ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل ششم: هندسه

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

قسمت اول: دوران و برش

جلسه اول: صفحات ۱۲۲تا۱۲۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

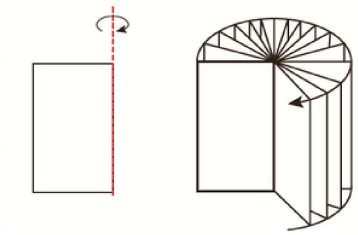
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

دوران حول محور :

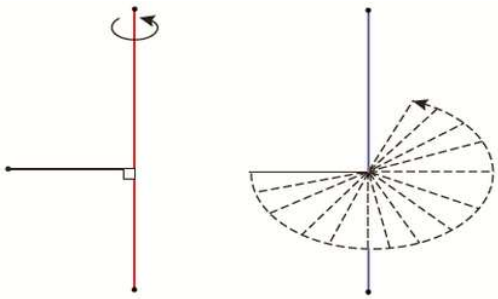
اگر شکلی هندسی را حول یک محور دوران دهیم یک جسم هندسی بدست می‌آید . در شکل‌های زیر حاصل دوران برخی شکل‌های مقروف حول یک محور را نشان داده‌ایم .

۱) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن :



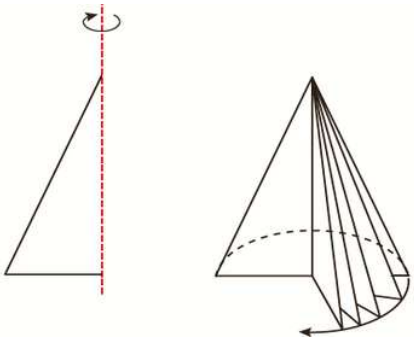
استوانه توخالی

۲) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره‌خط دیگری که بر آن عمود است :



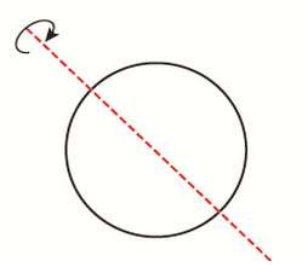
دایره توپر (قرص)

۳) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه :



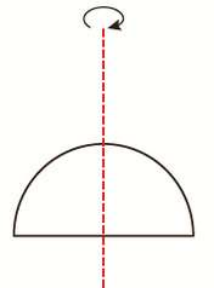
مخروط توخالی

۴) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن :



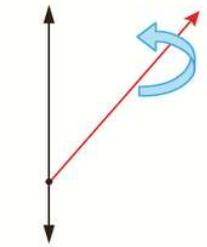
کره توخالی

۵) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن :



نیم کره توخالی

۶) شکل حاصل از دوران نیم‌خط حول‌محور



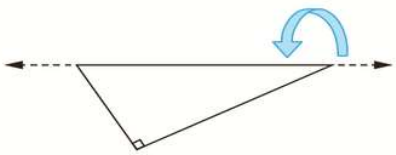
مخروط توخالی (نامتناهی)

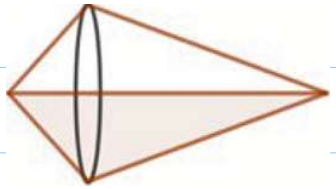
۷) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول‌محور



مخروط توپر

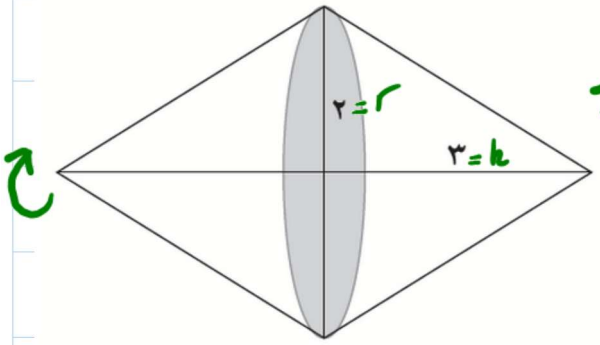
۸) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن





دو مخروط توخالی با قاعده مشترک

مثال: اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟



شکل حاصل دو مخروط با قاعده مشترک و حجم برابر

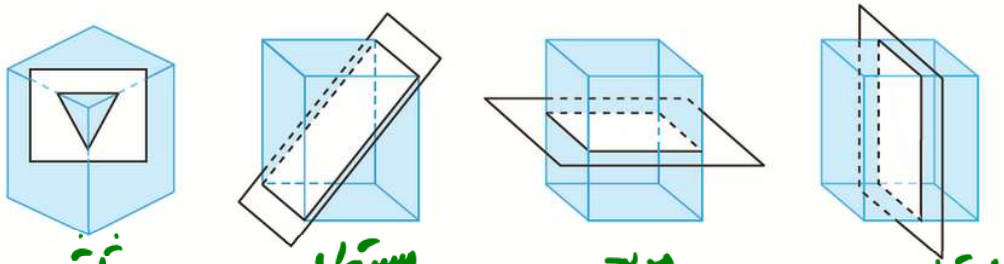
یادآوری: $V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V_{\text{حجم حاصل}} = 2V_{\text{مخروط}} = 2 \times \frac{1}{3}\pi (2)^2 \times 3 = 8\pi$

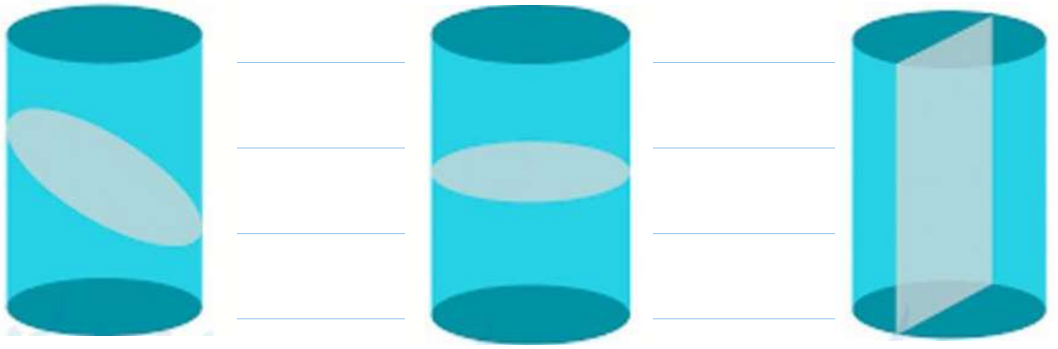
برش:

به برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی، برش آن جسم گفته و به شکل حاصل از این برش، سطح مقطع می‌گوییم.

