ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل هفتم: احتمال

یادآوری: مفاهیم شمارش و احتمال

جلسه اول: صفحه ۱۴۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

نکات و مفاهیم پایه در شمارش :

۱- اصل ضرب : فرض کنید انجام کاری k مرحله دارد. اگر مرحله اول را بتوان به m_1 طریق

یا

تکیه بر «و» انجام داد، مرحله دوم را به m_2 طریق و ... مرحله k ام را به m_k طریق

انجام داد، کل کار مورد نظر را می‌توان به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق انجام داد.

۲- اصل جمع : فرض کنید بتوان کاری را از k روش انجام داد. اگر روش اول به m_1 طریق،

یا

تکیه بر «یا» روش دوم به m_2 طریق و ... و روش k ام به m_k طریق ممکن باشد و بخواهیم

نقطه‌ای از این k روش را انتخاب کنیم، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$

یا از روش اول یا از روش دوم یا ...

طریق وجود دارد.

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟

۱) ۹۴۸ ✓ ۲) ۹۵۲ ۳) ۹۶۸ ۴) ۹۷۲

گزینه ۲

$\boxed{9} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{1,0} = 504$

$\Rightarrow 504 + 448 = 952$

$\boxed{8} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{1,5} = 448$

← غیر ۰ و ۵

۳ـ جایگشت :

فرض کنید n شیء متمایز داریم. به هر حالت از قرار گرفتن این اشیاء در کنار هم یک جایگشت می‌گوییم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

$$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad , \quad n! = n(n-1)(n-2)\cdots \times 1$$

مثال: a,b,c

abc bca
acb cab
bac cba

$3! = 3\times 2\times 1 = 6$

۴ـ تبدیل (ترتیب):

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارت دیگر تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن اهمیت داشته باشد را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و به آن تبدیل r شیء از n شیء متمایز گفته می‌شود و از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: a,b,c $\xrightarrow{\text{جایگشت‌های ۲تایی}}$ ab, ba, ac, ca, bc, cb

$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۵- ترکیب :

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می گوییم و تعداد آن ها را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می دهیم که از رابطه زیر بدست می آید:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال $a,b,c \xrightarrow[\text{۲ تایی}]{\text{ترکیب های}} \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$ $\quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

حالات خاص در رابطه ترکیب :

۱) $\binom{n}{0} = 1$ مثال $\binom{10}{0} = 1$

۲) $\binom{n}{n} = 1$ مثال $\binom{0}{0} = 1$

۳) $\binom{n}{1} = n$ مثال $\binom{7}{1} = 7$

۴) $\binom{n}{n-1} = n$ مثال $\binom{6}{5} = 6$

۵) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ مثال $\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$

۶) $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ مثال $\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3!} = 35$

۷) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ مثال $\binom{۷}{۳}=\binom{۷}{۴}$ و $\binom{۱۰}{۸}=\binom{۱۰}{۲}$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی از یک مجموعه nعضوی برابر $\binom{n}{r}$ است و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه nعضوی برابر ۲^n است پس:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n$$

مثال کنکور تجربی ۹۹:

به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری‌که دو نفر انان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۷ ۳) ۹۱ ✓ ۴) ۹۵

دو نفر را کنار بگذاریم: $\binom{۷}{۵}=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$

یکی از دو نفر را انتخاب شود: $\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۴}=۲\times\binom{۷}{۳}=۲\times\frac{۷\times۶\times۵}{۳!}=۲\times۳۵=۷۰$

$۲۱+۷۰=۹۱$ گزینه ۳

مثال کنکور تجربی ۹۸:

گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری‌که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۵۴ ✓ ۴) ۱۶۸

$$\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}=۷۰+\binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۲}=۷۰+\frac{۸\times۷\times۶}{۶}+\frac{۸\times۷}{۲}$$

$$=۷۰+۵۶+۲۸=۱۵۴$$ گزینه ۳

$\frac{۸!}{۴!\times۴!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴\times۳\times۲\times۴!}=۷۰$

نکات و مفاهیم پایه در احتمال :

۱- پدیده یا آزمایش تصادفی : پدیده ای است که نتیجه آن را نتوان قبل از رخ دادن ، به طور قطعی پیش بینی کرد .

