حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

گردآوری: سید ابوالفضل خاصه‌خان

به نام خدا

با شروع پاندمی کرونا که منجر به تعطیلی آموزش حضوری در مراکز آموزشی گردید و آموزش مجازی به اشکال مختلف به عنوان یک شیوه آموزش به طور جدی معرفی شد، بر آن شدم برای آن دسته از دانش‌آموزانی که به صورت صحیحِ آموزش مجازی دسترسی ندارند و همکارانی که بستر مناسبی برای تدریس مجازی در اختیار نداشتند، مجموعه‌ای شامل فیلم و جزوه برای درس حسابان۱ آماده کنم تا شاید در آن ایام سخت کمکی هر چند ناچیز به آموزش مفهومی ریاضیات و گسترش عدالت آموزشی شده باشد. آن دوران تمام شد ولی دیگر آموزش‌های تلفیقی و ترکیبی جای آموزش‌های سنتی را گرفت و فصلی جدید در امر آموزش گشوده شد.

با توجه به حجم بالای کار و تهیه همزمان فیلم و جزوه برای این درس و درس‌های دیگر قطعاً اشتباهاتی در جزوه وجود دارد که از علاقه‌مندان پوزش‌می‌طلبم و خوشحال می‌شوم با شناسه شاد بنده به آدرس @seyedfazelian در میان بگذارند تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح شود.

همانطور که خواهید دید جزوه به صورت جلسه‌ای و با قلم نوری تنظیم شده که فیلم هر جلسه در کانال آپارات https://www.aparat.com/s.a.fazelian در دسترس می‌باشد.

در پایان یادآوری می‌شوم استفاده از این جزوه به هرصورت مجاز و هزینه آن فقط دعا برای عاقبت بخیری نگارنده است.

سیدابوالفضل فاضلیان

۱۴۰۲/۱/۱۱

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

(قسمت اول: مجموع جملات دنباله حسابی)

جلسه اول: صفحات ۲ تا ۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری :

دنباله حسابی : دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن یک مقدار ثابت به نام قدرنسبت به جمله قبل از خودش بدست می‌آید.

مانند ... ، ۱۱ ، ۸ ، ۵ ، ۲ قدرنسبت = ۳

+۳ +۳ +۳

جمله عمومی دنباله حسابی : اگر جمله اول را با a_1 و قدرنسبت را با d نشان دهیم، جمله عمومی دنباله حسابی از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

چند رابطه مهم در دنباله حسابی :

جمله بعد، جمله قبل

۱) $d = a_{n+1} - a_n$: قدرنسبت در دنباله حسابی برابر تفاضل دو جمله متوالی است

۲) $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$: با داشتن قدرنسبت و داشتن دو جمله از دنباله

۳) a, b, c سه جمله متوالی دنباله حسابی $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$ رابطه واسطه یا میانگین حسابی

۴) $n = \frac{b-a}{d} + 1$: تعداد جملات دنباله حسابی با جمله اول a و جمله آخر b

۵) $d = \frac{b-a}{k+1}$: درج واسطه حسابی: اگر بین دو عدد a و b، k عدد طوری قرار دهیم که دنباله حسابی حاصل شود

۶) $n+m=p+q \Rightarrow a_n + a_m = a_p + a_q$: رابطه اندیس

مجموع n جمله اول در یک دنباله حسابی :

در ریاضی ۱، رابطه گاوس برای مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n را به شکل زیر بدست آوردیم :

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$
$$+ \quad S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n} \Rightarrow 2S = n(n+1)$$
$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

از همین ایده کمک می‌گیریم و مجموع n جمله اول دنباله حسابی را می‌یابیم :

$$S_n = a_1 + (a_1+d) + \cdots + (a_1+(n-2)d) + (a_1+(n-1)d)$$
$$+$$
$$S_n = (a_1+(n-1)d) + (a_1+(n-2)d) + \cdots + (a_1+d) + a_1$$

$$2S_n = \underbrace{(2a_1+(n-1)d) + (2a_1+(n-1)d) + \cdots + (2a_1+(n-1)d) + (2a_1+(n-1)d)}_{n}$$

$$2S_n = n(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه دوم : زمانی که جمله اول و آخر دنباله را داریم :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال : مجموع هشت جمله اول دنباله $-2, 3, 8, \ldots$ را بیابید.

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 5 \\ S_8 = ? \end{cases}$$

$$S_8 = \frac{8}{2}(2(-2) + (8-1)(5)) = 4(-4 + 35)$$

$$= 4 \times 31 = 124$$

مثال : حاصل $A = -2 + 1 + 4 + \ldots + 52$ را بدست آورید.

$$n = \frac{b-a}{d} + 1 \Rightarrow n = \frac{52-(-2)}{3} + 1 = \frac{54}{3} + 1 = 18 + 1 = 19$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{19} = \frac{19}{2}(-2 + 52) = \frac{19}{2} \times 50 = 19 \times 25 = 475$$

مثال : در یک دنباله حسابی جمله پنجم 52 و جمله نهم 72 هستند. مجموع دوازده جمله اول را بیابید.

$$d = \frac{a_n - a_m}{n-m} \Rightarrow d = \frac{a_9 - a_5}{9-5} = \frac{72-52}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_8 = a_1 + 7\times 4 \rightarrow 32 = a_1 + 28 \rightarrow a_1 = 4$

$S_{12} = \frac{12}{2}(2\times 4 + (12-1)4) = 6(8+44) = 6\times 124 = 744$

مثال: در یک دنباله حسابی، جمله n ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول را محاسبه کنید.

