنیم، همسایگی محذوف x_0 به دست می‌آید. یعنی: $(a,b)-\{x_0\}$

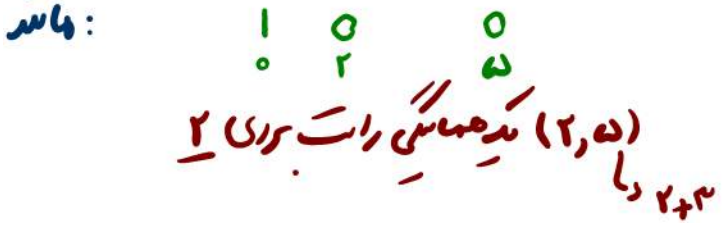


$\frac{1}{2}$ همسایگی محذوف $(-1,4)-\{\frac{1}{2}\}$ مانند:



تعریف همسایگی راست و چپ: اگر x_0 عددی حقیقی و مثبت باشد بازه (x_0, x_0+2) را یک همسایگی راست x_0 و بازه (x_0-2, x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

مانند:



$(2,5)$ یک همسایگی راست برای ۲

$(0,2)$ یک همسایگی چپ برای ۲

مثال: اگر بازه $(a-3, 2a+1)$ همسایگی صفر یک باشد، حدود a را بیابید.

$$a-3 < 1 < 2a+1$$

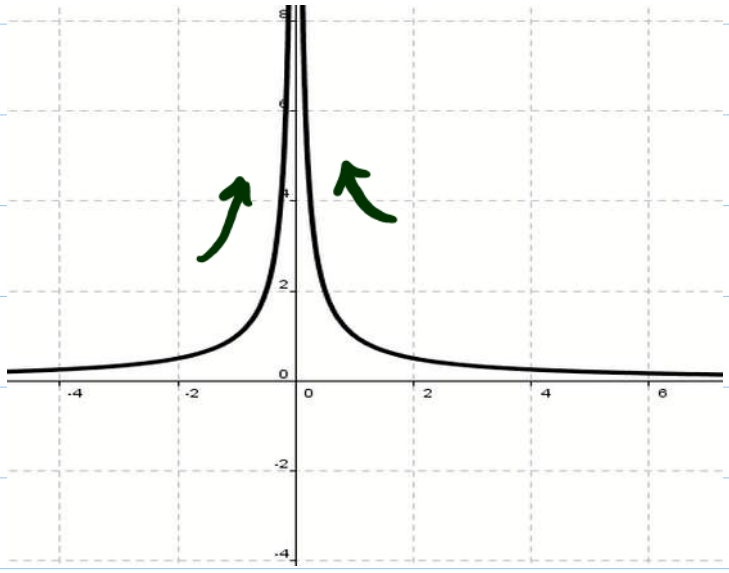
$$\begin{cases} a-3<1 \rightarrow a<4 \\ 2a+1>1 \rightarrow 2a>0 \rightarrow a>0 \end{cases}$$

$$\cap \rightarrow 0<a<4$$

می‌خواهیم حد تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ را در $x=0$ بررسی کنیم. تابع در $x=0$ تعریف نمی‌شود ولی

در یک همسایگی محذوف 0 وجود دارد.

x	-0.5	-0.1	-0.01	$-0.001 \rightarrow 0 \leftarrow 0.001$	0.01	0.1	0.5
$y=f(x)$	2	100	1000	$10000 \quad +\infty \quad +\infty \quad 10000$	1000	100	2



تعریف: فرض کنید f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f به ازای xهایی که از هر دو طرف به a نزدیک شوند، به طوری که مقادیر متغیر x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشند می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

در این صورت می‌گوییم تابع f در a حد نامتناهی (مثبت بی‌نهایت) دارد

تذکر: اگر با شرایط تعریف بالا:

۱- مقادیر تابع f به ازای xها کاهش یابد، می‌نویسیم: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

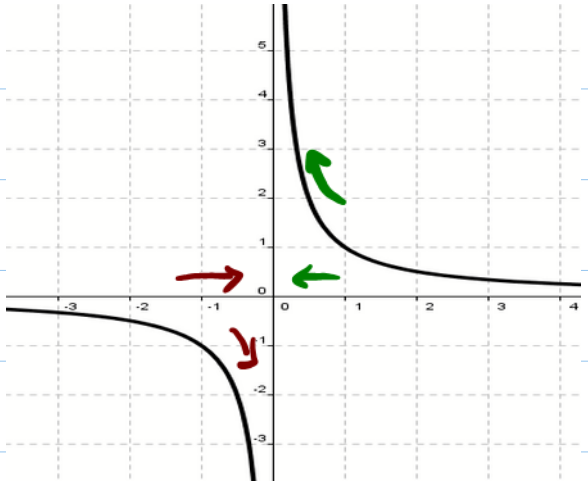
۲- f در یک همسایگی راست نقطه a تعریف شده باشد و مقادیر تابع کاهش یا افزایش یابد

به ترتیب می‌نویسیم: $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

۳- f در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده باشد و مقادیر تابع کاهش یا افزایش یابد

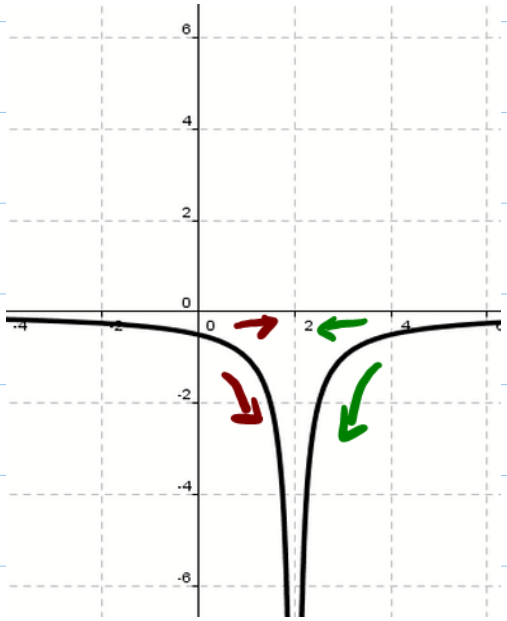
به ترتیب می‌نویسیم: $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

: مثال



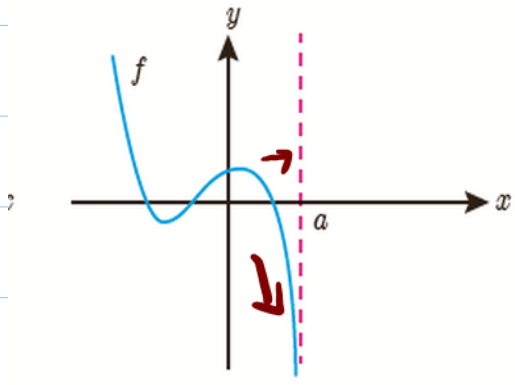
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

محاسبه حدی نهایت :

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ ، $\lim_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه a حد نامتناهی یا حدی نهایت دارد و علامت بی نهایت با توجه به علامت L و علامت صفر حدی تابع g در یک همسایگی محذوف a تعیین می شود. این نکته برای حد چپ و حد راست هم درست است.

پس : $\frac{\text{عدد}}{\text{۰ حدی}}=\infty$ (در حدی نهایت ها به بهت یک حد را میل می کند و جواب حدی نهایت می شود.)

نکته : برای تشخیص علامت صفر حدی با توجه به ضابطه تابع معرف از جدول گذاری مقادیر نزدیک a یا جدول تعیین علامت و در صورت اینکه تابع مثلثاتی باشد از دایره مثلثاتی استفاده می کنیم. همچنین در صورتی که حد چپ و راست در علامت صفر متفاوت باشد باید هر یک را جداگانه بررسی کرد.

کار در کلاس

۱ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{x-5}$

$=\frac{10}{5^--5}=\frac{10}{0^-}=-\infty$

$5^-\Rightarrow 4,9$

ب) $\lim_{x\to 5^+}\frac{2x}{x-5}$

$=\frac{10}{5^+-5}=\frac{10}{0^+}=+\infty$

$5^+\Rightarrow 5,1$

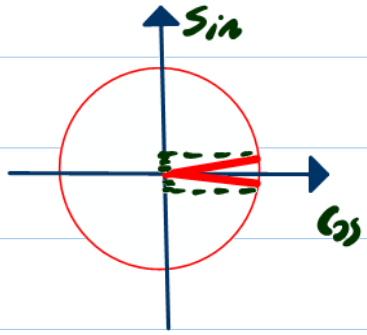
x	$\to 5\leftarrow$
$x-5$	$-$ ۰ $+$

پ) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{(0^\pm)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ت) $\lim_{x\to 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|0^\pm|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

ث) $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{-1}{|0^\pm|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

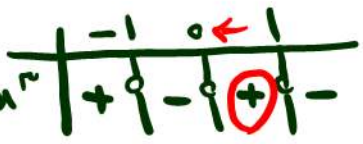
ج) $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{(0^\pm)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$



مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x-x^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$x(1-x^2)$ یا $x-x^3$



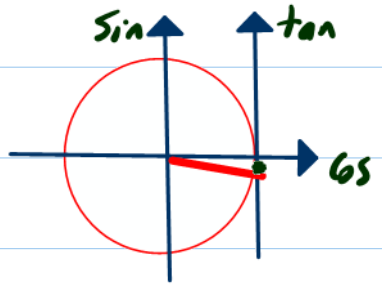
۲) $\lim_{x\to 2^-} \frac{2x-1}{(x-2)^3} = \frac{2\times 2-1}{(0^-)^3} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

$1,9$

Sin

+ - - - Cos

۳) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{1+1}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$



۴) $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x - 2}{\tan x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

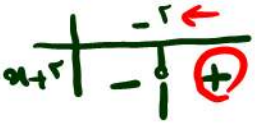
۵) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x} = \frac{\cos 2\frac{\pi}{2} - 1}{0} = \frac{\cos \pi - 1}{0} = \frac{-1-1}{0} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

sin

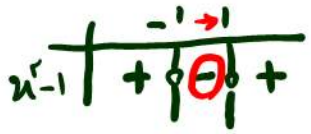
cos

۶) $\lim_{x \to -2^+} \frac{x+1}{x+2} = \frac{-2+1}{-2^+ +2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$-2^+ \to -1,9$



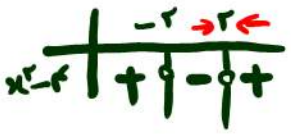
۷) $\lim_{x \to 1^-} \frac{[x]-1}{x^2-1} = \frac{0-1}{(1^-)^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$



۸) $\lim_{x \to 2} \frac{-[x]-1}{x^2-4}$

$x \to 2^+ : \frac{-2-1}{0^+} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

$x \to 2^- : \frac{-1-1}{0^-} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

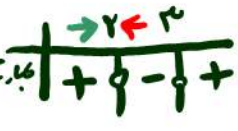


۹) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

۱۰) $\lim_{x \to 2} \frac{-4}{x^2-5x+6} = \frac{-4}{0}$

$x \to 2^+ : \frac{-4}{0^-} = +\infty$

$x \to 2^- : \frac{-4}{0^+} = -\infty$



11) $$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{0}{0}$$

عامل ابهام $(x-1)$

روش هورنر: برای تقسیم درجه n بر درجه یک

$x^3-x^2-x+1 \;\big|\; x-1$ $x-1=0$, $x=1$

ریشه مقسوم علیه ← 1	1	-1	-1	1
سه لفظ کلیدی: ضرب ـ جمع	1	$1\times1-1=0$	$1\times0-1=-1$	$1\times(-1)+1=0$ → باقیمانده

درجه اش یک واحد کمتر از مقسوم ← خارج قسمت: $1x^2+0x-1 = x^2-1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{1-2}{0} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

(x^2-1 ← $0/9$)

مثال: اگر $\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، a و b را بیابید.

$$\frac{\overset{\text{منفی}}{2-3}}{0^+} = -\infty$$

۲ ریشه مضاعف مخرج است پس:

$$(x-2)^2 = x^2+ax+b$$

$$x^2-4x+4 = x^2+ax+b \longrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=4 \end{cases}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

درس دوم: حد در بی‌نهایت

جلسه چهارم: صفحات ۵۸ تا ۶۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

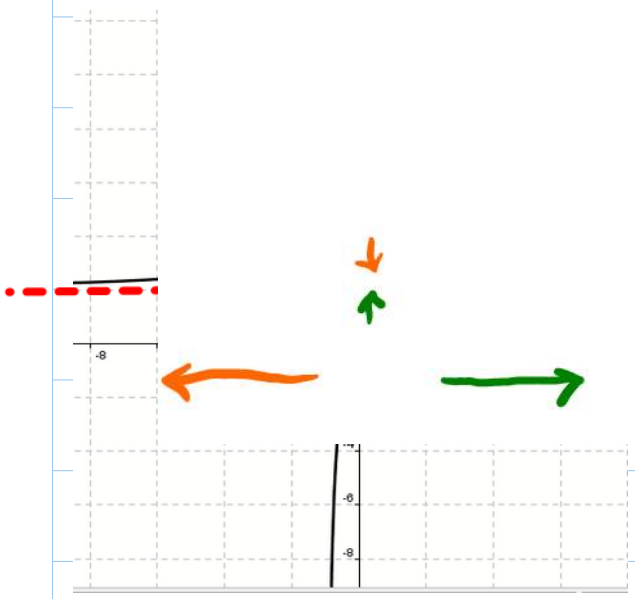
اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

حد در بی‌نهایت :



می‌خواهیم رفتار تابع $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ را به ازای برخی مقادیر مثبت و منفی x در جدول زیر بررسی کنیم.

x	$-\infty \leftarrow -1000$	-1000	-100	-10	10	100	1000	$10000 \rightarrow +\infty$
$f(x)$	$2 \leftarrow 2{,}0002$	$2{,}0002$	$2{,}002$	$2{,}2$	$1{,}81$	$1{,}98$	$1{,}998$	$1{,}999 \rightarrow 2$

تعریف : فرض کنید تابع f روی بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد و مقادیر تابع f به هر اندازه که بخواهیم به عدد حقیقی L نزدیک شوند به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شده باشند در این صورت می‌نویسیم : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$.

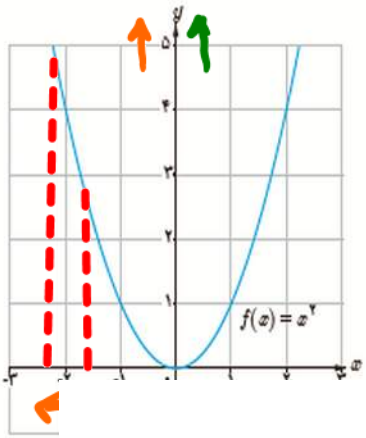
تذکر : اگر در تعریف بالا، بازه $(-\infty,a)$ و مقادیر متغیر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شوند می‌نویسیم : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$.

نکته : در حد در بی‌نهایت x به سمت مثبت یا منفی بی‌نهایت میل می‌کند و جواب حد یک عدد است.

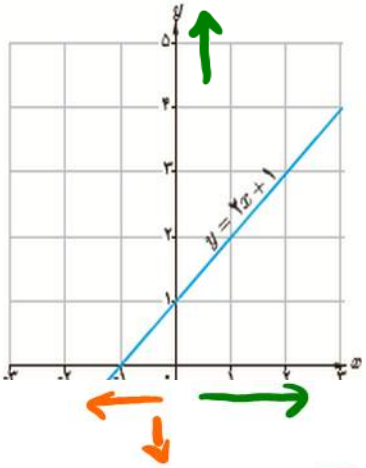
نکته: در برخی توابع، وقتی x به سمت بی نهایت میل می‌کند، مقدار تابع یعنی $f(x)$ هم به هر اندازه دلخواه بزرگ یا کوچک می‌شود، یعنی: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. به این حالت حد نامتناهی در بی نهایت می‌گوییم.

کار در کلاس

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.

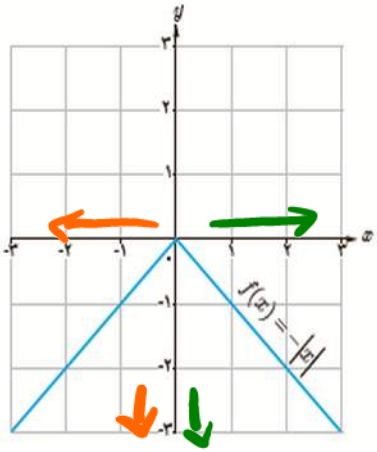


ف



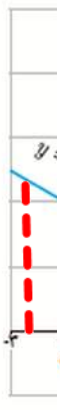
$-\infty$

$+\infty$



پ) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



ت

$+\infty$

$-\infty$

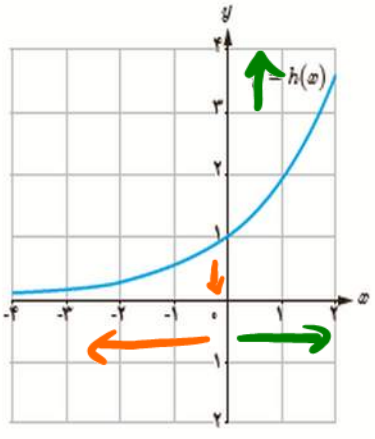
$x \to +\infty$ ۲



$+\infty$

۲

$x \to +\infty$



ج) $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

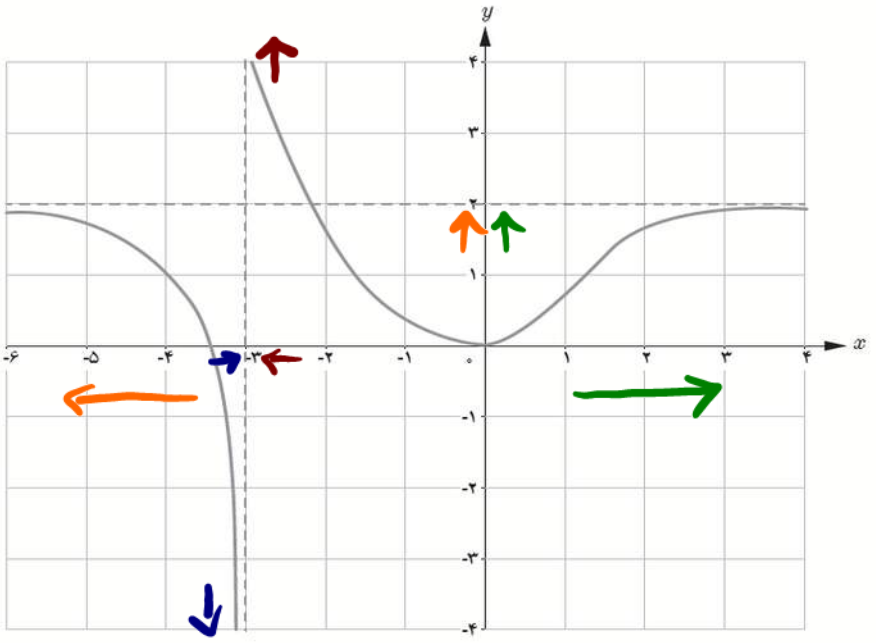
مثال: با توجه به نمودار توابع داده شده حدود خواسته شده را بیابید.

$\lim_{x \to (-۳)^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to (-۳)^-} f(x) = -\infty$

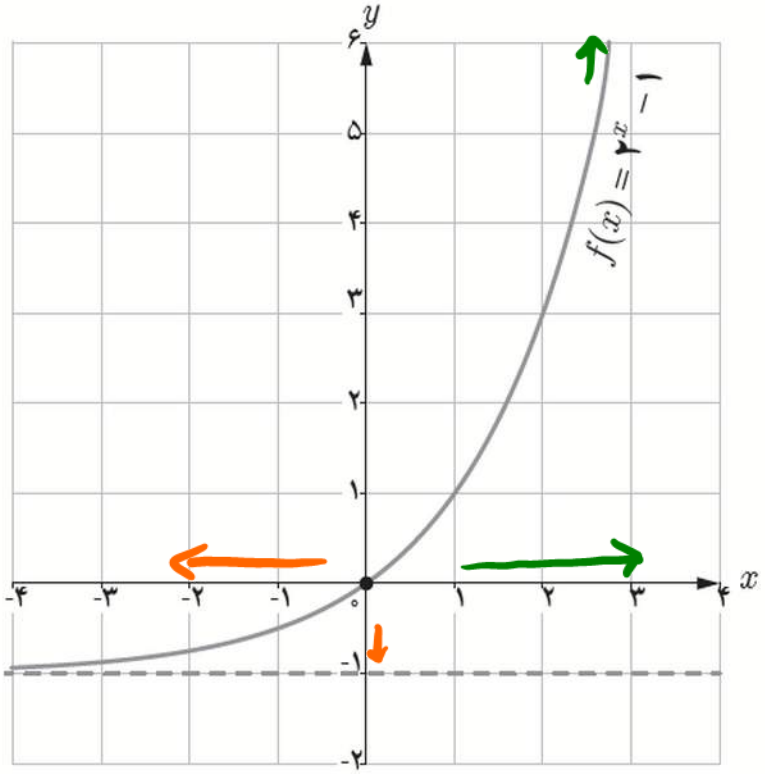
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ۲$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ۲$



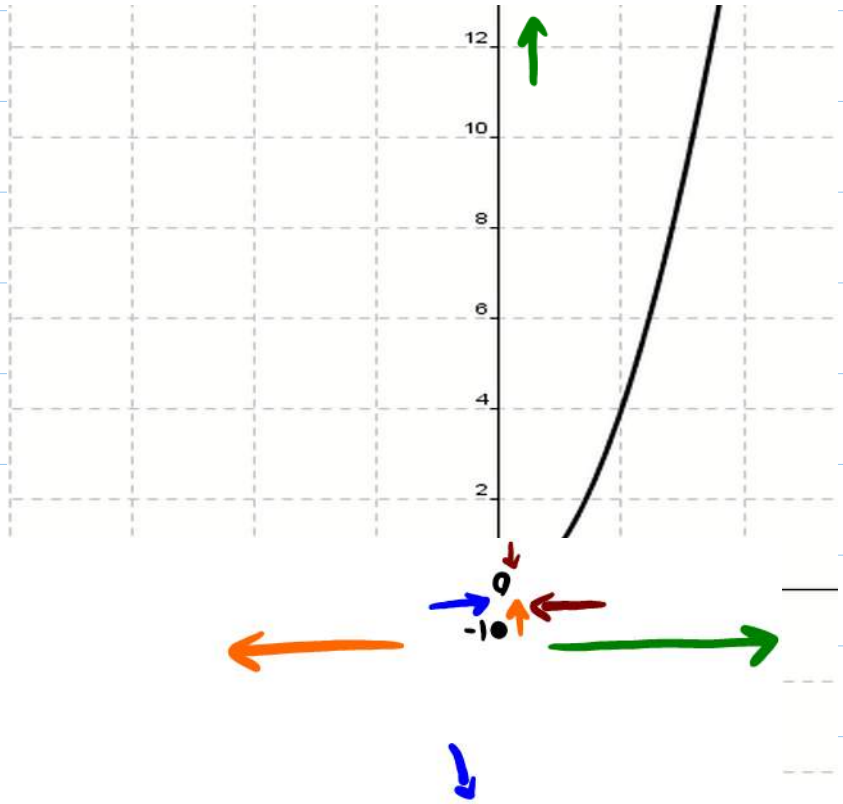
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -۱$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بیابید.

$$g(x)=\begin{cases} x^{2} & x>0 \\ -1 & x=0 \\ \frac{1}{x} & x<0 \end{cases} \quad : \lim_{x\to 0^{+}} g(x)\ ,\ \lim_{x\to 0^{-}} g(x)\ ,\ \lim_{x\to -\infty} g(x)\ ,\ \lim_{x\to +\infty} g(x)$$



$\lim_{x\to 0^{+}} g(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^{-}} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$

محاسبه حد در بی نهایت از روی ضابطه :

۱۱ از قاعده های زیر، بعد از جایگذاری $+\infty$ یا $-\infty$ به جای x، در محاسبه حد در بی نهایت ها استفاده می کنیم. $(a \in \mathbb{R} - \{0\})$

۱) $a \times \infty = \infty$

۲) $a + \infty = \infty$

* ۳) $\frac{a}{\infty} = 0$

۴) $\frac{\infty}{a} = \infty$

۵) $(\infty)^a = \infty \quad (a \in \mathbb{N})$

۶) $+\infty + \infty = +\infty$

۷) $-\infty - \infty = -\infty$

۸) $\infty - \infty$: حالت مبهم

۹) $\infty \times \infty = \infty$

۱۰) $\frac{\infty}{\infty}$: حالت مبهم

۱۱) $\sqrt{+\infty} = +\infty$

۱۳) $a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$ $\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$ $\rightarrow 2^{+\infty} = +\infty$

۱۴) $a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$ $\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$ $\rightarrow 3^{-\infty} = \left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty} = 0$

۲) در محاسبه حد در بی نهایت چندجمله‌ای های درجه n، از جمله‌ای که توان متغیر تا کمترین است فاکتور می‌گیریم.

۳) برای محاسبه حد در بی نهایت توابع گویا که صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند، ابتدا از نکته ۲ استفاده می‌کنیم و از درجات کمتر صورت فاکتور می‌گیریم. سه حالت رخ می‌دهد:

الف) درجه صورت از مخرج بیشتر است. در این حالت حد نامتناهی می‌شود یعنی $+\infty$ یا $-\infty$.

ب) درجه صورت و مخرج برابر هستند. در این حالت با تقسیم ضرایب متغیر، مقدار حد محاسبه می‌شود.

ج) درجه مخرج از صورت بیشتر است. در این حالت مقدار حد صفر می‌شود.

۴) هرگاه در صورت یا مخرج عبارت رادیکالی داشتیم، از درجات کوچکتر از درجه عبارت زیر رادیکال صرف‌نظر می‌کنیم و در صورت امکان عبارت را توان را از زیر رادیکال خارج می‌کنیم.

کار در کلاس

۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-1}$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{1-5t^2}{t^2+3t}$ پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2-3x}$

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{-5t^2}{t^2}=-5$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{-3x}=0$ یا $\frac{1}{-\infty}=0$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد.

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{-x+2} = -1$

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{100x}{x+4} = 100$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-5x+4}{7x^3-11x^2-6x}$ ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+4}{x^3+x-8}$ پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{7x^3} = \frac{2}{7}$

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{x^3} = 0 \quad \frac{5}{-\infty} = 0$

پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7}{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} -2x^4 = -2\times(+\infty) = -\infty$

مثال:

۱) $= \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3}{x^3} = 5$

۲) $= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

۳) $= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{2x^3} = -\frac{1}{2}$

۴) $\lim_{x\to+\infty}$ (۳ ...

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x^۳}{x^۳} = ۳$

۵) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ...

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳x^۲}}{۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳}|x|}{۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳}x}{۲x}$ ($x \to +$)

$= \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۶) $\lim_{x\to+\infty}$ $-$ ...

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = ۱$

۷) $\lim_{x\to+\infty} \frac{۶}{۵}$ ...

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x^۲}{۵x^۲} = \frac{۲}{۵}$

۸) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲+\sqrt{x^۴+۳x+۱}}{۵x^۲}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲+\sqrt{x^۴}}{۵x^۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲+x^۲}{۵x^۲}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x^۲}{۵x^۲} = \frac{۲}{۵}$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم : مشتق

درس اول : آشنایی با مفهوم مشتق

جلسه اول: صفحات ۶۵ تا ۷۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

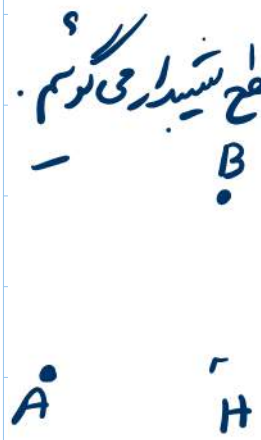
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

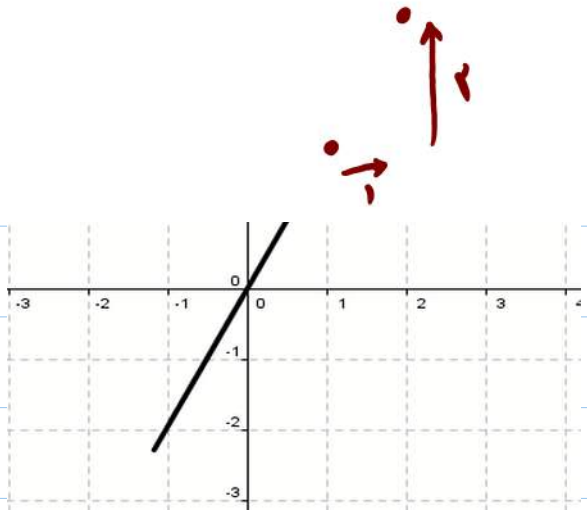
آنچه تا به حال درباره شیب دانسته‌ایم :

مفهوم فیزیکی شیب: نسبت افزایش ارتفاع به مسافت افقی طی شده را شیب سطح شیبدار می‌گوییم.