مثال: بعضی از حالت‌های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعدهٔ مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هر یک از حالت‌ها سطح مقطع را مشخص کنید.

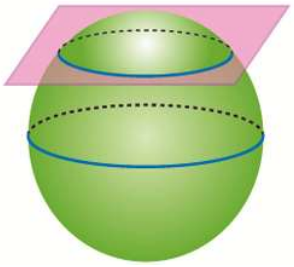


مثال: سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟



مستطیل　　دایره　　بیضی

مثال: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟



دایره

درحالتی که صفحه از مرکز کره عبور کند.

مثال:

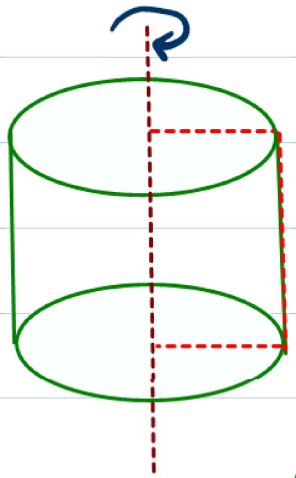
مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.

الف) شکل حاصل را رسم کنید.

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد این استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟

پ) اگر ابعاد مستطیل، ۳و۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحهٔ موازی با قاعدهٔ این استوانه چقدر است؟

ت) در حالت پ، اگر صفحه‌ای عمود بر قاعدهٔ استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟



حل الف) استوانه

حل ب) درحالتی که صفحه حول یکی از قاعده ها و از مرکز قاعده بگذرد و

ارتفاع استوانه و شعاع قاعده مساوی باشند، سطح مقطع یک مربع خواهد بود.

حل پ) حالت اول: عرض = ۴ ، طول = ۴ : جسم حاصل: استوانه‌ای با شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۴

سطح مقطع دایره‌ای با شعاع ۴ خواهد بود: $S = \pi \times 4^2 = 16\pi$

حالت دوم: عرض = ۴ ، طول = ۴ : جسم حاصل: استوانه‌ای با شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۴

سطح مقطع دایره‌ای با شعاع ۴ خواهد بود: $S = \pi \times 4^2 = 16\pi$

حل ت) اگر صفحه از محور دوران عبور کند و بر قاعده عمود باشد، سطح مقطع مستطیلی است

که بیشترین مساحت را دارد.

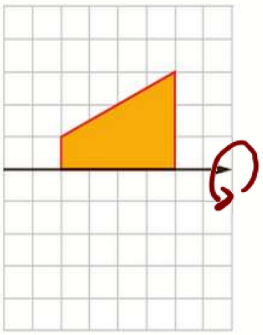
حالت اول: $S = 4 \times (2 \times 3) = 4 \times 6 = 24$

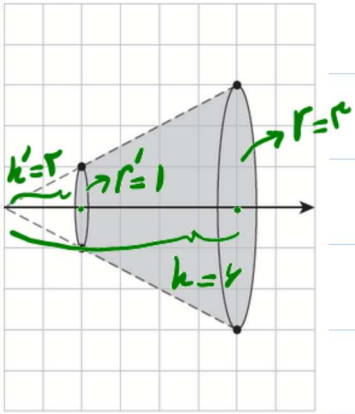
حالت دوم: $S = 3 \times (2 \times 4) = 4 \times 8 = 24$

مثال : در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟





حل(الف) حجم حاصل یک مخروط ناقص است.

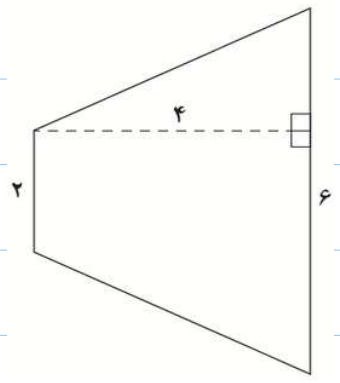
$$V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{مخروط کامل}} - V_{\text{مخروط زده نشده}}$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r'^2 h'$$

$$= \frac{1}{3}\pi (3)^2 \times 6 - \frac{1}{3}\pi (1)^2 \times 2$$

$$= 18\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{54\pi - 2\pi}{3}$$

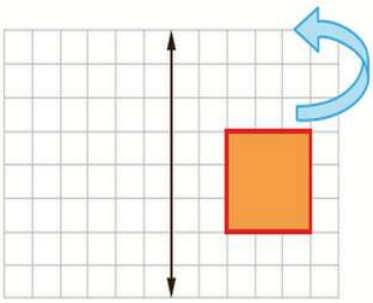
$$\Rightarrow V_{\text{مخروط ناقص}} = \frac{52\pi}{3}$$



حل ب) $S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{1}{2}(\text{مجموع دو قاعده}) \times \text{ارتفاع}$: یادآوری

$$S = \frac{1}{2}(2+6) \times 4 = 2(8) = 16$$

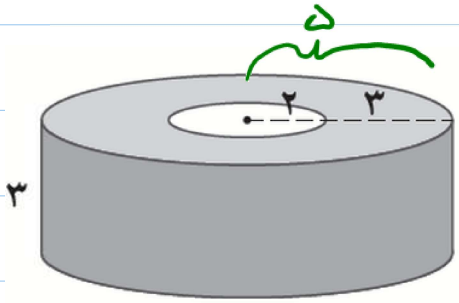
مثال :



مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصلهٔ ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن توصیف کنید.



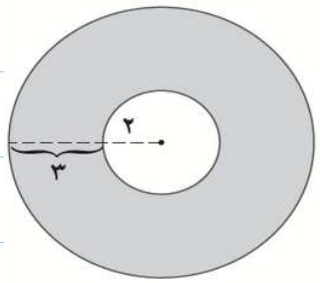
حل الف)

$$V_{\text{حجم حاصل}} = V_{\text{استوانه بزرگ}} - V_{\text{استوانه کوچک}}$$

یادآوری : $V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h$

$$V_{\text{حجم حاصل}} = \pi(5)^2 \times 4 - \pi(2)^2 \times 4$$

$$= 75\pi - 12\pi = 63\pi$$



حل ب)

