به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل سوم: حد بی نهایت و حد در بی نهایت

درس اول: حد بی نهایت

یادآوری مفهوم حد

جلسه اول: صفحات ۵۰ و۵۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

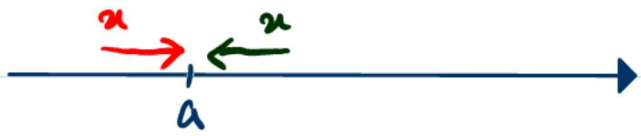
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری :

۱) مفهوم میل کردن : اگر x به عدد a نزدیک و نزدیک‌تر شود ولی هیچ‌گاه برابر a نشود می‌گوئیم x به a میل می‌کند و می‌نویسیم : $x \to a$

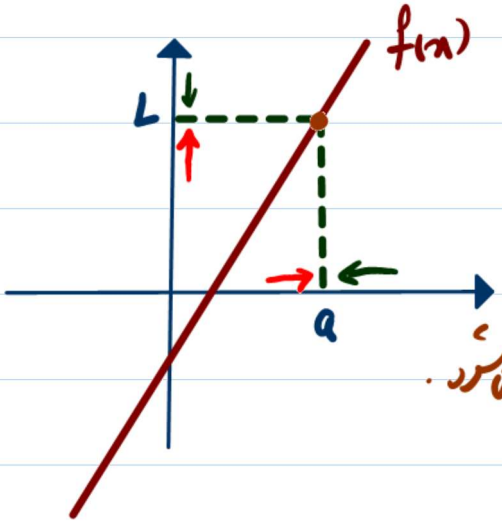


$x \to a^+$: هرگاه x از مقادیر بزرگتر از a به a نزدیک شود . در این حالت می‌گوئیم x از طرف راست به a میل می‌کند.

$x \to a^-$: هرگاه x از مقادیر کوچکتر از a به a نزدیک شود . در این حالت می‌گوئیم x از طرف چپ به a میل می‌کند.

۲) مفهوم حد : وقتی می‌گوئیم می‌خواهیم حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند را حساب کنیم یعنی می‌خواهیم ببینیم وقتی x به عدد a نزدیک می‌شود

مقدار تابع یا همان y به چه عددی نزدیک می‌شود.



نحوه نوشتن حد: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

وقتی می‌خوانیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند برابر L می‌شود.

۳) چند نکته:

الف) برای محاسبه حد تابع در نقطه a، تابع باید اطراف این نقطه تعریف شده باشد ولی لزومی ندارد در خود a تعریف شده باشد.

ب) هرگاه x از سمت راست به a میل کند و مقادیر تابع به L_1 نزدیک شوند می‌نویسیم:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$ وقتی می‌خوانیم حد راست تابع f در a برابر L_1 است.

پ) هرگاه x از سمت چپ به a میل کند و مقادیر تابع به L_2 نزدیک شوند می‌نویسیم:

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$ وقتی می‌خوانیم حد چپ تابع f در a برابر L_2 است.

ت) زمانی تابع f در a حد دارد که مقدار حد چپ و راست موجود و برابر باشند.

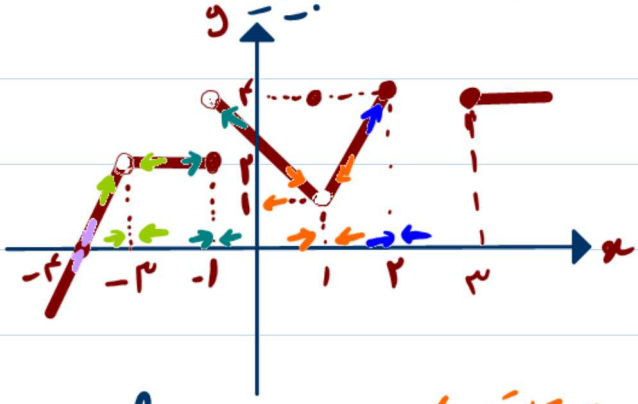
ث) به طور کلی اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$. آنگاه درباره $f(a)$ یکی از حالت‌های زیر را داریم:

الف) $f(a)$ موجود نیست.

ب) $f(a)$ موجود است ولی با مقدار حد برابر نیست ($f(a) \neq L$)

پ) $f(a)$ موجود و برابر مقدار حد است ($f(a) = L$)

مثال: نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای خواسته شده را بیابید.



۱) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ ولی مقدار تابع ۲

۲) $\lim_{x\to -۳} f(x) = ۲$ مقدار تابع تعریف نشده

۳) $\lim_{x\to -1} f(x) =$ حد ندارد
- $\lim_{x\to -1^-} f(x) = ۲$ ⇒ مقدار تابع
- $\lim_{x\to -1^+} f(x) = ۴$

۴) $\lim_{x\to ۲} f(x) =$ حد ندارد
- $\lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۴$
- $\lim_{x\to ۲^+} f(x) =$ وجود ندارد

۵) $\lim_{x\to -۴} f(x) = ۰$

۴) محاسبه حد :

برای محاسبه حد یک تابع وقتی $x \to a$ کافی است به جای x ، a بگذاریم.

اگر حاصل حد رشتی به دست آمد ، همان مقدار حد تابع است . در محاسبه تابع

به نکات زیر توجه کنید .

۱) در توابع چند ضابطه‌ای زمانی که محاسبه حد در نقاطی که ضابطه تابع عوض می‌شود

مدنظر باشد باید حد راست و چپ را از ضابطه‌های مربوط به آن محاسبه کنیم .

۲) در توابع رادیکالی با فرجه زوج اگر a ریشه عبارت زیر رادیکال باشد باید

حد چپ و راست را در a حساب کنیم .

۳) در توابع قدر مطلقی اگر a ریشه عبارت داخل قدر مطلق باشد در صورت لزوم (حاصلضرب)

با تعیین علامت و حذف قدر مطلق‌ها آن را به تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم .