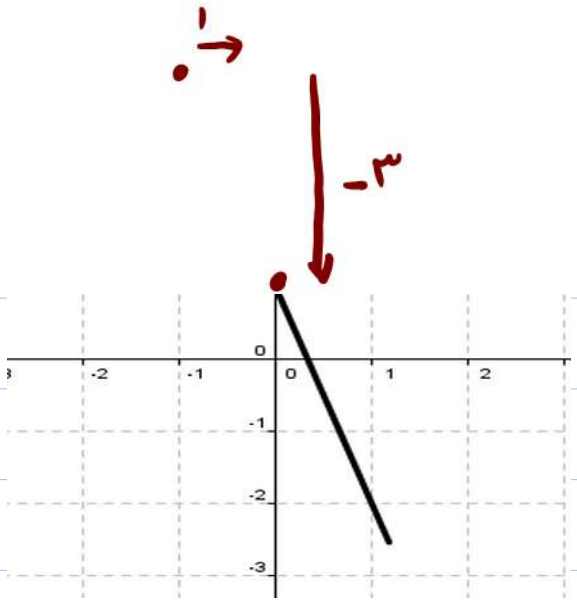
$$\text{شیب} = \frac{BH}{AH}$$

شیب خط : وقتی می‌گوییم شیب خطی m است یعنی به ازای افزایش یک واحدی متغیر x متغیر y به اندازه m واحد افزایش یا کاهش می‌یابد.



الف)

$m = ۲$



ب)

$m = -۳$

نکته : الف) هرگاه روی محور xها از چپ به راست حرکت کنیم و روی خط به سمت بالا برویم، شیب خط مثبت خواهد بود.

ب) هرگاه روی محور xها از چپ به راست حرکت کنیم و روی خط به پائین سر بخوریم شیب خط منفی خواهد بود.

ج) اگر خط موازی محور xها باشد شیب خط صفر است (خط‌های افقی)

د) اگر خط موازی محور yها باشد شیب خط تعریف نشده است (خط‌های قائم)

یافتن شیب خط با داشتن دو نقطه از آن :

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از خط d باشند، شیب این خط برابر است با :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

نوشتن معادله خط با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن :

اگر $A(x_1, y_1)$ نقطه‌ای از خط d با شیب m باشد آنگاه معادله این خط

از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه به مختصات $(-1, -7)$ و $(-4, -2)$ بگذرد.

$x_1 \; y_1$ ✓ $x_2 \; y_2$ ✓

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2+7}{-4-1} = \frac{5}{-5} = -\frac{5}{5} \rightarrow y+7 = -\frac{5}{5}(x-1)$$

$$y = -\frac{5}{5}x + \frac{5}{5} - 7 \rightarrow y = -\frac{5}{5}x - \frac{26}{5}$$

رابطه شیب خط و تانژانت : تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد برابر شیب خط است.

تذکر : الف) به معادله‌هایی به شکل $y = mx + h$ معادله استاندارد خطی می‌گوییم که m شیب خط و h عرض از مبدأ (محل برخورد خط با محور yها) است.

ب) به معادله‌هایی به شکل $ax + by + c = 0$ صورت کلی خطی می‌گوییم که شیب آن از $-\frac{a}{b}$ به دست می‌آید.

مثال: شیب خط‌های زیر را بیابید.

۱) $x = 1 \rightarrow m$: تعریف نشده

۲) $y = \sqrt{3}x - 4 \rightarrow m = \sqrt{3}$

۳) $y = -2 \rightarrow m = 0$

۴) $4x + 12y - 10 = 0 \rightarrow m = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$

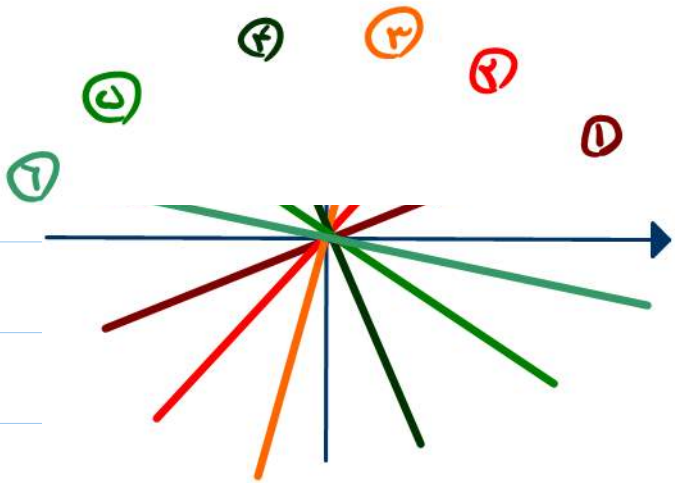
۵) $5x = 3y + 1 \rightarrow 3y = 5x - 1 \xrightarrow{\div 3} y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \rightarrow m = \frac{5}{3}$

۶) $m = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$



نکته : در خط‌های با شیب مثبت، هرچه خط به محور yها نزدیک‌تر شود، شیب آن بیشتر می‌شود و در خط‌های با شیب منفی، هرچه خط به محور yها نزدیک‌تر شود شیب آن افزایش می‌یابد.

مثال : شیب خط‌های داده شده، به ترتیب $\{2, -4, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 1\}$ است. هر شیب مربوط به کدام خط است؟



$m_1 = \frac{1}{2}$

$m_2 = 1$

$m_3 = 2$

$m_4 = -4$

$m_5 = -1$

$m_6 = -\frac{1}{3}$

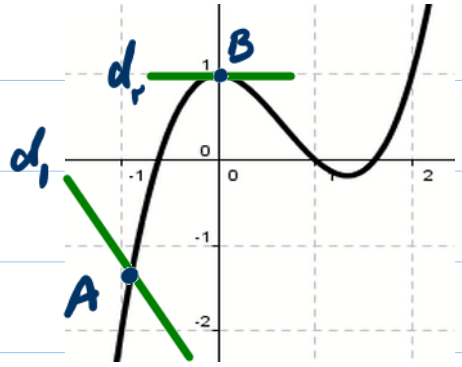
خط مماس بر منحنی :

در هندسه، خط مماس بر دایره، خطی تعریف می‌شود که دایره را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

ولی این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.



به نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید.



از لحاظ احساسی خط d_2 در B

بر تابع مماس است ولی خط d_1 در A

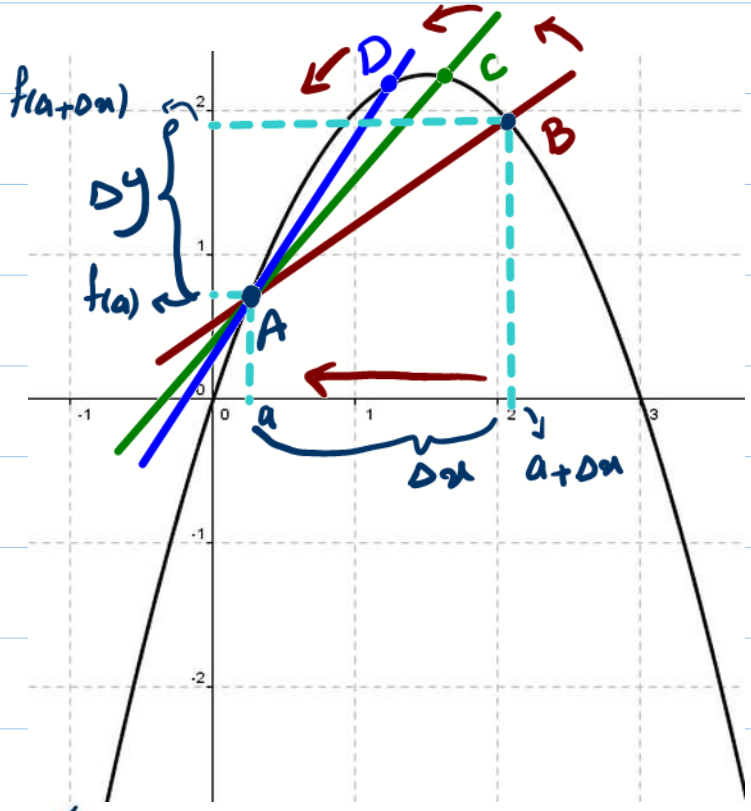
بر منحنی تابع مماس نیست.

تعریفی غیر دقیق از خط مماس :

خط را طوری است که منحنی تابع را در آن نقطه فقط لمس می‌کند. به صورت غیر دقیق

خطی تر تعریف می شود که از دو نقطه واقع بر منحنی که بی نهایت به یکدیگر نزدیک اند می گذرد.

مثال: تابع $y = -x^2 + 3x$ را در نظر بگیرید.



هر خطی که از دو نقطه منحنی می گذرد را خط قاطع می نامیم مانند:

AB، AC، AD.

فرض کنید نقطه A ثابت باشد و نقطه B را به نقطه A نزدیک و نزدیک تر می کنیم.

این عمل معادل این است که $\Delta x \to 0$. ضمن انجام این عمل، خط قاطع حول نقطه ثابت A گردش می کند. این خط قاطع را در یک وضعیت حدی است.

همین وضعیت حدی است که ما می خواهیم خط مماس بر منحنی در نقطه A باشد.

حال اگر شیب خط قاطع AB را $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ در نظر بگیریم. با انجام این عمل حدی شیب خط قاطعی که به نقطه A بسیار بسیار نزدیک است به صورت : $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ خواهد بود.

تعریف دقیق خط مماس :

فرض کنید تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ عبارت است از خطی که از نقطه A می‌گذرد و دارای شیبی است که از محاسبه حد زیر بدست می‌آید :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که این حد موجود باشد.

تذکر مهم : اگر حد بالا نامتناهی شود یعنی: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$ آنگاه خط مماس با خط $x = a$ تعریف می‌شود.

نکته : اگر هیچ‌یک از حالت‌های بالا برقرار نباشد آنگاه خط مماس در A وجود ندارد.

مثال:

$a = x = -2 \longrightarrow f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7 \longrightarrow A(-2, 7)$

نقطه تماس

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left((-2+\Delta x)^2 + 3\right) - 7}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 - 4\Delta x + \Delta x^2 + 3 - 7}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x - 4)}{\Delta x} = 0 - 4 = -4$$

$$y - 7 = -4(x + 2)$$

$$y = -4x - 8 + 7 \longrightarrow y = -4x - 1$$

معادله خط مماس در نقطه $A(-2,7)$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم : مشتق

درس اول : آشنایی با مفهوم مشتق

جلسه دوم: صفحات ۷۲ تا ۷۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در جلسه قبل با تعریف خط مماس آشنا شدیم. حال به بحث اصلی یعنی مشتق می پردازیم.

تعریف مشتق :

اگر $a \in D_f$ باشد مشتق تابع f در نقطه $x = a$ را با $f'(a)$ نشان می دهیم

و این گونه تعریف می کنیم :

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

همانطور که می بینید شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(a, f(a))$

دقیقاً برابر مشتق تابع f در $x = a$ است. به حد بالا شیب منحنی در a هم گفته می شود.

نکته: گاهی اوقات از h به جای Δx استفاده می شود و تعریف مشتق به این صورت

نوشته می شود :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: اگر $f(x)=3x^2+12$ باشد، مشتق تابع f را در نقطه $x=a$ بیابید.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{3(a+h)^2+12-(3a^2+12)}{h}$$

($f(a+h)$ و $f(a)$)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(a^2+2ah+h^2)+12-3a^2-12}{h}$$

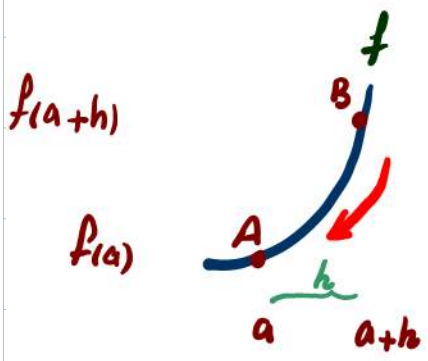
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3a^2+6ah+3h^2-3a^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6ah}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3h+6a)}{h}$$

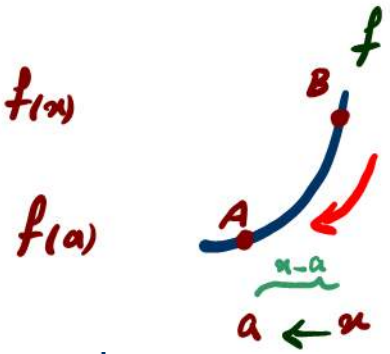
$$=3\times 0+6a=6a$$

$$f'(a)=6a$$

حال می‌خواهیم با تغییری در نمادگذاری‌ها تعریف دیگری از مشتق ارائه دهیم. به شکل‌های زیر دقت کنید.



$$\text{شیب خط مماس در } A = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$$\text{شیب خط مماس در } A = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریف دیگری برای مشتق:

اگر $a \in D_f$ باشد، مشتق تابع f در $x = a$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

مثال: برای تابع $f(x)=-x^2+10x$ مقادیر $f'(5), f'(8)$ را محاسبه کنید.

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}$$

$$f(5)=-5^2+10\times 5$$
$$=-25+50=25$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-x^2+10x-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{-(x^2-10x+25)}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)^2}{x-5}=\lim_{x\to 5}-(x-5)=0$$

$$f'(8)=\lim_{x\to 8}\frac{f(x)-f(8)}{x-8}$$

$$f(8)=-8^2+10\times 8$$
$$=-64+80=16$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{-x^2+10x-16}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{-(x^2-10x+16)}{x-8}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{-(x-8)(x-2)}{x-8}=\lim_{x\to 8}-(x-2)$$

$$=-(8-2)=-6$$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x)=(x-1)(x-2)\dots(x-5)$ را در نقطه $x=5$ حساب کنید.

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{(x-1)\cdots(x-5)-0}{x-5}$$

$$f(5)=(5-1)(5-2)\dots(5-5)=0$$

$$=\lim_{x\to 5}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=4\times 3\times 2\times 1=24$$

مثال: اگر $f(2)=0$ و $f'(2)=-3$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-f^2(2)}{x^2-4}$ را بیابید.

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-f(2))(f(x)+f(2))}{(x-2)(x+2)}$$

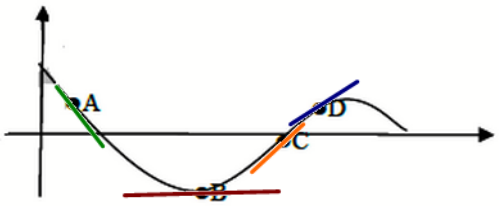
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+f(2)}{x+2}$$

$$=f'(2)\times\frac{f(2)+f(2)}{2+2}=-3\times\frac{2\times 5}{4}=-3\times\frac{5}{2}$$

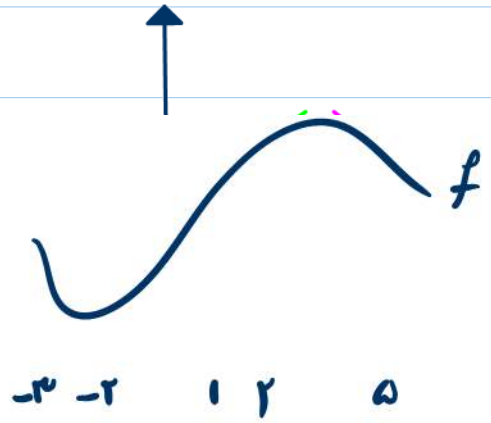
$$=-\frac{15}{2}$$

مثال: نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲
نقطه	C	B	D	A



مثال: با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.



الف) $f'(۱) > f'(۲)$ درست زیرا خط قرمز به نمودار نزدیک‌تر

ب) $f'(۰) > f'(-۲)$ درست زیرا خط صورتی به نمودار نزدیک‌تر

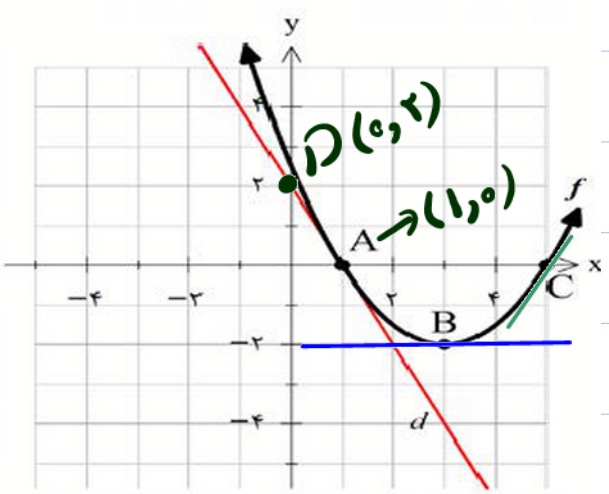
پ) $f'(-۲) < f(۰)$ نادرست زیرا عدد منفی $\not< ۰$

ت) $f'(-۳) < f'(-۲) < f'(۲) < f'(۱)$ درست.

مثال: در نمودار مقابل خط d در نقطه $x=1$ بر نمودار مماس شده است:

الف)مشتق تابع f را در نقطه $x=1$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



الف) $f'(1)=$ شیب خط مماس بر f در نقطه A

$$m_d = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{2-0}{0-1} = -2 \rightarrow f'(1)$$

ب) یک عدد مثبت

$$m_C > m_B$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم : مشتق

درس اول : آشنایی با مفهوم مشتق

جلسه سوم: حل تمرین صفحه۷۵و۷۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱ اگر $f(x)=3x^2-2x+1$، $f'(2)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

$3\times4-2\times2+1=12-4+1=9$

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-2x+1-9}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-2x-8}{x-2}$$

$3x^2-2x-8 \mid x-2$

روش هورنر

	3	-2	-8
2	3	$2\times3-2=4$	$2\times4-8=0$

باقی‌مانده

خارج قسمت: $3x+4$

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(3x+4)}{x-2}=3\times2+4=10$$

$m=f'(2)=10$ مماس

$A(2,f(2))\Rightarrow A(2,9)$

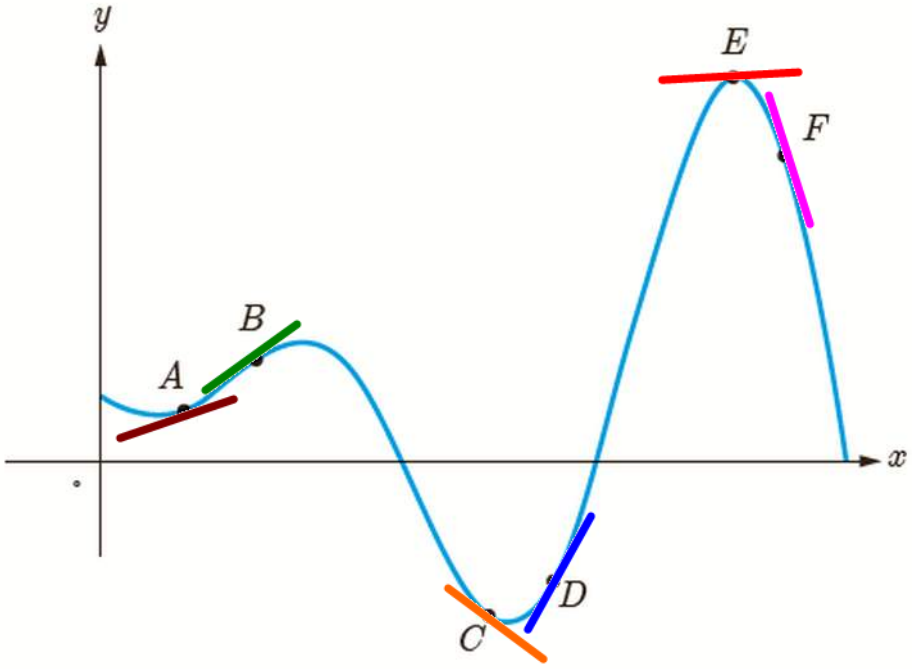
$$y-9=10(x-2)$$

$$y=10x-20+9 \Rightarrow y=10x-11$$

معادله خط مماس در A

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

نقطه	شیب
F	-۳
C	-۱
E	۰
A	$\frac{۱}{۲}$
B	۱
D	۲



۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A : m_1

ب) شیب نمودار در نقطه B : m_2

پ) شیب نمودار در نقطه C : m_3

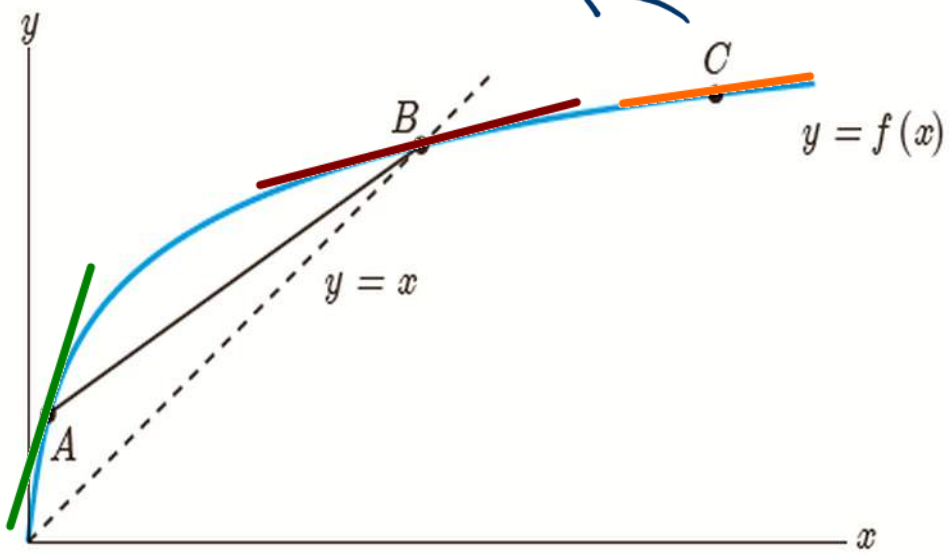
ت) شیب خط AB : m_4

ث) شیب خط $y=2$: $m_5 = 0$

ج) شیب خط $y=x$: $m_6 = 1$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 ، m_2 ، ... و m_6 در نظر بگیرید.

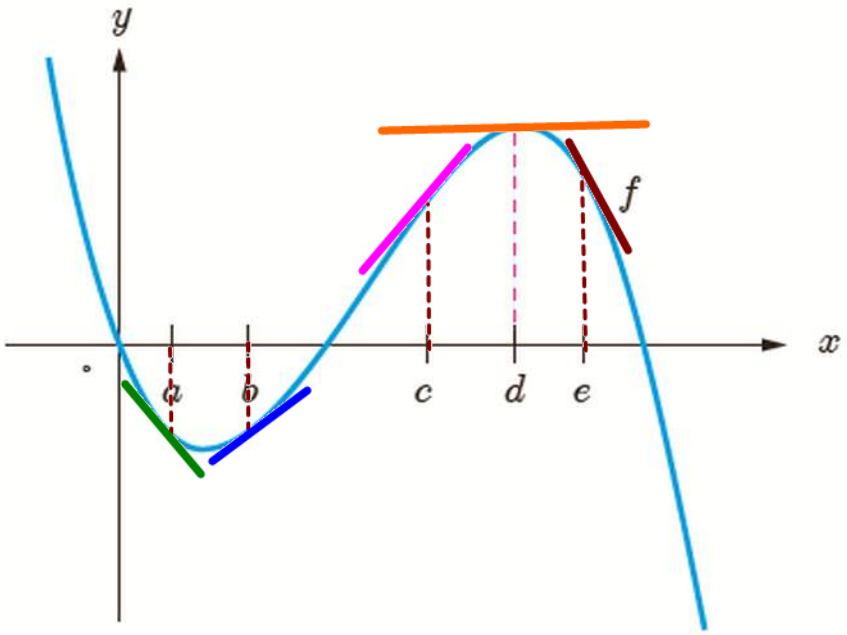
هرچه به راست می‌رویم شیب کمتر



$m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۰/۵
e	−۲



۵ نقاطی مانند $A، B، C، D، E، F$ و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

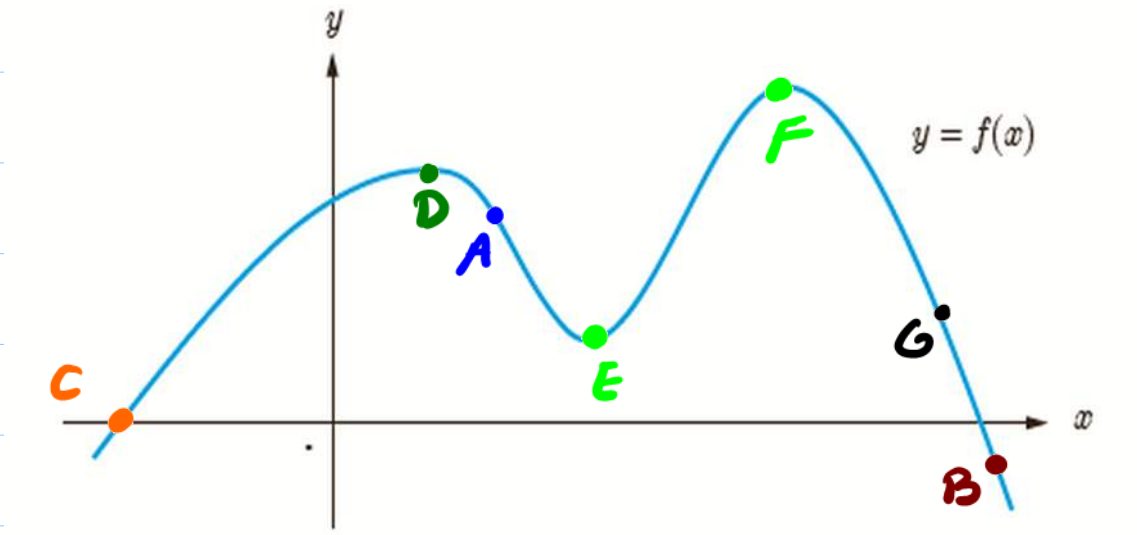
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x)=x^3-2$ ، $f'(-1)$ را به‌دست آورید.

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2-(-3)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$

$$=(-1)^2-(-1)+1=1+1+1=3$$

۷ نقاط $A، B، C، D، E$ و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) نادرست

ب) نادرست

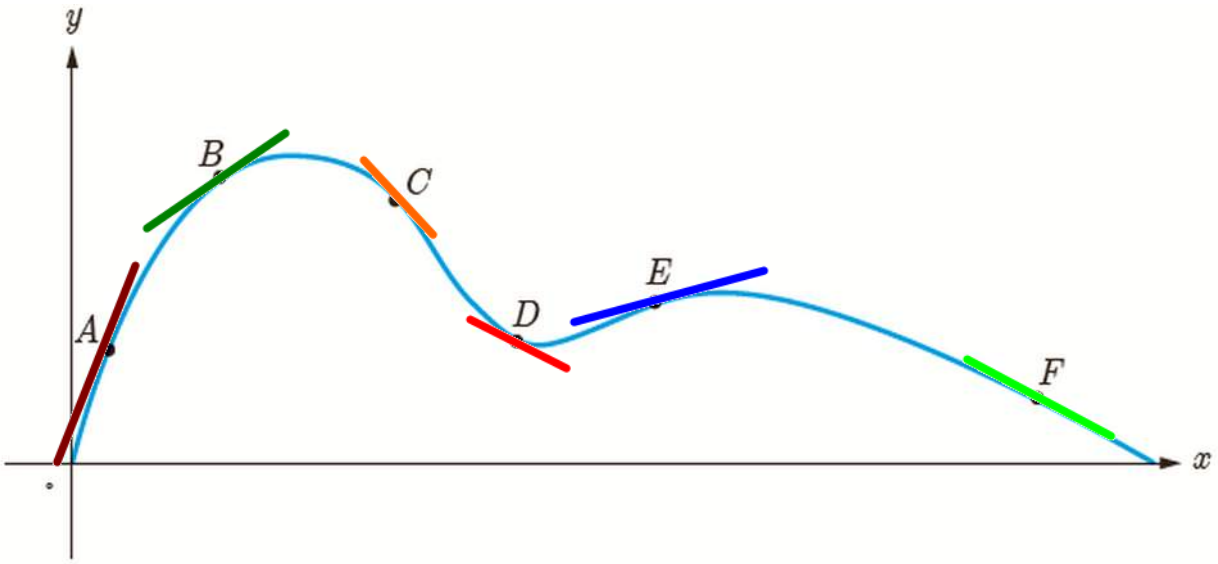
با A

پ) درست

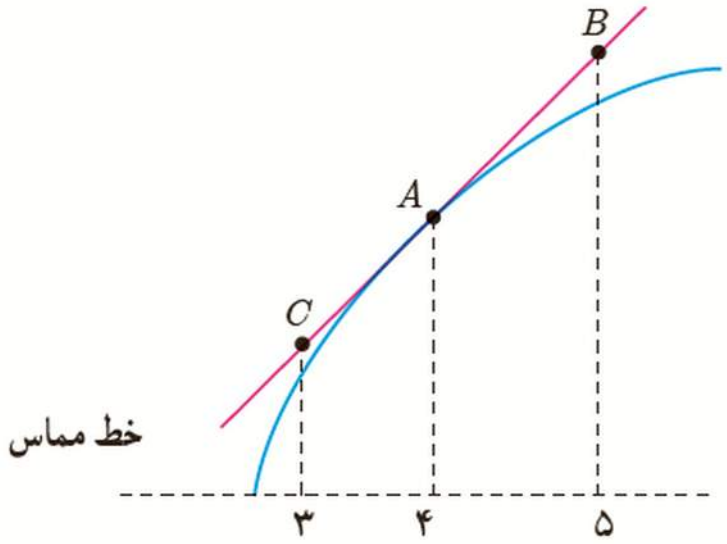
ت) درست

ث) نادرست ← درست : $m_C < m_D < m_F$

ج) درست



۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم : $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.