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل ششم: هندسه

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

قسمت دوم: بیضی

جلسه دوم: صفحات ۱۲۶تا۱۳۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

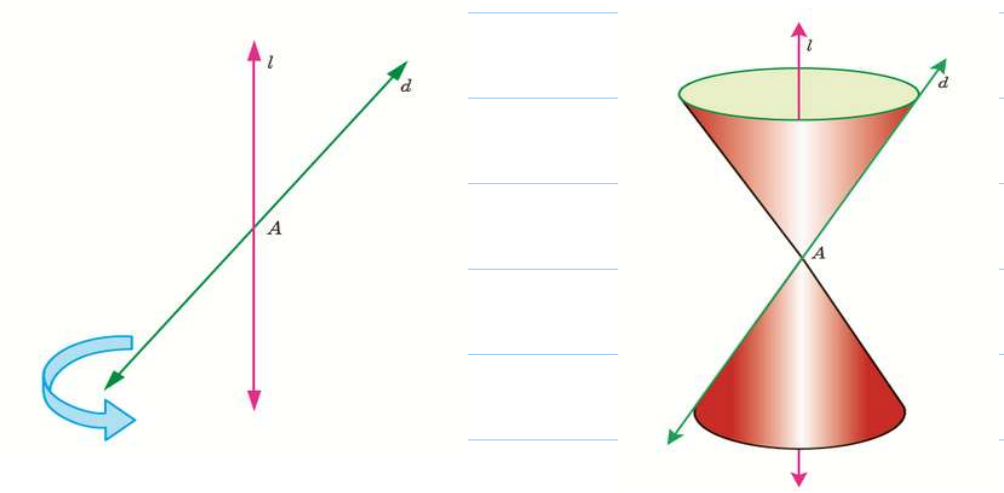
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

آشنایی با مقاطع مخروطی

فرض کنید خط‌های d و l در نقطه A متقاطع باشند. اگر خط d را حول خط l دوران دهیم شکل حاصل را یک سطح مخروطی می‌نامیم. در این سطح، خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد می‌نامیم.

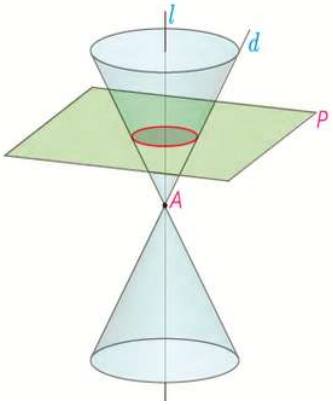


اگر یک سطح مخروطی را با یک صفحه برش دهیم، مقطع مخروطی به وجود می‌آید. با توجه به موقعیت صفحه و سطح مخروطی، مقاطع مخروطی متعددی حاصل خواهد شد.

۱) دایره :

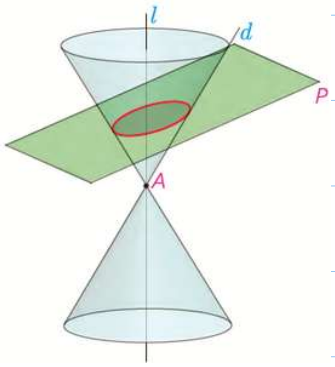
اگر سطح مخروطی را با یک صفحه که بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند

برش دهیم ، سطح مقطع دایره خواهد بود .



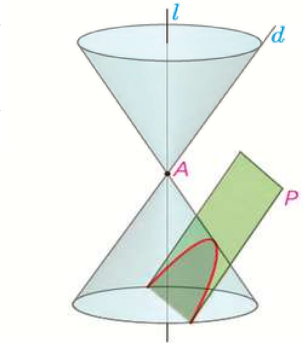
۲) بیضی :

اگر سطح مخروطی را با صفحه‌ای برش دهیم که نه بر محور سطح مخروطی عمود باشد نه با مولد سطح مخروطی موازی باشد و نه از رأس بگذرد ، سطح مقطع حاصل ، بیضی خواهد بود.



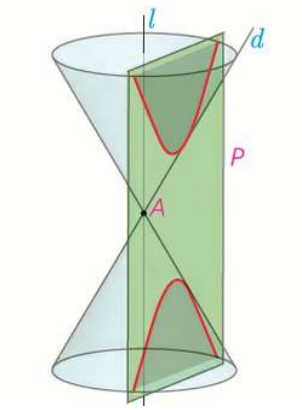
۳) سهمی :

اگر سطح مخروطی را با صفحه‌ای برش دهیم که با مولد سطح مخروطی موازی است و از رأس نمی‌گذرد شکل حاصل سهمی خواهد بود .

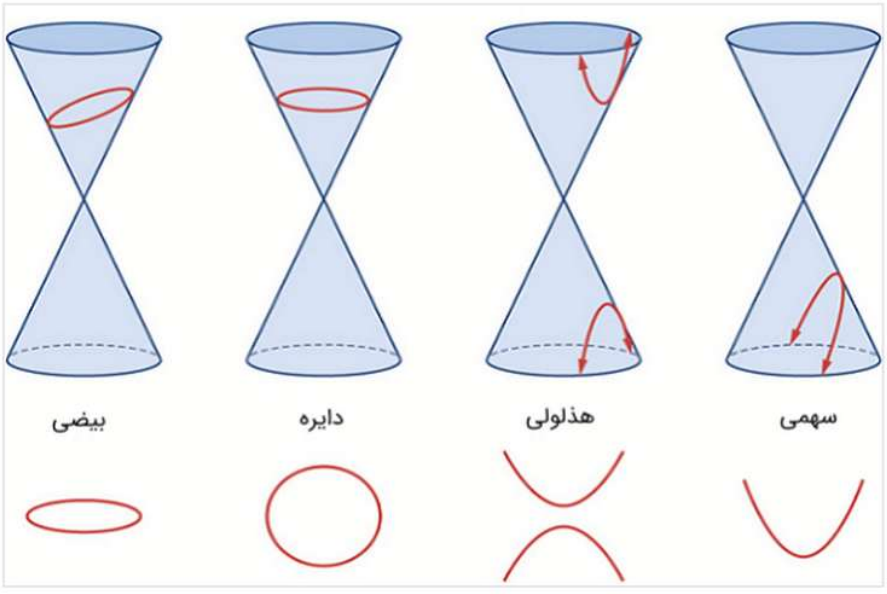


۱۴ هذلولی :

درصورتی که سطح مخروطی را با صفحه‌ای برش دهیم که هم قسمت بالای هم قسمت پائینی سطح را قطع کند و از رأس نگذرد، سطح مقطع حاصل، یک هذلولی خواهد بود.

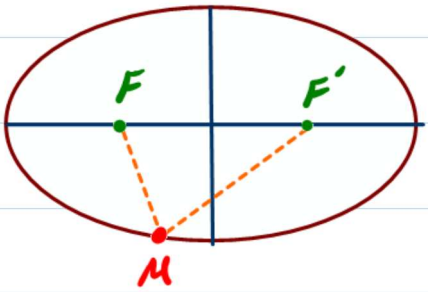


جمع بندی :



بررسی بیشتر بیضی :

تعریف : بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله های آن نقاط از دو نقطه ثابت در صفحه، عددی ثابت است.