۲- فضای نمونه ای : مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای می نامیم و آن را با S نمایش می دهیم .

۳- پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد تصادفی در آن فضای نمونه ای می گویند. و آن را A ، B ، C ، ... نشان می دهیم .

۴- اعمال روی پیشامدها : اگر A و B پیشامدهای تصادفی در فضای نمونه ای S باشند :

الف) اجتماع A و B : پیشامد $A \cup B$ را می گوییم که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد :

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \overset{\text{یا}}{\vee} x \in B\}$$

ب) اشتراک A و B : پیشامد $A \cap B$ را می گوییم که هر دو پیشامد A و B رخ دهند :

$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

ب) تفاضل A و B : پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد :

$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(از A اشتراک A و B را حذف می‌کنیم.)

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد :

$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

$$(A' = S - A)$$

۵- احتمال رخ دادن یک پیشامد : احتمال وقوع پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}}$$

($n(A)$ تعداد)

دقت کنید برای یافتن $n(A)$ و $n(S)$ در صورت امکان با نوشتن پیشامد و فضای نمونه‌ای، تعداد اعضای آن‌ها را حساب کنید در غیر این صورت از اصل ضرب و جمع، جایگشت و ترکیب استفاده می‌کنیم.

۶- چند پیشامد خاص :

الف) اگر A تهی باشد آنگاه $P(A)=0$ است و پیشامد A غیرممکن می‌گویند.

ب) اگر $A=S$ باشد آنگاه $P(A)=1$ است و پیشامد A حتمی می‌گویند.

ج) اگر $A\cap B=\emptyset$ آنگاه A و B را پیشامدهای ناسازگار می‌گویند.

۷- چند قانون در احتمال :

۱) احتمال همیشه عددی بین ۰ و ۱ است یعنی $0\le P(A)\le 1$.

۲) $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۳) اگر A و B ناسازگار باشند در قانون ۲ ؛ $P(A\cap B)$ صفر می‌شود :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

۴*) $$1=P(S)=P(A\cup A')=P(A)+P(A')$$

پس قانون احتمال پیشامد متمم را داریم : $P(A')=1-P(A)$ یا $P(A)=1-P(A')$

۵) $$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$A\cap B'$

۸- احتمال شرطی :

احتمال وقوع A به شرط B که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم :

احتمال وقوع پیشامد A است به شرطی که بدانیم پیشامد B رخ داده است و برابر است با :

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} \xrightarrow[\text{بخرج بر } n(S)]{\text{تقسیم صورت}} P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B)\neq 0$$

می‌توانیم مسائل احتمال شرطی را بدون فرمول و با کاهش فضای نمونه‌ای هم حل کرد.

۹- قانون ضرب احتمال :

از رابطه احتمال شرطی $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ برای محاسبه $P(A\cap B)$ استفاده می‌کنیم :

$$P(A\cap B) = P(B)\times P(A|B)$$

از این رابطه در مسائلی استفاده می‌کنیم که دو پیشامد A و B پشت سر هم رخ دهند.

۱۰- پیشامدهای مستقل :

می‌گوییم دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، به شرطی که وقوع هریک بر احتمال وقوع

دیگری تأثیر نداشته باشد.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه:

$$P(A|B)=P(A) \quad , \quad P(B|A)=P(B)$$

درنتیجه: دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند اگر و فقط اگر $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

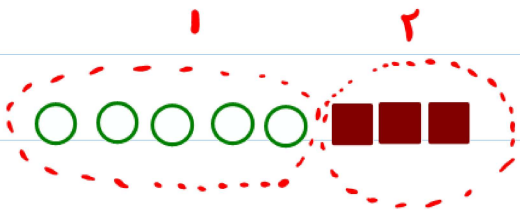
دقت داشته باشید اگر A و B مستقل باشند آنگاه A و B'، A' و B، A' و B' هم مستقل‌اند.