$A(۴, f(۴)) \rightarrow A(۴, ۲۵)$

معادله خط مماس بر f در A:

$y - ۲۵ = ۱/۵(x - ۴)$

$y = ۱/۵x - ۶ + ۲۵ \rightarrow y = ۱/۵x + ۱۹$

$x_B = ۵ \xrightarrow[B]{\text{روی خط مماس}} y_B = ۱/۵ \times ۵ + ۱۹ = ۷/۵ + ۱۹ = ۲۶/۵$

$x_C = ۳ \xrightarrow[C]{\text{روی خط مماس}} y_C = ۱/۵ \times ۳ + ۱۹ = ۴/۵ + ۱۹ = ۲۳/۵$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

جلسه چهارم: صفحات ۷۷و۷۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

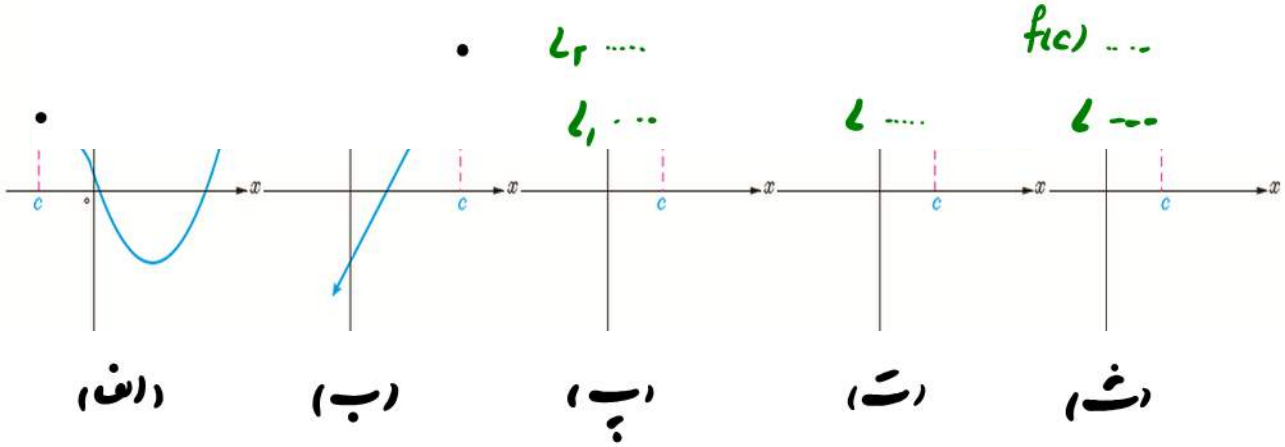
گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری :

تعریف پیوستگی : تابع f را در $x=c$ پیوسته گوئیم هرگاه : $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

یعنی مقادیر $f(c)$ و $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود و با هم برابر باشند .

مثال :



(الف) (ب) (پ) (ت) (ث)

الف) $\lim_{x\to c^-} f(x)$ موجود نیست پس $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

ب) $\lim_{x\to c^+} f(x)$ موجود نیست پس $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

پ) $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$ پس $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در c پیوسته نیست

ت) $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود دارد ولی $f(c)$ موجود نیست پس تابع در c پیوسته نیست .

ث) $\lim_{x\to c} f(x)$ و $f(c)$ هردو موجودند ولی با هم برابر نیستند پس تابع در c پیوسته نیست .

مشتق یک طرفه:

مشتق راست تابع f در $x=a$ را $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ یا $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ می‌نامیم و با $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم.

مشتق چپ تابع f در $x=a$ را $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ یا $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ می‌نامیم و با $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم.

مثال: مشتق چپ و راست تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+5 & x<2\\ 4x+1 & x\geq 2\end{cases}$ را در $x=2$ بیابید.

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x+1-9}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4(x-2)}{x-2}=4$$

($4x+1\to 9$)

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+5-9}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}x+2=4$$

دقت کنید مقدار $f(2)$ برای مشتق چپ و راست از ضابطه اول بدست می‌آید.

حال می‌خواهیم وارد بحث مشتق‌پذیری شویم، یعنی ببینیم که تابع در چه نقطه‌ای مشتق دارد و در چه نقطه‌ای مشتق ندارد.

تعریف: تابع f را در a مشتق‌پذیر می‌گوئیم اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد.

تذکر: وجود $f'(a)$ به این معناست که مشتق‌های چپ و راست موجود، متناهی و برابر باشند.

قضیه: اگر تابع f در a مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته است.

اثبات: بنابه فرض f در a مشتق‌پذیر است پس $f'(a)$ وجود دارد یعنی:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{وجود دارد}$$

شرط موجود بودن $f(a)$ برقرار است زیرا در غیر این صورت حد بالا بی‌معناست.

حد مقابل را در نظر بگیرید:

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big)$$

$$= \lim_{x \to a} \left((x-a) \times \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)}\right) = \lim_{x \to a}(x-a) \times \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= 0 \times f'(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a}\big(f(x) - f(a)\big) = 0 \to \lim_{x \to a} f(x) - \underbrace{\lim_{x \to a} f(a)}_{\to f(a)} = 0 \to \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

نتیجه: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد در a مشتق پذیر هم نیست.

تذکر: عکس قضیه بالا درست نیست. یعنی اگر f در $x=a$ پیوسته باشد لزوماً در a مشتق پذیر نیست.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<2 \\ 8-x & x\geq 2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}(8-x)=6 \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}(2x-1)=3 \quad , \quad f(2)=6$$

پس تابع f در 2 پیوسته است

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=6$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{8-x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x-1-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-7}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

$$f'_+(2)\neq f'_-(2)$$

پس تابع f در $x=2$ مشتق پذیر نیست.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}2x & x\geq 1\\ x^2 & x<1\end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$\lim_{x\to 1^+} 2x = 2$ ، $\lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$ ، $f(1)=2 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)$ وجود ندارد

پس تابع در $x=1$ پیوسته نیست لذا مشتق پذیر هم نخواهد بود.

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax+1 & x\geq 2\\ x^2+b & x<2\end{cases}$ در $x=2$ مشتق پذیر باشد، a,b را بیابید.

شرط پیوستگی: $\lim_{x\to 2^+} ax+1 = 2a+1$ ، $\lim_{x\to 2^-} x^2+b = 4+b$ ، $f(2)=2a+1$

$\Rightarrow 2a+1 = 4+b \rightarrow 2a+1-4=b \rightarrow b=2a-3$

$$f'_+(2)= \lim_{x\to 2^+} \frac{ax+1-(2a+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{ax+1-2a-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{a(x-2)}{x-2} = a$$

$$f'_-(2)= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+b-(2a+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2a-3-2a-1}{x-2}$$

($b \to 2a-3$)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 2+2=4$$

$f'_+(2)=f'_-(2) \Rightarrow a=4 \rightarrow b=2\times 4-3=8-3=5$

$a=4 \quad , \quad b=0$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

$f(0)=0$, $\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0^2 = 0$, $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ تابع در $x=0$ پیوسته است

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow$ $f'(0)$ موجود نیست.

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

جلسه پنجم: صفحات ۷۹تا۸۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

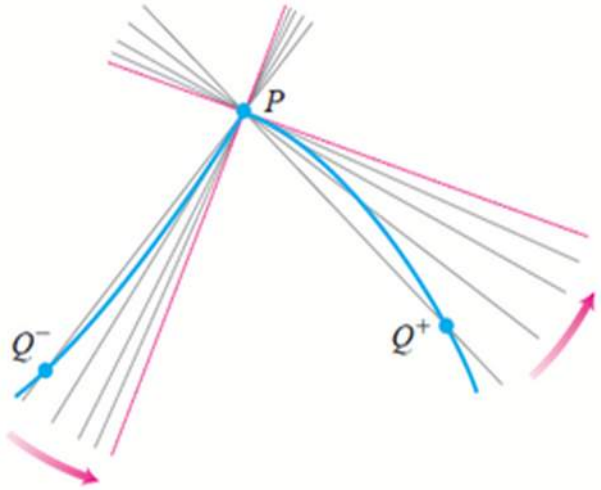
گروه ریاضی استان همدان

مشتق ناپذیری

دسته اول: همانطور که در جلسه قبل دیدیم تابع در نقاطی که در آن‌ها پیوسته نیست مشتق‌پذیر نیست.

دسته دوم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد، چنانچه مشتق‌های چپ و راست موجود، متناهی و نابرابر باشند و یا حداکثر یکی از مشتق‌های چپ و راست نامتناهی باشد، f در a مشتق‌پذیر نیست. به این نقطه، نقطهٔ **گوشه‌ای** یا زاویه‌دار می‌گوییم.

تذکر: در نقاط گوشه‌ای دو نیم مماس بر تابع قابل رسم است.



مثال: به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-4|$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$f(2)$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

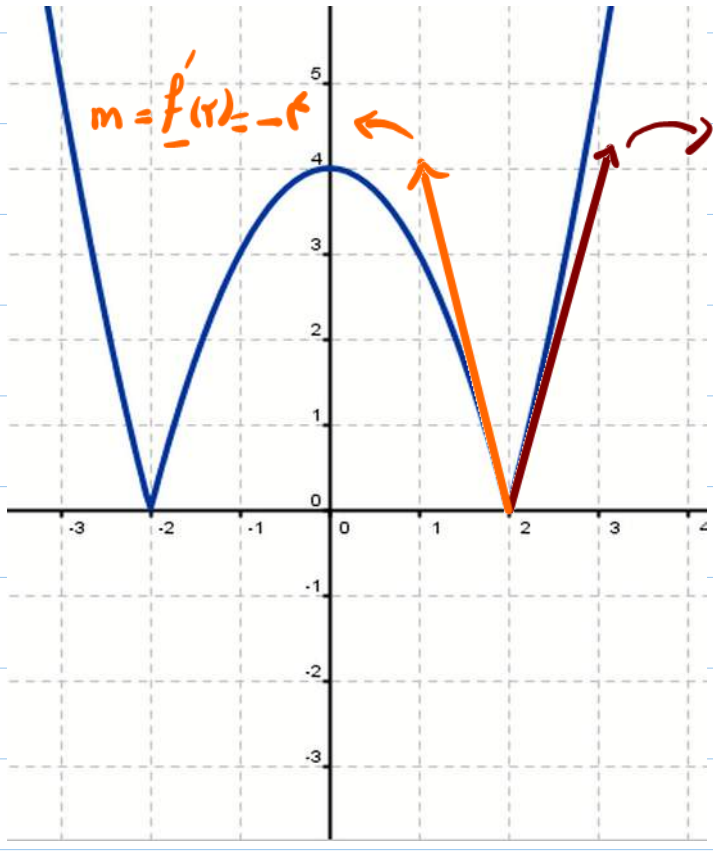
$x\to 2^-$: x^2-4 : $+\ 0\ -$

$x\to 2^+$: x^2-4 : $-\ 0\ +$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}-\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=-4$$

پس تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست و این نقطه یک نقطه گوشه‌ای است. $f'_-(2)\neq f'_+(2)$



مثال: نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$ در $x=0$ نقطه گوشه‌ای دارد.

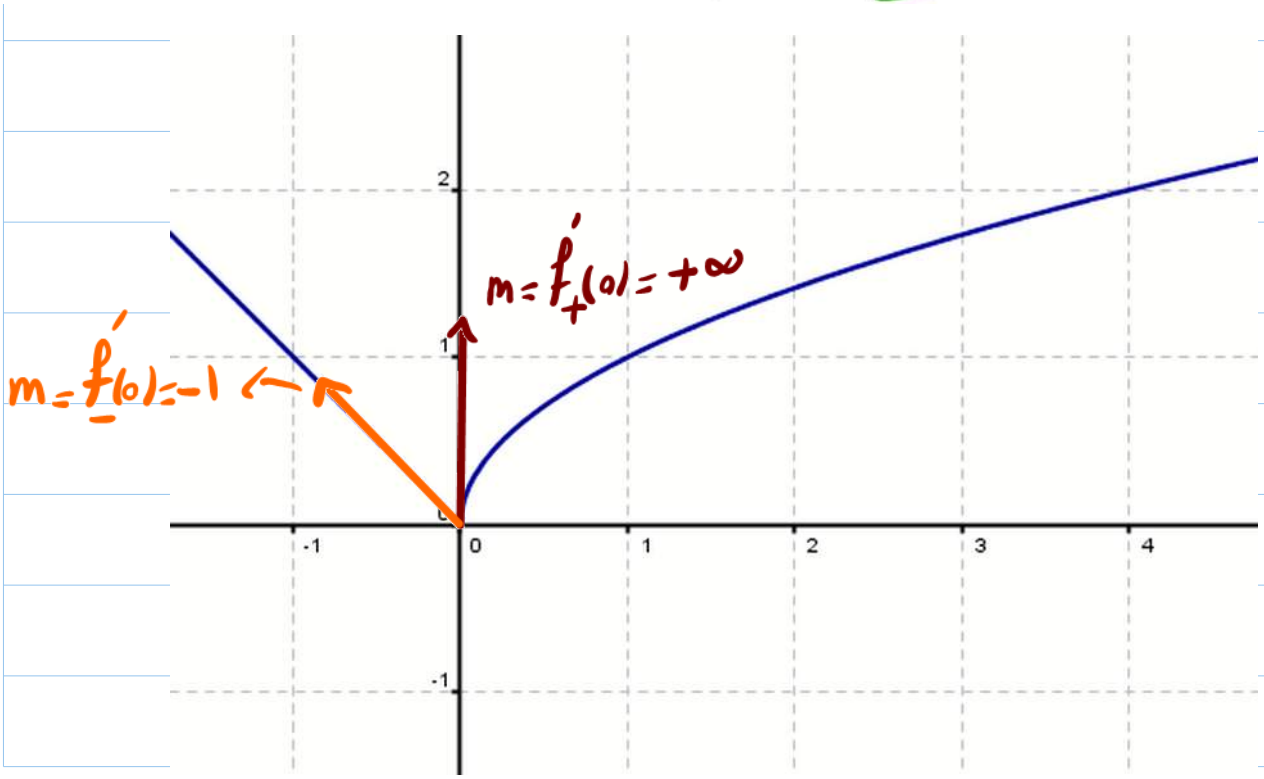
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt{x}}$$

($f(0)$: $\sqrt{x}-0$)

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

پس f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و این نقطه گوشه‌ای است. $f'_+(0)\neq f'_-(0)$



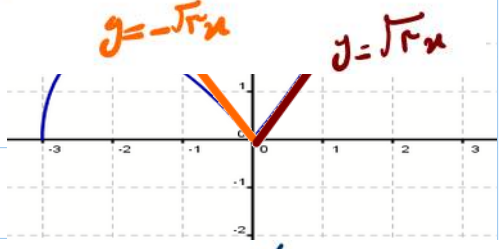
مثال: معادله نیم‌مماس‌های تابل رسم نمودار $f(x)=|x|\sqrt{x+2}$ را در $x=0$ بدست آورید.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sqrt{x+2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x+2}}{x}=\sqrt{2}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sqrt{x+2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sqrt{x+2}}{x}=-\sqrt{2}$$

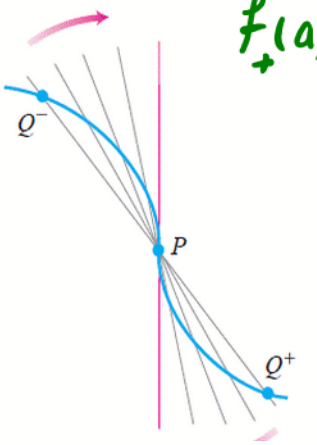
نیم‌مماس راست : $y-0=\sqrt{2}(x-0)\to y=\sqrt{2}x$ $\quad A(0,0)$

نیم‌مماس چپ : $y-0=-\sqrt{2}(x-0)\to y=-\sqrt{2}x$

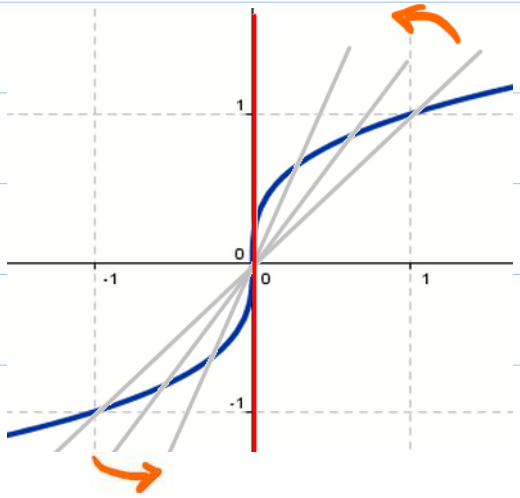


دسته سوم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های چپ و راست در a نامتناهی و هم‌علامت باشند، آنگاه در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست.

نکته: در این حالت تابع در این نقطه دارای **مماس قائم** با معادله $x=a$ است.



$f'_+(a) = f'_-(a) = -\infty$



$f'_+(a) = f'_-(a) = +\infty$

مثال: مشتق پذیری تابع $g = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

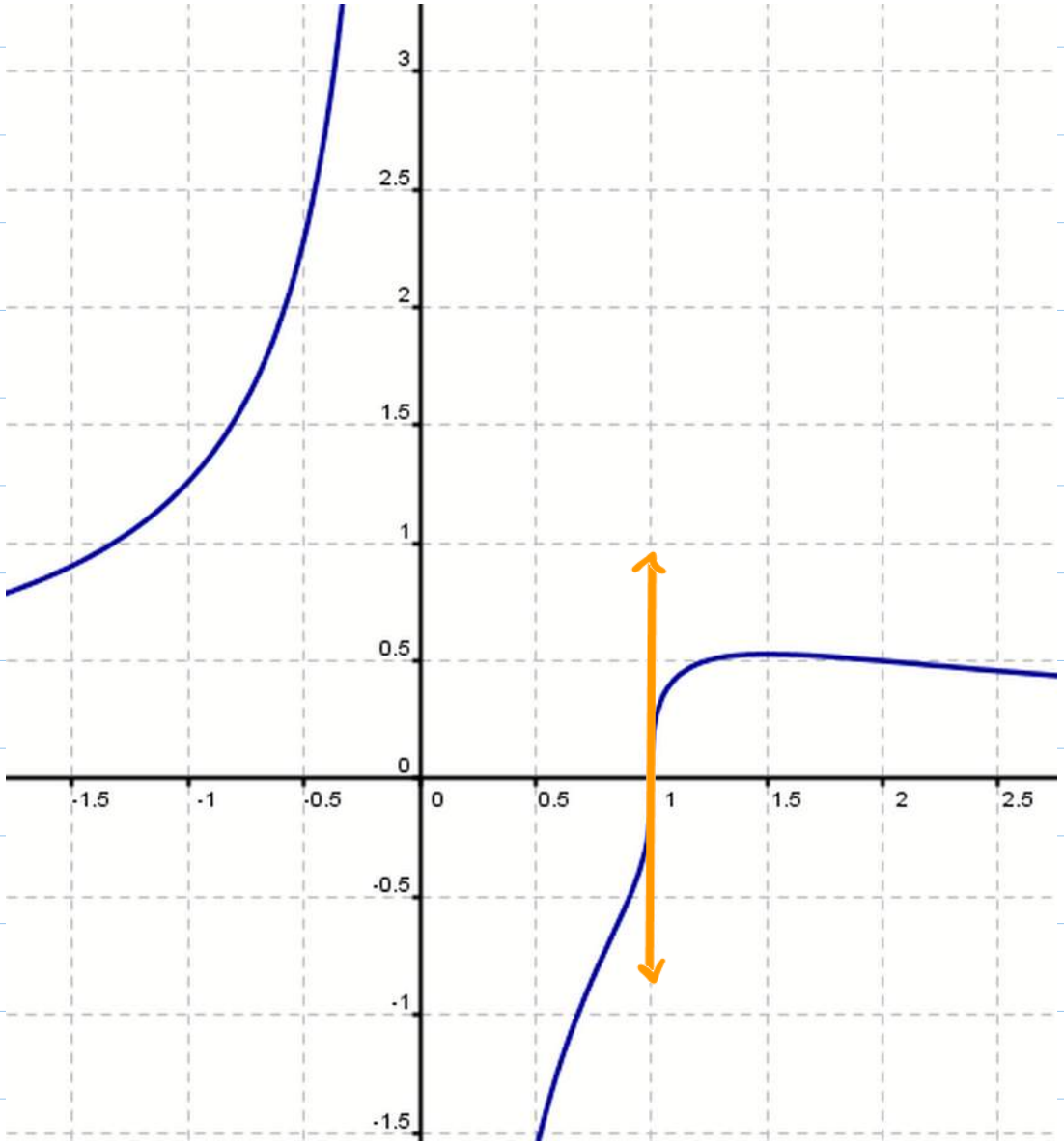
$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x} - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x(x-1)} \times \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^3}}{x(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{1\times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)}{x(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{1\times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

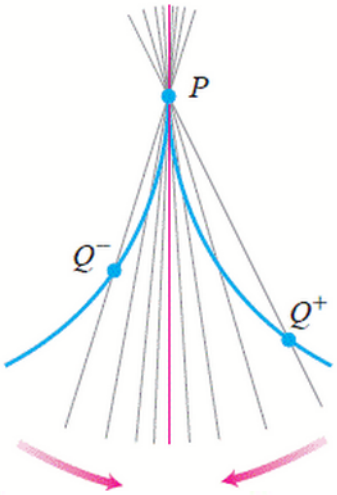
به طوری که:

پس تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست و تابع در این نقطه مماس قائم دارد.

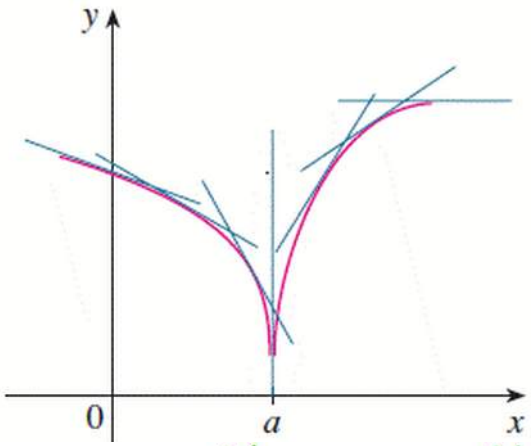

3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

دسته چهارم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در a نامتناهی و نامساوی باشند، f در a مشتق‌پذیر نیست. به این نقطه، نقطه بازگشت گفته می‌شود.

نکته: در نقطه بازگشت مماس قائم بر نمودار تابع است.



$f'_-(a)=+\infty$ ، $f'_+(a)=-\infty$



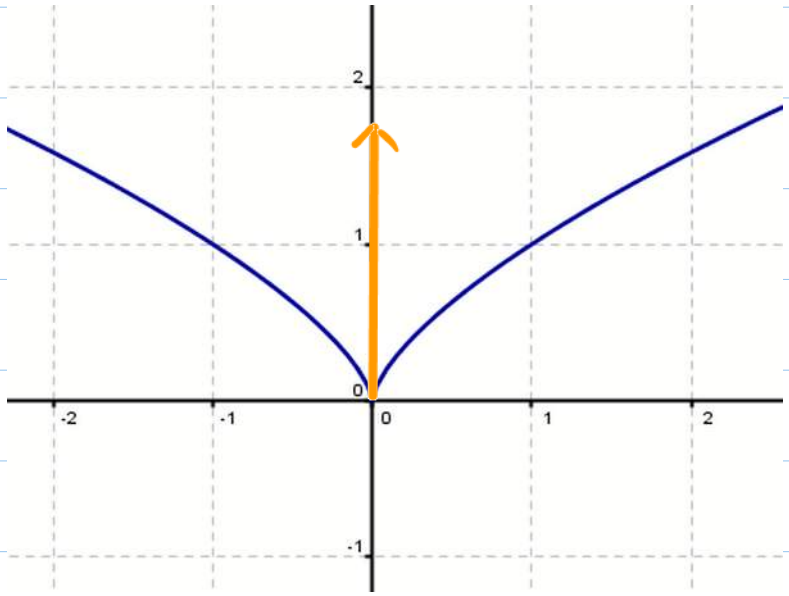
$f'_-(a)=-\infty$ ، $f'_+(a)=+\infty$

مثال: نشان دهید تابع $y=\sqrt[3]{x^2}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\times\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

به طریق به

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$



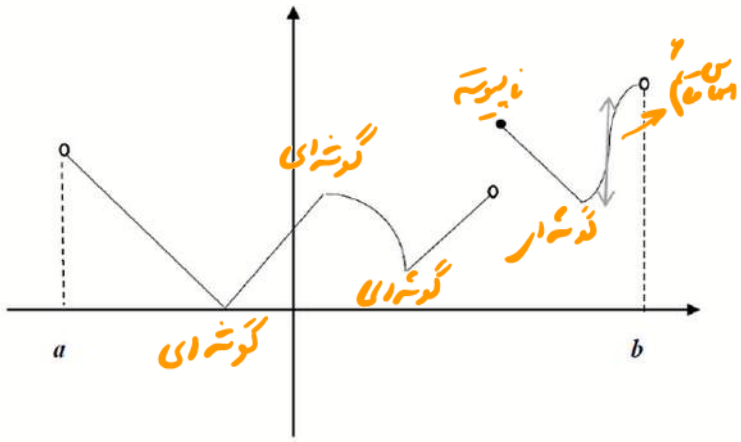
$y = \sqrt[3]{x^2}$

مثال: نمودار تابع f با دامنه (a,b) به شکل مقابل است.

این تابع در چند نقطه از دامنه اش مشتق پذیر نیست؟

۱) چهار نقطه ۲) پنج نقطه

۳) شش نقطه ۴) هفت نقطه

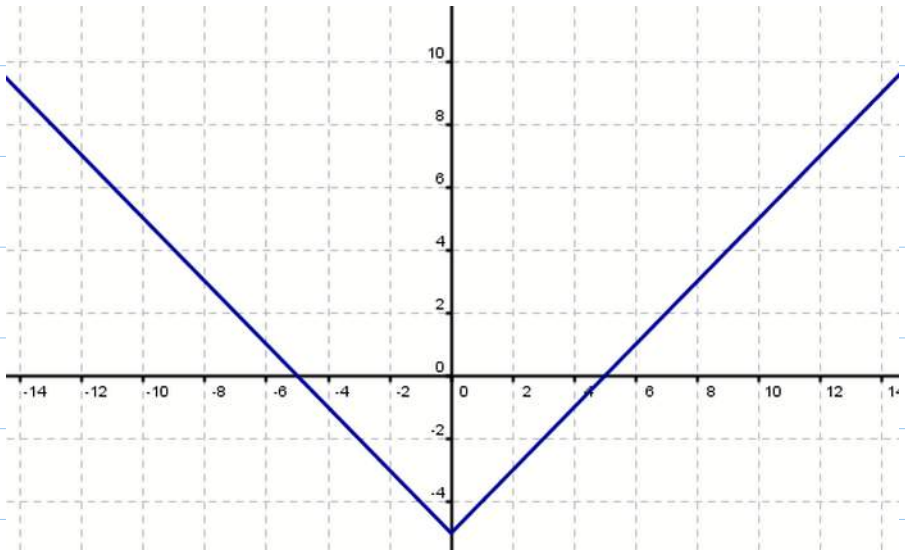


مثال: توابع زیر در چند نقطه مشتق پذیر نیستند.

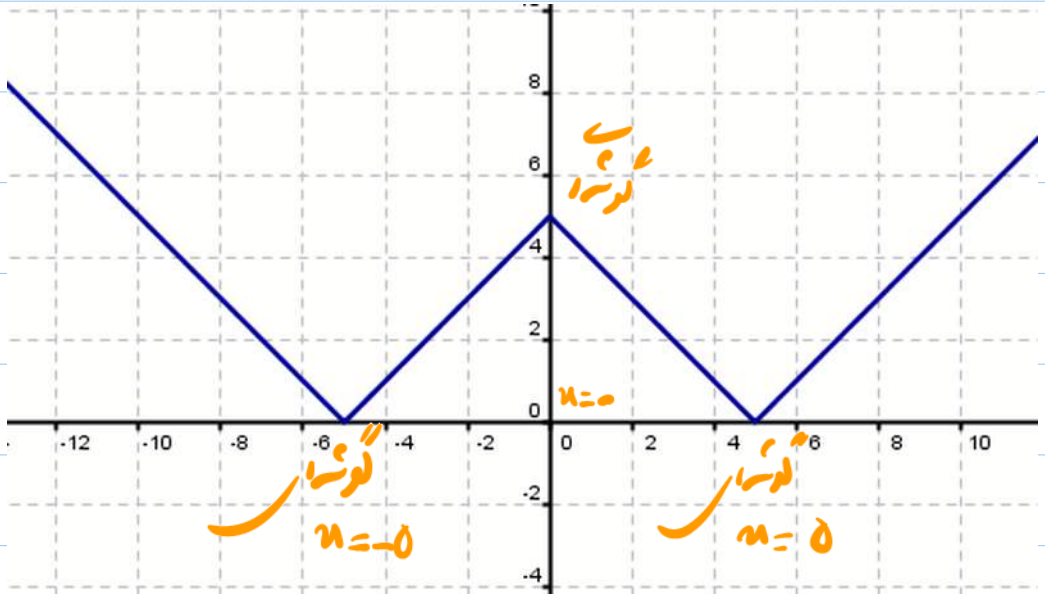
الف) $f(x) = ||x| - 5|$

ب) $g(x) = |2x - |x - 3||$

ابتدا $f_1(x)=|x|-5$



$f(x)=||x|-5|$



در سه نقطه

ب) $g(x) = |2x - |x-3||$

$x > 3 \rightarrow g(x) = |2x - x + 3| = |x+3| = x+3$

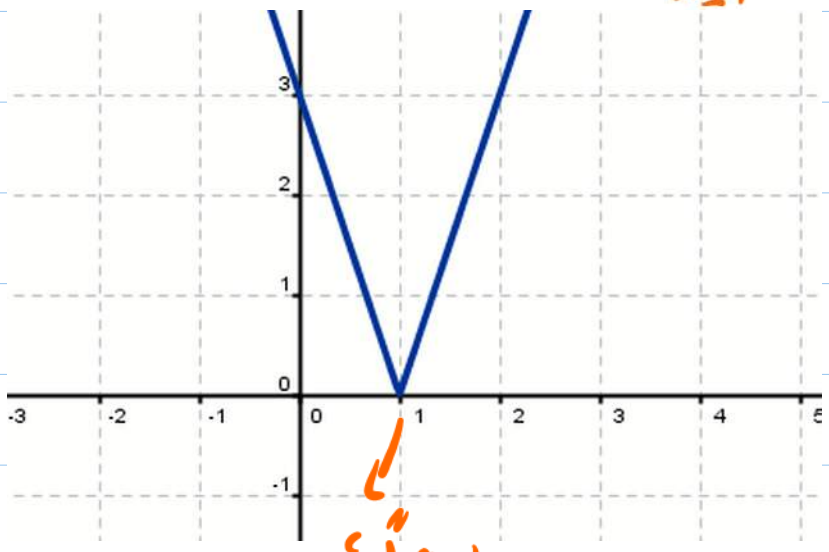
$x < 3 \rightarrow g(x) = |2x - (-(x-3))| = |2x + x - 3| = |3x-3|$

$$g(x) = \begin{cases} |3x-3| & x \leq 3 \\ x+3 & x > 3 \end{cases}$$

$y = |3x-3|$

$y = x+3$

نقطه برخورد $x=3$



نقطه برخورد $x=1$

در دو نقطه

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

جلسه ششم: صفحات ۸۲ تا ۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تابع مشتق :

تعریف: تابع مشتق f که با f' نمایش داده می‌شود تابعی است که دامنه‌اش مجموعه همه نقاطی است که تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر است و مقدار آن در نقطه x از دامنه‌اش برابر است با :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثال : تابع مشتق، $f(x) = \sqrt{x}$ را بدست آورید .