عدد ثابت $= MF + MF'$

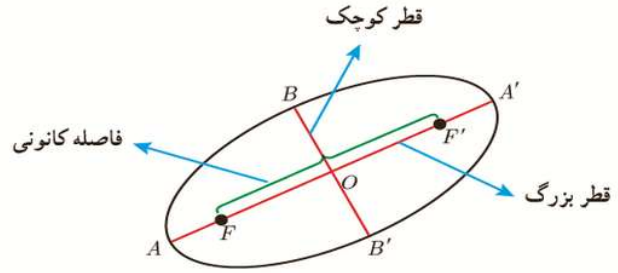
تعریف اجزای بیضی :

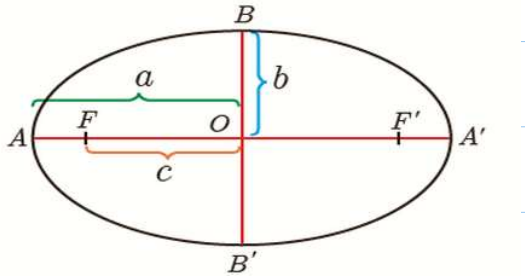
۱) دو نقطه ثابت F و F' را کانون های بیضی می نامیم و اندازه FF' فاصله کانونی بیضی نامیده می شود و برابر $2c$ تعریف می شود یعنی $FF' = 2c$.

۲) وسط FF' را مرکز بیضی در نظر گرفته و با O نشان می دهیم .

۳) قطری که از کانون های بیضی می گذرد را قطر بزرگ یا کانونی بیضی می نامیم و با AA' نشان می دهیم و اندازه آن را برابر $2a$ می گیریم یعنی $AA' = 2a$.

۴) وتری که بر قطر بزرگ در مرکز بیضی عمود است را قطر کوچک بیضی نامیده و با BB' نمایش می‌دهیم و اندازه آن را $2b$ می‌گیریم یعنی $BB'=2b$.

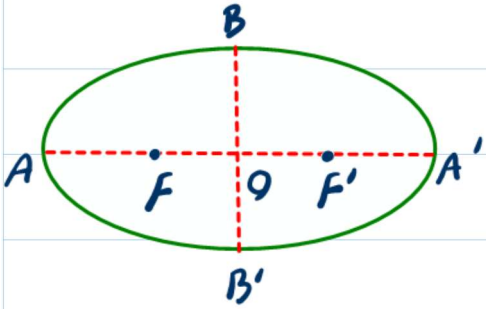




تذکر: اگر قطر بزرگ بیضی، افقی باشد، بیضی افقی است و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی قائم است.

قضیه ۱) مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های آن برابر طول قطر بزرگ بیضی است یعنی: $MF+MF'=AA'=2a$

اثبات:



برای نقطه A: متقارنیت $= AF+AF' = AF+(AF+FF') = 2AF+FF'$ (۱)

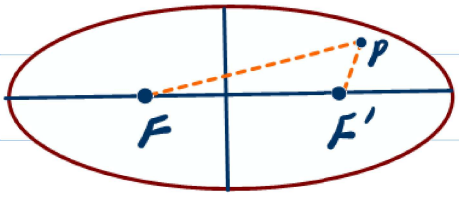
برای نقطه A': مقدار ثابت $= A'F' + A'F = A'F' + (A'F + FF') = 2A'F' + FF'$ (۲)

(۱) و (۲) $\rightarrow$ مقدار ثابت $= 2AF + FF' = 2A'F' + FF' \Rightarrow 2AF = 2A'F'$

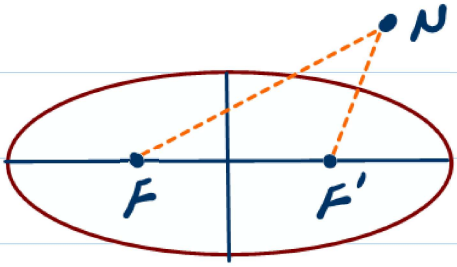
$\Rightarrow AF = A'F'$

A: مقدار ثابت $= AF + AF' = A'F' + AF' = AA' = 2a$ ☑

نتیجه: اگر نقطه‌ای خارج بیضی باشد، مجموع فاصله‌های آن تا کانون‌های بیضی از $2a$ بیشتر است و اگر نقطه‌ای درون بیضی باشد، مجموع فاصله‌های آن تا کانون‌های بیضی از $2a$ کمتر است.



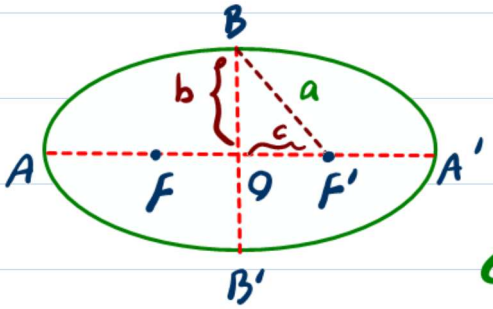
$PF + PF' < 2a$



$NF + NF' > 2a$

قضیه ۲) اگر در یک بیضی، نصف طول قطر بزرگ برابر a، نصف طول قطر کوچک برابر b و نصف فاصله کانونی برابر c باشد، آنگاه $a^2=b^2+c^2$.

اثبات:



از B به F وصل می‌کنیم.

مقدار ثابت $BF+BF'=2a$: B روی بیضی

از طرفی BB' عمود منصف FF' است و می‌دانیم فاصله هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط یک فاصله است پس $BF=BF'$ بنابراین $BF'=a$.

در مثلث قائم‌الزاویه BOF' قضیه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$BF'^2 = BO^2 + OF'^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$ ■

مثال: اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=5$ و $b=3$، در این‌صورت اندازهٔ فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

$$a^2=b^2+c^2 \rightarrow a^2-b^2=c^2 \Rightarrow 5^2-3^2=c^2 \Rightarrow 25-9=c^2$$

$$\rightarrow c^2=16 \rightarrow c=4 \rightarrow FF'=2c=2\times4=8$$

مثال : در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات (۴،۵) باشد :

الف) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید.