نکته مهم: اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار باشند آنگاه A و B مستقل نیستند.

مثال کنکور تجربی ۹۹:

پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲۸}$ ✓ ۴) $\frac{۱}{۵۶}$



$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵!\times ۳!\times ۲!}{۸!}=\frac{۵!\times ۶\times ۲}{۸\times ۷\times ۶\times ۵!}=\frac{۲}{۵۶}=\frac{۱}{۲۸}$$

گزینه ۳

مثال کنکور تجربی (خارج) ۹۹ :

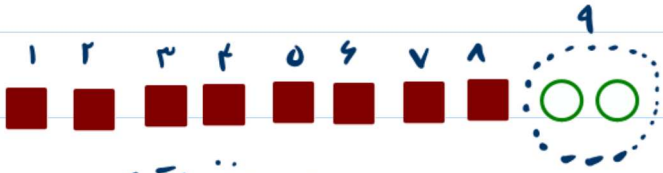
۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ✓ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

روش اول : استفاده از پیشامد متمم

A : دو نفر مورد نظر کنار هم نباشند

A' : دو نفر مورد نظر کنار هم باشند

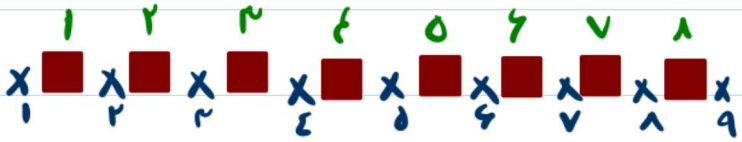


جایگاه دو نفر در بین ۹

$$P(A') = \frac{۹! \times ۲!}{۱۰!} = \frac{۹! \times ۲}{۱۰ \times ۹!} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵} \rightarrow P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵}$$

گزینه ۴

روش دوم : محاسبه مستقیم



جایگاه دو نفر از ۹ تا

$$P(A) = \frac{P(۹,۲) \times ۸!}{۱۰!} = \frac{\frac{۹!}{(۹-۲)!} \times ۸!}{۱۰!} = \frac{\frac{۹!}{۷!} \times ۸!}{۱۰!}$$

$$= \frac{۹! \times ۸!}{۷! \times ۱۰!} = \frac{۹! \times ۸ \times ۷!}{۷! \times ۱۰ \times ۹!} = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$$

گزینه ۴

مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹ :

یک تاس سالم را سه بار به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم، احتمال روشدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳۶}$ ۲) $\frac{۴۱}{۱۰۸}$ ۳) $\frac{۹۱}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۳۱}{۷۲}$

A: آمدن حداقل یک بار ۶

A′: اصلاً ۶ ظاهر نشود $n(A') = ۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$

$P(A') = \frac{۱۲۵}{۶^۳} = \frac{۱۲۵}{۲۱۶} \rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۱۲۵}{۲۱۶} = \frac{۲۱۶-۱۲۵}{۲۱۶} = \frac{۹۱}{۲۱۶}$

گزینه ۳

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۸}{۱۵}$

نکته: از مجموعه N عضوی : $\{n+۱, n+۲, \dots, n+N\}$ تعداد $\left[\frac{N}{k}\right]$ تا بر k بخش پذیرند.

A: مضرب ۳ در انتخابی : $N \xrightarrow{n(S)} = ۹ \times ۱۰ = ۹۰$ (تعداد طبیعی دو رقمی)

$n(A) = \left[\frac{۹۰}{۳}\right] = (۳۰) = ۳۰$

B: مضرب ۵ در انتخابی $n(B) = \left[\frac{۹۰}{۵}\right] = ۱۸$

$A \cap B$: مضرب ۳ و ۵ در انتخابی $n(A \cap B) = \left[\frac{۹۰}{۳ \times ۵}\right] = \left[\frac{۹۰}{۱۵}\right] = ۶$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{30}{90}\ ,\quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{18}{90}\ ,\quad P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{6}{90}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{30}{90}+\frac{18}{90}-\frac{6}{90}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$$