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

همانطور که تا حال دیدیم یافتن مشتق یک تابع با استفاده از تعریف، عملی زمان بر است. مانند آنچه در مثال قبل برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بدست آوردیم، می‌توانیم قواعدی را بیان کنیم که با استفاده از آن‌ها مشتق توابع را بیابیم.

قواعد مشتق‌گیری

۱.مشتق تابع ثابت صفر است.

مثال:

$f(x)=5 \rightarrow f'(x)=0$

$f(x)=\sqrt{7} \rightarrow f'(x)=0$

۲.مشتق تابع $f(x)=ax^n$ برابر است با حاصل ضرب ،ضریب عددی در توان متغیر در متغیر به توان یک واحد کمتر یعنی: $f'(x)=anx^{n-1}$

مثال:

$y=x \rightarrow y'=1\times 1\times x^{1-1}=1\times 1\times x^0=1\times 1\times 1=1$

$y=4x \rightarrow y'=4x^0=4$

$y=7x^5 \rightarrow y'=35x^4$

$y=2x^{\frac{1}{4}} \rightarrow y'=\frac{2}{4}x^{\frac{1}{4}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$

حالت خاص:

$(x)'=1$

$(ax)'=a$

۳. مشتق جمع یا تفریق چند تابع برابر است با جمع یا تفریق مشتق تک تک آنها.

مثال :

$$f(x)=9x^{6}-2x^{2}+\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}+7x-\sqrt{2}$$

$$f'(x)=54x^{5}-4x+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+7+0$$

$$f'(x)=54x^{5}-4x+\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}+7$$

۴. مشتق ضرب دو تابع برابر است با مشتق اولی در خود دومی بعلاوه مشتق دومی در خود اولی یعنی : $(f\times g)'(x)=f'g+g'f$

مثال :

$$f(x)=(\sqrt{7}x+2)(x^{3}+6x^{2}+x)$$

$$f'(x)=(\sqrt{7})(x^{3}+6x^{2}+x)+(3x^{2}+12x+1)(\sqrt{7}x+2)$$

۵. مشتق تقسیم دو تابع برابر است با مشتق صورت در خود مخرج منهای مشتق مخرج در خود صورت تقسیم بر خود مخرج به توان دو یعنی : $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'g-g'f}{g^{2}}$

مثال :

$$f(x)=\frac{7x^{3}-9}{x^{4}+2x}$$

$$f'(x)=\frac{(21x^{2})(x^{4}+2x)-(4x^{3}+2)(7x^{3}-9)}{(x^{4}+2x)^{2}}$$

حالت خاص: ۱) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ۲) $\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$

۳) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

مثال: $y = \frac{10}{x} \rightarrow y' = -\frac{10}{x^2}$

$y = \frac{2x+4}{3x-4} \rightarrow y' = \frac{2(-4)-4(3)}{(3x-4)^2} = \frac{-20}{(3x-4)^2}$

۶.مشتق توابع رادیکالی با فرجه دو برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر دو برابر خود رادیکال یعنی اگر $f(x)=\sqrt{u}$ که u تابع برحسب x باشد آنگاه $f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

مثال: $f(x) = \sqrt{3x^2-x+1} \rightarrow f'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}$

$g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \rightarrow g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}$

$h(x) = \sqrt{(x^3+2x)(1-9x+\frac{1}{x})}$

$h'(x) = \frac{(3x^2+2)(1-9x+\frac{1}{x}) - (-9-\frac{1}{x^2})(x^3+2x)}{2\sqrt{(x^3+2x)(1-9x+\frac{1}{x})}}$

حالت خاص $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۷.مشتق توابع رادیکالی با فرجه سه برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر سه برابر خود رادیکال به توان دو یعنی اگر $f(x)=\sqrt[3]{u}$ که u تابع برحسب x باشد آنگاه

$$f'(x)=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

مثال :

$$f(x)=\sqrt[3]{2x-1} \rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$$

$$g(x)=\sqrt[3]{\frac{2x-8}{x+1}} \rightarrow g'(x)=\frac{\frac{2-(-8)}{(x+1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2x-8}{x+1}\right)^2}}$$

حالت خاص :

$$(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

۸. مشتق هر تابع تواندار برابر است با حاصلضرب ضریب عددی (در صورت وجود) در توان تابع در خود تابع با توان یک واحد کمتر در مشتق تابع بدون توان یعنی :

$$(au^n)'=anu^{n-1}u'$$

مثال :

$$y=6(3x^4-7x+1)^5$$

$$y'=30(3x^4-7x+1)^4(12x^3-7)$$

$$y = \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}x^2\right)^3$$

$$y' = 3\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}x^2\right)^2 \times \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{2}x\right)$$

ت)

حل:

۱) $f(x) = (x^2+1)^3(5x-1)$

$$f'(x) = 3(x^2+1)^2(2x)(5x-1) + (0)(x^2+1)^3$$

۲) $g(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$

$$g'(x) = \frac{(9)(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$$

۳) x^2

$$f'(x) = 5\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4 \times \frac{2x(3x-1) - (3)x^2}{(3x-1)^2}$$

۴)

$$g'(x) = \left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}\right)(x^۳+۱) + (۳x^۲)(\sqrt{۳x+۲})$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

جلسه هفتم : صفحات ۸۷ تا ۹۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مثال:

$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1)$ نکته: $(kf)' = kf'$

$= 3\times 4 + 2\times 5 = 9+10 = 19$

مثال:

یادآوری نوشتن معادله خط مماس بر f در نقطه‌ای روی آن:

۱- تکمیل مختصات نقطه تماس: $(A, f(A))$

۲- $m_{\text{مماس}} = f'(A)$

۳- معادله خط مماس: $y - f(A) = m(x-A)$

$f(x) = 6x - 2 \longrightarrow f'(2) = 6(2) - 2 = 10 \longrightarrow m = f'(2) = 10$

$x=2 \longrightarrow y = f(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 1 = 12 - 4 + 1 = 9 \longrightarrow (2,9)$

$y - 9 = 10(x-2) \longrightarrow y = 10x - 20 + 9 \longrightarrow y = 10x - 11$

مثال:

$(f+g)'(2)$ را به دست آورید.

$(fg)'(1) = f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = 1\times(-3) + 2\times 3 = -3+6 = 3$

$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 1 + 2 = 3$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ x^2-1 & x\geq 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

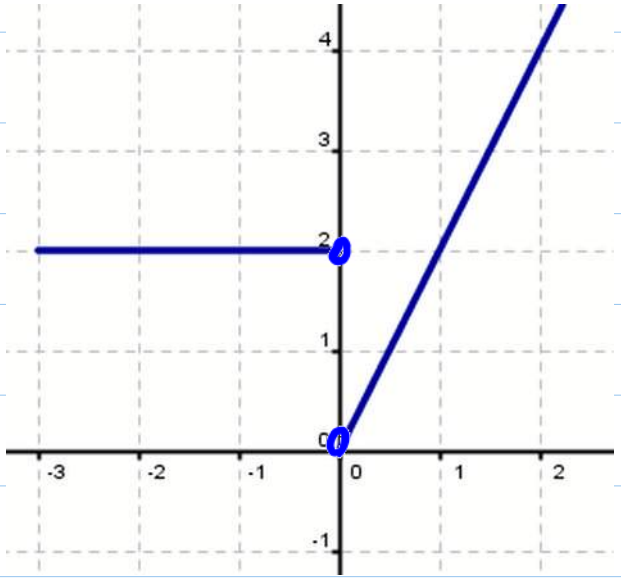
ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

$$f'(x)=\begin{cases}2 & x<0\\ \text{وجود ندارد} & x=0\\ 2x & x>0\end{cases}$$

$f'_+(0)=2\times 0=0$ ، $f'_-(0)=2 \Rightarrow 2\neq 0$ تابع در صفر مشتق‌پذیر نیست

$f'(x)$



مثال:

$g'(x)=$ شیب $=-1$

$f'(x)=$ شیب $=2$

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)} \rightarrow h'(1)=\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{g^2(1)}$$

چون تابع f به شکل دو خط و g یک خط است، شیب خط‌ها همان تابع مشتق می‌شود یعنی:

نتيجة: $g(x)=ax+b \longrightarrow g'(x)=a$

$$h'(1)=\frac{2\times 3-(-1)\times 2}{3^2}=\frac{6+2}{9}=\frac{8}{9}$$

مثال:

✓

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(5-2x)-(-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}$$

$$f'(4)=\frac{\frac{1}{4}(5-8)+2\times 3}{(5-8)^2}=\frac{-\frac{3}{4}+6}{9}=\frac{\frac{-3+24}{4}}{9}=\frac{21}{4}$$

$$=\frac{21}{4\times 9}=\frac{7}{12}$$

مثال:

✓

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2-x)^3-3(x^2-x)^2(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2-x)^2\left((2x+2)(x^2-x)-2(2x-1)(x^2+2x)\right)}{(x^2-x)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2-x)-2(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^2}$$

$$f'(2)=\frac{(6)(2)-2(3)(8)}{2^2}=\frac{12-72}{16}=\frac{-60}{16}=\frac{-15}{4}$$

مثال:

✓

شرط پیوستگی: $\lim_{x\to -2^+} -\frac{1}{2}x^2+bx+c = -2-2b+c$

$$\lim_{x\to -2^-}\sqrt{0-2x}=\sqrt{8+4}=\sqrt{9}=3=f(-2)$$

$$\Rightarrow -2-2b+c=3 \longrightarrow -2b+c=5 \quad (1)$$

برابری مشتق چپ و راست:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-2}{2\sqrt{0-2x}} & x<-2\\ -x+b & x>-2\end{cases}$$

$$f'_+(-2)=-(-2)+b=2+b$$

$$f'_-(-2)=\frac{-2}{2\sqrt{5+4}}=\frac{-1}{4}$$

$$f'_+(-2)=f'_-(-2)\Rightarrow 2+b=-\frac{1}{4}\rightarrow b=-\frac{1}{4}-2=\frac{-9}{4}$$

شرط پیوستگی

$$(1)\rightarrow -2b+c=5\rightarrow -2\left(-\frac{9}{4}\right)+c=5$$

$$c=5-\frac{18}{4}\rightarrow c=\frac{1}{4}$$

مثال:

$$\left(\sqrt[m]{u^n}\right)'=\frac{n u'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

نکته:

$$f'(x)=\frac{2\frac{(2-2x)(x^3+5)-x^2(2x-x^2)}{(x^3+5)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{x^3+5}\right)^{3-2}}}$$

$$f'(-2)=\frac{2\frac{4(-1)-4(-8)}{1}}{3\sqrt[3]{\frac{-8}{-1}}}=\frac{2(-4+24)}{3\sqrt[3]{8}}=\frac{2\times 18}{6}=4$$

مشتق تابع مرکب : (قاعده زنجیری)

اگر f, g دو تابع مشتق پذیر باشند آنگاه : $(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$

نماد دیفرانسیلی : $y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$

مثال : اگر $f(x) = x^2 - x + 1$ و $g(x) = 2 - x^2$ ، مقدار $(gof)'(1)$ را بیابید.

$(gof)'(1) = f'(1)\, g'(f(1))$

$f'(x) = 2x - 1 \rightarrow f'(1) = 2 - 1 = 1$, $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$

$g'(x) = -2x \rightarrow g'(f(1)) = g'(1) = -2 \times 1 = -2$

$(gof)'(1) = 1 \times (-2) = -2$

مثال : اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

۱) -2 ✓ ۲) -1 ۳) 2 ۴) 3

$(fog)'(2) = 6 \rightarrow g'(2)\, f'(g(2)) = 6$ (1)

$g'(x) = \frac{-2-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \rightarrow g'(2) = \frac{-3}{1} = -3$

$$g(2)=\frac{2\times 2+1}{2-1}=5$$

$$\xrightarrow{(1)} \quad (-4)\,f'(0)=6 \rightarrow f'(0)=\frac{6}{-4}=-2$$

مشتق مرتبه دوم :

اگر تابع مشتق $y'=f'(x)$ مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم را با $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از مشتق اول یعنی $f'(x)$ یک بار دیگر مشتق می‌گیریم.

مثال : مشتق مرتبه دوم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=3x^5-7x^4+12x$

$$f'(x)=20x^4-28x^3+12$$
$$f''(x)=80x^3-84x$$

ب) $f(x)=\sqrt{3x+1} \rightarrow f(x)=(3x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{1}{2}-1}(3)=\frac{3}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(3x+1)^{-\frac{1}{2}-1}(3)=-\frac{9}{4}(3x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-9}{4(3x+1)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow f''(x) = \frac{-9}{4\sqrt{(3x+1)^3}}$$

مشتق پذیری روی بازه :

الف) تابع f روی بازه (a,b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

ب) تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a,b) مشتق پذیر باشد

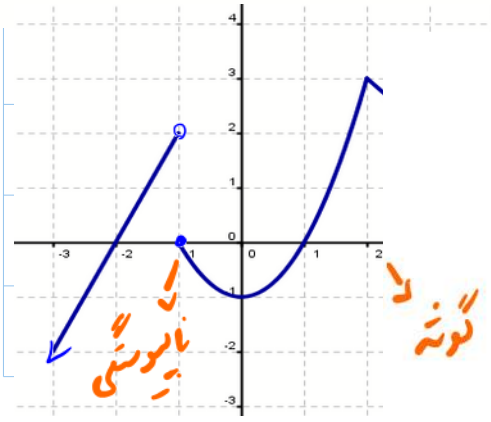
و در $x=a$ مشتق راست و در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

پ) مشتق پذیری روی بازه های $[a,b)$ ، $(a,b]$ ، $(-\infty,b)$ ، $[b,-\infty)$

$(a,+\infty)$ ، $[a,+\infty)$ به طور مشابه تعریف می شوند.

کار در کلاس

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x<-1 \\ x^2-1 & \text{اگر } -1 \le x < 2 \\ -x+5 & 2<x<5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[1,-1]$، $(2,5)$ و $[0,-2]$ بررسی کنید.



مشتق پذیر : $[-1,1]$

مشتق پذیر : $(2,5)$

مشتق پذیر نیست زیرا در $x=-1$ مشتق پذیر است $[0,-2]$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم: مشتق

درس سوم: آهنگ تغییر

جلسه هشتم: صفحات ۹۳تا۹۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغیر

اگر ماشینی مسافت ۱۸۰ کیلومتر را در ۲ ساعت طی کند سرعت متوسط آن $\frac{180}{2}=90$ کیلومتر بر ساعت است. یعنی در این بازه زمانی به طور متوسط در هر ساعت ۹۰ کیلومتر مسافت طی می‌کند. اگر بازه زمانی را خیلی کوچک کنیم سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای نزدیک می‌شود.

یا وقتی می‌گوئیم آهنگ متوسط رشد یک کودک در بازه [۶،۰] ماه، دو سانتی متر در ماه است یعنی در طی این ۶ ماه، رشد متوسط قد کودک ۲ سانتی متر در هر ماه است.

به جز مثال های بالا، در مطالعه پدیده های گوناگونی، کمیت هایی وجود دارند که تغیر یکی وابسته به تغیرات دیگری است مانند تغیرات دما در زمان های مختلف، تغیر سرعت یک ذره وقتی شتاب آن تغیر می‌کند یا تغیر جهت در زمان های مختلف.

اگر رابطه بین دو متغیر x و y به صورت $y=f(x)$ باشد، نسبت تغیرات y (متغیر وابسته) به تغیرات x (متغیر مستقل) را آهنگ متوسط تغیر y نسبت به x می‌گوئیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

تعریف: آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

شیب خط قاطع

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

تذکر: اگر بازه را به صورت $[x_1, x_1+\Delta x]$ بنویسیم، تعریف آهنگ متوسط تغییر به شکل زیر می‌شود

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

تعریف: آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x=x_1$ برابر است با مشتق تابع f در x_1.

شیب خط مماس

$$f'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

مثال: بد.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(7)-f(2)}{7-2}=\frac{\sqrt{7+2}-\sqrt{2+2}}{5}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{5}=\frac{3-2}{5}=\frac{1}{5}$$

مثال: به صورت

$$f'(t)=-2t+10 \longrightarrow f'(2)=-2(2)+10=-4+10=6$$

مثال: یک توده ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است.

الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه ی زمانی $[3,4]$ چقدر است؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه ی $t=3$ چقدر است؟

الف) $\frac{x(4)-x(3)}{4-3}=\frac{\sqrt{4}+2(4)^3-(\sqrt{3}+2(3)^3)}{1}=2+128-\sqrt{3}-54$

$=76-\sqrt{3}$

ب) $x'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2 \rightarrow x'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}+6(3)^2=\frac{1}{2\sqrt{3}}+54$

مثال: یه) داده

شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,5]$ با هم برابرند؟

سرعت متوسط $=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{(5^2-5+10)-(0^2-0+10)}{5}=\frac{30-10}{5}=\frac{20}{5}=4$

$f'(t)=$ سرعت متوسط $=4 \rightarrow 2t-1=4 \rightarrow 2t=5 \rightarrow t=2,5$

مثال: ام مقـدار

✓

آهنگ متوسط $=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{\sqrt{21-36+24}-\sqrt{21-25+20}}{1}=3-4=-1$

$f'(x)=\frac{-2x+4}{2\sqrt{21-x^2+4x}}=-1 \rightarrow \sqrt{21-x^2+4x}=x-2$ ($-2(x-2)$)

برابر کردن ←

$$21 - x^2 + 4x = x^2 - 6x + 8$$

$$\rightarrow 2x^2 - 8x - 13 = 0 \rightarrow \Delta = 64 - 4(2)(-13) = 64 + 136 = 200$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{200}}{4} = \frac{8 \pm 10\sqrt{2}}{4} \begin{cases} \frac{8+10\sqrt{2}}{4} = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \checkmark \\ \frac{8-10\sqrt{2}}{4} = 2 - \frac{5}{2}\sqrt{2} \times \end{cases}$$

مثال: در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[0,4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{2}$، چقدر کمتر است؟

۱) ۰/۰۳ ۲) ۰/۰۴ ✓ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۶

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\sqrt{2(4)+1} + \frac{1}{4+1} - \left(\sqrt{2(0)+1} + \frac{1}{0+1}\right)}{4}$$

$$= \frac{3 + \frac{1}{5} - 1 - 1}{4} = \frac{1 + \frac{1}{5}}{4} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای: } f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \times \frac{3}{2} + 1}} - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{25-8}{50} = \frac{17}{50} \times \frac{2}{2} = \frac{34}{100}$$

$$0/34 - 0/3 = 0/04$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل پنجم: کاربرد مشتق

درس اول: اکسترمم‌های تابع

قسمت اول

جلسه اول: صفحات ۱۰۲ تا ۱۰۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در فصل اول با توابع یکنوا و غیریکنوا آشنا شدید و یکنوایی تابع را با توجه به مشتقش بررسی می‌کردیم.

به مشتق روبه‌رو و خط‌های مماس رسم شده دقت کنید:

در بازه‌هایی که تابع صعودی است شیب خط‌های مماس مثبت
و در بازه‌هایی که تابع نزولی است شیب خط‌های مماس منفی است.

۱) آزمون یکنوایی تابع :

الف) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

به عبارت دیگر برای بررسی یکنوایی تابع مشتق پذیر f، از آن مشتق می‌گیریم و مشتق را با رسم جدول، تعیین علامت می‌کنیم. به این جدول تعیین علامت، جدول تغییرات تابع می‌گوییم. اگر علامت مشتق در بازه‌ای مثبت باشد، تابع در آن بازه اکیداً صعودی و اگر علامت مشتق در بازه‌ای منفی باشد تابع در آن بازه اکیداً نزولی است و برعکس.

مثال: یکنوایی تابع $y = x^4 - 4x^3 + 2$ را بررسی کنید.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

در بازه‌های $(0, -\infty)$ و $(+\infty, 3)$ تابع اکیداً صعودی و در بازه $(3, 0)$ تابع نزولی است.

مثال: تابع $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ در بازه $[a, b]$ صعودی اکید است. حداکثر مقدار $b-a$ را بدست آورید.

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - 2x(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$-x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

تابع در $[-1, 1]$ صعودی اکید $\Rightarrow a = -1$ و $b = 1 \Rightarrow b - a = 1 + 1 = 2$

نکته: در توابع پیوسته اگر مشتق تابع در نقاطی جدا از هم در یک بازه صفر شود یا هم تابع روی آن بازه می‌تواند اکیداً صعودی یا نزولی باشد.

مثال: یکنوایی تابع $f(x)=x^3$ را بررسی کنید.

$$f'(x)=3x^2=0 \Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f		↗		↗	

تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

مثال: به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x)=-x^3+mx^2-12x+1$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است؟

$$f' \leq 0 \Rightarrow f'(x)=\underbrace{-3}_{<0}x^2+2mx-12 \leq 0$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (2m)^2-4(-3)(-12) \leq 0$$

$$4m^2-144 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 36 \Rightarrow -6 \leq m \leq 6$$

$$m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$$

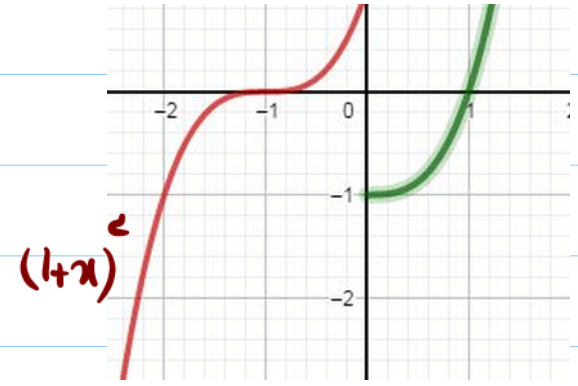
نکته: آزمون تقعر برای توابع پیوسته برقرار است. پس در توابع گویا، در بازه‌هایی که توانی از این آزمون دستگاه کنیم که شامل ریشه مخرج نباشد. در توابع چند ضابطه‌ای هم در نقاط مرزی همین نکته را داریم.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^4-1 & x\geq 0 \\ (1+x)^4 & x<0 \end{cases}$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(2,5)$

x^4-1

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x>0 \\ \text{مشتق‌پذیر نیست} & x=0 \\ 4(x+1)^3 & x<0 \end{cases}$$



تابع در $(-\infty,0)$ اکیداً صعودی است ولی برای رسیدن به شاخه سبز باید نزول کند. تابع در $(-\infty,+\infty)$ هم اکیداً صعودی است. پس تابع فقط در بازه $(2,5)$ که شامل صفر نیست، صعودی است.

مثال: تابع $f(x)=\frac{5}{x^2-2x}$ روی کدام بازه کاهنده است؟

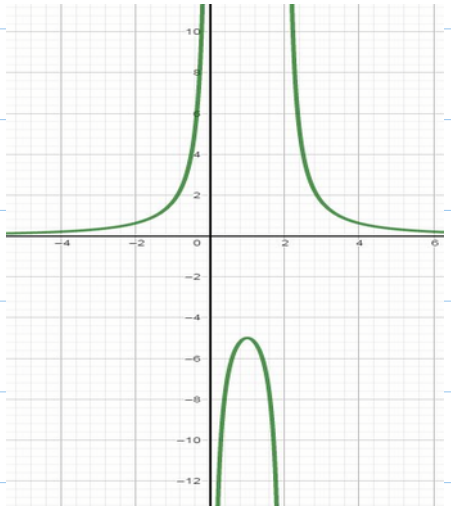
۱) $(3,1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(2,4)$

$$f'(x)=\frac{0-5(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=\frac{-10x-10}{(x^2-2x)^2}$$

$$-10x-10=0 \Rightarrow x=1 \quad , \quad x^2-2x=0 \to x(x-2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f									

باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که مشتق در آن تک علامت داشته باشد و شامل ریشه مخرج نباشد که فقط گزینه‌ی ۲ بازه $(-1,1)$ هردو ویژگی را دارد.



ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل پنجم: کاربرد مشتق

درس اول: اکسترمم‌های تابع

قسمت دوم

جلسه دوم: صفحات ۱۰۵ تا ۱۰۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

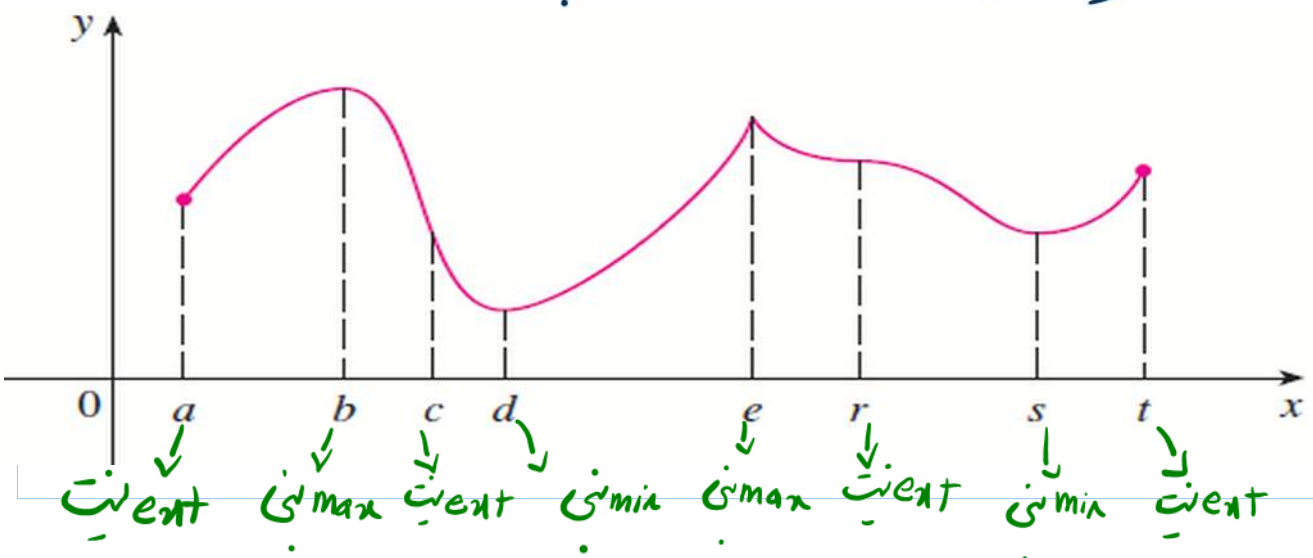
۲) اکسترمم های نسبی تابع :

الف) تابع f در نقطه ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از آن مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \geq f(x)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی f می نامیم.

ب) تابع f در نقطه ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از آن مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \leq f(x)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی f می نامیم.

به عبارت دیگر اگر عرض نقطه ای نسبت به نقاط اطرافش کوچکتر یا مساوی باشد به آن min نسبی و اگر بزرگتر یا مساوی باشد به آن max نسبی می گوییم.

مثال: در نمودار زیر کدامیک از نقاط مشخص شده اکسترمم نسبی هستند؟



چند نکته درباره اکسترمم های نسبی :

فرض کنید $x=c$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد در این صورت :

۱) نقطه ابتدا و انتهای دامنه نمی تواند نقطه اکسترمم تابع باشد.

۲) f می تواند در این نقطه پیوسته نباشد.

۳) f می تواند در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

۴) اگر f در این نقطه مشتق پذیر باشد آنگاه : $f'(c)=0$.

۵) نقطه $(c, f(c))$ روی نمودار تابع f قرار دارد هیچ مختصات این نقطه در معادله تابع صدق می کند.

۶) در تابع ثابت تمام نقاط هم max نسبی هستند هم min نسبی.