قدرت d

$a_1 = \frac{3}{2}\times 1 - 5 = \frac{3}{2} - 5$

$a_{15} = \frac{3}{2}\times 15 - 5 = \frac{45}{2} - 5$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}\left(\frac{3}{2} - 5 + \frac{45}{2} - 5\right)$

$S_{15} = \frac{15}{2}\left(\frac{48}{2} - 10\right) = \frac{15}{2}(24 - 10) = \frac{15}{2}\times 14 = 15\times 7 = 105$

مثال: مجموع چند جمله از دنباله حسابی $2, 5, 8, \ldots$ برابر 247 است؟

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 3 \\ S_n = 247 \end{cases}$

$S_n = \frac{n}{2}(2(2) + (n-1)3)$

$247 = \frac{n}{2}(4 + 3n - 3) = \frac{n}{2}(3n + 1)$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(3n+1) = 1374 \xrightarrow{\times 2} n(3n+1) = 2748$$

$$3n^2 + n - 2748 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 3 (-2744)$$

$$\Delta = 1 + 32928 = 32929$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{32929}}{6} = \frac{-1 \pm 181}{6} \begin{cases} \frac{-1+181}{6} = \frac{132}{6} = 22 \\ \frac{-1-181}{6} = -\frac{182}{6} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow n = 22$$

مثال: در دنباله حسابی با جمله اول ۴ و قدرنسبت ۴ حداقل چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بزرگ‌تر شود؟

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 4 \\ S_n > 300 \\ n = ? \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \times 4 + (n-1)(4)) = \frac{n}{2}(8 + 4n - 4)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(4n + 4) = n(2n + 2)$$

$$S_n = n(2n+2) > 300$$

روش حدس و آزمایش: $n = 12 \rightarrow 12(24+2) = 12 \times 26 = 312$

$$n = 13 \rightarrow 13(26+2) = 13 \times 28 = 364$$

اگر حداقل ۱۳ جمله از این دنباله را جمع کنیم، حاصل از ۳۰۰ بزرگ‌تر می‌شود.

مثال: بین دو عدد ۱۵ و ۳۵ تعدادی واسطه حسابی قرار می‌دهیم تا مجموع همه اعداد ۲۲۵ شود.

قدر نسبت دنباله را بیابید.

$\underbrace{\quad}_{k \text{ تا عدد}}$

$15, \dots\dots, 35 \qquad S_{k+2} = 225$

$$S_{k+2} = \frac{k+2}{2}(15+35) \Rightarrow 225 = \frac{k+2}{2}(50)$$

$$\Rightarrow 25(k+2) = 225 \xrightarrow{\div 25} k+2 = 9 \longrightarrow k = 7$$

$$d = \frac{b-a}{k+1} = \frac{35-15}{7+1} = \frac{20}{8} = 2{,}5$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۵۱ را بیابید.

$3, 9, 15, \dots \qquad a_n = 3+(n-1)6 \Rightarrow a_n = 3+6n-6 \rightarrow a_n = 6n-3$

$$a_n < 151 \Rightarrow 6n-3 < 151 \longrightarrow 6n < 154 \longrightarrow n < 17{,}33$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 17$$

$$S_{17} = \frac{17}{2}\left(2(3)+(\underbrace{17}_{16}-1)6\right) = \frac{17}{2}(6+96) = \frac{17}{2} \times 102 = 17 \times 51 = 867$$

نکته: جملات شماره فرد یک دنباله حسابی $a_1, a_3, a_5, \ldots$ دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند زیرا:

$$a_1 \;,\; a_1+2d \;,\; a_1+4d \;,\; \ldots$$

جملات شماره زوج یک دنباله حسابی $a_2, a_4, a_6, \ldots$ دنباله حسابی با جمله اول a_1+d و قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند زیرا:

$$a_1+d \;,\; a_1+3d \;,\; a_1+5d \;,\; \ldots$$

مثال: در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جملات شماره‌های فرد ۲۲۰ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۲۴۰ است. جمله اول و قدرنسبت را بیابید.

$$S_{\text{فرد}} = S_{20} = \frac{20}{2}\left(2a_1+(20-1)2d\right) \Rightarrow 220 = 10(2a_1+38d)$$

$$\Rightarrow 2a_1+38d = 22 \rightarrow a_1+19d = 11 \qquad (1)$$

$$S_{\text{زوج}} = S_{20} = \frac{20}{2}\left(2(a_1+d)+(20-1)2d\right) \Rightarrow 240 = 10(2a_1+2d+38d)$$

$$\Rightarrow 2a_1+40d = 24 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \begin{cases} a_1+19d = 11 \quad (-2) \\ 2a_1+40d = 24 \end{cases}$$

$$2d = 1 \rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$2a_1+20 = 24 \rightarrow 2a_1 = 4 \rightarrow a_1 = \frac{3}{2}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

(قسمت دوم: مجموع جملات دنباله هندسی)

جلسه دوم: صفحات ۴و۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری :

دنباله هندسی : دنباله ای است که هر جمله آن (به غیر جمله اول) از ضرب یک مقدار ثابت در جمله قبلش بدست می آید.

مانند : $\ldots, 48, 12, 3$ یا $\ldots, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2$

جمله عمومی دنباله هندسی : اگر a_1 جمله اول و q قدرنسبت دنباله هندسی باشد، جمله عمومی یا جمله nام آن عبارت است از : $a_n = a_1 q^{n-1}$

چند رابطه مهم در دنباله هندسی :

۱) قدرنسبت در دنباله هندسی برابر تقسیم دو جمله متوالی است : $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

۲) یافتن قدرنسبت هرگاه a_m و a_n دو جمله از دنباله هندسی را در دست داشته باشیم : $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$

۳) رابطه واسطه یا میانگین هندسی : a, b, c : سه جمله متوالی دنباله هندسی $\Leftrightarrow b^2 = ac$

۴) درج واسطه هندسی : اگر بین دو عدد a و b، k عدد طوری قرار دهیم که دنباله هندسی حاصل شود : $q^{k+1} = \frac{b}{a}$

۵) $n+m=p+q \Rightarrow a_n \times a_m = a_p \times a_q$: رابطه اندیس

مجموع n جمله اول در یک دنباله هندسی :

مجموع n جمله اول دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \qquad q \neq 1$$

اثبات :

$$S_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} \qquad (1)$$

$$\times q \Longrightarrow qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n \qquad (2)$$

$(1) - (2) \Rightarrow$

$$S_n - qS_n = (a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}) - (a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n \Rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$\div(1-q) \Longrightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$q \neq 1$

اگر $q=1$ باشد جمع دنباله به صورت $S_n = na_1$ یا $a_1, a_1, \ldots, a_1$ باشد

مثال: مجموع هفت جمله اول دنباله هندسی ... و ۱۲، ۶، ۳ را بیابید.