گزینه ۳

مثال کنکور ریاضی ۹۹:

تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{3}{4}$

$n(S_{\text{فرد}})$ = در تاس زوج یک تاس فرد + هر سه تاس فرد

$$=3\times3\times3+(3\times3\times3)\times3=27+81=108$$

A: حداقل یک تاس ۲ بیاید

A′: هیچ ۲ نیاید

$$n(A')=3\times3\times3+(\underset{\uparrow}{2}\times\underset{\uparrow}{2}\times3)\times3$$

(↑ ۲ یا ۴ ، ↑ ۲ یا ۴)

$$=27+36=63$$

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{63}{108}=\frac{108-63}{108}=\frac{45}{108}=\frac{5}{12}$$

گزینه ۱

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A) = ۰/۴$ ، $P(B \mid A) = ۰/۲۵$ و $P(B) = ۰/۳$ باشد، $P(B \mid A')$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B-A)}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A')}$$

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - ٪۴ = ٪۶$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow ٪۲۵ = \frac{P(A \cap B)}{٪۴} \rightarrow P(A \cap B) = ٪۴ \times ٪۲۵ = ٪۱$$

$$\Rightarrow P(B|A') = \frac{٪۳ - ٪۱}{٪۶} = \frac{٪۲}{٪۶} = \frac{۱}{۳}$$

گزینه ۲

مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹ :

در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = ۰/۱$ ، $P(A \cup B) = ۰/۶$ و با فرض $P(B') > P(B)$، احتمال وقوع پیشامد B، کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

مستقل $\rightarrow P(A) \times P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مجموع ریشه‌ها (S)

$$٪۶ = P(A) + P(B) - ٪۱ \rightarrow P(A) + P(B) = ٪۷$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ٪۱$$

ضرب ریشه‌ها (P)

یادآوری : $x^۲ - Sx + P = ۰$

$x^2 - 0.7x + 0.1 = 0 \rightarrow (x - 0.2)(x - 0.5) = 0$

$\begin{cases} x = 0.2 \\ x = 0.5 \end{cases} \xrightarrow{P(B') > P(B)} P(B) = 0.2 \ , \ P(A) = 0.5$

مثال کنکور تجربی ۹۸ :

احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

۱) ۰/۷۴ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

$\begin{cases} P(A) = 0.7 \\ P(B) = 0.6 \\ P(B|A) = 0.8 \\ P(A \cup B) = ? \end{cases}$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow 0.8 = \frac{P(A \cap B)}{0.7} \rightarrow P(A \cap B) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.56 = 1.3 - 0.56 = 0.74$

گزینه ۱

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل هفتم: احتمال

درس: قانون احتمال کل

جلسه دوم: صفحه ۱۴۵ تا ۱۴۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

افراز یک مجموعه :

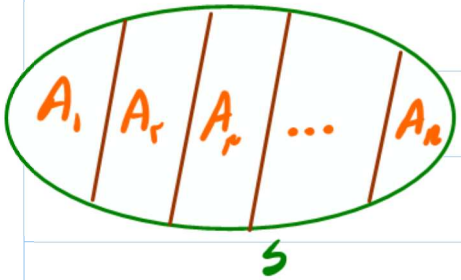
فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n$ زیرمجموعه‌هایی از مجموعه S باشند به طوری که :

۱) همگی غیرتهی باشند : $(A_i \neq \emptyset) \quad : 1 \leq i \leq n$

۲) اجتماع آنها برابر S شود : $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S)$

۳) اشتراک هر دو تا از آنها تهی باشد : $(A_i \cap A_j = \emptyset)$

در این صورت می‌گوییم $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعه S را افراز کرده‌اند.



مثال : برای مجموعه‌های زیر دو افراز متفاوت بنویسید.