مثال : تابع متصل در بازه $[a,b]$

چند نقطه اکسترمم نسبی دارد؟ ۷ نقطه

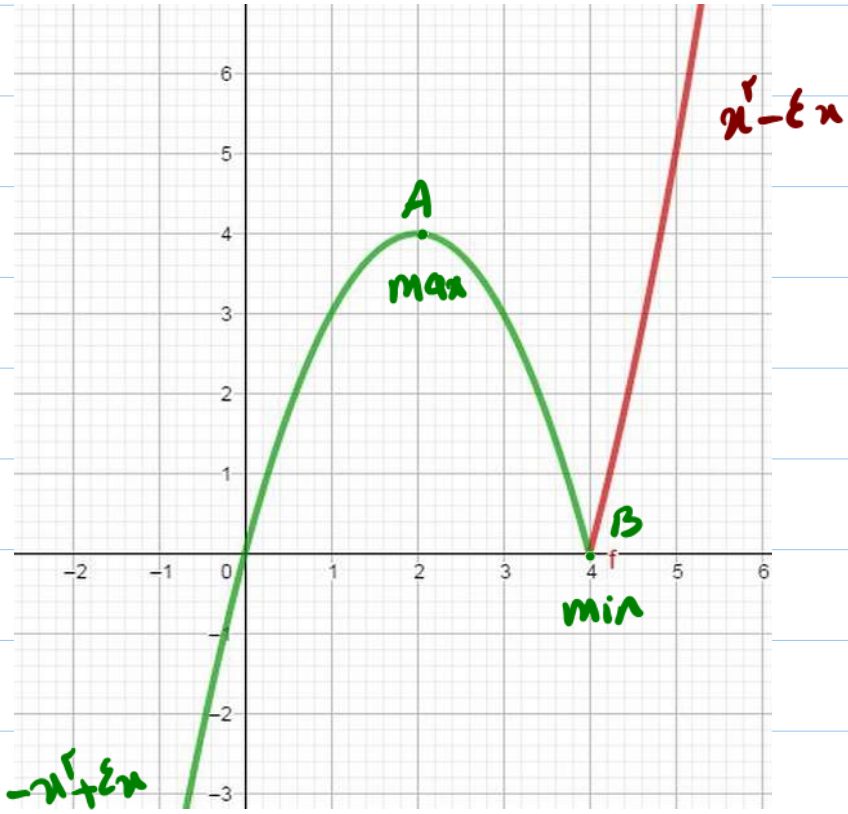
۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

مثال کنکور ۹۸ تجربی :

در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x-4|$، فاصلهٔ دو نقطه ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) & x \geq 4 \\ -x(x-4) & x < 4 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4x & x \geq 4 \\ -x^2+4x & x < 4 \end{cases}$$



A(2,4) : ی max B(4,0) ی min

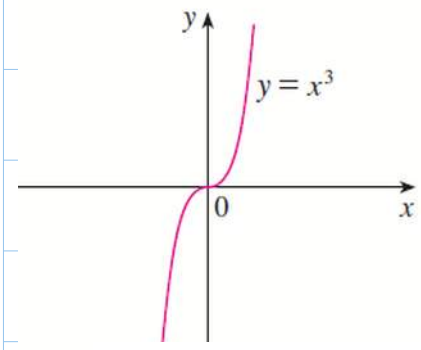
$$AB = \sqrt{(4-2)^2+(0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

گزینه ۴

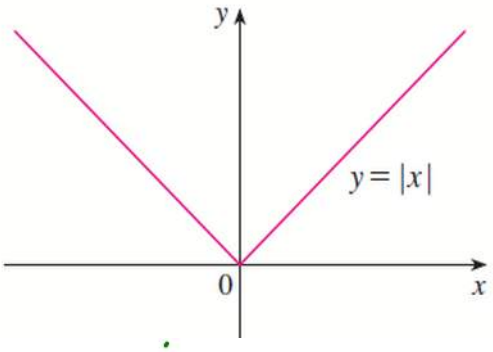
نقطه بحرانی :

نقطه‌ای به طول c از دامنه f است که در آن $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مانند :

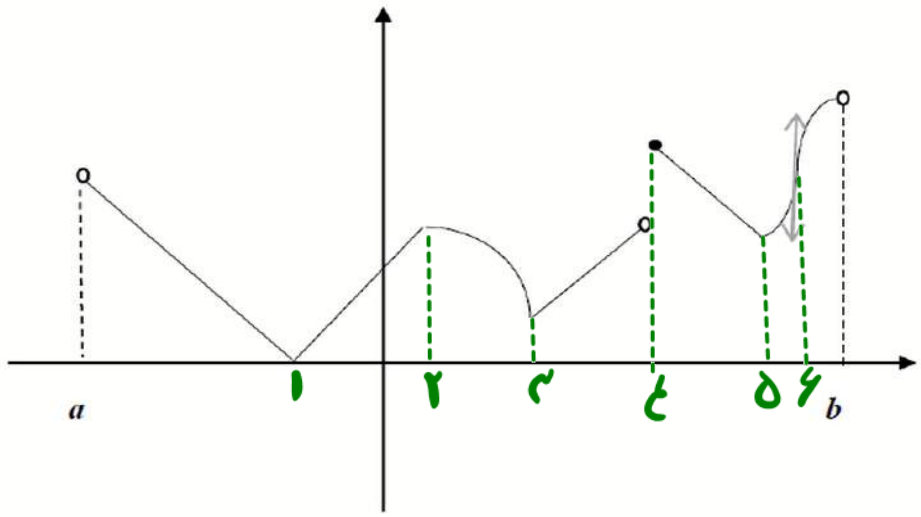


$f'(0)=0$ ، $x=0$ برای



$f'(0)$ موجود نیست ، $x=0$ برای

مثال: تابع f با نمودار زیر در بازه (a,b) چند نقطه بحرانی دارد؟



در ۶ نقطه

نکته: هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

ولی عکس آن درست نیست یعنی هر نقطه بحرانی، اکسترمم نسبی نیست.

توجه: نقاط ابتدا و انتهای دامنه، نقطه بحرانی هستند.

مثال: تابع $f(x)=4x^3-12x$ در بازه $[0,4]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

$$f'(x)=12x^2-12=0 \Rightarrow 12(x^2-1)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

چون $x=-1$ در دامنه تابع نیست پس بحرانی نیست.

نقاط بحرانی $x=1$ و $x=0$ و $x=4$ است.

مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

1) $f(x)=x^2(x+2)^3$

$$f'(x)=2x(x+2)^3+3(x+2)^2x^2 = x(x+2)^2\big(2(x+2)+3x\big)=0$$

$$\Rightarrow x(x+2)^2(5x+4)=0 \Rightarrow x=0, x=-2, x=-\frac{4}{5}$$ نقاط بحرانی

۲) $g(x)=\frac{x^۳}{(۱-x)^۲}$ $\qquad D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$

$$g'(x)=\frac{۳x^۲(۱-x)^۲-۲(۱-x)(-۱)x^۳}{(۱-x)^۴}$$

$$g'(x)=۰ \Rightarrow x^۲(۱-x)\big(۳(۱-x)+۲x\big)=۰ \Rightarrow x^۲(۱-x)(-x+۳)=۰$$

$x=۰,\ x=۱,\ x=۳ \Rightarrow$ ریشه‌های مشتق $x=۳$ ، $x=۰$ ($x=۱\notin D_f$)

$g'(x)=$ موجودیت $\Rightarrow (۱-x)^۴=۰ \Rightarrow x=۱\notin D_f$

۳) $f(x)=\begin{cases} x^۳-۳x & -۲<x\le ۲ \\ x^۳-۱۲x & ۲<x<۴ \end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^۲-۳ & -۲<x<۲ \\ \text{موجودیت} & x=۲ \\ ۳x^۲-۱۲ & ۲<x<۴ \end{cases}$$

$f'(x)=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۳=۰ \Rightarrow x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=\pm ۱ \in (-۲,۲)$

$\Rightarrow ۳x^۲-۱۲=۰ \Rightarrow x^۲-۴=۰ \Rightarrow x=\pm ۲ \begin{cases} ۲\in(۲,۴) \\ -۲\notin(۲,۴) \end{cases}$

f در $x=2$ موجود نیست پس $\{4, 2, 1, -1\}$ نقاط بحرانی‌اند.

ج) $h(x) = x|x^2-1|$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$h(x) = \begin{cases} x(x^2-1) & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x(x^2-1) & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x^3 + x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} 3x^2-1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ \text{مشتق‌پذیر نیست} & x = 1 \\ \text{مشتق‌پذیر نیست} & x = -1 \\ -3x^2+1 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

پس در این حالت نقاط بحرانی $x = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ ، $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} > -1$

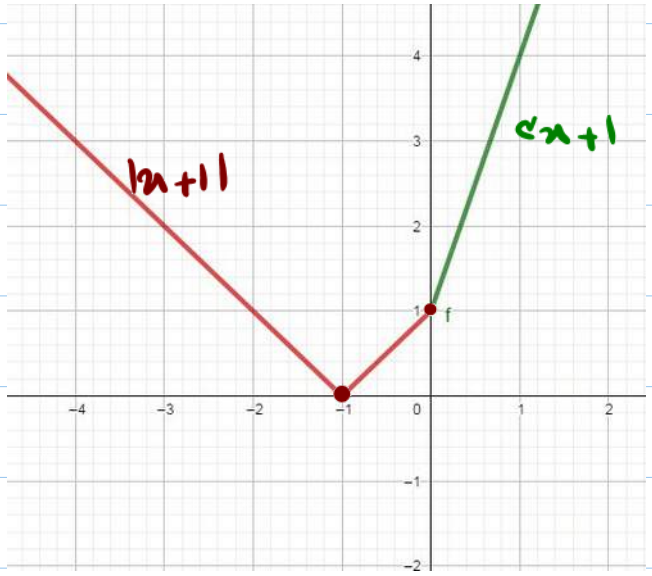
$$\Rightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

درون ضابطه هر دو در بازه $(1,-1)$ قرار دارند پس یکی‌اند.

بنابراین $\{\pm 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ نقاط بحرانی‌اند.

a) $f(x) = |2x + |x| + 1|$

$$f(x) = \begin{cases} |\overbrace{2x+x}^{3x}+1| & x \geq 0 \\ |2x-x+1| & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 0 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$$

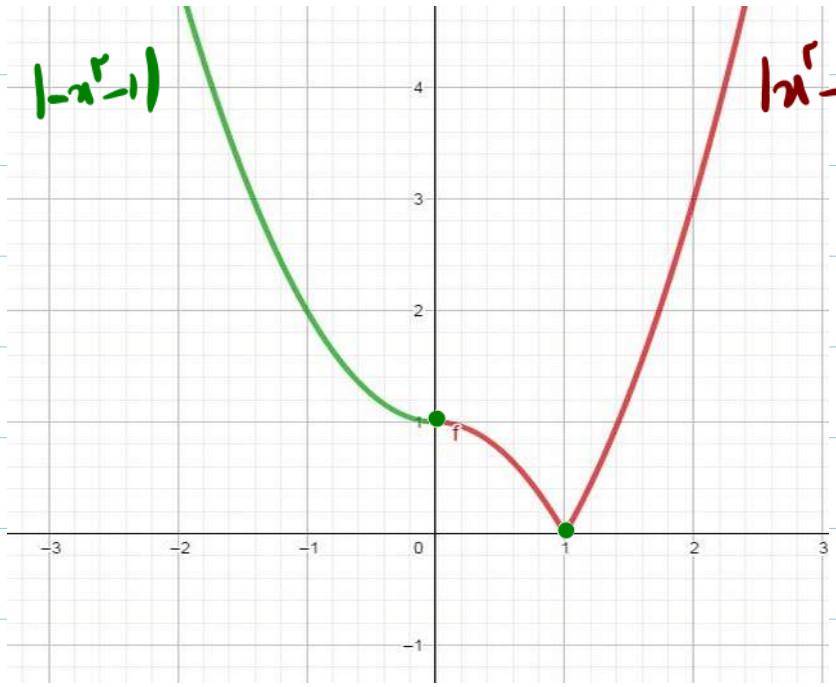


در $x = -1$ و $x = 0$

مشتق موجود نیست پس این نقاط بحرانی‌اند.

ب) $g(x) = |x|x| - 1|$

$$g(x) = \begin{cases} |x(x)-1| & x \geq 0 \\ |x(-x)-1| & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} |x^2-1| & x \geq 0 \\ |1-x^2-1| & x < 0 \end{cases}$$



در $x=1$ مشتق موجود نیست. در $x=0$ مشتق مخالف است. پس $\{0,1\}$

نقاط بحرانی هستند.

v) $f(x)=(x-2)x^{\frac{2}{3}}$

$$f(x)=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{5x^{\frac{2}{3}}}{3}-\frac{4}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-4}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 5x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{5}$$

$f'(x)$ موجود نیست $\rightarrow \sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0$ پس $\{0,\frac{4}{5}\}$ نقاط بحرانی اند.

۱) $f(x)=\sqrt[3]{3x-x^3}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{3-3x^2}{3\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3-3x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$f'(x)$: تغییرات $\Rightarrow 3\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}=0 \Rightarrow 3x-x^3=0$

$$\Rightarrow x(3-x^2)=0 \begin{cases} x=0 \\ 3-x^2=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

پس $\{\sqrt{3}, 0, \pm 1\}$ نقاط بحرانی اند.

۹) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

D_f : $4-x^2\geq 0 \Rightarrow -x^2\geq -4 \Rightarrow x^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq x\leq 2$

$$\Rightarrow D_f=[-2,2]$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x)=0 \longrightarrow -2x=0 \longrightarrow x=0$$

۲- دو نقاط ابتدا و انتها را نمی‌دانیم و دنبال مجانب هم هستیم پس بگردیم

مجموعه نقاط بحرانی یا طول‌های: $\{0, \pm 2\}$

1.) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

D_f : $x^2-1 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 1 \rightarrow x \geq 1$ یا $x \leq -1$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

پس تابع در $x=1$ و $x=-1$ نقطه بحرانی دارند.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس $\{\pm 1, 0\}$ مجموعه طول‌های نقاط بحرانی است.

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل پنجم: کاربرد مشتق

درس اول: اکسترمم‌های تابع

قسمت سوم

جلسه سوم: صفحات ۱۰۸و۱۰۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

آزمون مشتق اول برای تشخیص اکسترمم‌های نسبی :

فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر است :

الف) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در $x=c$ ، max نسبی دارد.

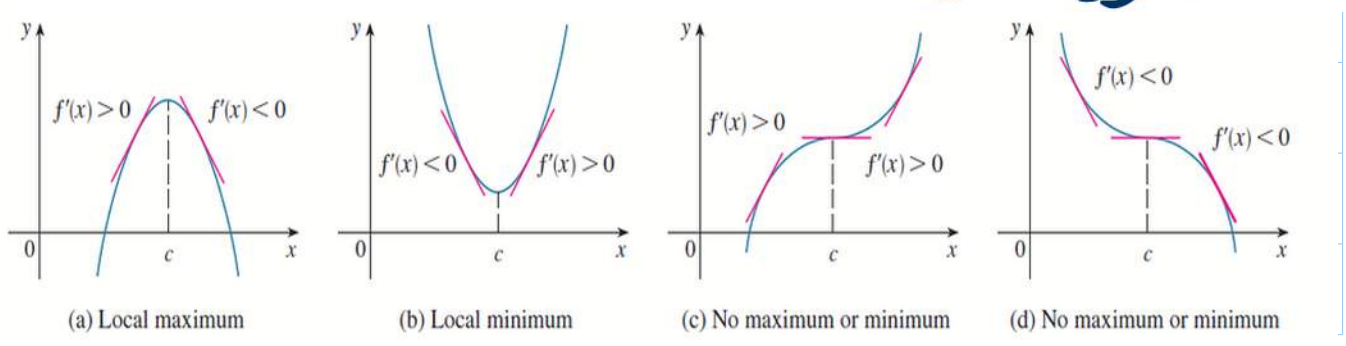
x		c	
f'	+	0	−
f		max	

ب) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در $x=c$ ، min نسبی دارد.

x		c	
f'	−	0	+
f		min	

پ) اگر f در c تغییر علامت ندهد آنگاه f در c ، max یا min نسبی ندارد.

به شکل‌های زیر دقت کنید :



(a) Local maximum (b) Local minimum (c) No maximum or minimum (d) No maximum or minimum

مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^5-5x^4$ را بیابید.

$$f'(x)=5x^4-20x^3=0 \Rightarrow 5x^3(x-4)=0 \begin{cases} 5x^3=0 \to x=0 \\ x-4=0 \to x=4 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘	min	↗	

max

مثال: فاصله نقطه min نسبی تابع $y=x^3-12x+12$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

$$y'=3x^2-12=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	max	↘	-4	↗	

$A(2,-4)$ نقطه min $O(0,0)$

$$OA=\sqrt{(2-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

مثال: تابع $y=\frac{x+1}{x^2-2x}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$$y'=\frac{1(x^2-2x)-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}=\frac{x^2-2x-2\frac{(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}}{(x^2-2x)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-2x^2+2}{(x^2-2x)^2}=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

$$y'=0 \Rightarrow -x^2-2x+2=0 \Rightarrow \Delta=4-4\times(-1)(2)=4+8=12$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{-2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{-2}=\begin{cases}-1+\sqrt{3}\\-1-\sqrt{3}\end{cases}$$

$y'=$ موجودیت : $(x^2-2x)^2=0 \Rightarrow x=0,2$

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y			min				max			

گزینه ۳

مثال کنکور تجربی ۹۹ (خارج)

مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+1}$، کدام است؟

۱) $-1+\sqrt{5}$ ۲) $1+\sqrt{5}$ ۳) $-1+\sqrt{3}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)}{(x^2+1)^2}\cdot\frac{(2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2(x^3+x+x^2+1-x^3-2x^2+3x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(-x^2+4x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad : \quad -x^2+4x+1=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta=16-4(-1)(1)=20$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{-2}=\frac{-4\pm2\sqrt{5}}{-2}=2\pm\sqrt{5}$$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f			min		max		

$$f(2+\sqrt{5})=\frac{(2+\sqrt{5})^2+2(2+\sqrt{5})-3}{(2+\sqrt{5})^2+1}=\frac{4+5+4\sqrt{5}+4+2\sqrt{5}-3}{4+5+4\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{10+4\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}=\frac{5+2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}\times\frac{5-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}=\frac{25-10\sqrt{5}+10\sqrt{5}-20}{25-20}$$

گزینه ۱

$$= \frac{-5+5\sqrt{5}}{5} = -1+\sqrt{5}$$

مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=x-\sqrt{2x-1}$ را بدست آورید.

$$y' = 1 - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}} \qquad D_f = [\tfrac{1}{2}, +\infty)$$

$y'=0$: $\sqrt{2x-1}-1=0 \to \sqrt{2x-1}=1 \to 2x-1=1 \Rightarrow x=1$

y' نامعین : $\sqrt{2x-1}=0 \Rightarrow 2x-1=0 \to x=\frac{1}{2}$

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'	∄	$-$	0	$+$	
y		↘	0 (min)	↗	

min نسبی : $(1,0)$

مثال: طول نقطه ماکسیمم نسبی تابع $f(x)=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)^2 + 2(x-1)x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}+2(x-1)\sqrt[3]{x^2}=\frac{2(x-1)^2+6(x-1)x}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$=\frac{2(x-1)(x-1+3x)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2(x-1)(4x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'=0 \rightarrow 2(x-1)(4x-1)=0 \rightarrow x=1,\frac{1}{4}$$

f' موجود نیست $\rightarrow 3\sqrt[3]{x}=0 \rightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$2(x-1)(4x-1)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$\sqrt[3]{x}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		
f'	$-$	$\exists$	$+$		$-$		$+$		
f				min		max		min	

گزینه ۱

مثال: اگر $(1,1)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^4+ax^2+bx+1$ باشد، a,b را بیابید.

$(1,1)$ روی تابع است $\xrightarrow{\text{در تابع صدق می‌کند}}$ $f(1)=1+a+b+1=1 \rightarrow a+b=-1$

$f'(1)=0 \rightarrow f'(x)=4x^3+2ax+b \Rightarrow f'(1)=4+2a+b=0$

$$\rightarrow 2a+b=-4 \quad \begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=-4 \end{cases} \quad -a=3 \rightarrow a=-3 \quad -3+b=-1 \rightarrow b=2$$

مثال: تابع $f(x)=x^3+ax^2+x-1$ خاصیت اکیداً نزولی است. حدود a را بیابید.

$f'(x)=3x^2+2ax+1$

f' باید همواره مثبت یا همواره منفی باشد.

ولی چون ضریب x^2، 3 مثبت است پس f' همواره مثبت است:

$f'\geq 0 : \quad \Delta\leq 0 : \quad 4a^2-12\leq 0 \rightarrow a^2\leq 3$

$\Rightarrow \quad -\sqrt{3}\leq a\leq \sqrt{3}$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل پنجم: کاربرد مشتق

درس اول: اکسترمم‌های تابع

قسمت چهارم

جلسه چهارم: صفحات ۱۱۰و۱۱۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۴) اکسترمم های مطلق تابع :

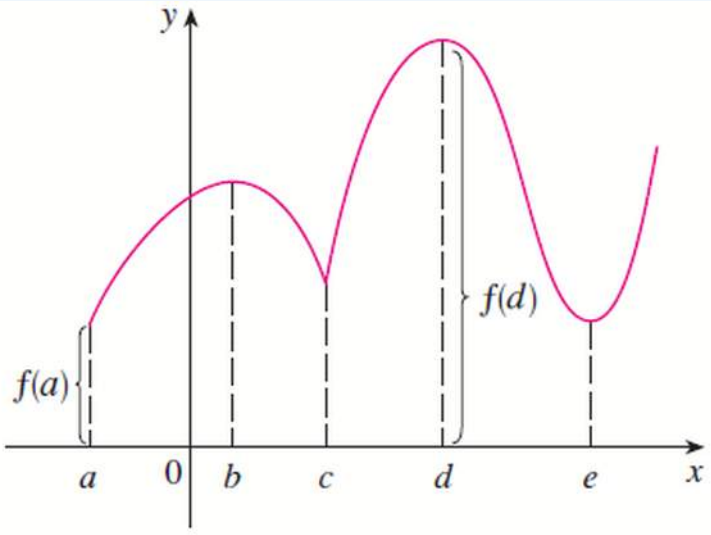
الف) تابع f در $x=c \in D_f$ ، ماکزیمم مطلق دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f

داشته باشیم : $f(c) \geq f(x)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f می گوئیم.

ب) تابع f در $x=c \in D_f$ ، مینیمم مطلق دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f

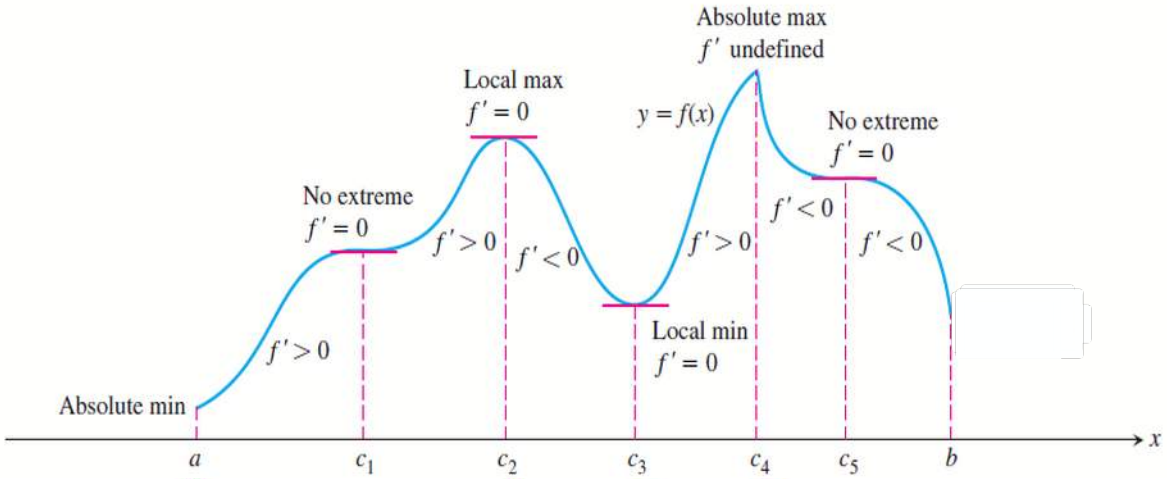
داشته باشیم : $f(c) \leq f(x)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f می گوئیم.

در نمودارهای زیر داریم :



در $x=a$ ، min مطلق داریم.

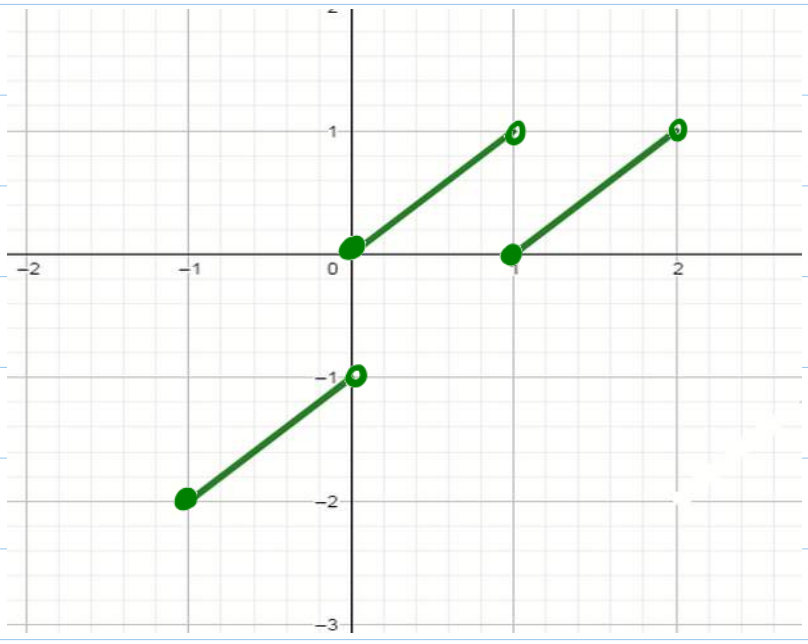
در $x=d$ ، max مطلق داریم.



مینیمم مطلق
ماکسیمم نسبی
مینیمم نسبی
ماکسیمم مطلق و نسبی

مثال: مقادیر max و min مطلق تابع $f(x) = x - [x]^2$ را روی بازه $(-1, 2)$ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ x - 1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$$



ماکسیمم مطلق ندارد.

مینیمم مطلق داریم، $x = -1$

که مقدار آن $f(-1) = -2$ است.

مثال: مقادیر max و min مطلق تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & 0\le x\le 3 \\ x-1 & -1\le x<0 \end{cases}$ را بیابید.

$y=x^2-2x$

max مطلق در $x=3$:

مقدار $f(3)=3$.

$y=x-1$

min مطلق در $x=-1$ با مقدار $f(-1)=-2$.

قضیه: اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه max و min مطلق دارد.

روش یافتن اکسترمم های مطلق توابع پیوسته در بازه $[a,b]$:

ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازه $[a,b]$ می یابیم. سپس مقدار تابع را در نقاط بحرانی حساب می کنیم. بیشترین مقدار max مطلق و کمترین مقدار min مطلق تابع f در بازه هستند.

مثال کنکور تجربی 98

مقادیر max و min مطلق تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-15x^2$ را روی بازه $[-4,4]$ کدام است؟

۱) -44 و 24 ۲) -45 و 27 ۳) -36 و 27 ۴) -27 و 36

$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x-5)(x+3) = 0$ $\begin{cases} x = 5 \notin D_f \\ x = -3 \checkmark \end{cases}$

پس تابع در $x = -3$ نقطه بحرانی دارد.

x	-4	-3	3
y	$\frac{76}{3}$	27	-45
		max نسبی	min نسبی

در $x = -3$ دارد.

$f(-4) = \frac{1}{3}(-4)^3 - (-4)^2 - 15(-4) = -\frac{64}{3} - 16 + 60 = \frac{-64 - 48 + 180}{3} = \frac{68}{3}$

$f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 - (-3)^2 - 15(-3) = -9 - 9 + 45 = 27$

$f(3) = \frac{1}{3}(3^3) - (3)^2 - 15(3) = 9 - 9 - 45 = -45$

گزینه ۲

مثال: حداکثر مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ در بازه $[1, \frac{1}{2}]$ چقدر از کمترین مقدار آن در این بازه بیشتر است؟

۱) $\frac{16}{21}$ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) $\frac{5}{7}$ ۴) $\frac{19}{21}$

$f'(x) = \frac{-(2x-1)\times 1}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ تنها بحرانی

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y	$\frac{4}{7}$ (min)	$\frac{4}{3}$ (max)	1

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{1+2+4}{4}} = \frac{4}{7}$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{1-2+4}{4}} = \frac{4}{3}, \quad f(1) = \frac{1}{1-1+1} = 1$$

$$\max - \min = \frac{4}{3} - \frac{4}{7} = \frac{28-12}{21} = \frac{16}{21}$$ گزینه ۱

مثال: مقدار $\max$، $\min$ مطلق تابع $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ را بیابید.

$$f'(x) = 1\times\sqrt{4-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\times x = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-2x^2+4}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$D_f: \ 4-x^2 \geq 0 \to x^2 \leq 4 \to -2 \leq x \leq 2 \to D_f = [-2,2]$$

$$f'(x) = 0 \to -2x^2+4=0 \to x^2=2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

x	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
y	0	-2 (min)	2 (max)	0

$f(2) = f(-2) = 0$

$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\sqrt{4-2} = -2$

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{4-2} = 2$

مقدار $\max$ مطلق $= 2$ ، مقدار $\min$ مطلق $= -2$

مثال: حاصل ضرب بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) 10 ۴) $5\sqrt{5}$

D_f : ① $x \geq 0$

② $5 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 5$

$D_f = ① \cap ② = [0, 5]$

$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} - \sqrt{x} = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} = \sqrt{x}$

$\xrightarrow[2]{\text{برابر}}$ $2(5-x)=x \rightarrow 20-4x=x \rightarrow -5x=-20 \rightarrow x=4$

x	0	4	5
y	$\sqrt{5}$	5	$2\sqrt{5}$
	min	max	

$f(0)=0+\sqrt{5}=\sqrt{5}$

$f(4)=2\times 2+1=5$

$\max \times \min = 5\sqrt{5}$ گزینه ۴

$f(5)=2\sqrt{5}+0=2\sqrt{5}$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x)=(2x-1)\sqrt[3]{x}$ در فاصله $[-1,1]$ کدام است؟

۱) $\frac{-3}{4}$ ۲) $\frac{-3}{8}$ ۳) $\frac{-2}{3}$ ۴) $\frac{-1}{3}$

$f(x)=(2x-1)x^{\frac{1}{3}}=2x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(8x-1)=\frac{8x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(x)=0 \rightarrow 8x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{8}$

$f'(x)$ موجود نیست : $3\sqrt[3]{x^2}=0 \rightarrow x=0$

x	-1	0	$\frac{1}{8}$	1
y	4 (max)	0	$-\frac{4}{8}$ (min)	1

$f(-1) = -4 \times (-1) = 4$ $\qquad$ $f(0) = (-1) \times 0 = 0$

$f(\frac{1}{8}) = (\frac{1}{4} - 1) \times \frac{1}{2} = -\frac{4}{8}$ $\qquad$ $f(1) = 1 \times 1 = 1$

گزینه ۲

نکته: برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع f روی بازه (a,b)، در روش بالا به جای $f(a)$، $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ و به جای $f(b)$، $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. اگر بیشترین یا کمترین مقدار، در این مقادیر حدی اتفاق افتد آن‌گاه تابع در این بازه max یا min مطلق نخواهد داشت. در مورد بازه‌های $[a,b)$، $(a,b]$، $(-\infty,a)$، $[a,+\infty)$، $(a,+\infty)$، $(-\infty,a]$ و $(-\infty,+\infty)$ هم به این شکل عمل می‌کنیم.