$$S_7 = 3 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 3 \times \frac{1-128}{1-2} = 3 \times \frac{-127}{-1} = 3 \times 127 = 381$$

مثال: در دنباله هندسی $a_3 = 6$ و $a_7 = 192$، مقدار S_{10} را محاسبه کنید.

$$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \Rightarrow q^{7-3} = \frac{a_7}{a_3} \Rightarrow q^4 = \frac{192}{6} = 32 \rightarrow q^4 = 32$$

$$\Rightarrow q = 2$$

$$a_3 = a_1 q \Rightarrow 6 = a_1 \times 2 \rightarrow a_1 = 3$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 3 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 3 \times \frac{1-1024}{-1} = 3 \times 1023 = 3069$$

مثال: مجموع چند جمله دنباله هندسی ... و ۲۴، ۱۲-، ۶ برابر ۱۰۲۶ است؟

$\times(-2)$ $\times(-2)$

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ q = -2 \\ S_n = 1026 \\ n = ? \end{cases} \qquad S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$1026 = 6 \times \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} \Rightarrow 1026 = 2\left(1-(-2)^n\right)$$

$$\div 2 \Rightarrow 1-(-2)^n = 513 \rightarrow -(-2)^n = 512$$

$\xrightarrow{\div(-1)} (-2)^n = -512 \rightarrow (-2)^n = (-2)^9 \rightarrow n = 9$

مثال : بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی داده‌اند. مجموع این ۵ عدد چقدر است را بیابید.

$4, \square, \square, \square, 324 \qquad q^{k+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow q^{4+1} = \frac{324}{4}$

$\Rightarrow q^5 = 81 \Rightarrow q = \pm 3 \xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{فرض}} q = 3$

$S_5 = 4 \times \frac{1-3^5}{1-3} = \frac{4(1-243)}{-2} = -2(-242) = 484$

مثال : در دنباله هندسی افزایشی $4, a, 9, b, \ldots$ مجموع شش جمله اول را بدست آورید.

روش اول یافتن q : $q^{3-1} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{9}{4} \rightarrow q^2 = \frac{9}{4} \rightarrow q = \pm\frac{3}{2}$

دنباله افزایشی $\longrightarrow q = \frac{3}{2}$

روش دوم یافتن q :

دنباله هندسی : $a^2 = 4 \times 9 = 36 \rightarrow a = \pm 6 \rightarrow a = 6$

$4, 6, 9, b, \ldots \Rightarrow q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$S_6 = 4 \times \frac{1-(\frac{3}{2})^6}{1-\frac{3}{2}} = 4 \times \frac{1-\frac{729}{64}}{-\frac{1}{2}} = -8\left(\frac{64-729}{64}\right) = -\frac{-665}{8}$$

$$= \frac{665}{8}$$

مثال: در یک دنباله هندسی مجموع شش جمله اول ۲۸ برابر مجموع سه جمله اول است. مجموع ده جمله اول چند برابر مجموع پنج جمله اول است؟

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \times \frac{q^n-1}{q-1}$$

$$S_6 = 28 S_3 \Rightarrow a_1 \times \frac{q^6-1}{q-1} = 28 a_1 \times \frac{q^3-1}{q-1}$$

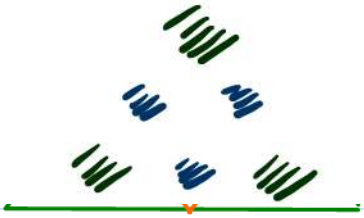
$$\xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{(q^3-1)(q^3+1)}{q-1} = 28 \frac{q^3-1}{q-1} \Rightarrow q^3+1 = 28 \rightarrow q^3 = 27 \rightarrow q = 3$$

$$\frac{S_{10}}{S_5} = k \rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = k$$

$$\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{a_1 \times \frac{q^{10}-1}{q-1}}{a_1 \times \frac{q^5-1}{q-1}} = \frac{q^{10}-1}{q^5-1} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{(q^5-1)(q^5+1)}{q^5-1}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = q^5+1 = 3^5+1 = 243+1 = 244$$

مثال: وسط اضلاع مثلث متساوی الاضلاعی را به هم وصل می‌کنیم و سه مثلث از چهار مثلث ایجاد شده را رنگ می‌کنیم. پس این کار را با مثلث باقی مانده تکرار می‌کنیم. حداقل چند مرحله باید رنگ آمیزی را انجام دهیم تا بیش از 99,9 درصد مساحت اولیه رنگ شود؟



مساحت مثلث اولیه $= S$

مرحله اول: $\frac{3}{4}S$ ، مرحله دوم: $\frac{3}{4}(\frac{1}{4}S)$ ، مرحله سوم: $\frac{3}{4}(\frac{1}{4})^2 S$ ، ....

دنباله هندسی: $a_1 = \frac{3}{4}S$ ، $q = \frac{1}{4}$ $\quad S_n > \frac{999}{1000}S$

$$S_n = \frac{3}{4}S \times \frac{(\frac{1}{4})^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{3}{4}S \times \frac{\frac{1}{4^n} - 1}{-\frac{3}{4}} = S(1 - \frac{1}{4^n})$$

$$S_n > \frac{999}{1000}S \Rightarrow S(1 - \frac{1}{4^n}) > \frac{999}{1000}S$$

$$1 - \frac{999}{1000} > \frac{1}{4^n} \Rightarrow \frac{1}{1000} > \frac{1}{4^n} \xrightarrow{\text{معکوس}} 1000 < 4^n$$

با حدس و آزمایش $4^5 = 1024 \rightarrow 1000 < 4^5 \Rightarrow n \geq 5$

آشنایی با یک اتحاد

می‌خواهیم رابطه مجموع دنباله هندسی را برای دنباله $1, a, a^2, \ldots, a^n$ با فرض $a \neq 1$ و $n \in \mathbb{N}$ بکار ببریم. در این دنباله جمله اول 1 و قدرنسبت $q = a$ و تعداد جملات n تا است پس:

$$S_n = 1 \times \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow a^n - 1 = (a-1)S_n$$

$$\Rightarrow a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1)$$

مانند:

$$a^6 - 1 = (a-1)(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$$

لاز — جاتن

مثال: حاصل عبارت $A = \frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \ldots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ را به ازای $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ بدست آورید.