۴) در توابع شامل جزء صحیح ، اگر عبارت درون جزء صحیح مقدار صحیح می‌شود ، مقدار جزء صحیح

را حساب می‌کنیم ولی اگر مقدار صحیح شد باید حد چپ و راست محاسبه شود.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

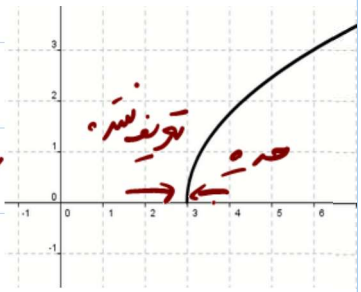
الف) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-(x+3)^2}{\sin x+2\cos x} = \frac{\sqrt{4+0}-(0+3)^2}{\sin 0+2\cos 0} = \frac{2-9}{0+2\times 1} = \frac{-7}{2}$

ب) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{3x-9}$

$\lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{3x-9} = 0$

$\lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{3x-9}$ = حد ندارد

x	3
$3x-9$	$-9+$



پ) $\lim\limits_{x\to 1} \begin{cases} x+3 & x<1 \\ x^2+2 & x\geq 1 \end{cases}$ = حد ندارد

$\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+2) = 1^2+2 = 3$

$\lim\limits_{x\to 1^-} (x+3) = 1+3 = 4$

ت) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1+x[x]}{[x]+3}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1+x[x]}{[x]+3} = \frac{1+1\times 1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1+x[x]}{[x]+3} = \frac{1+1\times 0}{0+3} = \frac{1}{3}$

حد ندارد

حد توابع کسری وقتی به صورت $\frac{0}{0}$ برمی‌خورد :

صفرها دو دسته اند : ۱ـ صفر مطلق (خود صفر)

۲ـ صفر نسبی یا حدی ($0^{\pm}$)

باتوجه به دو دسته بودن صفرها، پس ۴ نوع $\frac{0}{0}$ داریم :

نوع اول : $\frac{0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد .

نوع دوم : $\frac{0^{\pm}}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

نوع سوم : $\frac{0}{0^{\pm}}$ صورت صفر مطلق و مخرج غیرصفر (صفر حدی) پس حد کسر صفر می‌شود.

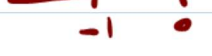
نوع چهارم : $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$ به این حالت، حالت مبهم می‌گوییم و باید رفع ابهام شود .

مثال : حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{[x]^2-4}{[x]-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ حد ندارد

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{[x]-1} = \frac{1^+-1}{1-1} = \frac{0^+}{0}$ حد ندارد

پ) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{[x]+1}{x^2-1} = \frac{-1+1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$ حد دارد





چگونه رنج ابهام $\frac{\pm}{\pm}$ را برای بار دهم:

چون $x \to a$ صورت و مخرج هردو صفر شده اند پس هم صورت و هم مخرج

عامل $(x-a)$ را دارا هستند. به $(x-a)$ عامل ابهام یا صفر کننده می گوییم.

الف) رنج ابهام $\frac{\pm}{\pm}$ وقتی صورت و مخرج هردو چندجمله ای باشند.

با استفاده از روش های تجزیه (فاکتورگیری و ریشه ها) عامل ابهام را در صورت و مخرج

ایجاد و با یکدیگر حذف می کنیم تا حد قابل محاسبه باشد.

تبصره: هرگاه نتوانیم با ریشه ها یا فاکتورگیری عامل ابهام را ایجاد کنیم، چاره ای

جز تقسیم آن عبارت بر عامل ابهام نداریم. در این صورت به جای آن عبارت

حاصل ضرب $(x-a)$ (طبق الگوریتم تقسیم) در خارج قسمت را می نویسیم.

یادآوری و تکمیل:

رابطه تقسیم $\frac{P}{R}\left|\frac{B}{Q}\right.$ $\qquad P = BQ + R$

هرگاه R صفر شود می گوییم P بر B بخش پذیر است.

قضیه : در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه : اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

$f(x) \mid x-a$, Q , R

اثبات : $f(x)=(x-a)Q+R$

$\rightarrow x=a \rightarrow f(a)=(a-a)Q+R \rightarrow f(a)=R$

کار در کلاس

۱ در چندجمله‌ای $f(x)=3x^2-5x-2$، مقدار $f(2)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$f(2)=3\times 2^2-5\times 2-2=12-10-2=0$

$f(x)$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است.

تقسیم چندجمله‌ای $3x^2-5x-2$ بر $x-2$:

$3x^2-5x-2 \mid x-2$

$-(3x^2-6x)$, $3x^2 \div x = 3x$

$x-2$

$-(x-2)$, $x \div x = 1$

0

۲ چندجمله‌ای $g(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۱$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x + ۱)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید :

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

الف)

$x+1=0 \rightarrow x=-1 \longrightarrow g(-1)=R$

$g(-1)= ۲\times(-1)^۳ + (-1)^۲ + ۱ = -۲+۱+۱=۰$

بله زیرا باقی‌مانده صفر شد.

ب)

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳+x^۲+۱ & x+۱ \\ \hline -(۲x^۳+۲x^۲) & ۲x^۲-x+۱ \\ \hline -x^۲+۱ & \\ -(-x^۲-x) & \\ \hline x+۱ & \\ -(x+۱) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$\frac{۲x^۳}{x} = ۲x^۲$

$\frac{-x^۲}{x} = -x$

$\frac{x}{x} = ۱$

پ)

$۲x^۳+x^۲+۱ = (x+۱)(۲x^۲-x+۱)$

تجزیه

۳ نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+5x^2-3x-10$ بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر است.