مثال: تابع $f(x) = x^4 - 4x^2$ در بازه $[-1,4]$ مفروض است. اکسترمم‌های مطلق آن را در صورت وجود محاسبه کنید.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$f(0) = 0$, $f(2) = 8 - 12 = -4$, $f(-1) = -1 - 3 = -4$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} x^3 - 3x^2 = 64 - 48 = 16$

x	-1	0	2	4
y	-4	0	-4	16

چون مقدار max در حدّ راست $x \to 4$ بزرگتر است.

تابع در نقاط -1 و 2 مینیمم مطلق دارد: $f(-1) = f(2) = -4$ ولی ماکسیمم مطلق ندارد.

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ روی بازه $(0, +\infty)$ چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۹

$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \frac{16}{0^+} = 0 + \infty = +\infty$ تابع ماکسیمم مطلق ندارد.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$ در $x = 2$ مینیمم مطلق دارد:

گزینه ۲ : $f(2) = 4 + 8 = 12$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل پنجم: کاربرد مشتق

درس دوم: بهینه‌سازی

جلسه پنجم: صفحات ۱۱۳ تا ۱۱۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

بهینه سازی :

هدف از بهینه سازی پیدا کردن بیشترین یا کم‌ترین مقدار یک تابع است.

در اکثر سوالات بهینه سازی، ضابطه تابع به ما داده نمی‌شود و باید با توجه به داده‌های مسئله تابع هدف را بسازیم. مراحل زیر را برای حل اینگونه سوالات دنبال می‌کنیم :

۱- در صورت لزوم شکل مناسبی رسم می‌کنیم.

۲- اگر تابع هدف بیش از یک متغیر داشته باشد با استفاده از شرط سوال (رابطه کمکی) آن را برحسب یک متغیر می‌نویسیم.

۳- از تابع هدف مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم. مقادیر اکسترمم تابع هدف را محاسبه می‌کنیم.

مثال : اگر x و y دو عدد مثبت باشند که $xy=6$، مقدار مینیمم عبارت $P=2x+3y$ را محاسبه کنید.

رابطه کمکی : $xy=6 \rightarrow y=\frac{6}{x}$

$P = 2x + 4 \times \frac{6}{x} \Rightarrow P(x) = 2x + \frac{18}{x}$ تابع هدف

$P'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{18}{x^2} = 2 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \overset{x>0}{\Rightarrow} x = 3$

$y = \frac{6}{3} = 2$ $\qquad P_{min} = 2 \times 3 + 3 \times 2 = 6 + 6 = 12$

مثال: اگر $x + y = 4$ باشد، ماکزیمم $x^3 y$ را بیابید.

$P = x^3 y \Rightarrow P(x) = x^3 (4 - x) = 4x^3 - x^4$: $y = 4 - x$

$P'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3 - x) = 0$ $\begin{cases} 4x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow min \\ 3 - x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow max \end{cases}$

$y = 4 - 3 = 1$: $P_{max} = 3^3 \times 1 = 27$

مثال: بیشترین مساحت مستطیلی که بوسیله یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه یک رودخانه می‌توان محصور کرد، چند متر مربع است؟

رودخانه

a a b

رابطه کلی $2a + b = 48$

$\rightarrow b = 48 - 2a$

تابع هدف : $S = a \times b = a(48 - 2a) = 48a - 2a^2$

$S'(a) = 48 - 4a = 0 \rightarrow 4a = 48 \rightarrow a = 12 \; ; \; b = 48 - 24 = 24$

$S_{max} = 12 \times 24 = 288$

مثال : طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۴ است. بیشترین مقدار مساحت آن را بیابید.



رابطه فیثاغورس : $a^2 + b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 16 - a^2$

$\Rightarrow b = \sqrt{16 - a^2}$

$S = \frac{1}{2} ab \Rightarrow S = \frac{1}{2} a \sqrt{16 - a^2}$

$S'(a) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - a^2} + \frac{-2a}{2\sqrt{16 - a^2}} \times \frac{1}{2} a$

$S'(a) = \frac{16 - a^2 - a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} = \frac{16 - 2a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} = \frac{8 - a^2}{\sqrt{16 - a^2}}$

$S'(a) = 0 \rightarrow 8 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$ و $b = \sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}$

$S_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{8} \times \sqrt{8} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

مثال: کنکور تجربی ۹۹

از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

اگر یک مثلث قائم الزاویه را حول یک ضلع قائم دوران دهیم، در سوط ایجاد می‌شود که شامل قاعده و ارتفاعش برابر اضلاع قائم مثلث اند:

تابع هدف: $V = \frac{۱}{۳}\pi a^۲ b$



رابطه کمکی: رابطه فیثاغورس: $a^۲ + b^۲ = ۱۰۰ \rightarrow a^۲ = ۱۰۰ - b^۲$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰ - b^۲)b = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰b - b^۳)$$

$$V'(b) = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰ - ۳b^۲) = ۰ \rightarrow ۳b^۲ = ۱۰۰ \rightarrow b^۲ = \frac{۱۰۰}{۳}$$

$$a^۲ = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۳} = \frac{۲۰۰}{۳}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a^۲}{b^۲}} = \sqrt{\frac{\frac{۲۰۰}{۳}}{\frac{۱۰۰}{۳}}} = \sqrt{۲}$$ گزینه ۴

مثال: کنکور تجربی خارج ۹۹:

کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطه $A(5,0)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{2x+7}$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) $3\sqrt{2}$

نقطه $B(x,y)$ را روی تابع در نظر می‌گیریم. فاصله A تا B را تابع هدف می‌گیریم که باید min شود:

رابطه کمکی $y=\sqrt{2x+7}$

$AB=\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}$

تابع هدف $AB=\sqrt{x^2-10x+25+2x+7}=\sqrt{x^2-8x+32}$

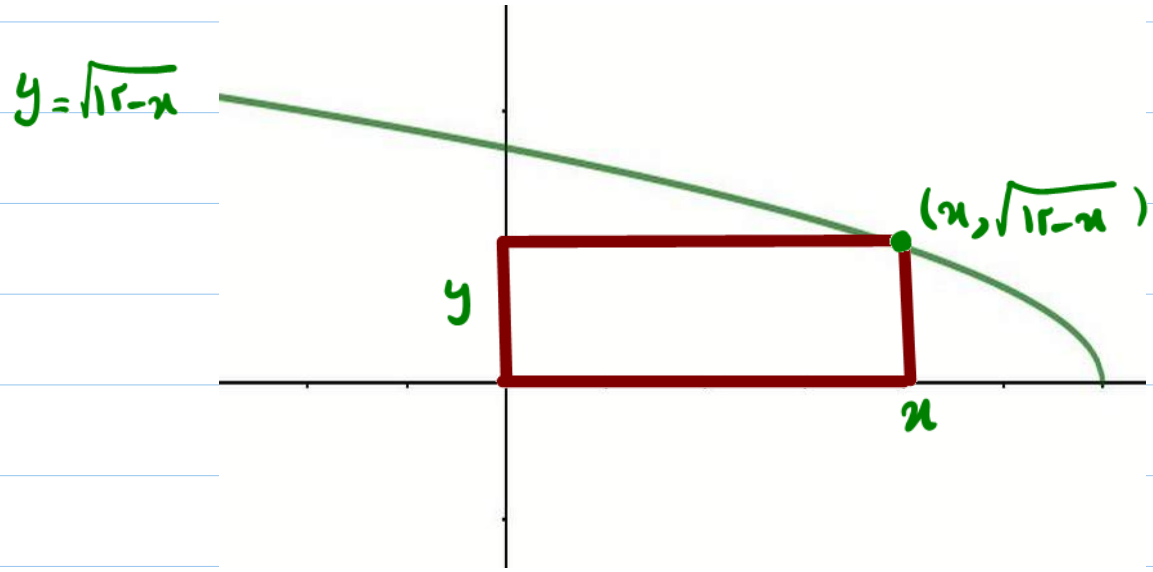
$(AB)'=\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}}=0 \rightarrow 2x-8=0 \rightarrow x=4$

گزینه ۱ $(AB)_{min}=\sqrt{4^2-8\times4+32}=\sqrt{16}=4$

مثال: کنکور تجربی ۹۸

بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{12-x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{3}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸



$$S = xy = x\sqrt{12-x} = \sqrt{12x^2-x^4}$$

$$S'(x) = \frac{24x-3x^2}{2\sqrt{12x^2-x^4}} \rightarrow S'=0 \longrightarrow 24x-3x^2=0$$

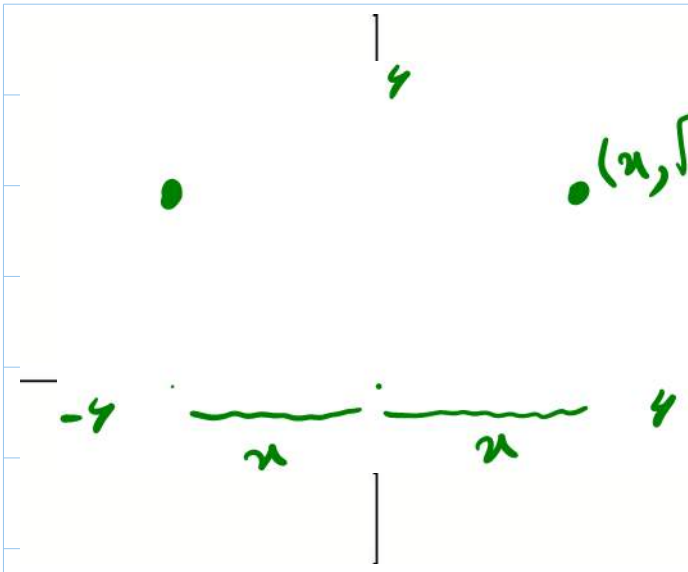
$$3x(8-x)=0 \begin{cases} x=0 \text{ قبول نیست} \\ x=8 \checkmark \end{cases} \quad . \quad y=\sqrt{12-8}=\sqrt{4}=2$$

$$S_{max} = 8\times 2 = 16 \qquad \text{گزینه ۴}$$

مثال: کنکور تجربی خارج ۹۸

بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶



محاط در دایره $x^۲+y^۲=۳۶$

$y^۲=۳۶-x^۲ \Rightarrow y=\sqrt{۳۶-x^۲}$

$$S=۲x\times y=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}=۲\sqrt{۳۶x^۲-x^۴}$$

$$S'_{(x)}=۲\frac{۷۲x-۴x^۳}{۲\sqrt{۳۶x^۲-x^۴}}=۰ \rightarrow ۷۲x-۴x^۳=۰$$

$$۴x(۱۸-x^۲)=۰ \begin{cases} x=۰ \\ x=\sqrt{۱۸} \checkmark \\ x=-\sqrt{۱۸} \end{cases} \quad y=\sqrt{۳۶-۱۸}=\sqrt{۱۸}$$

$$S_{max}=۲\times\sqrt{۱۸}\times\sqrt{۱۸}=۲\times۱۸=۳۶$$ گزینه ۴

مثال: می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای شکل بسازیم که گنجایش آن ۲π لیتر باشد. ارتفاع استوانه چقدر باشد تا هزینه فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟



$V = \pi r^2 h = 2\pi \Rightarrow r^2 h = 2$ القوانين

h

r .

$\Rightarrow h = \frac{2}{r^2}$ بالتعويض //

$S_{\text{كلي}} = S_{\text{قاعدة}} + S_{\text{جانبي}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$S_{\text{كلي}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{2}{r^2} = 2\pi(r^2 + \frac{2}{r})$ نأخذ المشتق

$S'(r) = 2\pi(2r - \frac{2}{r^2}) = 0$

$\frac{2r - 2}{r^2} = 0 \rightarrow 2r^3 - 2 = 0 \longrightarrow r^3 = 1 \longrightarrow r = 1$

$h = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل ششم: هندسه

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

قسمت اول: دوران و برش

جلسه اول: صفحات ۱۲۲تا۱۲۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

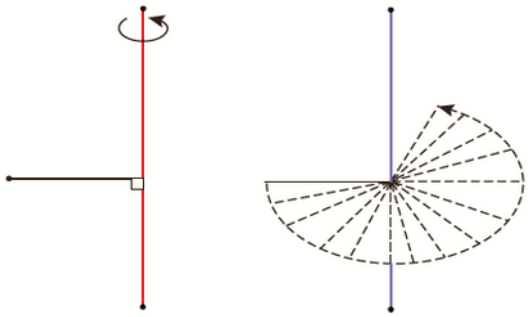
دوران حول محور :

اگر شکلی هندسی را حول یک محور دوران دهیم یک جسم هندسی بدست می‌آید . در شکل‌های زیر حاصل دوران برخی شکل‌های مقروف حول یک محور را نشان داده‌ایم .

۱)

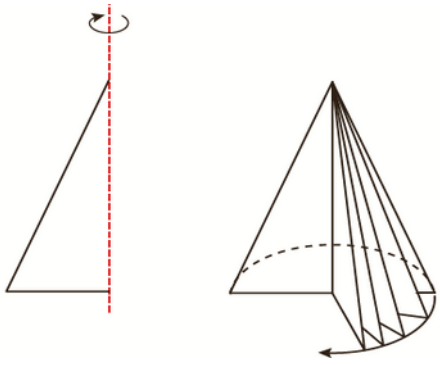
استوانه توخالی

۲) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره‌خط دیگری که بر آن عمود است :



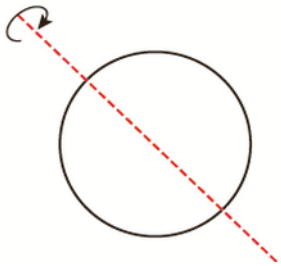
دایره توپر (قرص)

۳) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه :



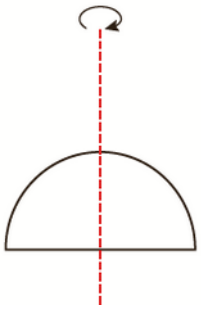
مخروط توخالی

۴) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن :



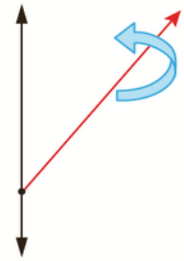
کره توخالی

۵) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن :



نیم کره توخالی

۶) شکل حاصل از دوران نیم‌خط حول‌محور



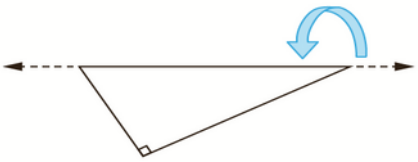
مخروط توخالی (نامتناهی)

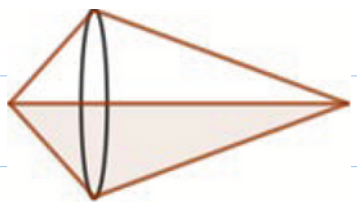
۷) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول‌محور



مخروط توپر

۸) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن





دو مخروط توخالی با قاعده مشترک

مثال:

شکل حاصل رو مخروط با قاعده مشترک و حجم برابر

$r=$ ، $h=$

ح

یادآوری: $V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

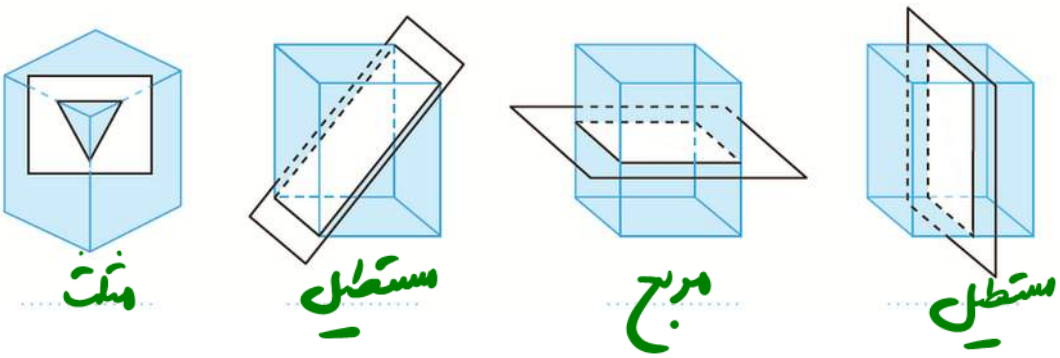
$V_{\text{جسم حاصل}} = 2V_{\text{مخروط}} = 2 \times \frac{1}{3}\pi (12)^2 \times 3 = 8\pi$

برش:

به برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی، برش آن جسم گفته و به شکل حاصل از این برش، سطح مقطع می‌گوییم.

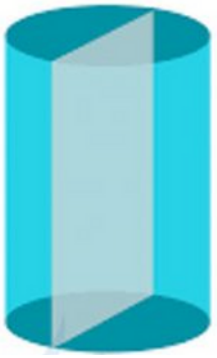
مثال:

یک از حالت‌ها سطح مقطع را مشخص کنید.



مثلث — مستطیل — مربع — مستطیل

مثال: سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟



مستطیل

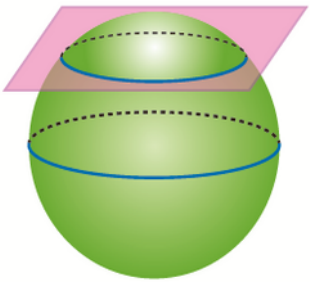


دایره



بیضی

مثال: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟



دایره

در حالتی که صفحه از مرکز کره عبور کند.

مثال:

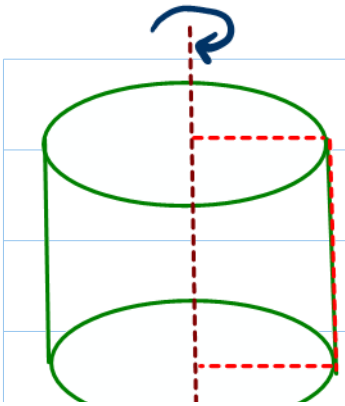
مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.

الف) شکل حاصل را رسم کنید.

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد این استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟

پ) اگر ابعاد مستطیل، ۳و۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحهٔ موازی با قاعدهٔ این استوانه چقدر است؟

ت) در حالت پ، اگر صفحه‌ای عمود بر قاعدهٔ استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟



حل الف) استوانه

حل ب) در حالتی که صفحه حول یکی از قاعده ها و از مرکز قاعده بگذرد و

ارتفاع استوانه و شعاع قاعده مساوی باشند، سطح مقطع یک مربع خواهد بود.

حل پ) حالت اول: عرض = ۴ ، طول = ۴ ، حجم حاصل: استوانه‌ای با شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۴

سطح مقطع دایره‌ای با شعاع ۴ خواهد بود: $S = \pi \times 4^2 = 16\pi$

حالت دوم: عرض = ۴ ، طول = ۴ ، حجم حاصل: استوانه‌ای با شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۴

سطح مقطع دایره‌ای با شعاع ۴ خواهد بود: $S = \pi \times 4^2 = 16\pi$

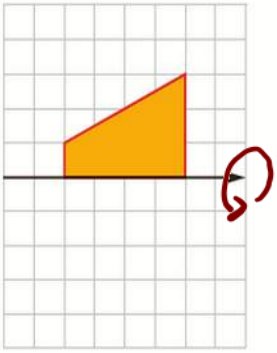
حل ت) اگر صفحه از محور دوران دور کند و بر قاعده عمود باشد، سطح مقطع مستطیلی است

که بیشترین مساحت را دارد.

حالت اول: $S = 4 \times (2 \times 4) = 4 \times 8 = 32$

حالت دوم: $S = 4 \times (2 \times 4) = 4 \times 8 = 32$

مثال : در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.



الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟

حل(الف) حجم حاصل یک مخروط ناقص است.

$r=4$ ، $h'=2$ ، $r'=1$ ، $h=6$

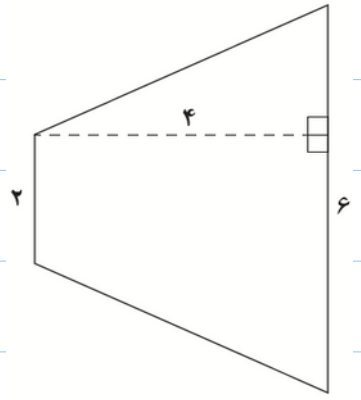
$$V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{مخروط کامل}} - V_{\text{مخروط رنگ نشده}}$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r'^2 h'$$

$$= \frac{1}{3}\pi(4)^2 \times 6 - \frac{1}{3}\pi(1)^2 \times 2$$

$$= 18\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{54\pi - 2\pi}{3}$$

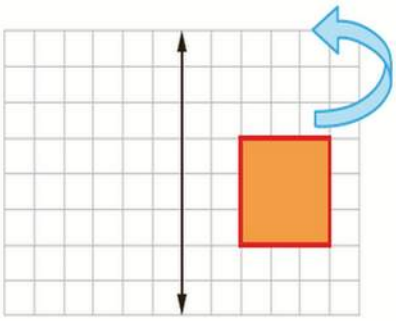
$$\Rightarrow V_{\text{مخروط ناقص}} = \frac{52\pi}{3}$$



حل ب) یادآوری: مساحت ذوزنقه $= \frac{1}{2}$(مجموع دو قاعده) × ارتفاع

$$S = \frac{1}{2}(2+6)\times 4 = 2(8) = 16$$

مثال :



مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصلهٔ ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن توصیف کنید.



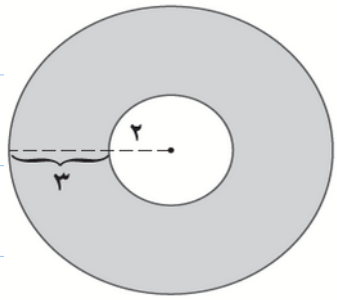
حل الف)

$$V_{\text{حجم حاصل}} = V_{\text{استوانه بزرگ}} - V_{\text{استوانه کوچک}}$$

یادآوری : $V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h$

$$V_{\text{حجم حاصل}} = \pi(5)^2 \times 3 - \pi(2)^2 \times 3$$

$$= 75\pi - 12\pi = 63\pi$$



حل ب)

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل ششم: هندسه

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

قسمت دوم: بیضی

جلسه دوم: صفحات ۱۲۶تا۱۳۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

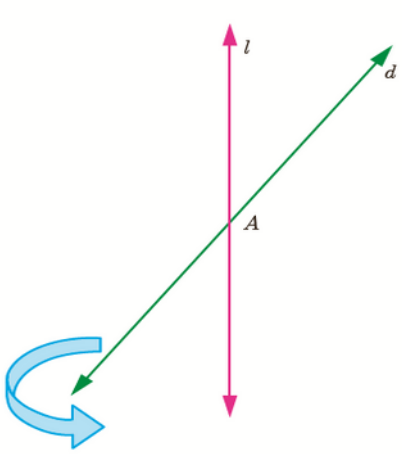
معاونت آموزش متوسطه

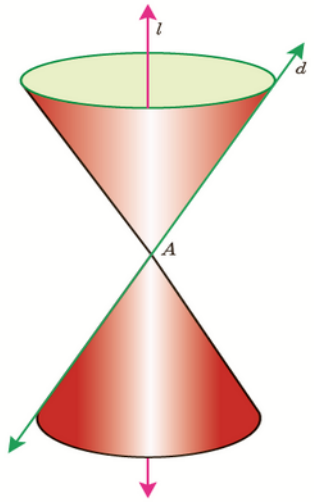
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

آشنایی با مقاطع مخروطی

فرض کنید خط‌های d و l در نقطه A متقاطع باشند. اگر خط d را حول خط l دوران دهیم شکل حاصل را یک سطح مخروطی می‌نامیم. در این سطح، خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد می‌نامیم.

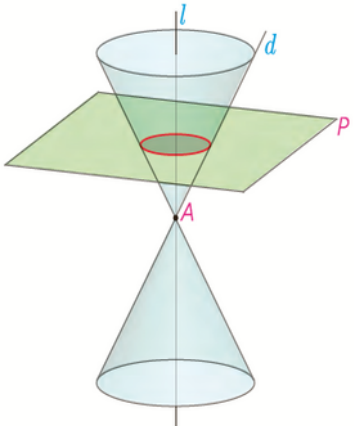




اگر یک سطح مخروطی را با یک صفحه برش دهیم، مقطع مخروطی بوجود می‌آید. با توجه به موقعیت صفحه و سطح مخروطی، مقاطع مخروطی متعددی حاصل خواهد شد.

۱) دایره :

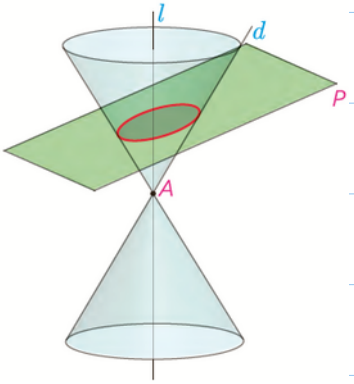
اگر سطح مخروطی را با یک صفحه که بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند



برش دهیم ، سطح مقطع دایره خواهد بود .

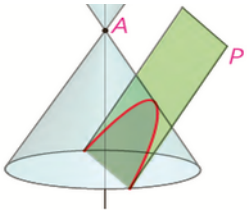
۲) بیضی :

اگر سطح مخروطی را با صفحه‌ای برش دهیم که نه بر محور سطح مخروطی عمود باشد نه با مولد سطح مخروطی موازی باشد و نه از رأس عبور کند ، سطح مقطع حاصل ، بیضی خواهد بود.



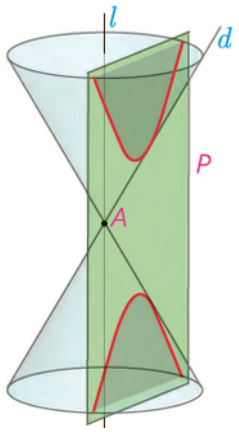
۳) سهمی :

اگر سطح مخروطی را با صفحه‌ای برش دهیم که با مولد سطح مخروطی موازی است و از رأس عبور نمی‌کند شکل حاصل سهمی خواهد بود .

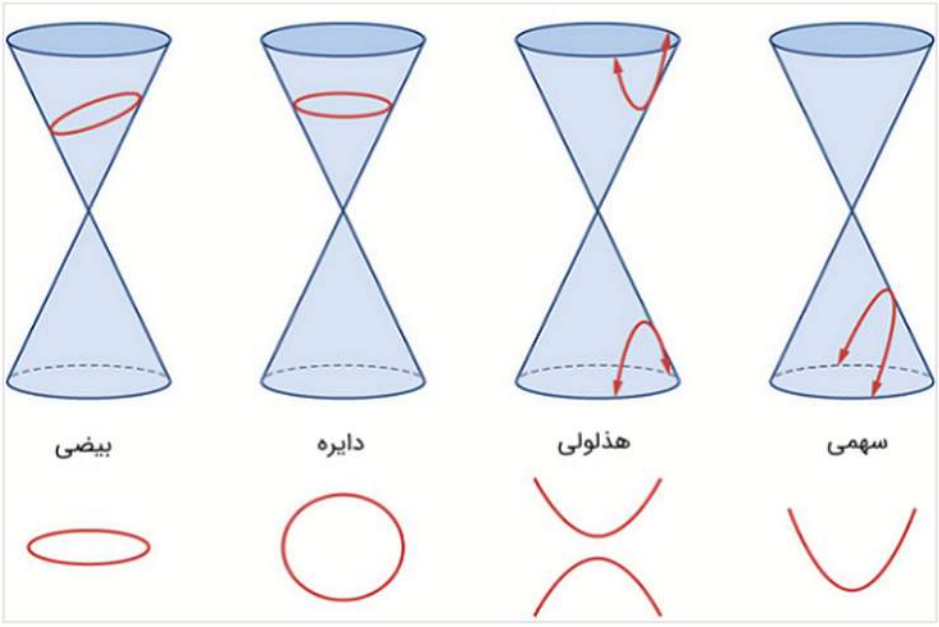


۴) هذلولی :

در صورتی که سطح مخروطی را با صفحه‌ای برش دهیم که هم قسمت بالایی و هم قسمت پائینی سطح را قطع کند و از رأس نگذرد، سطح مقطع حاصل، یک هذلولی خواهد بود.