الف) $A = \{1, 2, \dots, 50\}$

یک افراز ۲ عضوی $A_1 = \{1, 3, 5, \dots, 49\} \quad A_2 = \{2, 4, 6, \dots, 50\}$

$A_1 = \{1, 2, \dots, 15\} \quad , \quad A_2 = \{16, 17, \dots, 31\} \quad , \quad A_3 = \{32, 33, \dots, 50\}$

یک افراز ۳ عضوی

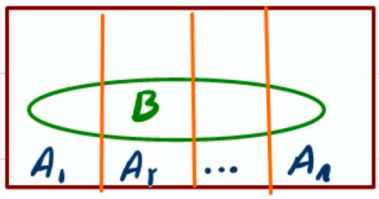
ب) $A = \mathbb{Z}$

یک افراز ۲ عضوی $A_1 = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ $A_2 = \{\pm 1, \pm 3, \dots\}$

یک افراز ۳ عضوی $A_1 = \{\dots, -2, -1\}$ ، $A_2 = \{0\}$ ، $A_3 = \{1, 2, \dots\}$

احتمال کل:

فرض کنید پیشامدهای A_1 ، A_2 ، ... ، A_n مانند شکل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S



باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد. داریم:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

که در آن $(B \cap A_i)$ و $(B \cap A_j)$ ناسازگارند. پس:

برای خلاصه نویسی جمع جبرها ←

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

ولی طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(B \cap A_i) = P(A_i)\, P(B|A_i)$$

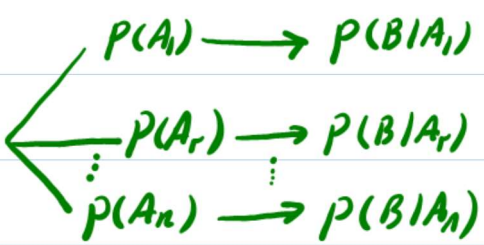
پس می‌توان $P(B)$ را این‌طور بنویسیم:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

$$\Rightarrow \quad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

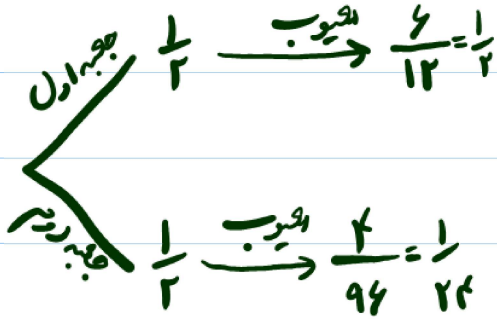
به رابطه بالا قانون احتمال کل می‌گوییم.

نکته مهم: برای ساده‌تر شدن محاسبه $P(B)$ بهتر است از نمودار درختی استفاده کنیم که در آن شاخه‌های اصلی درخت $A_1, \dots, A_n$ هستند.



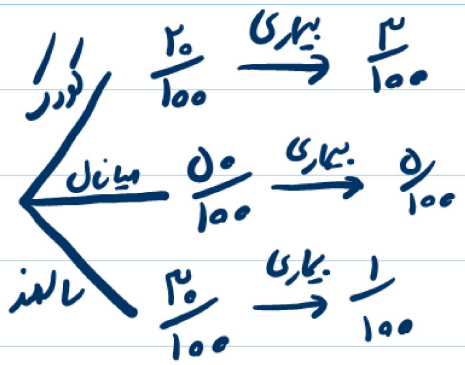
برای بدست آوردن $P(B)$، احتمال هر شاخه را در هم ضرب و در آخر همه را با هم جمع می‌کنیم.