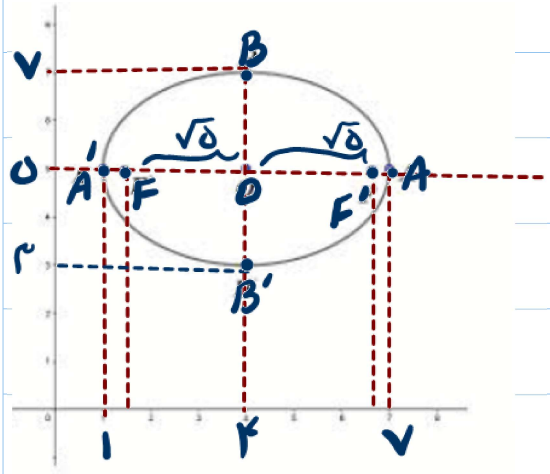
ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.

الف) $AA' = 2a = 6 \rightarrow a = 3$

$BB' = 2b = 4 \rightarrow b = 2$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 - b^2 = c^2 \rightarrow 3^2 - 2^2 = c^2 \rightarrow 9 - 4 = c^2 \rightarrow c^2 = 5$

$\rightarrow c = \sqrt{5} \rightarrow FF' = 2c = 2\sqrt{5}$



ب)

$A(7,5)$, $A'(1,5)$

$B(4,7)$, $B'(4,3)$

$F(4-\sqrt{5},5)$, $F'(4+\sqrt{5},5)$

خروج از مرکز بیضی :

مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم و با حرف e نمایش می‌دهیم.

چون $a^2 = b^2 + c^2$ پس $a > c$ است و در نتیجه $0 < \frac{c}{a} < 1$. بنابراین

خروج از مرکز همیشه از یک کمتر است.

هر چقدر خروج از مرکز بزرگ‌تر و به یک نزدیک‌تر باشد، بیضی کشیده‌تر و هر چقدر خروج از مرکز کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر می‌شود.

مثال: خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$، مرکز آن $(-1, -4)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

الف) $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ ، $BB' = 2b = 6 \to b = 3$

$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} \to 5c = 4a \xrightarrow{\div 5} c = \frac{4}{5}a$

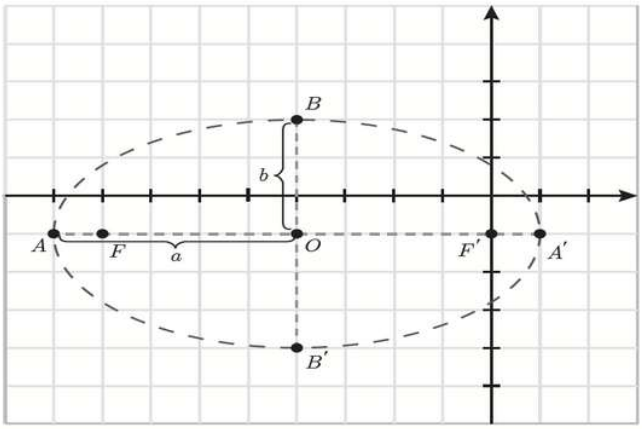
$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow a^2 = 3^2 + (\frac{4}{5}a)^2 \to a^2 - \frac{16}{25}a^2 = 9$

$$\frac{25a^2-16a^2}{25}=9 \rightarrow \frac{9}{25}a^2=9 \xrightarrow{\div 9} \frac{a^2}{25}=1 \rightarrow a^2=25 \rightarrow a=5$$

$$c=\frac{4}{5}a=\frac{4}{5}\times 5=4$$

$$AA'=2a=2\times 5=10 \quad , \quad FF'=2c=2\times 4=8$$

ب)



$A(-9,-1)$ $A'(1,-1)$

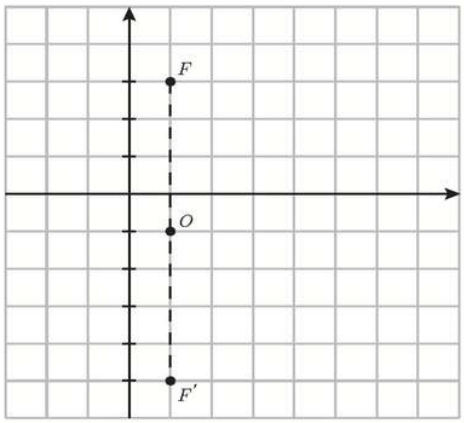
$B(-4,2)$ $B'(-4,-4)$

$F(-8,-1)$ $F'(0,-1)$

مثال: کانون‌های یک بیضی نقاط $(1,3)$ و $(-5,1)$ است.

الف) فاصلهٔ کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادلهٔ قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a=6$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.



الف) با توجه به مختصات کانون‌ها بیضی قائم است

$$FF'=|3-(-5)|=|3+5|=8$$

O وسط FF' است. $O=\left(\frac{1+1}{2},\frac{-5+3}{2}\right)=(1,-1)$

طول قطر بزرگ: $m=1$ طول قطر کوچک: $n=-1$

ب) $FF'=2c=8\rightarrow c=4$, $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2-c^2=b^2$

$\Rightarrow 6^2-4^2=b^2\rightarrow 36-16=b^2\rightarrow 20=b^2\rightarrow b=\sqrt{20}$

$\Rightarrow b=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5} \Rightarrow BB'=2b=2(2\sqrt{5})=4\sqrt{5}$

$e=\frac{c}{a} \Rightarrow e=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

مثال کنکور ۹۸ :

در یک بیضی به کانون‌های $(1,-2)$ و $(7,2)$، اندازهٔ قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸ ✓

$FF'=\sqrt{(7-1)^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}=2c\rightarrow c=\sqrt{13}$

$BB'=2b=6\rightarrow b=3$, $a^2=b^2+c^2\rightarrow a^2=9+13\rightarrow a^2=22$

گزینه ۴ $\rightarrow a=5\rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0.8$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل ششم: هندسه

درس دوم: دایره

قسمت اول

جلسه سوم: صفحات ۱۳۴ تا ۱۳۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

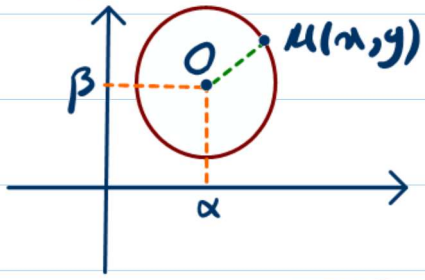
دایره :

تعریف : مجموعه نقاطی از صفحه را که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت به نام مرکز، مقداری ثابت و غیرصفر به نام شعاع است، دایره می‌نامیم.

دایره C به مرکز O و شعاع r را با $C(O,r)$ نشان می‌دهیم.