جمع بندی :



بررسی بیشتر بیضی :

تعریف : بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله های آن نقاط از دو نقطه ثابت در صفحه، عددی ثابت است.

عدد ثابت $= MF + MF'$



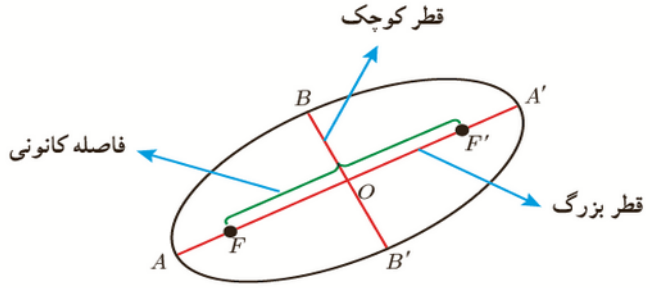
معرفی اجزای بیضی :

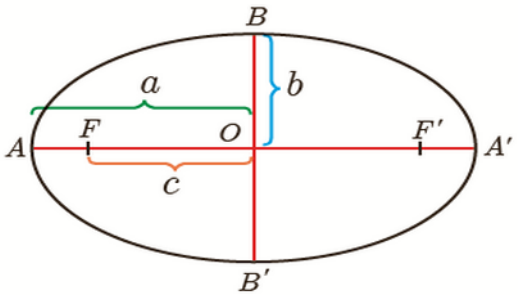
۱) دو نقطه ثابت F و F' را کانون های بیضی می نامیم و اندازه FF' فاصله کانونی بیضی نامیده می شود و برابر $2c$ تعریف می شود یعنی $FF' = 2c$.

۲) وسط FF' را مرکز بیضی در نظر گرفته و با O نشان می دهیم .

۳) قطری که از کانون های بیضی می گذرد را قطر بزرگ یا کانونی بیضی می نامیم و با AA' نشان می دهیم و اندازه آن را برابر $2a$ می گیریم یعنی $AA' = 2a$.

۴) قطری که بر قطر بزرگ در مرکز بیضی عمود است را قطر کوچک بیضی نامیده و با BB' نمایش می‌دهیم و اندازه آن را $2b$ می‌گیریم یعنی $BB'=2b$.





تذکر: اگر قطر بزرگ بیضی، افقی باشد، بیضی افقی است و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی قائم است.

قضیه ۱) مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های آن برابر طول قطر بزرگ بیضی است یعنی: $MF+MF'=AA'=2a$

اثبات:



برای نقطه A: متقارنش $= AF+AF' = AF+(AF+FF') = 2AF+FF'$ (۱)

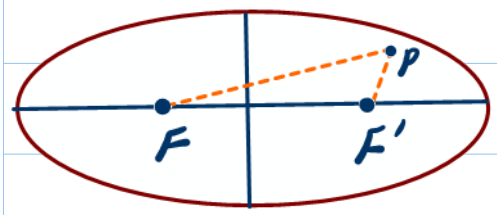
برای نقطه A': مقدار ثابت $= A'F' + A'F = A'F' + (A'F + FF') = 2A'F' + FF'$ (۲)

(۱) و (۲) $\rightarrow$ مقدار ثابت $= 2AF + FF' = 2A'F' + FF' \Rightarrow 2AF = 2A'F'$

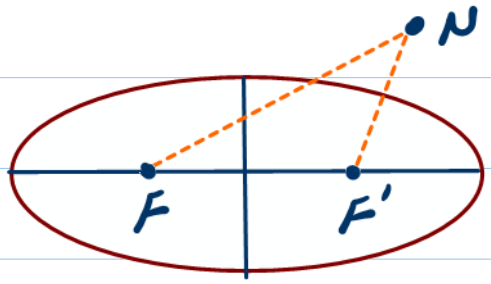
$\Rightarrow AF = A'F'$

A: مقدار ثابت $= AF + AF' = A'F' + AF' = AA' = 2a$ ☑

نتیجه: اگر نقطه‌ای خارج بیضی باشد، مجموع فاصله‌های آن تا کانون‌های بیضی از $2a$ بیشتر است و اگر نقطه‌ای درون بیضی باشد، مجموع فاصله‌های آن تا کانون‌های بیضی از $2a$ کمتر است.



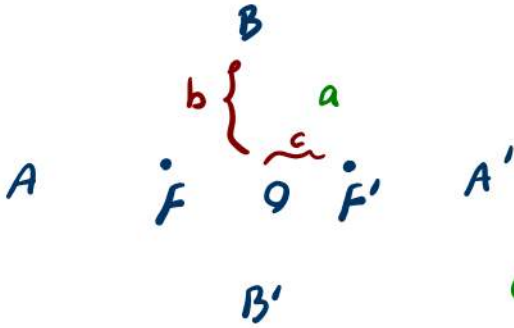
$PF + PF' < 2a$



$NF + NF' > 2a$

قضیه ۲) اگر در یک بیضی، نصف طول قطر بزرگ برابر a، نصف طول قطر کوچک برابر b و نصف فاصله کانونی برابر c باشد، آنگاه $a^2=b^2+c^2$.

اثبات:



از B به F' وصل می‌کنیم.

متقارن است $BF+BF'=2a$: B روی بیضی

از طرفی BB' عمود منصف FF' است و هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است پس $BF=BF'$ بنابراین $BF'=a$.

در مثلث قائم‌الزاویه BOF' قضیه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$BF'^2 = BO^2 + OF'^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$ ■

مثال:

$$a^2=b^2+c^2 \rightarrow a^2-b^2=c^2 \Rightarrow 5^2-3^2=c^2 \Rightarrow 25-9=c^2$$

$$\rightarrow c^2=16 \rightarrow c=4 \rightarrow FF'=2c=2\times 4=8$$

مثال : در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات (۴،۵) باشد :

الف) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید.

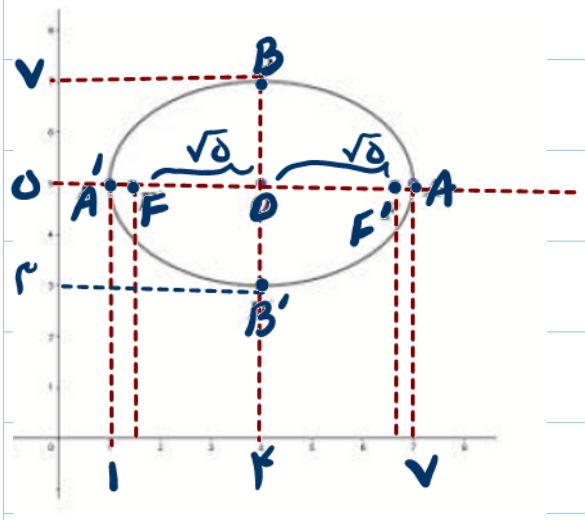
ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.

الف) $AA' = 2a = 6 \rightarrow a = 3$

$BB' = 2b = 4 \rightarrow b = 2$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 - b^2 = c^2 \rightarrow 3^2 - 2^2 = c^2 \rightarrow 9 - 4 = c^2 \rightarrow c^2 = 5$

$\rightarrow c = \sqrt{5} \rightarrow FF' = 2c = 2\sqrt{5}$



ب)

$A(7,5)$, $A'(1,5)$

$B(4,7)$, $B'(4,3)$

$F(4-\sqrt{5},5)$, $F'(4+\sqrt{5},5)$

خروج از مرکز بیضی :

مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم و با حرف e نمایش می‌دهیم.

چون $a^2 = b^2 + c^2$ پس $a > c$ است و در نتیجه $0 < \frac{c}{a} < 1$. بنابراین

خروج از مرکز همیشه از یک کمتر است.

هر چقدر خروج از مرکز بزرگتر و به یک نزدیکتر باشد، بیضی کشیده‌تر و هر چقدر خروج از مرکز کوچکتر

و به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیکتر می‌شود.

مثال:

الف) طول قطر کانونی و فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

الف) $BB' = 2b = 6 \rightarrow b = 3$ ، $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

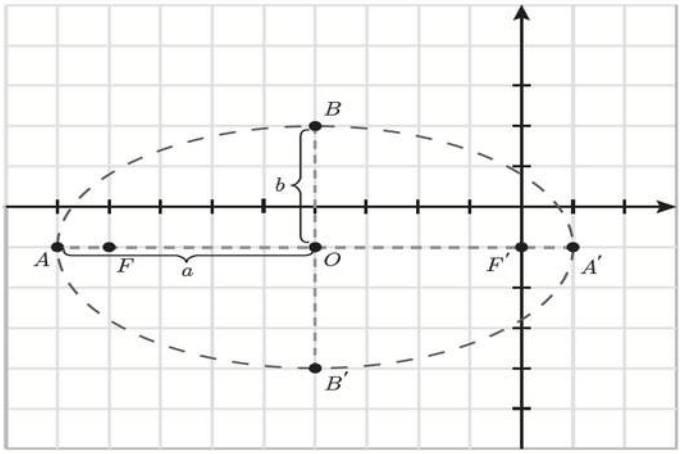
$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} \rightarrow 5c = 4a \xrightarrow{\div 5} c = \frac{4}{5}a$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 3^2 + (\frac{4}{5}a)^2 \rightarrow a^2 - \frac{16}{25}a^2 = 9$

$$\frac{25a^2-16a^2}{25}=9 \rightarrow \frac{9}{25}a^2=9 \xrightarrow{\div 9} \frac{a^2}{25}=1 \rightarrow a^2=25 \rightarrow a=5$$

$$c=\frac{\varepsilon}{5}a=\frac{\varepsilon}{5}\times 5=\varepsilon$$

$$AA'=2a=2\times 5=10 \quad , \quad FF'=2c=2\times\varepsilon=8$$



ب)

$A(-9,-1)$ $A'(1,-1)$

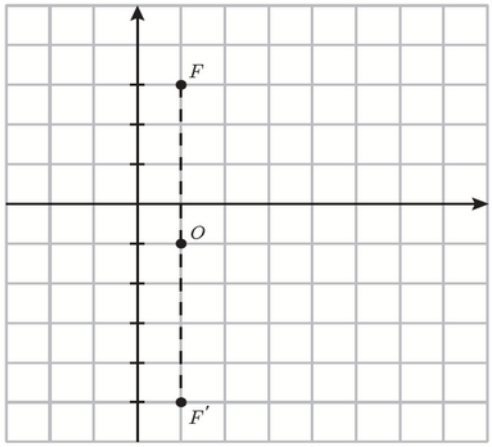
$B(-\varepsilon,2)$ $B'(-\varepsilon,-\varepsilon)$

$F(-8,-1)$ $F'(0,-1)$

مثال: ,۱) و (۵–, ۱) است.

الف) فاصلهٔ کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادلهٔ قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a=۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.



الف) با توجه به مختصات کانونی بیضی قائم است

$$FF'=|3-(-5)|=|3+5|=8$$

O وسط FF' است. $O=\left(\frac{1+1}{2},\frac{-5+3}{2}\right)=(1,-1)$

طول نقطه بزرگ: $x=1$ طول نقطه کوچک: $y=-1$

ب) $FF'=2c=8\rightarrow c=4$, $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2-c^2=b^2$

$\Rightarrow 6^2-4^2=b^2\rightarrow 36-16=b^2\rightarrow 20=b^2\rightarrow b=\sqrt{20}$

$\Rightarrow b=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$ $\Rightarrow BB'=2b=2(2\sqrt{5})=4\sqrt{5}$

$e=\frac{c}{a}\Rightarrow e=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

مثال کنکور ۹۸:

کدام است؟

✓

$FF'=\sqrt{(2-2)^2+(7-(-1))^2}=\sqrt{0+8^2}=\sqrt{64}=8=2c\rightarrow c=4$

$BB'=2b=6\rightarrow b=3$, $a^2=b^2+c^2\rightarrow a^2=9+16\rightarrow a^2=25$

$\rightarrow a=5\rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=\%80$ گزینه ۴

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل ششم: هندسه

درس دوم: دایره

قسمت اول

جلسه سوم: صفحات ۱۳۴ تا ۱۳۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

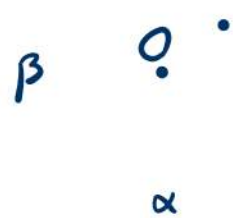
دایره :

تعریف : مجموعه نقاطی از صفحه را که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت به نام مرکز، مقداری ثابت و غیرصفر به نام شعاع است، دایره می‌نامیم.

دایره‌ی C به مرکز O و شعاع r را با $C(O,r)$ نشان می‌دهیم.

معادله استاندارد دایره :

اگر نقطه O به مختصات (α,β) مرکز دایره و r شعاع آن باشد، معادله استاندارد دایره به صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ است. زیرا اگر فاصله نقطه M با مختصات (x,y) روی محیط دایره را از مرکز دایره یعنی $O(\alpha,\beta)$ به دست آوریم :



$$OM=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} \xrightarrow{OM=r} r=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

یادآوری ۱ : فاصله دو نقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ یا طول پاره‌خط AB :

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

یادآوری ۲ : مختصات وسط پاره AB :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

مثال:

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2,-1)$ باشد.

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2,3)$ و نقطهٔ $(-9,-3)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

پ) دایره‌ای که نقاط $(3,0)$ و $(-1,-4)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

الف) مرکز دایره $C(2,-1)$ روی محیط دایره $P(0,0)$



$$|PC|=r=\sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}\rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=5$$

ب) $O(2,3)$ روی محیط دایره $P(-3,-9)$



$$|PO|=r=\sqrt{(-3-2)^2+(-9-3)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=169$$

پ)



$$AB=2r=\sqrt{(-4-0)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=\sqrt{2\times16}=4\sqrt{2}$$

$AB = 4\sqrt{2} \xrightarrow{\div 2} r = 2\sqrt{2} \longrightarrow r^2 = 4 \times 2 = 8$

$O_{\text{وسط } AB} = \left(\frac{-4+0}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (\overset{\alpha}{-2}, \overset{\beta}{1}) \longrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$

$\alpha \to -(-1)$ ، $\beta \to r^2$

مثال :

$O(-1,0)$ ، $r^2 = 4 \to r = 2$

محل برخورد با محور xها : $y=0 \to (x+1)^2 + 0^2 = 4 \to (x+1)^2 = 4 \xrightarrow{\sqrt{}} x+1 = \pm 2$

$\begin{cases} x+1=2 \to x=1 \\ x+1=-2 \to x=-3 \end{cases}$ نقاط تقاطع با محور xها $(1,0), (-3,0)$

محل برخورد با محور yها : $x=0 \to (0+1)^2 + y^2 = 4 \to 1+y^2=4 \to y^2=3 \to y = \pm\sqrt{3}$

نقاط تقاطع با محور yها : $(0,\sqrt{3}), (0,-\sqrt{3})$

معادله صفحی یا گسترده دایره :

اگر با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، معادله استاندارد دایره را باز کنیم به معادله گسترده دایره می‌رسیم

که به صورت : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است.

(سه عدد حقیقی)

در فرم صفحی دایره مختصات مرکز $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ است و شعاع از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

تذکر: با توجه به رابطه فیثاغورس و اینکه باید زیر رادیکال مثبت باشد می‌توان گفت زمانی معادله $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله یک دایره است که $a^2+b^2-4c>0$ باشد

a b c

مثال:

استاندارد بنویسید.

روش اول:

$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) \rightarrow O(-\frac{-2}{2},-\frac{-6}{2}) \rightarrow O(1,3)$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-6)^2-4\times 6}=\frac{1}{2}\sqrt{4+36-24}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$

معادله استاندارد: $(x-1)^2+(y-3)^2=4$

روش دوم: استفاده از روش کامل کردن:

$x^2+y^2-2x-6y+6=0 \rightarrow \underline{x^2-2x}+\underline{y^2-6y}+6=0$

یادآوری: برای کامل کردن نصف ضریب متغیر به توان ۲ را اضافه و کم می‌کنیم.

ضریب x: $(\frac{-2}{2})^2=1$

ضریب y: $(\frac{-6}{2})^2=9$

$\underbrace{x^2-2x+1}-1+\underbrace{y^2-6y+9}-9+6=0$

$(x-1)^2+(y-3)^2-1-9+6=0 \rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4$

مثال: حدود a را طوری بیابید که $x^2+y^2-4x+y-a=0$ معادله ضمنی یک دایره باشد.

$$(-4)^2+1^2-4(-a)>0 \rightarrow 9+1+4a>0 \rightarrow 4a>-10$$

$$\rightarrow a>-\frac{1}{4} \rightarrow a>-\frac{5}{2}$$

وضاع نسبی نقطه و دایره :

دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r را در نظر بگیرید.

(الف) اگر نقطه A روی دایره باشد فاصله آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است یعنی $OA=r$. پس نقاطی که مختصات آنها در تساوی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ صدق می‌کنند نقاطی هستند که روی دایره قرار دارند.

ب) اگر نقطه B درون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است یعنی $OB<r$. پس نقاطی که مختصات آنها در نامساوی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<r^2$ صدق می‌کنند، نقاطی هستند که درون دایره قرار دارند.

پ) اگر نقطه c بیرون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است یعنی $OC > r$. پس نقاطی که مختصات آن‌ها در نامساوی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 > r^2$ صدق می‌کنند، نقاطی هستند که بیرون دایره قرار دارند.

مثال:

نقاط			شعاع و مختصات مرکز دایره	معادلهٔ دایره

C_1: دایره به مرکز $(-2,3)$ و شعاع 4 — درون دایره | روی دایره | بیرون دایره

$C_2: (x-1)^2+(y+2)^2=9$ — بیرون دایره | روی دایره

$A(1,1) \xrightarrow{C_1} (1+2)^2+(1-3)^2 = 9+4 = 13 > 4^2$ — بیرون دایره

$B(0,3) \xrightarrow{C_1} (0+2)^2+(3-3)^2 = 4+0 = 4^2$ — روی دایره

$C(-2,4) \xrightarrow{C_1} (-2+2)^2+(4-3)^2 = 0+1 = 1 < 4^2$ — درون دایره

$A(1,1) \xrightarrow{C_2} (1-1)^2+(1+2)^2 = 0+9 = 9 = 3^2$ — روی دایره

$C(-2,4) \xrightarrow{C_2} (-2-1)^2+(4+2)^2 = 9+36 = 45 > 9 = 3^2$ — بیرون دایره

نکته: برای بررسی وضعیت نسبی نقطه و دایره در شکل گسترده داریم، مختصات نقطه را در دایره قرار می دهیم. اگر مقدار بدست آمده روی دایره، اگر عددی منفی شد درون دایره و اگر عددی مثبت بدست آمد بیرون دایره است.

مثال:

کنید.

$(0,0) \rightarrow 0^2+0^2-2\times0+4\times0+1=1>0$ بیرون دایره

$(-1,-2) \rightarrow (-1)^2+(-2)^2-2(-1)+4(-2)+1=1+4+2-8+1=0$ روی دایره

$(0,-1) \rightarrow 0^2+(-1)^2-2\times0+4(-1)+1=1-4+1=-2<0$ درون دایره

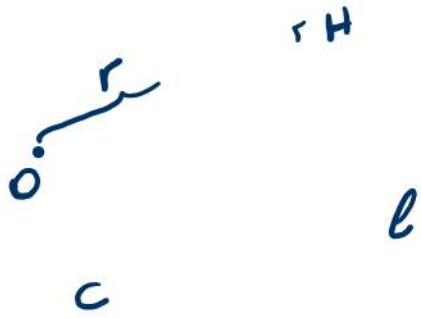
$(1,0) \rightarrow 1^2+0^2-2\times1+4\times0+1=1-2+1=0$ روی دایره

اوضاع نسبی خط و دایره :

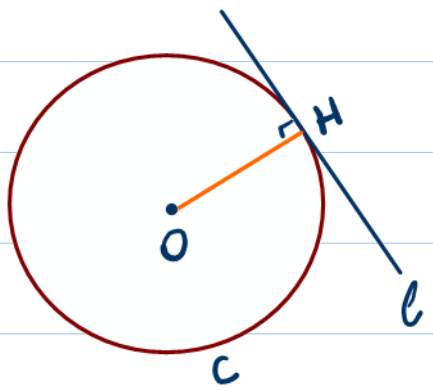
یک خط و دایره می توانند به سه حالت زیر کنار هم قرار گیرند :

(الف) دایره و خط هیچ نقطه مشترکی با هم نداشته باشند یعنی دایره و خط یکدیگر را قطع نکنند.

اگر فاصله مرکز دایره تا خط را OH بگیریم داریم : $OH > r$

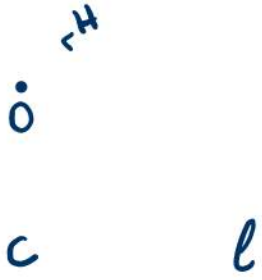


ب) دایره و خط یک نقطه مشترک داشته باشند، یعنی خط بر دایره مماس باشد. خط مماس در نقطه تماس بر شعاع نظیر نقطه تماس عمود است و داریم : $OH = r$



پ) دایره و خط دو نقطه مشترک داشته باشند، یعنی خط دایره متقاطع باشند. در این حالت

داریم : $OH < r$.



یادآوری رابطه فاصله نقطه از خط :

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $l: ax+by+c=0$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال :

$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

الف)

$O\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{-4}{2}\right) = (2,2)$ ، $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2-4\times 7} = \frac{1}{2}\sqrt{16+16-28}$

$\rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{4} = \frac{1}{2}\times 2 = 1$

ضریب y در خط ضریب x در خط

فاصله مرکز دایره تا خط $OH = \frac{|۱۶\times۲ + ۴\times۲ + ۵|}{\sqrt{۶^۲ + ۴^۲}} = \frac{۲۰}{\sqrt{۳۶+۱۶}} = \frac{۲۰}{\sqrt{۵۲}} = \frac{۲۰}{\sqrt{۱۳\times۴}}$

$$OH = \frac{۲۰}{۲\sqrt{۱۳}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۱۳}} \simeq ۲,۷۷$$

$۲,۷۷ = OH > r = ۱$ $\Rightarrow$ خط دایره را قطع نمی‌کند.
(بیرون دایره)

ب)

$O(۰,۰)$, $r = \sqrt{۲}$ $\qquad$ $l: x+y+۲=۰$

$$OH = \frac{|۱\times۰ + ۱\times۰ + ۲|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

$\Rightarrow OH = r = \sqrt{۲}$ خط بر دایره مماس است.

$r^۲$

ب)

$O(۲,-۳)$, $r = ۲$ $\qquad$ $l: y+۱=۰$

$$OH = \frac{|۰\times۲ + ۱(-۳) + ۱|}{\sqrt{۰^۲+۱^۲}} = \frac{|-۳+۱|}{۱} = |-۲| = ۲ \Rightarrow OH = r = ۲$$

خط بر دایره مماس است

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل ششم: هندسه

درس دوم: دایره

قسمت دوم

جلسه چهارم: صفحات ۱۳۹ تا ۱۴۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مثال:

α ، β

ℓ

H ، r

O

$\ell: 3x - 4y - 3 = 0$

$$OH = r = \frac{|3\times 0 - 4\times 3 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3$$

معادله دایره: $(x-0)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 + (y-3)^2 = 9$

مثال:

ط

چون شعاع دایره بر خط مماس است، $OA \perp \ell$

پس OA است و شیب آن قرینه و عکس شیب ℓ

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

$m_\ell = -\frac{3}{4}$ ، $A(3,4)$

$y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3) \xrightarrow{\times 4} 4y - 16 = -3x + 9 \Rightarrow 3x + 4y - 25 = 0$

معادله خط ℓ

نکته : در حالتی که خط و دایره متقاطع اند ، دایره روی خط وتری به طول d جدا می‌کند

که از رابطه $AB = 2\sqrt{r^2 - OH^2}$ بدست می‌آید زیرا :



اگر در مثلث قائم‌الزاویه AOH فقط مشخص را بنویسم:

$$r^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow AH^2 = r^2 - OH^2$$

$$\rightarrow AH = \sqrt{r^2 - OH^2}$$

به راحتی ثابت می‌شود $AH = BH$ پس :

$$AB = 2AH = 2\sqrt{r^2 - OH^2}$$

مثال :

جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.

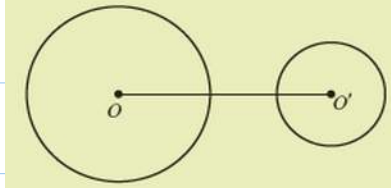
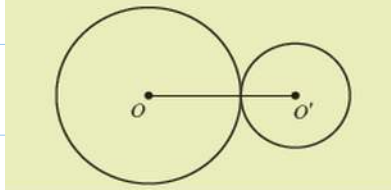
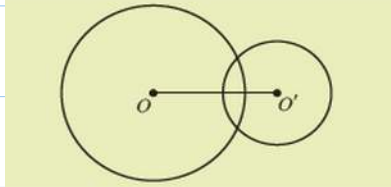
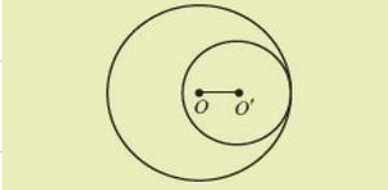
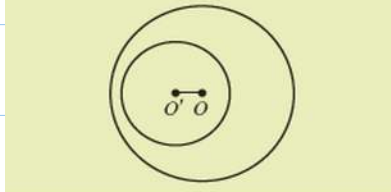
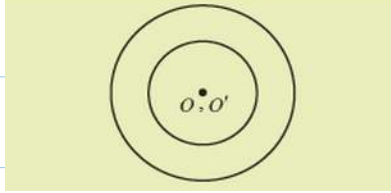
$$OH = \frac{|3\times 2 - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 12 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$AB = 2\sqrt{r^2 - OH^2} \rightarrow 6 = 2\sqrt{r^2 - 4^2} \xrightarrow{\div 2} 3 = \sqrt{r^2 - 16}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} 9 = r^2 - 16 \rightarrow r^2 = 25 \rightarrow r = 5 \rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

اوضاع نسبی دو دایره :

اگر نقاط O و O' مرکزهای دو دایره به شعاع‌های r و r' باشند و پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند، خط‌المرکزین بنامیم و با d نمایش دهیم، وضعیت دو دایره با توجه به طول r، r' و d به یکی از صورت‌های زیر است : $(r > r')$

دو دایره بیرون هم (متخارج)	$d > r + r'$	
دو دایره مماس بیرون	$d = r + r'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$r - r' < d < r + r'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d = r - r'$	
دو دایرهٔ متداخل	$d < r - r'$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d = 0$	

مثال:

الف)

C_1 ↖ C_2 ↖

C_1 : $O(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}) \to O(1,-2)$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(4)^2-4(-4)}$

$\to r = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+16} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = \frac{1}{2}\times 6 = 3$

C_2 : $O'(-\frac{2}{2}, -\frac{-4}{2}) \to O'(-1,2)$, $r' = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2-4(-9)}$

$\to r' = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+36} = \frac{1}{2}\sqrt{56} = \frac{1}{2}\sqrt{14\times 4} = \sqrt{14} \approx 3.7$

$d = OO' = \sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4.47$

$\sqrt{14}-3 < \sqrt{20} < \sqrt{14}+3$ (3.7 , 4.47 , 6.7) $\to r'-r < OO' < r'+r \to$ دو دایره متقاطع‌اند

C_1 C_2

ب)

C_1 : $O(2,-3)$, $r = \sqrt{7}$ $\qquad$ C_2 : $O'(0,5)$, $r' = \sqrt{5}$

$OO' = \sqrt{(2-0)^2+(-3-5)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} \Rightarrow \sqrt{68} > \sqrt{7}+\sqrt{5}$

$\Rightarrow OO' > r+r' \Rightarrow$ دو دایره متخارج‌اند.

C_1 : α β

مثال:

$C_1 : O'(-\frac{-2}{2}, -\frac{-4}{2}) \to O'(-1, 2)$

$r' = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2-4(-4)} = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+16} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$

$OO' = \sqrt{(2+1)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

وضعیت نسبی : $OO' = r + r' \to 5 = r + 3 \to r = 2$

معادله دایره : $(x-2)^2+(y+2)^2 = 4$

C_1 O α β

مثال:

$C_1 : O'(-\frac{-4}{2}, -\frac{-6}{2}) = (2, 3)$

$r' = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)} = \frac{1}{2}\sqrt{16+36+12} = \frac{1}{2}\sqrt{64} = \frac{1}{2}\times 8 = 4$

$OO' = \sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

وضعیت نسبی $OO' = |r - r'| \to 5 = |r-4| \begin{cases} r = 9 \checkmark \\ r = -1 \times \end{cases}$

معادله دایره : $(x+1)^2+(y+1)^2 = 81$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل هفتم: احتمال

یادآوری: مفاهیم شمارش و احتمال

جلسه اول: صفحه ۱۴۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

نکات و مفاهیم پایه در شمارش :

۱- اصل ضرب : فرض کنید انجام کاری k مرحله دارد. اگر مرحله اول را بتوان به m_1 طریق

یا

تکیه بر «و» انجام داد، مرحله دوم را به m_2 طریق و ... مرحله k ام را به m_k طریق

انجام داد، کل کار مورد نظر را می‌توان به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق انجام داد.