مثال: دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبهٔ دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟



$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{48} = \frac{13}{48}$$

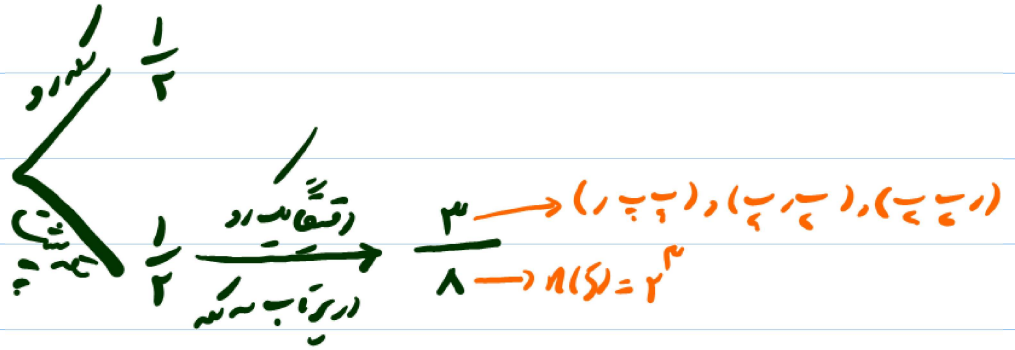
مثال فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به‌ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟



$$P(B) = \frac{20}{100}\times\frac{3}{100} + \frac{50}{100}\times\frac{5}{100} + \frac{30}{100}\times\frac{1}{100} = \frac{60+250+30}{10000} = \frac{340}{10000}$$

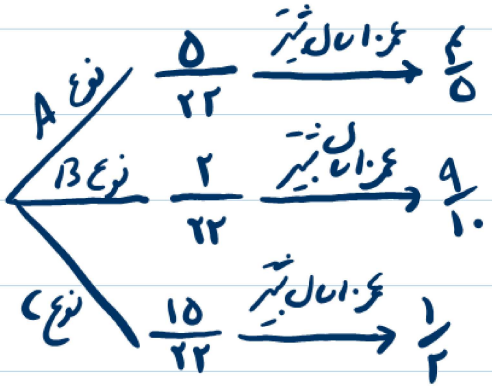
$$= \frac{34}{1000} = \frac{17}{500}$$

مثال: یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟



$$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

مثال: در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$، برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟



$$P(B)=\frac{۵}{۲۲}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۲۲}\times\frac{۹}{۱۰}+\frac{۱۵}{۲۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۲۰}{۱۱۰}+\frac{۱۸}{۲۲۰}+\frac{۱۵}{۴۴}$$

$$=\frac{۴۰+۱۸+۷۵}{۲۲۰}=\frac{۱۳۳}{۲۲۰}$$

مثال: مدرسهٔ A سه برابر مدرسهٔ B دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همهٔ دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم:

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسهٔ A و با چه احتمالی از مدرسهٔ B است؟ ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

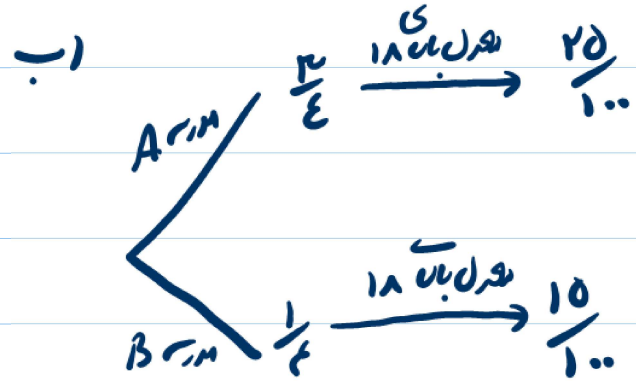
الف) $n(A)=۳n(B)$ ، $n(A)+n(B)=n(S)$

$$\Rightarrow ۳n(B)+n(B)=n(S)\longrightarrow ۴n(B)=n(S)\longrightarrow n(B)=\frac{n(S)}{۴}$$

$$n(A)=۳n(B)=\frac{۳n(S)}{۴}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{۳n(S)}{۴}}{n(S)}=\frac{۳}{۴}\ ,\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\frac{n(S)}{۴}}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

ب)