صورت: $a_1 = 1$, $q = t$, $n = 12$

مخرج: $a_1 = 1$, $q = t^3$, $n = 4$

$$A = \frac{1 \times \frac{t^{12} - 1}{t - 1}}{1 \times \frac{(t^3)^4 - 1}{t^3 - 1}} = \frac{\frac{t^{12} - 1}{t - 1}}{\frac{t^{12} - 1}{t^3 - 1}} = \frac{(t^{12} - 1)(t^3 - 1)}{(t-1)(t^{12} - 1)} = \frac{t^3 - 1}{t - 1}$$

$$= \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1} = t^2+t+1$$

$$t = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

$$A = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

$2(3-\sqrt{5})$

$$A = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3-\sqrt{5}-1+\sqrt{5}+2}{2} = 2$$

تذکر: اگر n فرد باشد با تبدیل a به $-a$ داریم:

$$a^n+1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + a^{n-3} - \dots + 1)$$ اثبات جزوان تمرین

نکته: در حالت کلی می‌توان دو رابطه زیر را بدست آورد:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

فرد n: $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$

مثال: کسر زیر را ساده کنید:

$$A = \frac{(x^3+1)(x-1)}{x^2-1}$$

$$A = \frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس دوم: معادلات درجه دوم

(قسمت اول: روابط بین ضرائب و ریشه‌ها)

جلسه سوم: صفحات ۷تا۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

معادله درجه دوم :

به معادله $ax^2+bx+c=0$ باشرط $a\neq 0$ یک معادله درجه دوم گفته می‌شود.

در سال گذشته با روش‌های حل معادله درجه دوم؛ روش تجزیه، روش مربع کامل و روش دلتا آشنا شدید.

یادآوری روش دلتا :

$$\Delta = b^2-4ac$$

$\Delta>0 \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta=0 \rightarrow x=\frac{-b}{2a}$

$\Delta<0 \rightarrow$ معادله جواب ندارد

نکته : (روش ضرائب) برخی از معادلات درجه دوم شرایطی دارند که می‌توان به سرعت جواب‌های آن را یافت :

الف) اگر جمع ضرائب صفر باشد یعنی: $a+b+c=0$ باشد یکی از جواب‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

ب) اگر ضریب x مساوی جمع دو تای دیگر باشد یعنی: $b=a+c$ باشد یکی از جواب‌ها -1 و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $5x^2-3x-2=0$ (a, b, c)

$5-3-2=5-5=0$

$x=1$

$x=\frac{c}{a}=\frac{-2}{5}$

ب) $4x^2+7x+3=0$ (a, b, c)

$7=4+3$

$x=-1$

$x=-\frac{c}{a}=-\frac{3}{4}$

جمع و ضرب ریشه‌ها:

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta\geq 0$ باشد، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن برابر است با: (ریشه‌های معادله)

$S=$ جمع دو ریشه $=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

$P=$ ضرب دو ریشه $=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

اثبات: اگر $\Delta>0$ باشد داریم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$ صورت یک اتحاد مزدوج

$$= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad \square$$

به‌عنوان تمرین برای حالت $\Delta=0$ اثبات شود.

مثال: بدون حل معادله $2x^2-7x+3=0$ جمع و ضرب ریشه‌ها را بیابید.

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{-(-7)}{2}=\frac{7}{2} \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$$

مثال: در معادله $2x^2-mx+m-1=0$ یکی از جواب‌ها کسین و قرینه جواب دیگر است. ($a=2$, $b=-m$, $c=m-1$)

m را بیابید.

ریشه‌ها α , $\beta=-\frac{1}{\alpha}$

$$P=\alpha\beta=\alpha\left(-\frac{1}{\alpha}\right)=-1 \Rightarrow P=\frac{c}{a}=-1 \Rightarrow \frac{m-1}{2}=-1$$

$$\Rightarrow m-1=-2 \Rightarrow m=-1$$

مثال: در معادله $x^2-8x+m=0$ اگر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه دیگر 5 واحد بیشتر باشد ($a=1$, $b=-8$, $c=m$)

m را محاسبه کنید.

$$\alpha=\frac{\beta}{2}+5 \xrightarrow{\times 2} 2\alpha=\beta+10 \rightarrow 2\alpha-\beta=10.$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-8)}{1}=8 \longrightarrow \alpha+\beta=8$$

$$+\begin{cases}2\alpha-\beta=10\\ \alpha+\beta=8\end{cases}$$

$$3\alpha=18 \longrightarrow \alpha=6 \longrightarrow \beta=2$$

$$P=\alpha\beta=6\times2=12 \rightarrow P=12=\frac{c}{a}=\frac{m}{1} \rightarrow m=12$$

مثال: اگر α, β جواب‌های معادله $x^2-2x-4=0$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}$

$S=\frac{2}{1}=2$, $P=\frac{-4}{1}=-4$

$$=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

ب) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

نکته: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Rightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=S^2-2P$$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}=\frac{2^2-2(-4)}{(-4)^2}=\frac{4+8}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

ب) $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{\alpha+\beta+2}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=\frac{S+2}{1+S+P}$

$=\frac{2+2}{1+2-4}=\frac{4}{-1}=-4$

ج) $\alpha^3+\beta^3$

نکته: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=\alpha^3+\beta^3 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow \alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

$\alpha^3+\beta^3=2^3-3(-4)(1)=8+12=20$

مثال: کنکور ۹۹ تجربی

معادله درجه دوم $\overset{a}{3}x^2+(2m-1)x+\overset{b}{2}-\overset{c}{m}=0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ✓ ۲) ۴ ۳) -1 ۴) $-\frac{5}{2}$

$$\alpha+\beta=\frac{1}{\alpha\beta} \Rightarrow S=\frac{1}{P} \rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{c}{a}} \rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{a}{c}$$

$$\rightarrow a^2=-bc \rightarrow m^2=-(2m-1)(2-m)$$

$$9=-(4m-2m^2-2+m) \Rightarrow -2m^2+5m-2+9=0$$

$$-2m^2+5m+7=0 \Rightarrow 5=-2+7 \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=-\frac{7}{-2}=\frac{7}{2} \end{cases}$$ غ ق ق ✓

$$m=-1 \Rightarrow 3x^2-3x+3=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-x+1=0 \rightarrow \Delta=1-4\times1\times1=-3<0$$