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$f(-2)=R \Rightarrow f(-2)=2(-2)^3+5(-2)^2-3(-2)-10$

$=-16+20+6-10=-26+26=0$

کار در کلاس

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+3x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x^3-13x^2+24x-9}$

الف) $\dfrac{9-9}{9-9}=\dfrac{0}{0}$ حالت ابهام

$x-(-3)=x+3$

$\lim \dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)}=\dfrac{-3-3}{-3}=\dfrac{-6}{-3}=2$

$x\to -3$

ب) $\dfrac{4\times\frac{1}{4}-4\times\frac{1}{2}+1}{2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1-2+1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}=\dfrac{0}{0}$

حالت ابهام $(x-\frac{1}{2})$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$$

$x \to \frac{1}{2}$

$$= \lim \frac{(x - \frac{1}{2})(4x - 2)}{(x - \frac{1}{2})(2x + 2)}$$

$x \to \frac{1}{2}$

$$= \frac{4 \times \frac{1}{4} - 2}{2 + 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1 - 2}{2 + 1} = \frac{0}{3} = 0$$

$4x^2 - 4x + 1 \mid x - \frac{1}{2}$

$-(4x^2 - 2x)$

$-2x + 1$

$-(-2x + 1)$

0

$2x^2 + x - 1 \mid x - \frac{1}{2}$

$-(x - 2x^2)$

$2x - 1$

$-(2x - 1)$

0

ب) $$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{6x^3 + 2x^2 - 11x + 6} = \frac{0}{0}$$

$x \to \frac{1}{2}$

اگر $x = \frac{1}{2}$ باشد $(x - \frac{1}{2})$ ریشه است.

صورت $4x^2 - 1 = 4(x^2 - \frac{1}{4}) = 4(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$

مخرج

$-(6x^3 - 3x^2)$

$-3x^2 + 11x - 6$

$-(-3x^2 + 2x)$

$9x - 6$

$-(9x - 6)$

0

$6x^3 + 2x^2 - 11x + 6 \mid x - \frac{1}{2}$

$7x^2 - 11x + 2$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})(2x^2-12x+18)} = \frac{4(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}{2\times\frac{1}{4}-12\times\frac{1}{2}+18}$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{2}-6+18} = \frac{4}{\frac{25}{2}}$$

$$= \frac{8}{25}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل سوم: حد بی نهایت و حد در بی نهایت

درس اول: حد بی نهایت

رفع ابهام صفرصفرم در توابع

کسری رادیکالی

جلسه دوم: صفحات ۵۲ و ۵۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

ب) رفع ابهام به وقتی صورت یا مخرج و یا هر دو شامل عبارات رادیکالی هستند:

در این حالت از مفهوم گویا کردن و اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر استفاده می‌کنیم. به این صورت که با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارت رادیکالی (بزرگی فرجه‌های ۲) یا عبارت چاق عبارت رادیکالی (بزرگی فرجه‌های ۳)، عامل ابهام را ایجاد می‌کنیم.

کار در کلاس

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

ت) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}} = \frac{0}{0}$ عامل ابهام $(x+1)$

یادآوری اتحاد مزدوج $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

مزدوج همدیگرند

$x+\sqrt{2x+3}$ مزدوج $x-\sqrt{2x+3}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)\times(x-\sqrt{2x+3})}{(x+\sqrt{2x+3})\times(x-\sqrt{2x+3})} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2-(\sqrt{2x+3})^2}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2-(2x+3)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2-2x-3}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{(x+1)(x-3)} = \frac{(-1-1)(-1-\sqrt{2(-1)+3})}{-1-3}$$

$$= \frac{-2\times(-1-1)}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

ث) $\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2} = \frac{0}{0}$ حالت مبهم $(x-1)$

$(x-\sqrt{x}) \xrightarrow{\text{مزدوج}} (x+\sqrt{x})$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-\sqrt{x})\times(x+\sqrt{x})}{(x-1)(x+2)\times(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{(1+2)(1+1)} = \frac{1}{6}$$

ج) $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2} = \frac{0}{0}$ حالت مبهم $(x+1)$

یادآوری اتحاد چاق و لاغر:

عبارت چاق — عبارت لاغر

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

نحوه ساختن عبارت چاق از روی عبارت لاغر :

۱ـ جمله اول چاق : مربع (توان دوم) جمله اول لاغر

۲ـ جمله دوم چاق : حاصل ضرب جمله اول در دوم لاغر با علامت قرینه

۳ـ جمله سوم چاق : مربع جمله دوم لاغر

لاغر — چاق

$$\lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt[3]{x}+1)\times(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(x+1)(x+2)\times(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt[3]{x})^3+1^3}{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{(-1+2)(1+1+1)}$$

$$= \frac{1}{3}$$

مثال: حدود زیر را بیابید :

الف) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}$

ب) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

پ) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

ت) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$

ث) $\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$

ج) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

چ) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-6x+5}$

ح) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$

الف ـ ب ـ ث و چ بعنوان تمرین

پ)

عامل مشترک : $(x-\frac{1}{2})$

$(\frac{1}{2})^3$

تجزیه صورت : $8(x^3-\frac{1}{8})=8(x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

تجزیه مخرج : $(x-\frac{1}{2})(2x-2)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-5x+1 & x-\frac{1}{2} \\ -(2x^2-x) & 2x-2 \\ \hline -2x+1 & \\ -(-2x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8(x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{(x-\frac{1}{2})(2x-2)}=\frac{8(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})}{2-2}=\frac{8\times\frac{3}{4}}{1}$$

$$=6$$

ت) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$

حل کامل با $(x-1)$.

صورت: $(x-1)(x^2+x+1)$

مخرج: $(x-1)(x^2+1)$

$x^3-x^2+x-1 \mid x^2+1$

$-(x^3-x^2)$

$x-1$

$-(x-1)$

0

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

ج) $\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

حل کامل با $(x-1)$.