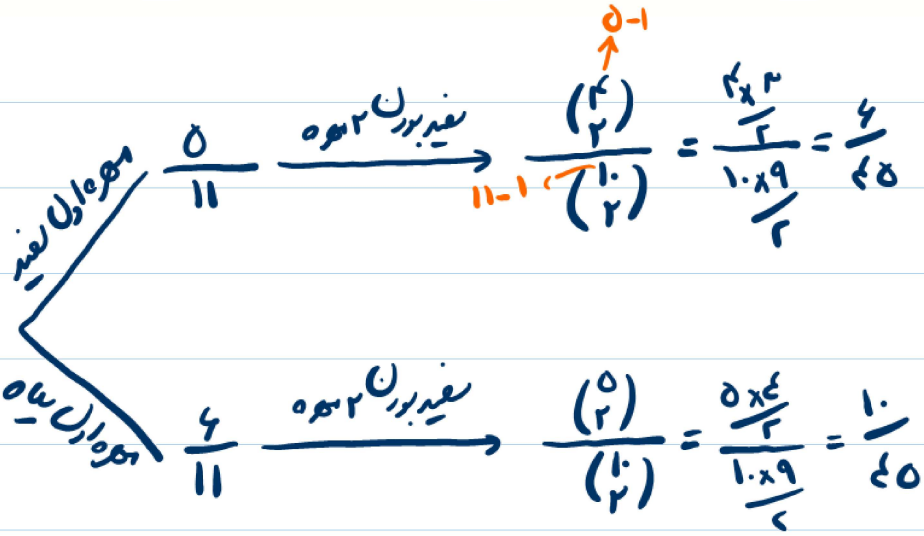


$$P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{25}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{15}{100} = \frac{75}{400} + \frac{15}{400} = \frac{90}{400} = \frac{9}{40}$$

مثال کنکور تجربی ۹۸ :

در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می‌کنیم. سپس از بین بقیهٔ مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهرهٔ اخیر، سفید است؟

۱) $\frac{1}{11}$ ۲) $\frac{2}{11}$ ۳) $\frac{4}{11}$ ۴) $\frac{5}{22}$



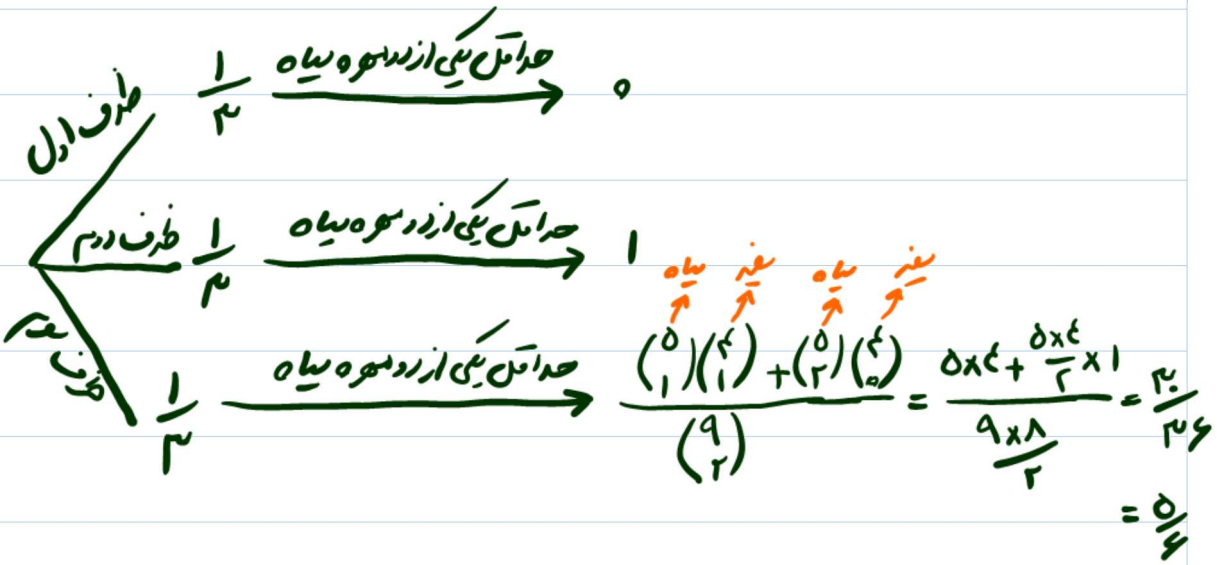
$$P(B) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{45} + \frac{6}{11} \times \frac{10}{45} = \frac{2}{33} + \frac{4}{33} = \frac{6}{33} = \frac{2}{11}$$