گزینه ۱

حالت ریشه‌ها:

دو ریشه مثبت: $S>0$

دو ریشه منفی: $S<0$

الف) $P>0$ (دو ریشه هم‌علامت)

اندازه ریشه مثبت بزرگ‌تر: $S>0$

اندازه ریشه منفی بزرگ‌تر: $S<0$

ب) $P<0$ (دو ریشه مختلف‌العلامه)

دو ریشه قرینه هم: $S=0$

مثال کنکور ۹۶ رشته ریاضی :

به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $\overset{a}{\uparrow}x^2 \overset{b}{\uparrow} -2(a-2)x \overset{c}{\uparrow} +14-a=0$ دو ریشه مثبت دارد؟

۱) $-2<a<2$ ۲) $2<a<5$ ۳) $2<a<14$ ۴) $5<a<14$ ✓

$\Delta>0$ ، $P>0$ ، $S>0$

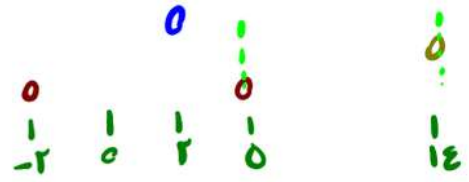
$\Delta>0 \rightarrow (-2(a-2))^2 - 4\times1\times(14-a) > 0 \rightarrow 4(a^2-4a+4) - 56+4a>0$

$4a^2-16a+16-56+4a>0 \rightarrow 4a^2-12a-40>0 \Rightarrow a^2-3a-10>0$

$\rightarrow (a\overset{5}{\uparrow}-5)(a\overset{-2}{\uparrow}+2)>0 \Rightarrow a>5$ یا $a<-2$ ①

$P>0 \rightarrow \frac{c}{a}>0 \rightarrow \frac{14-a}{1}>0 \rightarrow a<14$ ②

$S>0 \rightarrow -\frac{b}{a}>0 \rightarrow \frac{2(a-2)}{1}>0 \Rightarrow 2a-4>0 \rightarrow a>2$ ③



①∩②∩③ : $5<a<14$ گزینه ۴

ساخت معادله درجه دوم :

تا به حال معادله درجه دوم را داشتیم و ریشه‌ها یا ضرب و جمع ریشه‌ها را پیدا می‌کردیم.

حال می‌خواهیم ببینیم اگر اطلاعاتی درباره ریشه‌ها داشته باشیم، می‌توانیم معادله را بنویسیم؟

قضیه: اگر α و β دو عدد دلخواه باشند و $S=\alpha+\beta$ ، $P=\alpha\beta$ باشد آنگاه α و β

جواب‌های معادله $x^2-Sx+P=0$ است.

اثبات: فرض کنید می‌خواهیم معادله بنویسیم که ریشه‌هایش α و β است در این صورت

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

پس:

$$x^2+(-\alpha-\beta)x+(-\alpha)(-\beta)=0$$ این یک معادله است

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Rightarrow x^2-Sx+P=0 \quad \square$$

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $2\pm\sqrt{3}$ باشد.

$$S=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4 \quad , \quad P=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$$

$$x^2-Sx+P=0 \longrightarrow x^2-4x+1=0$$

مثال کنکور ۹۴ :

ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2-3x-1=0$ یک واحد کمتر است؟

۱) $x^2-3x+1=0$ ۲) $x^2+3x+1=0$ ۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$ ✓

اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2-3x-1=0$ باشند آنگاه ریشه‌های معادله جدید :

$\frac{1}{\alpha}-1$ و $\frac{1}{\beta}-1$ است.

$S_{قدیم}=\frac{3}{2}$ ، $P_{قدیم}=-\frac{1}{2}$

$$S_{جدید}=\frac{1}{\alpha}-1+\frac{1}{\beta}-1=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=\frac{S_{قدیم}}{P_{قدیم}}-2=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}-2$$

$$=\frac{6}{-2}-2=-3-2=-5$$

$$P_{جدید}=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=(-1)^2+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)(-1)+\frac{1}{\alpha\beta}=1-3(-1)+\frac{1}{-\frac{1}{2}}$$

($\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{S_{قدیم}}{P_{قدیم}}$)

$$=1+3-2=2$$

معادله جدید: $x^2-S_{جدید}x+P_{جدید}=0\rightarrow x^2+5x+2=0$ گزینه ۴

مثال: ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2+ax+b=0$ یک واحد از ریشه‌های معادله $3x^2+7x+1=0$ بیشتر است. b کدام است؟

۱) -2 ✓ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2+7x+1=0$ آنگاه ریشه‌های معادله $x^2+ax+b=0$ برابر $\alpha+1$ و $\beta+1$ است. $\left(P_{\text{قدیم}}=\frac{1}{3}\ ,\ S_{\text{قدیم}}=-\frac{7}{3}\right)$

پس: $b=P_{\text{جدید}}=(\alpha+1)(\beta+1)=1+(\alpha+\beta)+1+\alpha\beta=1+S_{\text{قدیم}}+P_{\text{قدیم}}$

$=1-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}=1+\frac{-6}{3}=1-2=-1$

گزینه ۲

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس دوم: معادلات درجه دوم

(قسمت دوم: صفرهای تابع)

جلسه چهارم: صفحات ۱۰ تا ۱۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

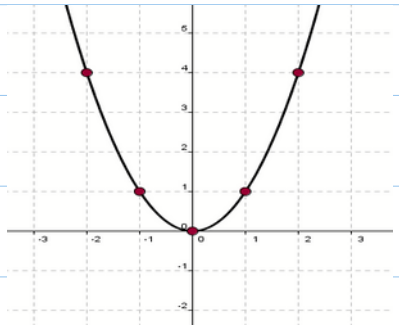
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری:

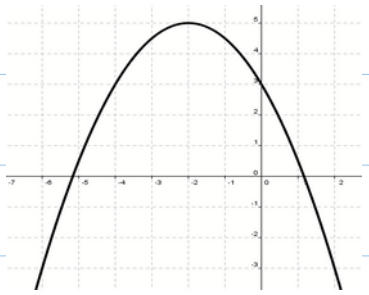
به نمودار $y=ax^2+bx+c$ که در آن $a,b,c\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$ سهمی می‌گویند.