معادله استاندارد دایره :

اگر نقطه O به مختصات (α,β) مرکز دایره و r شعاع آن باشد، معادله استاندارد دایره به صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ است. زیرا اگر فاصله نقطه M با مختصات (x,y) روی محیط دایره را از مرکز دایره یعنی $O(\alpha,\beta)$ به دست آوریم :



$$OM=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} \xrightarrow{OM=r} r=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

به توان ۲ $\longrightarrow$ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

یادآوری ۱ : فاصله دو نقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ یا طول پاره‌خط AB :

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

یادآوری ۲ : مختصات وسط پاره‌خط AB :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

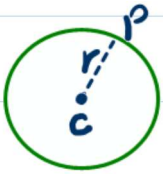
مثال : در حالت‌های زیر معادلهٔ دایره را بنویسید :

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2,-1)$ باشد.

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2,3)$ و نقطهٔ $(-3,-9)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

پ) دایره‌ای که نقاط $(0,3)$ و $(-1,-4)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

الف) مرکز دایره $C(\underset{\alpha}{2},\underset{\beta}{-1})$ روی محیط دایره $P(0,0)$



$$|PC|=r=\sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}\rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=5$$

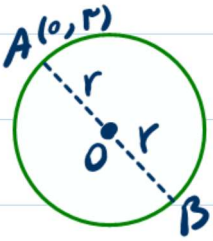
ب) $O(\underset{\alpha}{2},\underset{\beta}{3})$ روی محیط دایره $P(-3,-9)$



$$|PO|=r=\sqrt{(-3-2)^2+(-9-3)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=169 \xrightarrow{13^2}$$

پ)



$$AB=2r=\sqrt{(-4-0)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{16+16}$$

$$=\sqrt{32}=\sqrt{2\times 16}=4\sqrt{2}$$

$AB = 4\sqrt{2} \div 2 \Rightarrow r = 2\sqrt{2} \longrightarrow r^2 = 4 \times 2 = 8$

$O_{\text{وسط AB}} = \left(\frac{-4+0}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (\alpha, \beta) = (-2, 1) \longrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$

مثال : اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ باشد :

الف) مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بنویسید.

$O(-1, 0) \quad , \quad r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

محل برخورد با محور xها : $y = 0 \longrightarrow (x+1)^2 + 0^2 = 4 \longrightarrow (x+1)^2 = 4 \xrightarrow{\sqrt{}} x + 1 = \pm 2$

$x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$
$x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3$

نقاط تقاطع با محور xها : $(1, 0), (-3, 0)$

محل برخورد با محور yها : $x = 0 \longrightarrow (0+1)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 1 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

نقاط تقاطع با محور yها : $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$

معادله صنعتی یا گسترده دایره :

اگر با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای ، معادله استاندارد دایره را باز کنیم به معادله گسترده دایره می‌رسیم

که به صورت : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (ax, by: به خود حقیقی) است .

در فرم صنعتی دایره مختصات مرکز $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ است و شعاع از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

تذکر: با توجه به رابطه شعاع و اینکه باید زیر رادیکال مثبت باشد می‌توان گفت زمانی

معادله‌ی به صورتی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله یک دایره است که $a^2+b^2-4c>0$ باشد

مثال: معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن‌را پیدا کنید و معادلهٔ دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

روش اول:

$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) \rightarrow O(-\frac{-2}{2},-\frac{-6}{2}) \rightarrow O(1,3)$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-6)^2-4\times 6}=\frac{1}{2}\sqrt{4+36-24}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$

معادله استاندارد: $(x-1)^2+(y-3)^2=4$

روش دوم: استفاده از روش کامل کردن:

$x^2+y^2-2x-6y+6=0 \rightarrow \underline{x^2-2x}+\underline{y^2-6y}+6=0$

یادآوری: برای کامل کردن نصف ضریب x یا y را به توان ۲ می‌رسانیم و اضافه و کم می‌کنیم.

ضریب x: $(-\frac{2}{2})^2=1$

ضریب y: $(-\frac{6}{2})^2=9$

$\underbrace{x^2-2x+1}-1+\underbrace{y^2-6y+9}-9+6=0$

$(x-1)^2+(y-3)^2-1-9+6=0 \rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4$

مثال: حدود a را طوری بیابید که $x^2+y^2-4x+y-a=0$ معادله ضمنی یک دایره باشد.

$$(-4)^2+1^2-4(-a)>0 \rightarrow 9+1+4a>0 \rightarrow 4a>-10$$

$$\rightarrow a>\frac{-10}{4} \rightarrow a>-\frac{5}{2}$$

وضعیت نسبی نقطه و دایره:

دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r را در نظر بگیرید.

(الف) اگر نقطه A روی دایره باشد فاصله آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است یعنی $OA=r$. پس نقاطی که مختصات آن‌ها در تساوی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ صدق می‌کنند نقاطی هستند که روی دایره قرار دارند.

ب) اگر نقطه B درون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است یعنی $OB<r$. پس نقاطی که مختصات آن‌ها در نامساوی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<r^2$ صدق می‌کنند، نقاطی هستند که درون دایره قرار دارند.

پ) اگر نقطه C بیرون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است یعنی $OC > r$. پس نقاطی که مختصات آن‌ها در نامساوی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 > r^2$ صدق می‌کنند، نقاطی هستند که بیرون دایره قرار دارند.

مثال: با تکمیل جدول، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید :

معادلهٔ دایره	شعاع و مختصات مرکز دایره	نقاط		
		$A(1,1)$	$B(0,3)$	$C(-2,4)$
C_1 : $(x+2)^2+(y-3)^2=4$	دایره به مرکز $(-2,3)$ و شعاع ۲	بیرون دایره	روی دایره	درون دایره
C_2 : $(x-1)^2+(y+2)^2=9$	دایره به مرکز $(-2,1)$ و شعاع ۳	روی دایره	بیرون دایره	بیرون دایره

$A(1,1) \xrightarrow{C_1} (1+2)^2+(1-3)^2 = 9+4 = 13 > 4 = 2^2$ بیرون دایره

$B(0,3) \xrightarrow{C_1} (0+2)^2+(3-3)^2 = 4+0 = 4 = 2^2$ روی دایره

$C(-2,4) \xrightarrow{C_1} (-2+2)^2+(4-3)^2 = 0+1 = 1 < 4 = 2^2$ درون دایره

$A(1,1) \xrightarrow{C_2} (1-1)^2+(1+2)^2 = 0+9 = 9 = 3^2$ روی دایره

$C(-2,4) \xrightarrow{C_2} (-2-1)^2+(4+2)^2 = 9+36 = 45 > 9 = 3^2$ بیرون دایره

نکته: برای بررسی وضعیت نسبی نقطه و دایره در شکل گسترده دایره، مختصات نقطه را در دایره قرار می‌دهیم. اگر مقدار مثبت‌تر عدد روی دایره، اگر عددی منفی شد درون دایره و اگر عددی مثبت بدست آمد بیرون دایره است.