مزدوج صورت — مزدوج مخرج

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-\sqrt{x})\times(x+\sqrt{x})\times(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\times(x+\sqrt{x})\times(\sqrt{x}+1)}$$

$x\to 1$ ← مزدوج مخرج — مزدوج صورت

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{1(1+1)}{1+1}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

ج) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$

حل ابهام : x

مزدوج صورت — مزدوج مخرج

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{2x+1}-1)\times(\sqrt{2x+1}+1)\times(\sqrt{3x+4}+2)}{(\sqrt{3x+4}-2)\times(\sqrt{2x+1}+1)\times(\sqrt{3x+4}+2)}$$

ضرب

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(2x+1-1)(\sqrt{3x+4}+2)}{(3x+4-4)(\sqrt{2x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(\sqrt{3x+4}+2)}{3x(\sqrt{2x+1}+1)}$$

$$= \frac{2(2+2)}{3(1+1)} = \frac{4}{3}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

درس اول: حد بی‌نهایت

تعریف حد بی‌نهایت

جلسه سوم: صفحات ۵۴ تا ۵۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

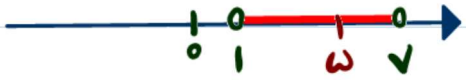
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تعریف همسایگی: اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوییم.



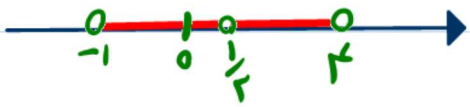
یک همسایگی x_0 (a,b)

مانند: 

$(۱,۷)$ یک همسایگی عدد ۳

تعریف همسایگی محذوف: اگر x_0 را از همسایگی بازش خارج کنیم، همسایگی محذوف x_0 بدست می‌آید. یعنی: $(a,b)-\{x_0\}$



مانند: 

$(-۱,۴)-\{\frac{۱}{۲}\}$ یک همسایگی محذوف $\frac{۱}{۲}$

تعریف همسایگی راست و چپ: اگر x_0 عددی حقیقی و مثبت باشد بازه $(x_0, x_0+۲)$ را یک همسایگی راست x_0 و بازه $(x_0-۲, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

مانند: 

$(۲,۵)$ یک همسایگی راست برای ۲ یا $۲+۳$



$(۲,۵)$ یک همسایگی چپ برای ۲ یا $۲-۲$

مثال: اگر بازه $(a-3, 2a+1)$ همسایگی حذفی یک باشد، حدود a را بیابید.

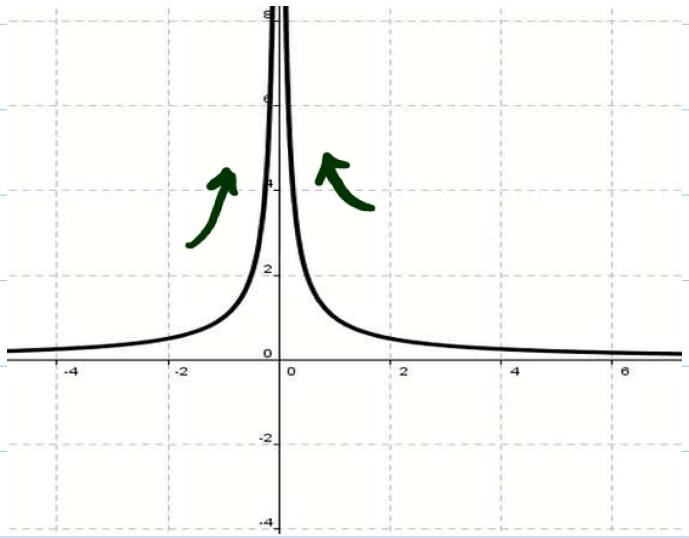
$$a-3 < 1 < 2a+1$$

$$\begin{cases} a-3<1 \rightarrow a<4 \\ 2a+1>1 \rightarrow 2a>0 \rightarrow a>0 \end{cases}$$

$$\cap \rightarrow 0<a<4$$

می‌خواهیم حد تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ را در $x=0$ بررسی کنیم. تابع در $x=0$ تعریف نمی‌شود ولی یک همسایگی حذفی 0 وجود دارد.

x	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0.001	0.01	0.1	0.5
$y=f(x)$	2	100	1000	1000	$+\infty$	$+\infty$	1000	100	2



تعریف: فرض کنید f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f به ازای xهایی که از هر دو طرف به a نزدیک شوند، به قدری بزرگ شوند که مقادیر متغیر x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشند می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

در این صورت می‌گوییم تابع f در a حد نامتناهی (مثبت بی‌نهایت) دارد.

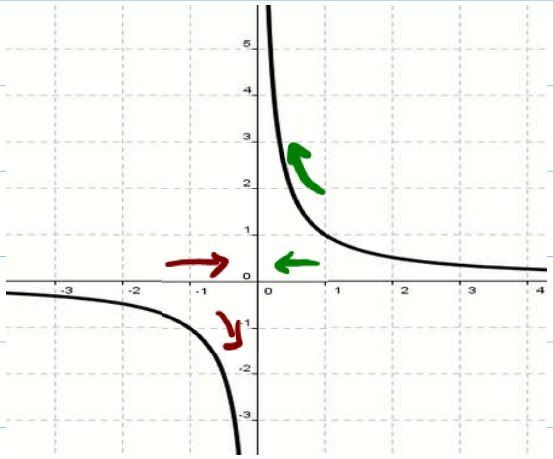
تذکر: اگر با شرایط تعریف بالا:

۱- مقادیر تابع f به ازای xها کاهش یابد، می‌نویسیم: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

۲- f در یک همسایگی راست نقطه a تعریف شده باشد و مقادیر تابع کاهش یا افزایش یابند به ترتیب می‌نویسیم: $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ یا $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