اگر $a>0$ باشد سهمی رو به بالا و اگر $a<0$ باشد سهمی رو به پائین است.



$a>0$

y ↑ دارد min



$a<0$

y ↑ دارد max

در هر دو حالت نقطه $S(\underbrace{-\frac{b}{2a}}_{x_S},\underbrace{-\frac{\Delta}{4a}}_{y_S})$ را رأس سهمی می‌گوئیم.

همچنین اگر $S(x_S,y_S)$ رأس سهمی باشد می‌توانیم ضابطه سهمی را به صورت:

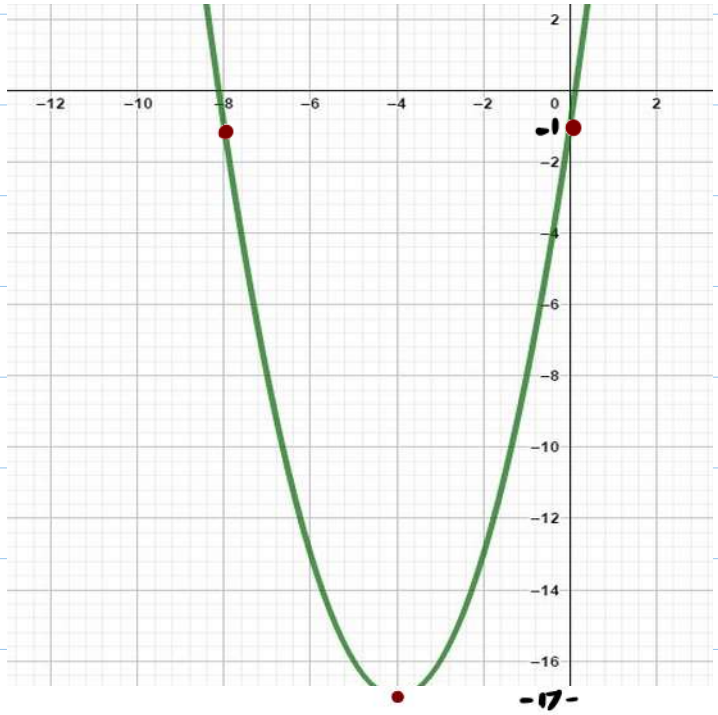
$y=a(x-x_S)^2+y_S$ هم بنویسیم.

مثال: سهمی $y=\overset{a}{1}x^2+\overset{b}{8}x\overset{c}{-1}$ را رسم کنید.

x	-8	-4	0
y	-1	-17	-1

$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{2}=-4$

$y=(-4)^2+8(-4)-1=16-32-1=-17$



مثال : فرض کنید $A(-1,9)$ رأس سهمی باشد و سهمی از نقطه $(3,1)$ هم بگذرد .

ضابطه سهمی را بنویسید .

$$y = a(x-x_A)^2 + y_A$$

$$y = a(x+1)^2+9 \xrightarrow[\text{رسمی}]{(3,1)} 1 = a(3+1)^2+9 \rightarrow 1 = 16a+9 \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2+9$$

صفرهای تابع :

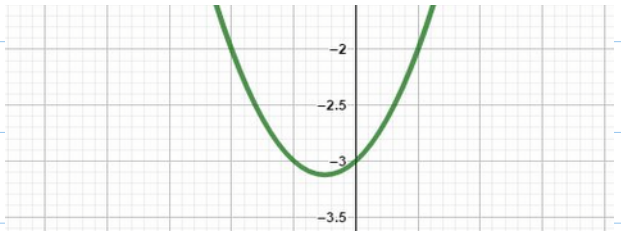
اگر f تابع باشد، جواب‌های معادله $f(x)=0$ را صفرهای تابع می‌گوئیم. در واقع صفرهای تابع، xهایی از تابع هستند که y آن‌ها صفر است. پس می‌توان گفت :

صفرهای تابع، طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور xها هستند.

مثال: صفرهای توابع زیر را با رسم نمودار بدست آورید.

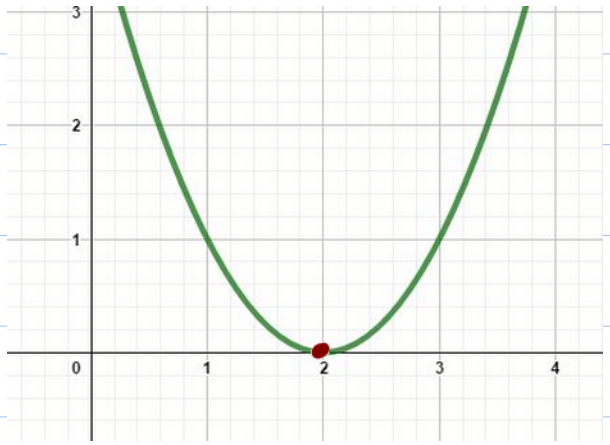
الف) $y = 2x^2 + x - 3$

$2x^2 + x - 3 = 0 \Leftarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1,5 \end{cases}$



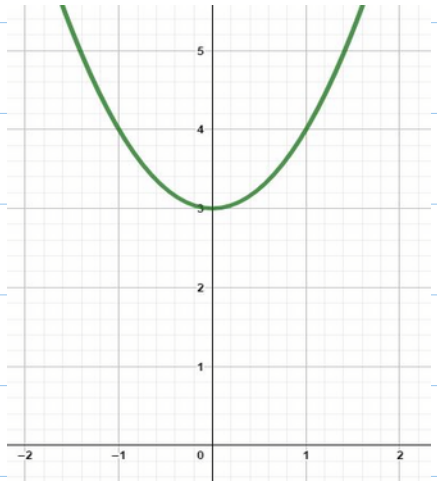
ب) $y = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$



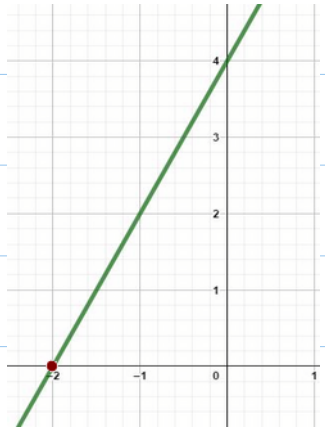
ج) $y = x^2 + 4$

$x^2 + 4 = 0$ صفر ندارد



ت) $y = 2x + 4$

x	y
0	4
-2	0



$2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$

نتیجه :

- اگر Δ مثبت باشد یعنی در دو نقطه که همان جواب های معادله هستند محور x ها را

قطع می کند.