مثال: وضعیت نقاط $(1,0)$، $(-1,0)$، $(-2,-1)$ و $(0,0)$ را نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ مشخص کنید.

$(0,0) \rightarrow 0^2+0^2-2\times0+4\times0+1=1>0$ بیرون دایره

$(-1,-2) \rightarrow (-1)^2+(-2)^2-2(-1)+4(-2)+1=1+4+2-8+1=0$ روی دایره

$(0,-1) \rightarrow 0^2+(-1)^2-2\times0+4(-1)+1=1-4+1=-2<0$ درون دایره

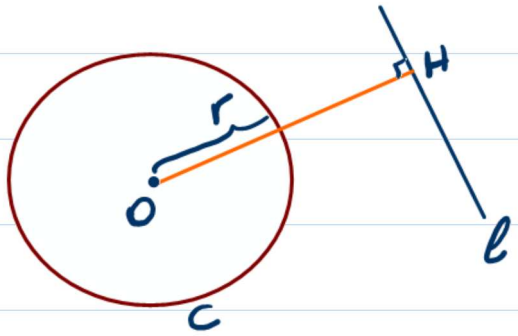
$(1,0) \rightarrow 1^2+0^2-2\times1+4\times0+1=1-2+1=0$ روی دایره

اوضاع نسبی خط و دایره :

یک خط و دایره می‌توانند به سه حالت زیر کنار هم قرار گیرند :

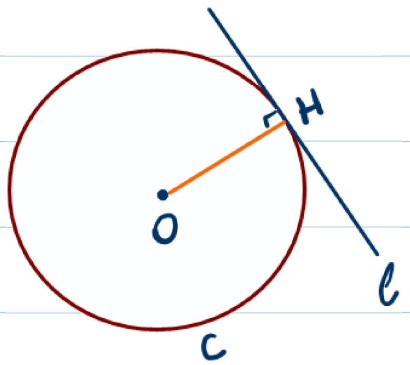
الف) دایره و خط هیچ نقطه مشترکی با هم نداشته باشند یعنی دایره و خط یکدیگر را قطع نکنند.

اگر فاصله مرکز دایره تا خط را OH بگیریم داریم : $OH > r$

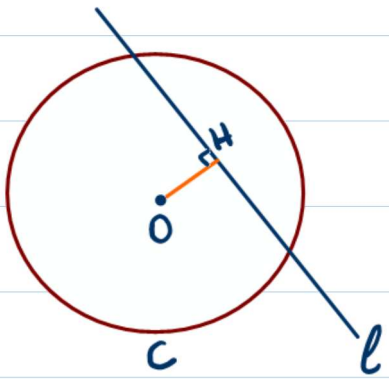


ب) دایره و خط یک نقطه مشترک داشته باشند، یعنی خط بر دایره مماس باشد. خط مماس

در نقطه تماس بر شعاع نظیر نقطه تماس عمود است و داریم : $OH = r$



پ۱ دایره و خط دو نقطه مشترک داشته باشند، یعنی خط و دایره متقاطع باشند. در این حالت



داریم : $OH < r$.

یادآوری رابطه فاصله نقطه از خط :

فاصله نقطه $A(x_0,y_0)$ از خط $l: ax+by+c=0$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود :

$$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال : وضع خط‌های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

الف) $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ و $6x+4y=0$ (a, b, c)

$$O\left(-\frac{-4}{2},-\frac{-4}{2}\right)=(2,2) \quad , \quad r=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2-4\times 7}=\frac{1}{2}\sqrt{16+16-28}$$

$$\rightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{4}=\frac{1}{2}\times 2=1$$

ضریب y در خط ضریب x در خط

فاصله مرکز دایره تا خط $OH = \frac{|12\times 2 + 4\times 2 + 01|}{\sqrt{6^2+4^2}} = \frac{20}{\sqrt{36+16}} = \frac{20}{\sqrt{52}} = \frac{20}{\sqrt{13\times 4}}$

$$OH = \frac{20}{2\sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{13}} \simeq 2,77$$

$2,77 = OH > r = 1$ $\Rightarrow$ خط دایره را قطع نمی‌کند.

(بیرون دایره)

ب) $x^2+y^2=2$ و $y=-x-2$

$O(0,0)$, $r=\sqrt{2}$ $\quad$ $l: x+y+2=0$

$$OH = \frac{|1\times 0 + 1\times 0 + 2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow OH = r = \sqrt{2}$ خط بر دایره مماس است.

پ) دایرهٔ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ و خط $y=-1$

$O(2,-3)$, $r=2$ $\quad$ $l: y+1=0$

$$OH = \frac{|0\times 2 + 1(-3) + 1|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-3+1|}{1} = |-2| = 2 \Rightarrow OH = r = 2$$

خط بر دایره مماس است

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل ششم: هندسه

درس دوم: دایره

قسمت دوم

جلسه چهارم: صفحات ۱۳۹ تا ۱۴۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

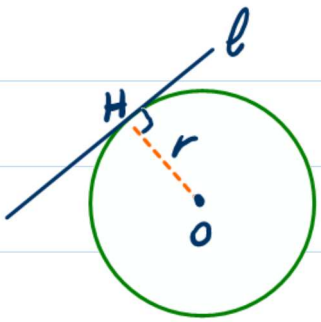
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مثال: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطهٔ $(0,3)$ و بر خط $3x-4y=3$ مماس باشد.



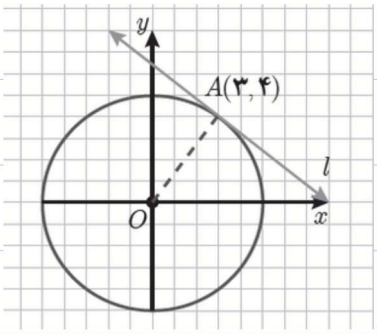
$$l: 3x-4y-3=0$$

$$OH=r=\frac{|3\times 0-4\times 3-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-15|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3$$

معادله دایره: $(x-0)^2+(y-3)^2=3^2$

$$\Rightarrow x^2+(y-3)^2=9$$

مثال: اگر بدانیم خط l در نقطه $(3,4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادلهٔ خط مماس چیست؟



چون شعاع در محل تماس بر خط مماس عمود است، پس $OA \perp l$ است و باید از رابطه عکس شیب استفاده کنیم.