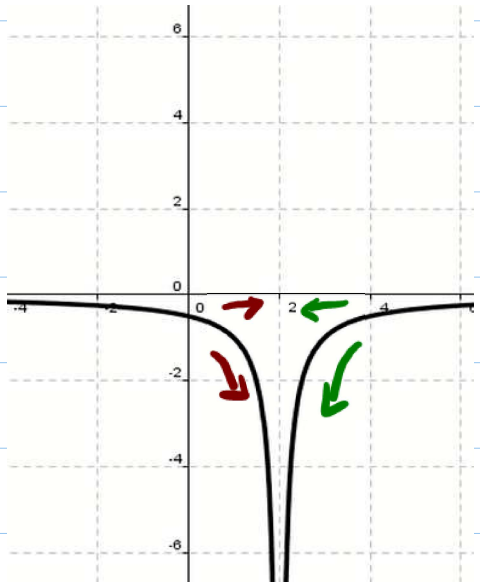
۳- f در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده باشد و مقادیر تابع کاهش یا افزایش یابند به ترتیب می‌نویسیم: $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ یا $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

مثال :



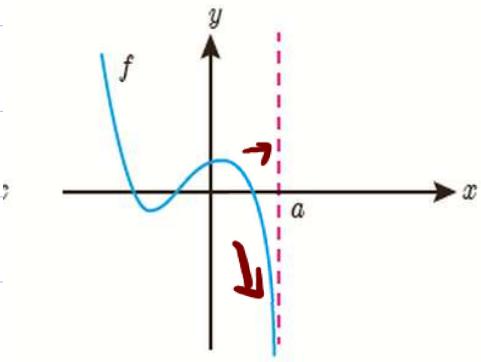
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

محاسبه حدی نهایت :

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ ، $\lim_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه a حد نامتناهی یا حدی نهایت دارد و علامت بی نهایت با توجه به علامت L و علامت صفر حدی تابع g در یک همسایگی محذوف a تعیین می شود. این نکته برای حد چپ و حد راست هم درست است.

پس : $\frac{\text{عدد}}{\text{۰حدی}}=\infty$ (در حدی نهایت ها به جای یک حد را صل می کنیم و جواب حدی نهایت می شود.)

نکته : برای تشخیص علامت صفر حدی با توجه به ضابطه تابع معرف از جدول گذاری مقادیر نزدیک a یا جدول تعیین علامت و در صورت لزوم تابع مشتق می توان از دایره مثلثاتی استفاده می کنیم. همچنین در صورتی که حد چپ و راست در علامت صفر متفاوت باشد باید هر یک را جداگانه بررسی کرد.

کار در کلاس

۱ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{x-5}$

$=\frac{10}{5^--5}=\frac{10}{0^-}=-\infty$

$5^-\Rightarrow 4.9$

ب) $\lim_{x\to 5^+}\frac{2x}{x-5}$

$=\frac{10}{5^+-5}=\frac{10}{0^+}=+\infty$

$5^+\Rightarrow 5.1$

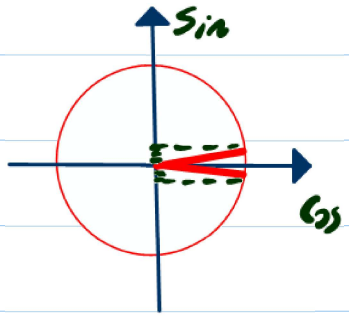
x		$\to 5\leftarrow$	
$x-5$	$-$	0	$+$

پ) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{(0^\pm)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ت) $\lim_{x\to 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|0^\pm|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

ث) $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{-1}{|0^\pm|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

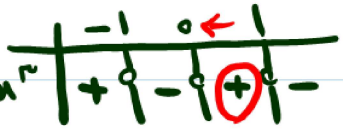
ج) $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{(0^\pm)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$



مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x-x^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

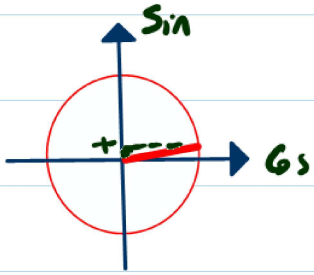
$x-x^3 = x(1-x^2)$



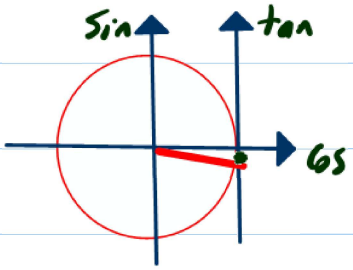
۲) $\lim_{x\to 2^-} \frac{2x-1}{(x-2)^2} = \frac{2\times 2-1}{(0^-)^2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

$x\to 2^- \Rightarrow 1,9$

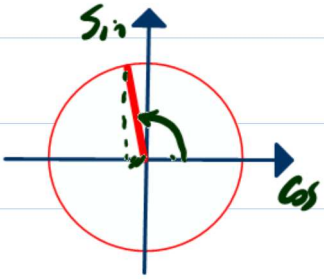
۳) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{1+1}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$



۴) $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x - ۲}{\tan x} = \frac{-۲}{0^-} = +\infty$



۵) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{\cos ۲x - ۱}{\cos x} = \frac{\cos ۲\frac{\pi}{۲} - ۱}{0} = \frac{\cos \pi - ۱}{0} = \frac{-۱-۱}{0} = \frac{-۲}{0^-} = +\infty$

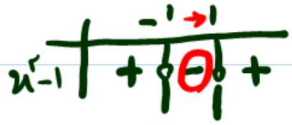


۶) $\lim_{x \to -۲^+} \frac{x+۱}{x+۲} = \frac{-۲+۱}{-۲^+ +۲} = \frac{-۱}{0^+} = -\infty$

$-۲^+ + ۲ \to -۱,۹$



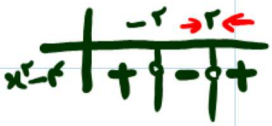
۷) $\lim_{x \to ۱^-} \frac{[x]-۱}{x^۲-۱} = \frac{0-۱}{(۱^-)^۲-۱} = \frac{-۱}{0^-} = +\infty$