- اگر Δ صفر باشد یعنی فقط در یک نقطه که همان ریشه مضاعف معادله است محور x ها را

قطع می کند.




- اگر Δ منفی باشد یعنی محور x ها را قطع نمی کند زیرا معادله جواب ندارد.




مثال : به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$ (a, b, c)، محور xها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

۱) $a<-9$ ✓ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

دو ریشه منفی دارد $\rightarrow f(x)=0 \rightarrow ax^2+(a+3)x-1=0$

$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = (a+3)^2 - 4a(-1) = a^2 + 6a + 9 + 4a = a^2 + 10a + 9 > 0$

$(a+9)(a+1)$

a	-9	-1
Δ	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$	

$a < -9$ یا $a > -1$ ①

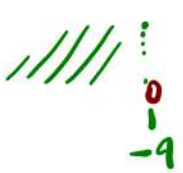
$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow -\frac{1}{a} > 0 \rightarrow a < 0$ ②

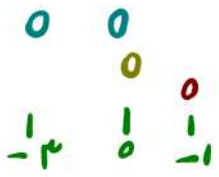
$S < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \rightarrow -\frac{(a+3)}{a} < 0 \rightarrow \frac{a+3}{a} > 0$

a	-3	0
$\frac{a+3}{a}$	$+ \quad 0 \quad - \quad \nexists \quad +$	

$a < -3$ یا $a > 0$ ③

① ∩ ② ∩ ③ :





$a < -9$ جواب

قضیه‌ی مهم : اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ باشد آنگاه می‌توانیم ضابطه‌ی آن را به صورت $y = a(x - x')(x - x'')$ هم بنویسیم.

اثبات : چون x' و x'' صفرهای تابع $y = ax^2 + bx + c$ هستند پس جواب معادله

$ax^2+bx+c=0$ اگر x' و x'' ریشه‌های آن باشند، ثابت کنید: $a(x-x')(x-x'')=ax^2+bx+c$

$$a(x-x')(x-x'') = a(x^2-\underbrace{(x'+x'')}_{S}x+\underbrace{x'x''}_{P})$$

$$= a(x^2-Sx+P)$$

$$= a(x^2-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a})$$

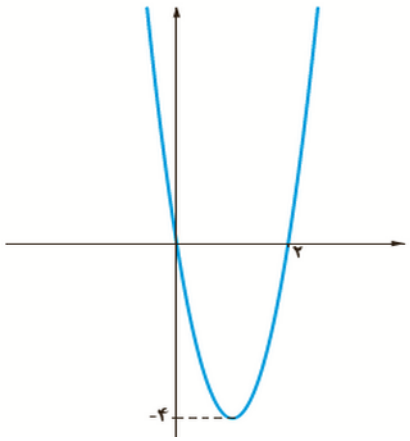
$$= ax^2+bx+c$$ ☑

تذکر: طول رأس سهمی با ضابطه $y=a(x-x')(x-x'')$ دقیقاً وسط دو ریشه است،

یعنی: $x_S=\frac{x'+x''}{2}$.

مثال: ضابطه سهمی‌های زیر را بنویسید.

۱)



$x'=0$, $x''=2$

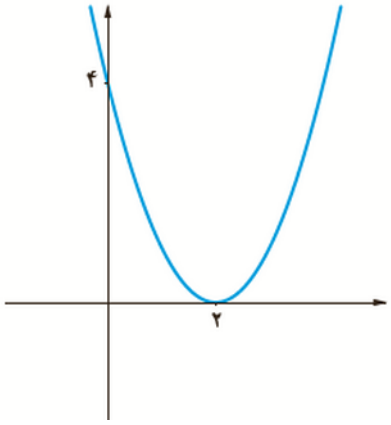
$y=a(x-0)(x-2)=ax(x-2)$

$x_S=\frac{0+2}{2}=1 \Rightarrow S(1,-4)$

S را در ضابطه تابع درجه دوم : $-4 = a(1)(1-2) \Rightarrow -4 = -a \Rightarrow a = 4$

$y = 4x(x-2) \Rightarrow y = 4x^2 - 8x$

۲)



$x' = x'' = 2$

$y = a(x-2)(x-2) = a(x-2)^2$

$(0,4) \xrightarrow{\text{ضابطه}} 4 = a(0-2)^2 \Rightarrow 4 = 4a \Rightarrow a = 1$

$y = (x-2)^2 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 4$

۳)



$x'' \uparrow 1$

$x_S = \frac{x' + x''}{2} \Rightarrow 0 = \frac{-1 + x''}{2} \Rightarrow x'' - 1 = 0$

$\Rightarrow x'' = 1$

$y = a(x-(-1))(x-1)$

$y = a(x+1)(x-1) = a(x^2-1)$

$S(0,3) \xrightarrow{\text{ضابطه}} 3 = a(0^2-1) \Rightarrow 3 = -a \Rightarrow a = -3$

$y = -3(x^2-1) \Rightarrow y = -3x^2 + 3$

نمودار سهمی از راس سهمی می‌گذرد

$x_s = 2 = \frac{2+x''}{2} \Rightarrow 4 = 2 + x'' \rightarrow x'' = 6$

۴)

$y = a(x-2)(x-6)$

•۴

$(0,6)$ در ضابطه $\rightarrow 6 = a(0-2)(0-6)$

$\Rightarrow 4 = a(1) \Rightarrow a = \frac{6}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 8)$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$

۵)

$y = a(x-x_s)^2 + y_s \rightarrow y = a(x-1)^2 - 1$

$(0,-2)$ در ضابطه $\rightarrow -2 = a(0-1)^2 - 1 \Rightarrow -2 = a - 1$

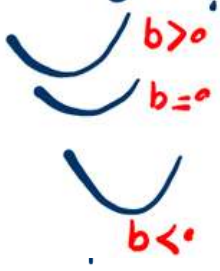
$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -1(x-1)^2 - 1$

$y = -1(x^2 - 2x + 1) - 1 = -x^2 + 2x - 1 - 1 \Rightarrow y = -x^2 + 2x - 2$

علامت a، b، c از روی نمودار سهمی:

۱- a : سهمی رو به بالا : $a > 0$ - سهمی رو به پایین : $a < 0$

۲- b : علامت b، همان علامت شیب خط مماس بر نمودار در محل برخورد سهمی با محور yها است.