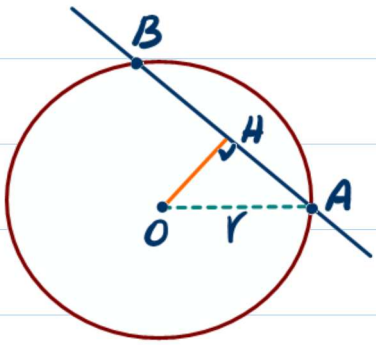
$$m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}$$

$$m_l=-\frac{3}{4} \quad , \quad A(3,4)$$

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3) \xrightarrow{\times 4} 4y-16=-3x+9 \rightarrow 3x+4y-25=0$$

معادله خط l

نکته : در حالتی که خط و دایره متقاطع اند، دایره روی خط وتری به طول d جدا می‌کند که از رابطه $AB = 2\sqrt{r^2 - OH^2}$ بدست می‌آید زیرا :



در مثلث قائم‌الزاویه AOH فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$r^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow AH^2 = r^2 - OH^2$$

$$\rightarrow AH = \sqrt{r^2 - OH^2}$$

به راحتی ثابت می‌شود $AH = BH$ پس :

$$AB = 2AH = 2\sqrt{r^2 - OH^2}$$

مثال : مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(\overset{\alpha}{2}, \overset{\beta}{-3})$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.

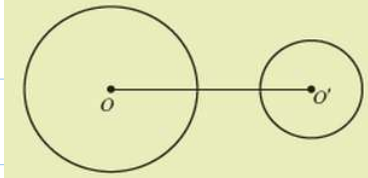
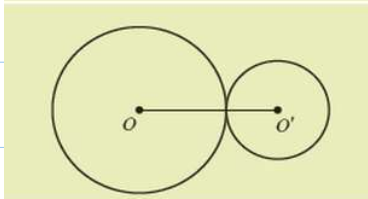
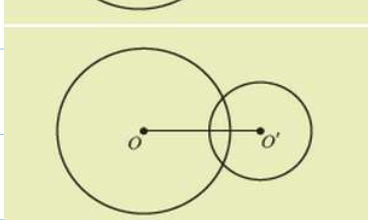
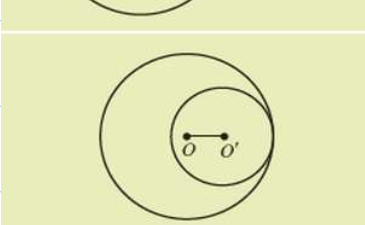
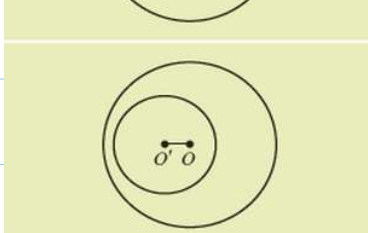
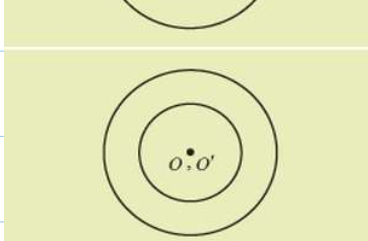
$$OH = \frac{|3\times 2 - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 12 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$AB = 2\sqrt{r^2 - OH^2} \rightarrow 6 = 2\sqrt{r^2 - 4^2} \xrightarrow{\div 2} 3 = \sqrt{r^2 - 16}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 9 = r^2 - 16 \rightarrow r^2 = 25 \rightarrow r = 5 \rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

وضع نسبی دو دایره :

اگر نقاط O و O' مرکزهای دو دایره به شعاع‌های r و r' باشند و پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند، خط‌المرکزین بنامیم و با d نمایش دهیم، وضعیت دو دایره با توجه به طول r، r' و d به یکی از صورت‌های زیر است : $(r > r')$

دو دایره بیرون هم (متخارج)	$d > r + r'$	
دو دایره مماس بیرون	$d = r + r'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$r - r' < d < r + r'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d = r - r'$	
دو دایرهٔ متداخل	$d < r - r'$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d = 0$	

مثال: برای موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2+y^2+2x-4y=9$ (C_2) و $x^2+y^2-2x+4y=4$ (C_1)

C_1 : $O(-\frac{-2}{2},-\frac{4}{2}) \to O(1,-2)$, $r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(4)^2-4(-4)}$

$\to r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=\frac{1}{2}\sqrt{36}=\frac{1}{2}\times 6=3$

C_2 : $O'(-\frac{2}{2},-\frac{-4}{2}) \to O'(-1,2)$, $r'=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2-4(-9)}$

$\to r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+36}=\frac{1}{2}\sqrt{56}=\frac{1}{2}\sqrt{14\times 4}=\sqrt{14}\simeq 3.7$

$d=OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}\simeq 4.47$

$\sqrt{14}-3 < \sqrt{20} < \sqrt{14}+3 \to r'-r < OO' < r'+r \to$ دو دایره متقاطع‌اند

(3.7 ↑ ، 4.47 ↑ ، 4.7 ↑)

ب) $(x-2)^2+(y+3)^2=7$ (C_1) و $x^2+(y-5)^2=5$ (C_2)

C_1 : $O(2,-3)$, $r=\sqrt{7}$ $\qquad$ C_2 : $O'(0,5)$, $r'=\sqrt{5}$

$OO'=\sqrt{(2-0)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68} \Rightarrow \sqrt{68}>\sqrt{7}+\sqrt{5}$

$\Rightarrow OO'>r+r' \Rightarrow$ دو دایره متخارج‌اند.

مثال: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر دایرهٔ $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ (C_1) مماس بیرون و مرکز آن نقطهٔ $O(2,-2)$ (α,β) باشد

C_1 : $O'(-\frac{2}{2}, -\frac{-4}{2}) \to O'(-1,2)$

$r' = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2-4(-4)} = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+16} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$

$OO' = \sqrt{(2+1)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

مماس بیرون : $OO' = r+r' \to 5 = r+3 \to r=2$

معادله دایره : $(x-2)^2+(y+2)^2 = 4$

مثال: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(-1,-1)$ (α,β) و با دایرهٔ C_1 : $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس درون باشد.

C_1 : $O'(-\frac{-4}{2}, -\frac{-6}{2}) = (2,3)$

$r' = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)} = \frac{1}{2}\sqrt{16+36+12} = \frac{1}{2}\sqrt{64} = \frac{1}{2}\times 8 = 4$

$OO' = \sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

مماس درون $OO' = |r-r'| \to 5 = |r-4| \begin{cases} r=9 \checkmark \\ r=-1 \times \end{cases}$

معادله دایره : $(x+1)^2+(y+1)^2 = 81$