۸) $\lim_{x \to ۲} \frac{-[x]-۱}{x^۲-۴}$

$x \to ۲^+ : \frac{-۲-۱}{0^+} = \frac{-۳}{0^+} = -\infty$

$x \to ۲^- : \frac{-۱-۱}{0^-} = \frac{-۲}{0^-} = +\infty$



۹) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{(0^+)^۲} = \frac{۱}{0^+} = +\infty$

۱۰) $\lim_{x \to ۲} \frac{-۴}{x^۲ - ۵x + ۶} = \frac{-۴}{0}$

$x \to ۲^+ : \frac{-۴}{0^-} = +\infty$

$x \to ۲^- : \frac{-۴}{0^+} = -\infty$



11) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{0}{0}$ حل با $(x-1)$

روش هورنر: برای تقسیم دو چند جمله‌ای بر دو جمله‌ای

$x^3-x^2-x+1 \;\big|\; x-1 \quad x-1=0 \Rightarrow x=1$

	1	-1	-1	1
1	1	$1\times 1-1=0$	$1\times 0-1=-1$	$1\times(-1)+1=0$

ضرایب مقسوم علیه ← 1

ضرایب لغو کسری: ضرب ـ جمع

باقی مانده

درجه‌اش یک واحد کمتر از مقسوم

خارج قسمت: $1x^2+0x-1 = x^2-1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{1-2}{0} = \frac{-1}{0^+} = +\infty$$

$x^2-1 \to 0^+$

مثال: اگر $\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، a و b را بیابید.

$\frac{-1}{0^+} = -\infty$ نتیجه $\frac{2-3}{0^+}$

ریشه مضاعف معنی است پس:

$$(x-2)^2 = x^2+ax+b$$
$$x^2-4x+4 = x^2+ax+b \longrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=4 \end{cases}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

پایه دوازدهم تجربی

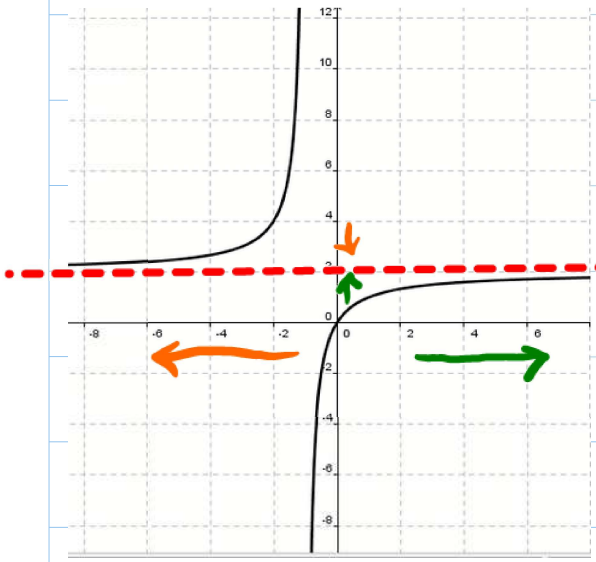
فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

درس دوم: حد در بی‌نهایت

جلسه چهارم: صفحات ۵۸ تا ۶۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

حد در بی‌نهایت :



نمودار رفتار تابع $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ را به ازای

برخی مقادیر مثبت و منفی x در جدول زیر بررسی کنیم.

x	$-\infty \leftarrow -1000$	-1000	-100	-10	10	100	1000	$10000 \rightarrow +\infty$
$f(x)$	$2 \leftarrow 2,0002$	$2,0002$	$2,002$	$2,2$	$1,81$	$1,98$	$1,998$	$1,999 \rightarrow 2$

تعریف : فرض کنید تابع f روی بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد و مقادیر تابع f به هر اندازه که بخواهیم به عدد حقیقی L نزدیک شوند به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شده باشند در این صورت می‌نویسیم : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$.

تذکر : اگر در تعریف بالا، بازه $(-\infty,a)$ و مقادیر متغیر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شوند

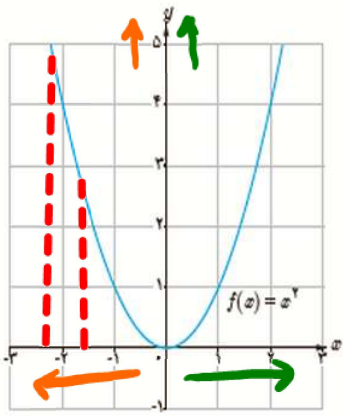
می‌نویسیم : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$.

نکته : در حد در بی‌نهایت x به سمت مثبت یا منفی بی‌نهایت میل می‌کند و جواب حد یک عدد است.

نکته: در برخی توابع، وقتی x به سمت بی نهایت میل می‌کند، مقدار تابع یعنی $f(x)$ هم به هر اندازه دلخواه بزرگ یا کوچک می‌شود، یعنی: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. به این حالت حد نامتناهی در بی نهایت می‌گوییم.

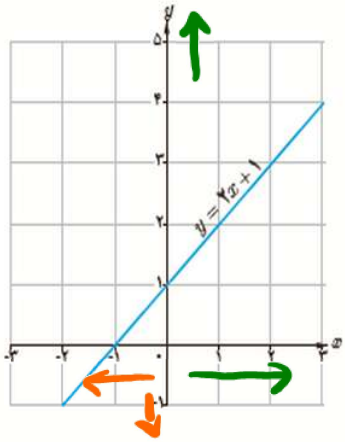
کار در کلاس

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



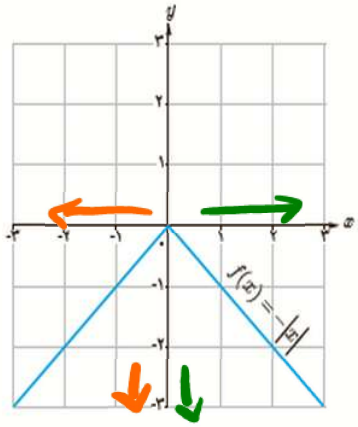
الف) $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$