۲- اصل جمع : فرض کنید توان کاری را از k روش انجام داد. اگر روش اول به m_1 طریق،

یا

تکیه بر «یا» روش دوم به m_2 طریق و ... و روش kام به m_k طریق ممکن باشد و بخواهیم

فقط یکی از این k روش را انتخاب کنیم، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$

یا از روش اول یا از روش دوم یا ...

طریق وجود دارد.

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

✓

$\boxed{۹} \times \boxed{۸} \times \boxed{۷} \times \boxed{۱_{۵}} = ۵۰۴$

$\Rightarrow ۵۰۴ + ۴۴۸ = ۹۵۲$

گزینه ۲

$\boxed{۸} \times \boxed{۸} \times \boxed{۷} \times \boxed{۱_{۵}} = ۴۴۸$

← غیر ۰ و ۵

۳ـ جایگشت :

فرض کنید n شیء متمایز داریم. به هر حالت از قرار گرفتن این اشیاء در کنار هم یک جایگشت می‌گوییم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

$$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad , \quad n! = n(n-1)(n-2)\cdots \times 1$$

مثال: a,b,c

abc bca
acb cab
bac cba

$3! = 3\times 2\times 1 = 6$

۴ـ تبدیل (ترتیب):

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارت دیگر تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن اهمیت داشته باشد را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و به آن تبدیل r شیء از n شیء متمایز گفته می‌شود و از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: a,b,c $\xrightarrow{\text{جایگشت‌های ۲تایی}}$ ab, ba, ac, ca, bc, cb

$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۵- ترکیب :

به هر انتخاب r تایی از n شیء متمایز که در آن ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می گوییم و تعداد آن‌ها را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال a,b,c $\xrightarrow[\text{۲ تایی}]{\text{ترکیب‌های}}$ $\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$ $\quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

حالات خاص در رابطه ترکیب :

۱) $\binom{n}{0} = 1$ مثال $\binom{10}{0} = 1$

۲) $\binom{n}{n} = 1$ مثال $\binom{5}{5} = 1$

۳) $\binom{n}{1} = n$ مثال $\binom{7}{1} = 7$

۴) $\binom{n}{n-1} = n$ مثال $\binom{6}{5} = 6$

۵) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ مثال $\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$

۶) $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ مثال $\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3!} = 35$

۷) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ مثال $\binom{۷}{۳} = \binom{۷}{۴}$ یا $\binom{۱۰}{۸} = \binom{۱۰}{۲}$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{r}$ است و تعداد زیرمجموعه‌ها

یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است پس: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n} = 2^n$

مثال کنکور تجربی ۹۹:

✓

دو نفر را کنار بگذاریم $\binom{۷}{۵} = \binom{۷}{۲} = \frac{۷\times۶}{۲} = ۲۱$

یکی از دو نفر را انتخاب کنیم $\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۴} = ۲\times\binom{۷}{۳} = ۲\times\frac{۷\times۶\times۵}{۳!} = ۲\times۳۵ = ۷۰$

$۲۱ + ۷۰ = ۹۱$ گزینه ۴

مثال کنکور تجربی ۹۸:

گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری‌که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

✓

$\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶} = ۷۰ + \binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۲} = ۷۰ + \frac{۸\times۷\times۶}{۶} + \frac{۸\times۷}{۲}$

$\frac{۸!}{۴!\times۴!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴\times۳\times۲\times۴!} = ۷۰$

$= ۷۰ + ۵۶ + ۲۸ = ۱۵۴$ گزینه ۳

نکات و مفاهیم پایه در احتمال :

۱- پدیده یا آزمایش تصادفی : پدیده ای است که نتیجه آن را نتوان قبل از رخ دادن، به طور قطعی پیش بینی کرد.

۲- فضای نمونه ای : مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای می نامیم و آن را با S نمایش می دهیم.

۳- پیشامد تصادفی : هر زیرمجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد تصادفی در آن فضای نمونه ای می گویند.

و آن را A ، B ، C ، ... نشان می دهیم.

۴- اعمال روی پیشامدها : اگر A و B پیشامدهای تصادفی در فضای نمونه ای S باشند :

الف) اجتماع A و B : پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می دهد که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد :

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \overset{\text{یا}}{\vee} x \in B\}$$

ب) اشتراک A و B : پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند :

$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

ب) تفاضل A و B : پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد :

$$A-B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(از A اشتراک A و B را حذف می‌کنیم.)

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد :

$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

$$(A' = S - A)$$

۵- احتمال رخ دادن یک پیشامد : احتمال وقوع پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}}$$

($n(A)$ و $n(S)$ تعداد)

دقت کنید برای یافتن $n(A)$ و $n(S)$ در صورت امکان با نوشتن پیشامد و فضای نمونه‌ای، تعداد اعضای آن‌ها را حساب کنید در غیر این صورت از اصل ضرب و جمع، جایگشت و ترکیب استفاده می‌کنیم.

۶- چند پیشامد خاص :

الف) اگر A تهی باشد آنگاه $P(A)=0$ است و پیشامد A غیرممکن می‌گویند.

ب) اگر $A=S$ باشد آنگاه $P(A)=1$ است و پیشامد A حتمی می‌گویند.

ج) اگر $A\cap B=\emptyset$ آنگاه A و B را پیشامدهای ناسازگار می‌گویند.

۷- چند قانون در احتمال :

۱) احتمال همیشه عددی بین ۰ و ۱ است یعنی $0\le P(A)\le 1$.

۲) $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۳) اگر A و B ناسازگار باشند در قانون ۲ : $P(A\cap B)$ صفر می‌شود :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

۴*) $$1=P(S)=P(A\cup A')=P(A)+P(A')$$

پس قانون احتمال پیشامد متمم را داریم : $P(A')=1-P(A)$ یا $P(A)=1-P(A')$

۵) $$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$A\cap B'$

۸- احتمال شرطی :

احتمال وقوع A به شرط B که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم :

احتمال وقوع پیشامد A است به شرطی که بدانیم پیشامد B رخ داده است و برابر است با :

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} \xrightarrow[\text{بخرج بر } n(S)]{\text{تقسیم صورت}} P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B)\neq 0$$

می‌توانیم مسائل احتمال شرطی را بدون فرمول و با کاهش فضای نمونه‌ای هم حل کرد.

۹- قانون ضرب احتمال :

از رابطه احتمال شرطی $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ برای محاسبه $P(A\cap B)$ استفاده می‌کنیم :

$$P(A\cap B) = P(B)\times P(A|B)$$

از این رابطه در مسائلی استفاده می‌کنیم که دو پیشامد A و B پشت سرهم رخ دهند.

۱۰- پیشامدهای مستقل :

می‌گوییم دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، به شرطی که وقوع هریک بر احتمال وقوع

دیگری تأثیر نداشته باشد.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه:

$$P(A|B)=P(A) \quad , \quad P(B|A)=P(B)$$

درنتیجه: دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند اگر و فقط اگر $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

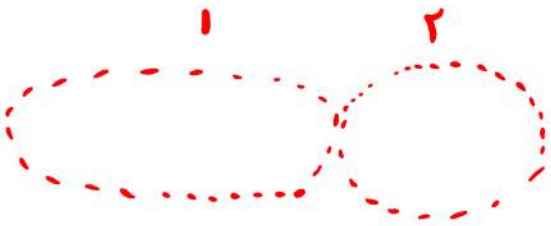
دقت داشته باشید اگر A و B مستقل باشند آنگاه A و B′، A′ و B، A′ و B′ هم مستقل‌اند.

نکته مهم: اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار باشند آنگاه A و B مستقل نیستند.

مثال کنکور تجربی ۹۹:

پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

— — ✓ — —



$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5!\times 3!\times 2!}{8!}=\frac{5!\times 6\times 2}{8\times 7\times 6\times 5!}=\frac{2}{56}=\frac{1}{28}$$

گزینه ۴

مثال کنکور تجربی (خارج) ۹۹ :

۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ✓ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

روش اول : استفاده از پیشامد متمم

A: دو نفر مورد نظر کنار هم نباشند

A': دو نفر مورد نظر کنار هم باشند

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

$$P(A') = \frac{۹! \times ۲!}{۱۰!} = \frac{۹! \times ۲}{۱۰ \times ۹!} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵} \rightarrow P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵}$$

گزینه ۴

روش دوم : محاسبه مستقیم

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

× ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ × ۶ × ۷ × ۸ × ۹

$$P(A) = \frac{P(۹,۲) \times ۸!}{۱۰!} = \frac{\frac{۹!}{(۹-۲)!} \times ۸!}{۱۰!} = \frac{\frac{۹!}{۷!} \times ۸!}{۱۰!}$$

$$= \frac{۹! \times ۸!}{۷! \times ۱۰!} = \frac{۹! \times ۸ \times ۷!}{۷! \times ۱۰ \times ۹!} = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$$

گزینه ۴

مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹ :

یک تاس سالم را سه بار به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم، احتمال روشدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳۶}$ ۲) $\frac{۴۱}{۱۰۸}$ ۳) $\frac{۹۱}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۳۱}{۷۲}$

A: آمدن حداقل یک بار ۶

A': اصلاً ۶ ظاهر نشود $n(A') = ۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$

$$P(A') = \frac{۱۲۵}{۶^۳} = \frac{۱۲۵}{۲۱۶} \rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۱۲۵}{۲۱۶} = \frac{۲۱۶-۱۲۵}{۲۱۶} = \frac{۹۱}{۲۱۶}$$

گزینه ۳

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۸}{۱۵}$

نکته: از مجموعه N عضوی $\{n+۱, n+۲, \dots, n+N\}$ تعداد $\left[\frac{N}{k}\right]$ تا بر k بخش‌پذیرند.

A: مضرب ۳ : $N = ۹۰$ (تعداد اعداد طبیعی دو رقمی) $n(S)$

$$n(A) = \left[\frac{۹۰}{۳}\right] = [۳۰] = ۳۰$$

B: مضرب ۵ $n(B) = \left[\frac{۹۰}{۵}\right] = ۱۸$

$A \cap B$: مضرب ۳ و ۵ $n(A \cap B) = \left[\frac{۹۰}{۳ \times ۵}\right] = \left[\frac{۹۰}{۱۵}\right] = ۶$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{30}{90}\ ,\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{18}{90}\ ,\ P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{6}{90}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{30}{90}+\frac{18}{90}-\frac{6}{90}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$$ گزینه ۴

مثال کنکور ریاضی ۹۹:

تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{3}{4}$

$n(S_{\text{فرد}})$ = در تاس زوج یک تاس فرد × هر سه تاس فرد

$$=3\times3\times3+(3\times3\times3)\times3=27+81=108$$

A: حداقل یک تاس ۲ بیاید

A′: اصلاً ۲ نیاید

$$n(A')=3\times3\times3+(\underset{\uparrow}{2}\times\underset{\uparrow}{2}\times3)\times3$$ (۲ و ۴ و ۶)

$$=27+36=63$$

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{63}{108}=\frac{108-63}{108}=\frac{45}{108}=\frac{5}{12}$$ گزینه ۱

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A) = ۰/۴$، $P(B \mid A) = ۰/۲۵$ و $P(B) = ۰/۳$ باشد، $P(B \mid A')$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B-A)}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A')}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - ٪۴ = ٪۶$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow ٪۲۵ = \frac{P(A \cap B)}{٪۴} \rightarrow P(A \cap B) = ٪۴ \times ٪۲۵ = ٪۱$$

$$\Rightarrow P(B|A') = \frac{٪۳ - ٪۱}{٪۶} = \frac{٪۲}{٪۶} = \frac{۱}{۳}$$

گزینه ۲

مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹:

در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = ۰/۱$، $P(A \cup B) = ۰/۶$ و با فرض $P(B') > P(B)$، احتمال وقوع پیشامد B، کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

مستقل $\rightarrow P(A) \times P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مجموع ریشه‌ها (S)

$$٪۶ = P(A) + P(B) - ٪۱ \rightarrow P(A) + P(B) = ٪۷$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ٪۱$$

ضرب ریشه‌ها (P)

یادآوری : $x^2 - Sx + P = 0$

$x^2 - 0.7x + 0.1 = 0 \rightarrow (x - 0.2)(x - 0.5) = 0$

$\begin{cases} x = 0.2 \\ x = 0.5 \end{cases} \xrightarrow{P(B') > P(B)} P(B) = 0.2 \ , \ P(A) = 0.5$

مثال کنکور تجربی ۹۸ :

احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

۱) ۰/۷۴ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

$\begin{cases} P(A) = 0.7 \\ P(B) = 0.4 \\ P(B|A) = 0.8 \\ P(A \cup B) = ? \end{cases}$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow 0.8 = \frac{P(A \cap B)}{0.7} \rightarrow P(A \cap B) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.56 = 1.3 - 0.56 = 0.74$

گزینه ۴

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل هفتم: احتمال

درس: قانون احتمال کل

جلسه دوم: صفحه ۱۴۵ تا ۱۴۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

افراز یک مجموعه :

فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n$ زیرمجموعه‌هایی از مجموعه S باشند به طوری که :

۱) همگی غیرتهی باشند : $(A_i \neq \emptyset) \quad : 1 \leq i \leq n$

۲) اجتماع آنها برابر S شود : $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S)$

۳) اشتراک هر دو تا از آنها تهی باشد : $(A_i \cap A_j = \emptyset)$

در این صورت می‌گوییم $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعه S را افراز کرده‌اند.



مثال : برای مجموعه‌های زیر دو افراز متفاوت بنویسید.

الف) $A = \{1, 2, \dots, 50\}$

یک افراز ۲ عضوی $A_1 = \{1, 3, 5, \dots, 49\} \quad A_2 = \{2, 4, 6, \dots, 50\}$

$A_1 = \{1, 2, \dots, 15\} \quad , \quad A_2 = \{16, 17, \dots, 31\} \quad , \quad A_3 = \{32, 33, \dots, 50\}$

یک افراز ۳ عضوی

ب) $A = \mathbb{Z}$

یک افراز ۲ تایی $A_1 = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ $A_2 = \{\pm 1, \pm 3, \dots\}$

یک افراز ۳ تایی $A_1 = \{\dots, -2, -1\}$ ، $A_2 = \{0\}$ ، $A_3 = \{1, 2, \dots\}$

احتمال کل:

فرض کنید پیشامدهای A_1 ، A_2 ، ... ، A_n مانند شکل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد. داریم:



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

که در آن $(B \cap A_i)$ و $(B \cap A_j)$ ناسازگارند. پس:

برای خلاصه نویسی جمع کسرها ←

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

ولی طبق قانون ضرب احتمال داریم:

$$P(B \cap A_i) = P(A_i)\, P(B|A_i)$$

پس می‌توان $P(B)$ را این‌طور بنویسیم:

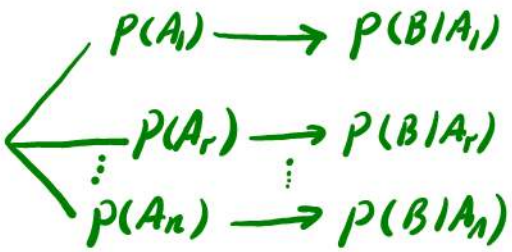
$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

$$\Rightarrow \quad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

به رابطه بالا قانون احتمال کل می‌گوییم.

نکته مهم: برای ساده‌تر شدن محاسبه $P(B)$ بهتر است از نمودار درختی استفاده کنیم که در آن

شاخه‌های اصلی درخت $A_1, \dots, A_n$ هستند.

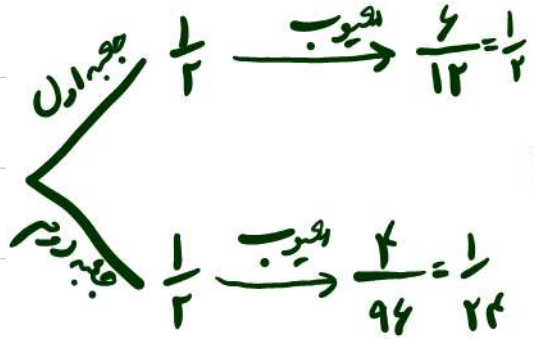


برای بدست آوردن $P(B)$، احتمال هر شاخه را در هم ضرب و در آخر همه را با هم جمع می‌کنیم.

مثال:

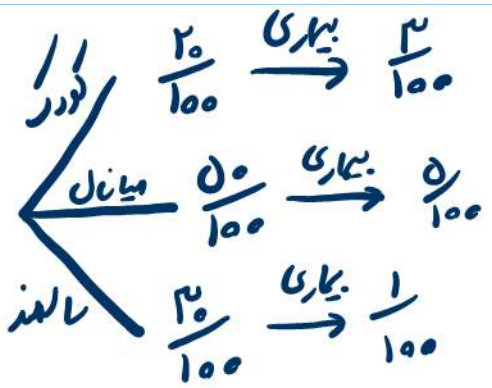
۴ تا

از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟



$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{48} = \frac{13}{48}$$

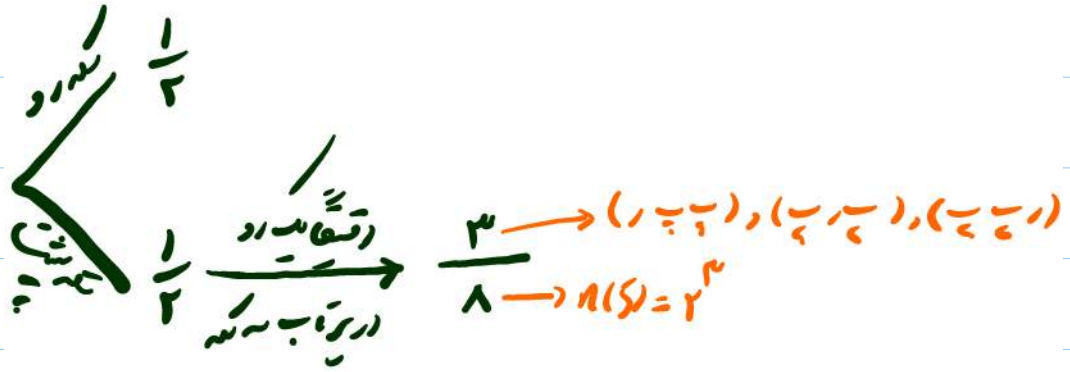
مثال فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به‌ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟



$$P(B) = \frac{20}{100}\times\frac{3}{100} + \frac{50}{100}\times\frac{5}{100} + \frac{30}{100}\times\frac{1}{100} = \frac{60+250+30}{10000} = \frac{340}{10000}$$

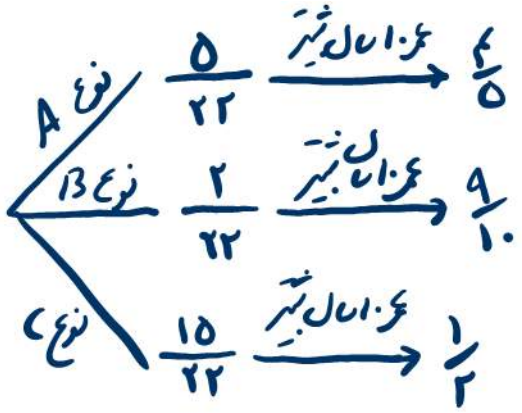
$$= \frac{34}{1000} = \frac{17}{500}$$

مثال: یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟



$$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

مثال: در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$، برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟



$$P(B)=\frac{۵}{۲۲}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۲۲}\times\frac{۹}{۱۰}+\frac{۱۵}{۲۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۲۰}{۱۱۰}+\frac{۱۸}{۲۲۰}+\frac{۱۵}{۴۴}$$

$$=\frac{۴۰+۱۸+۷۵}{۲۲۰}=\frac{۱۳۳}{۲۲۰}$$

مثال: مدرسهٔ A سه برابر مدرسهٔ B دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همهٔ دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم :

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسهٔ A و با چه احتمالی از مدرسهٔ B است؟ ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

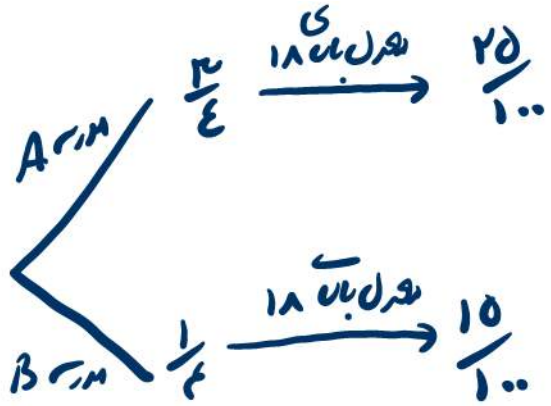
الف) $n(A)=۳n(B)$ ، $n(A)+n(B)=n(S)$

$$\Rightarrow ۳n(B)+n(B)=n(S)\longrightarrow ۴n(B)=n(S)\longrightarrow n(B)=\frac{n(S)}{۴}$$

$$n(A)=۳n(B)=\frac{۳n(S)}{۴}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{۳n(S)}{۴}}{n(S)}=\frac{۳}{۴}\ ,\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\frac{n(S)}{۴}}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

ب)

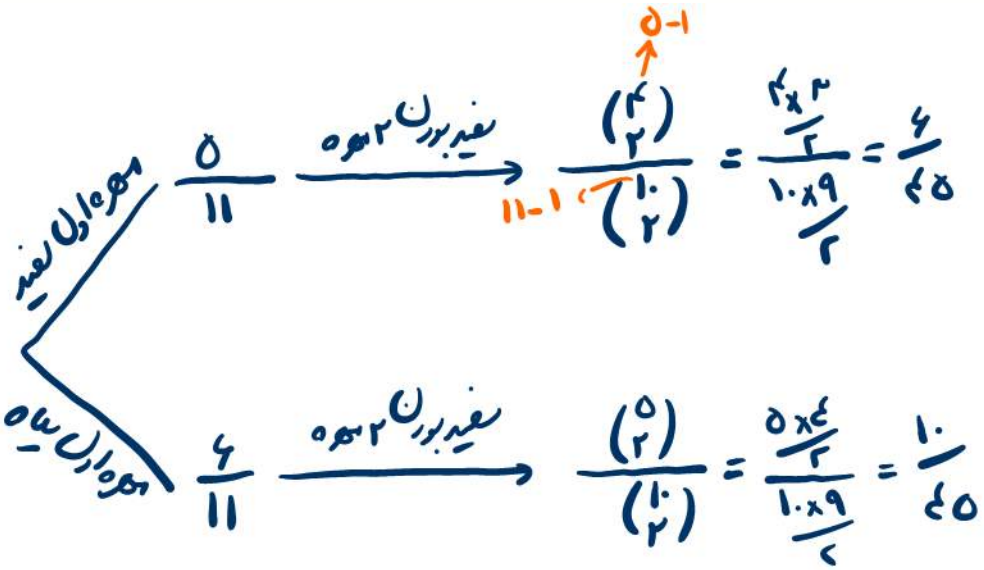


$$P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{25}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{15}{100} = \frac{75}{400} + \frac{15}{400} = \frac{90}{400} = \frac{9}{40}$$

مثال کنکور تجربی ۹۸ :

در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می‌کنیم. سپس از بین بقیهٔ مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهرهٔ اخیر، سفید است؟

۱) $\frac{1}{11}$ ۲) $\frac{2}{11}$ ۳) $\frac{4}{11}$ ۴) $\frac{5}{22}$



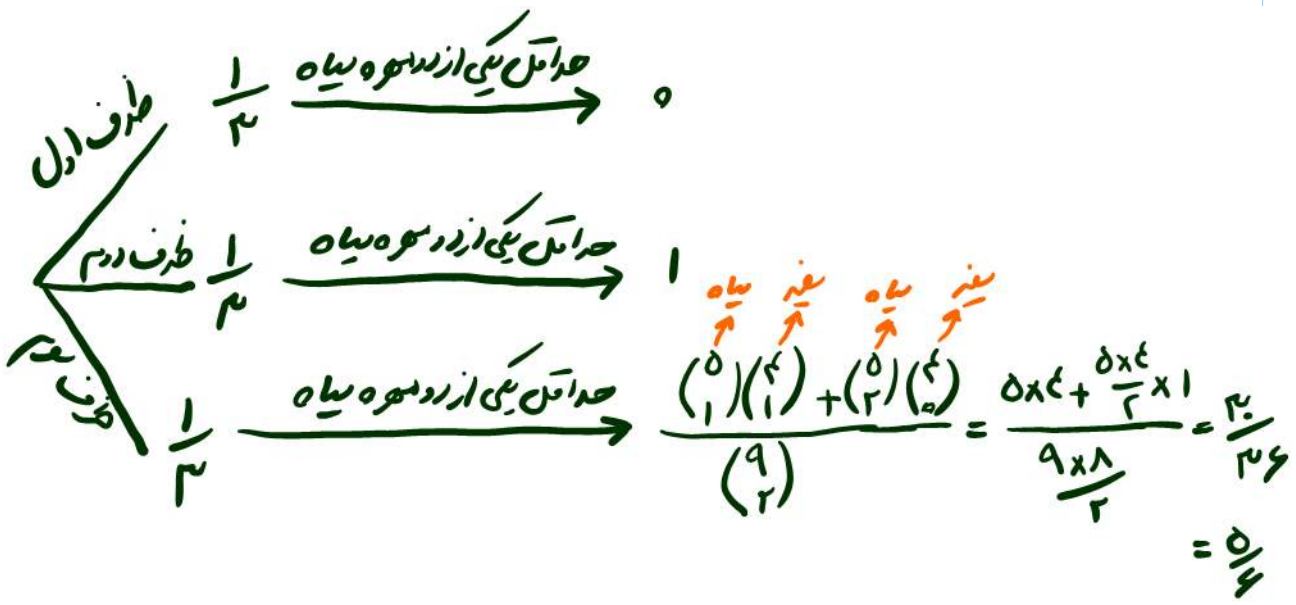
$$P(B) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{45} + \frac{6}{11} \times \frac{10}{45} = \frac{2}{33} + \frac{4}{33} = \frac{6}{33} = \frac{2}{11}$$

گزینه ۲ :

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهرهٔ سفید، در دومی ۹ مهرهٔ سیاه و در سومی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$



$$P(B) = \frac{۱}{۳}\times ۰ + \frac{۱}{۳}\times ۱ + \frac{۱}{۳}\times \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۳} + \frac{۵}{۱۸} = \frac{۱۱}{۱۸}$$

گزینه ۲

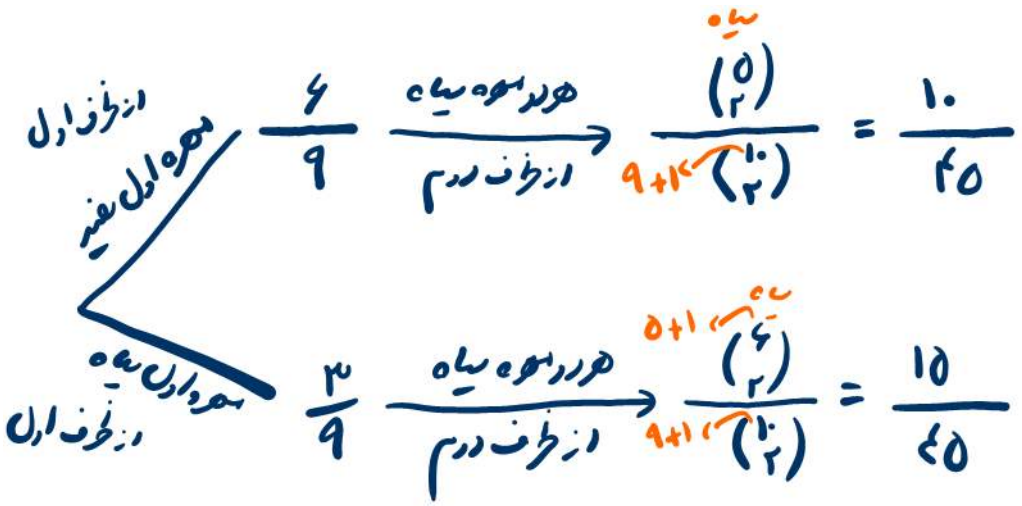
مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹

در جعبهٔ اول ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه، و در جعبهٔ دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. از جعبهٔ اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبهٔ دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۳۴}{۴۵}$ ۳) $\frac{۳۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۷}$

B: حداقل یکی از دو مهره سفید

B′: هر دو مهره سیاه



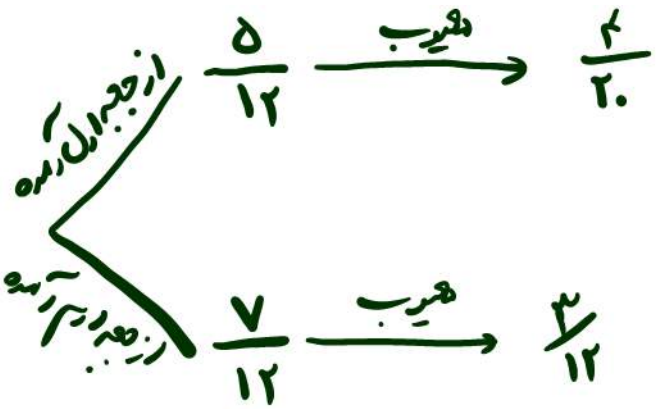
$$P(B') = \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27} + \frac{1}{9} = \frac{7}{27}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$ گزینه ۱

مثال کنکور ریاضی ۹۸

در دو جعبه به‌ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب است؟

۱) $\frac{5}{24}$ ۲) $\frac{11}{48}$ ۳) $\frac{13}{48}$ ۴) $\frac{7}{24}$



$$P(B) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{20} + \frac{7}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{1}{12} + \frac{7}{48} = \frac{11}{48}$$ گزینه ۲