گزینه ۲ :

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهرهٔ سفید، در دومی ۹ مهرهٔ سیاه و در سومی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$



$$P(B) = \frac{۱}{۳}\times۰ + \frac{۱}{۳}\times۱ + \frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۹} = \frac{۱}{۳} + \frac{۵}{۲۷} = \frac{۱۱}{۲۷}$$

گزینه ۲

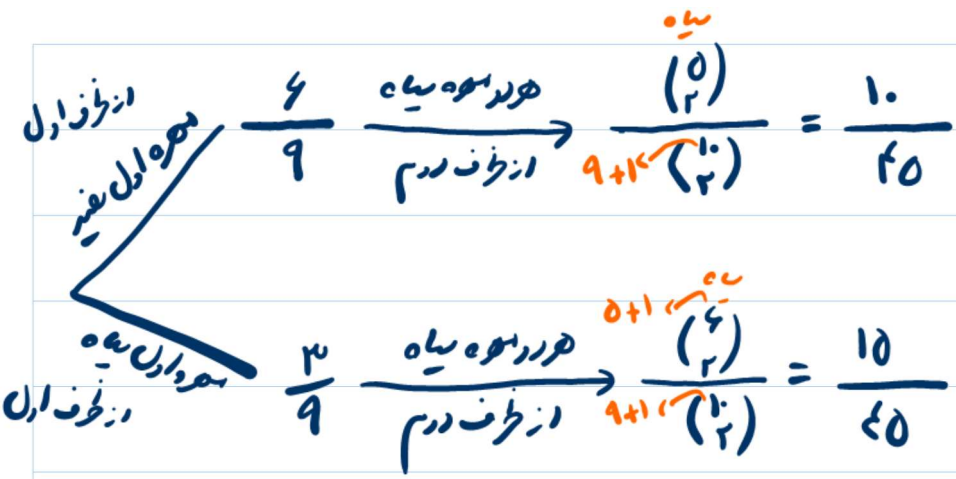
مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹

در جعبهٔ اول ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه، و در جعبهٔ دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. از جعبهٔ اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبهٔ دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۳۴}{۴۵}$ ۳) $\frac{۳۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۷}$

B: حداقل یکی از دو مهره سفید

B': هر دو مهره سیاه



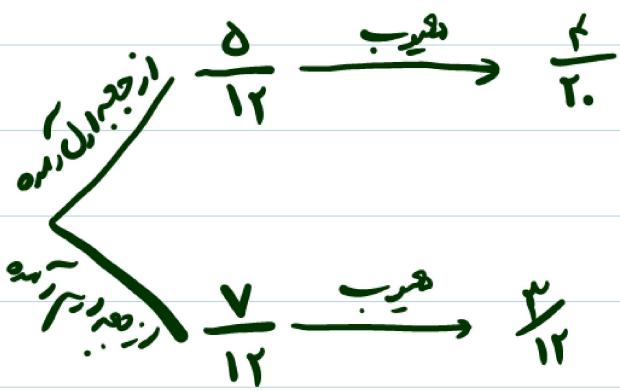
$$P(B') = \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27} + \frac{1}{9} = \frac{7}{27}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$ گزینه ۱

مثال کنکور ریاضی ۹۸

در دو جعبه به‌ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب است؟

۱) $\frac{5}{24}$ ۲) $\frac{11}{48}$ ۳) $\frac{13}{48}$ ۴) $\frac{7}{24}$



$$P(B) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{20} + \frac{7}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{1}{12} + \frac{7}{48} = \frac{11}{48}$$ گزینه ۲