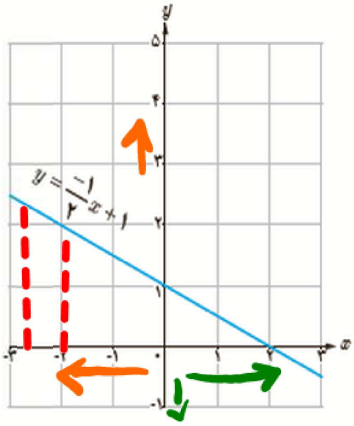
ب) $\lim_{x \to -\infty} (2x+1) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (2x+1) = +\infty$



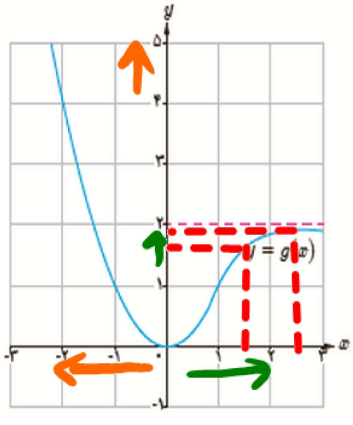
پ) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



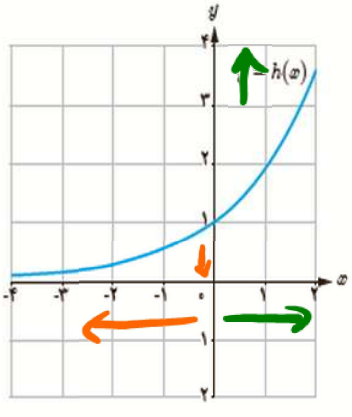
ت) $\lim_{x \to -\infty} (\frac{-1}{2}x+1) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (\frac{-1}{2}x+1) = -\infty$



ث) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2$



ج) $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

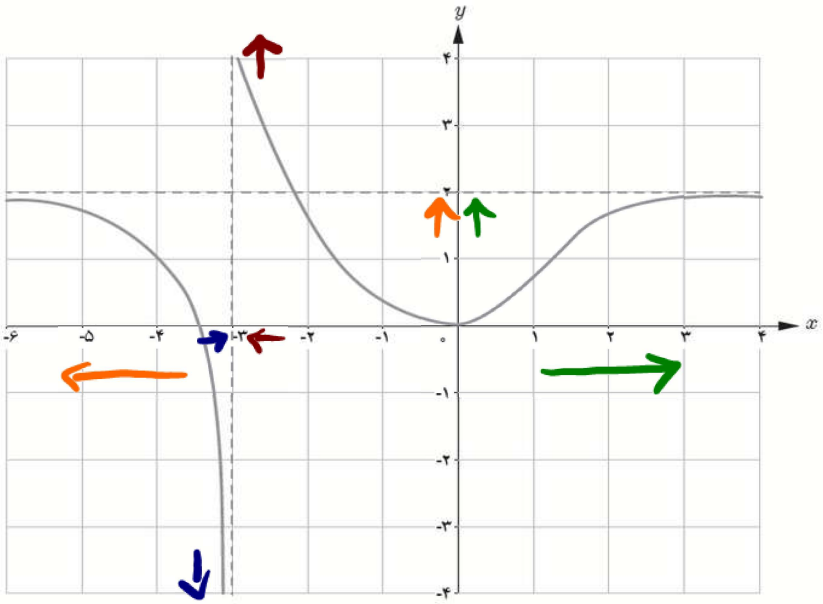
مثال: با توجه به نمودار توابع داده شده حدود خواسته شده را بیابید.

$\lim_{x \to (-۳)^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to (-۳)^-} f(x) = -\infty$

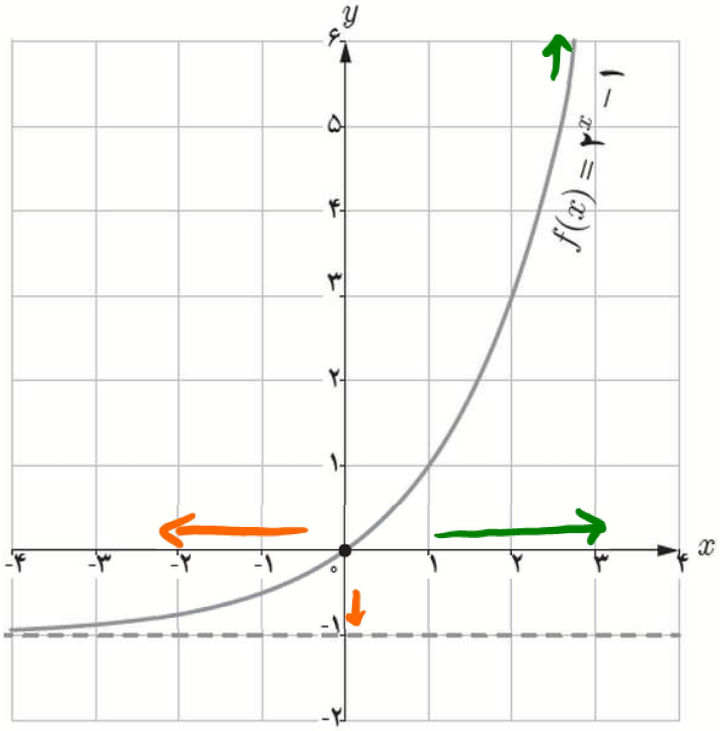
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ۲$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ۲$



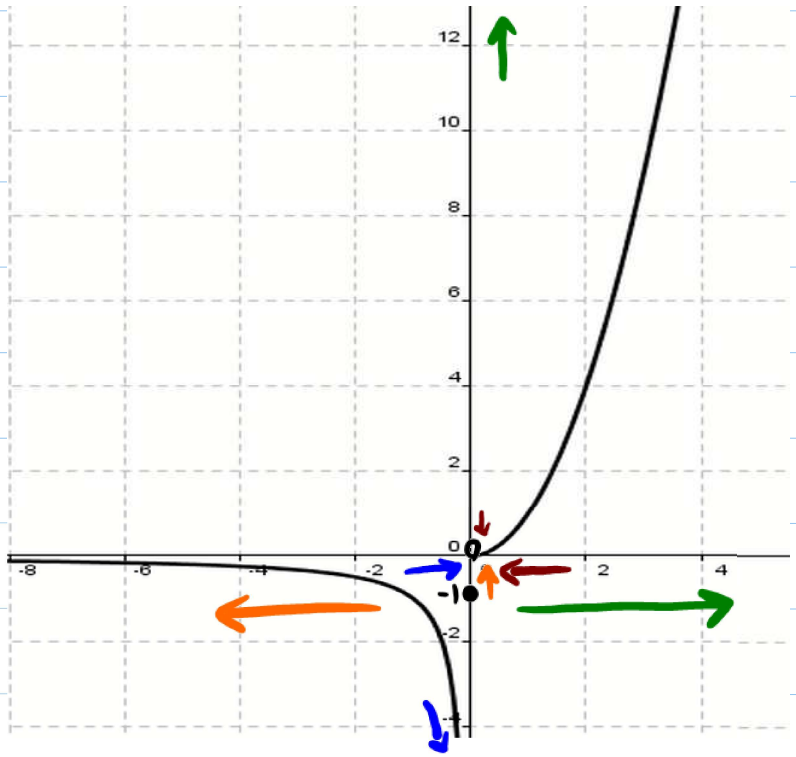
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -۱$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بیابید.

$$g(x)=\begin{cases} x^{2} & x>0 \\ -1 & x=0 \\ \frac{1}{x} & x<0 \end{cases} \quad : \lim_{x\to 0^{+}} g(x) \ , \ \lim_{x\to 0^{-}} g(x) \ , \ \lim_{x\to -\infty} g(x) \ , \ \lim_{x\to +\infty} g(x)$$



$\lim_{x\to 0^{+}} g(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^{-}} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$

محاسبه حد در بی‌نهایت از روی ضابطه :

۱) از قاعده های زیر، عدد از جایگذاری $+\infty$ یا $-\infty$ به جای x، در محاسبه حد در بی‌نهایت ها استفاده می‌کنیم. $(a \in \mathbb{R} - \{0\})$

۱) $a \times \infty = \infty$

۲) $a + \infty = \infty$

* ۳) $\frac{a}{\infty} = 0$

۴) $\frac{\infty}{a} = \infty$

۵) $(\infty)^a = \infty \quad (a \in \mathbb{N})$

۶) $+\infty + \infty = +\infty$

۷) $-\infty - \infty = -\infty$

۸) $\infty - \infty$: حالت مبهم

۹) $\infty \times \infty = \infty$

۱۰) $\frac{\infty}{\infty}$: حالت مبهم

۱۱) $\sqrt{+\infty} = +\infty$

۱۲) $a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0<a<1 \\ +\infty & a>1 \end{cases}$ $\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$ ، $\rightarrow 2^{+\infty} = +\infty$

۱۳) $a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0<a<1 \\ 0 & a>1 \end{cases}$ $\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$ ، $\rightarrow 3^{-\infty} = \left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty} = 0$

۲) در محاسبه حد در بی نهایت چندجمله‌ای های درجه n، از جمله‌ای که توان متغیر تا کمتر از n است صرف نظر می کنیم.

۳) برای محاسبه حد در بی نهایت توابع کسری که صورت و مخرج چند جمله‌ای هستند، ابتدا از نکته ۲ استفاده می کنیم و از درجات کمتر صرف نظر می کنیم. سه حالت رخ می دهد:

الف) درجه صورت از مخرج کمتر است. در این حالت حد نامتناهی می شود یعنی $+\infty$ یا $-\infty$.

ب) درجه صورت و مخرج برابر هستند. در این حالت با تقسیم ضرائب متغیر، مقدار حد محاسبه می شود.

ج) درجه مخرج از صورت کمتر است. در این حالت مقدار حد صفر می شود.

۴) هرگاه در صورت یا مخرج عبارت رادیکالی داشتیم، از درجات کوچکتر از درجه عبارت زیر رادیکال صرف نظر می کنیم و در صورت امکان عبارت را توان از زیر رادیکال خارج می کنیم.

کار در کلاس

۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-1}$ ب) $\lim_{t\to-\infty}\frac{1-5t^2}{t^2+3t}$ پ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-3x}$

الف) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3$ ب) $\lim_{t\to-\infty}\frac{-5t^2}{t^2}=-5$

پ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-3x}=0$ ($\frac{1}{-\infty}=0$)

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد
ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد.

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{-x+2} = -1$

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{100x}{x+4} = 100$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-5x+4}{7x^3-11x^2-6x}$ ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+4}{x^3+x-8}$ پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{7x^3} = \frac{2}{7}$

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{2x^3} = 0$ یا $\frac{5}{\infty} = 0$

پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7}{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} -2x^4 = -2\times(+\infty) = -\infty$

مثال: حدهای زیر را بیابید

۱) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3+x+1}{x^3-x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3}{x^3} = 5$

۲) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{x^2+x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

۳) $\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{2x^3} = -\frac{1}{2}$

۴) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x^2-1)(x+1)}{x^3-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3$

۵) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3}|x|}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($x\to+\infty \Rightarrow x>0$)

۶) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

۷) $\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2-\sqrt{x-3}}{5x^2-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2}{5x^2} = \frac{6}{5}$

۸) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sqrt{x^4+3x+1}}{5x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sqrt{x^4}}{5x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x^2}{5x^2}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$