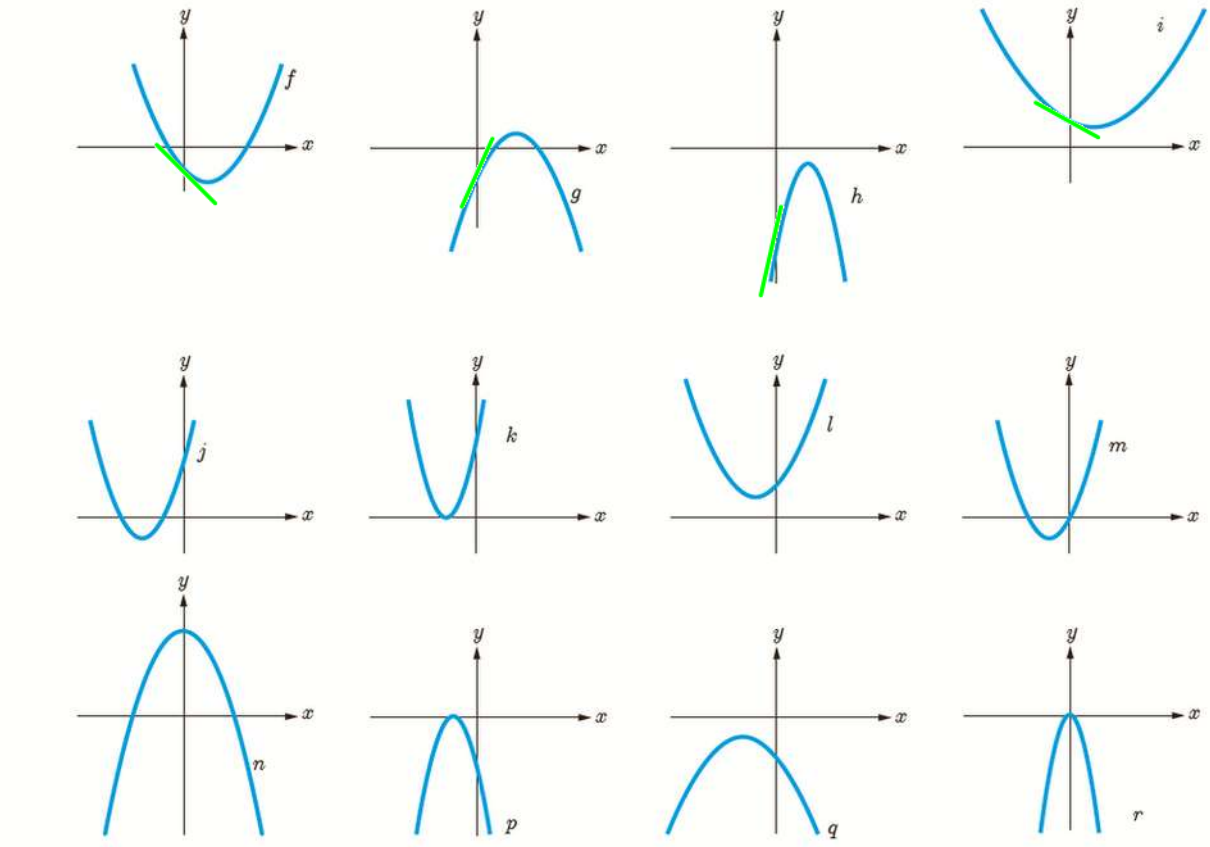


۳ـ c : در سهمی‌ها، c محل تلاقی سهمی با محور y‌هاست. (محل از مبدأ)

پس اگر محور y‌ها را بالای مبدأ قطع کند، $c>0$ است. اگر در مبدأ قطع کند، $c=0$

و اگر محور y‌ها را پایین مبدأ قطع کند، $c<0$ خواهد بود.

مثال : با توجه به نمودارهای زیر، جدول را تکمیل کنید.



ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−
علامت b	−	+	+	−	+	+	+	+	0	−	−	0
علامت c	−	−	−	+	+	+	+	0	+	−	−	0
تعداد ریشه‌های متمایز	دو	دو	ندارد	ندارد	دو	یک	ندارد	دو	دو	یک	صفر	یک
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت	هردو مثبت	ندارد	ندارد	هردو منفی	منفی	ندارد	یکی منفی یکی صفر	یکی + یکی −	منفی	ریشه ندارد	صفر

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم (معادلات دو جمله‌ای)

برخی از معادلات در نگاه اول درجه دوم نیستند ولی با تغییر متغیری می‌توان آن‌ها را به معادله درجه دوم تبدیل کرد. به این صورت که عبارت تکرار شونده را u در نظر بگیریم بطوریکه معادله درجه دوم شود. معادله را حل کرده u را بدست می‌آوریم. در آخر با جای‌گذاری u، x را می‌یابیم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad u = x^2$ ($x^4 = (x^2)^2$)

$$u^2 - 3u + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ u = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

ب) $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$

$$u = x^2 + x \Rightarrow u^2 - 18u + 72 = 0 \Rightarrow (u - 12)(u - 6) = 0$$

$$\begin{cases} u = 12 \rightarrow x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow (x+4)(x-3) = 0 \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases} \\ u = 6 \rightarrow x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

نکته: اگر $x=\alpha$ یکی از صفرهای تابع چندجمله‌ای $f(x)$ باشد، آنگاه $x-\alpha$ یکی از عامل‌های $f(x)$ است و اگر $f(x)$ را بر $x-\alpha$ تقسیم کنیم، حاصل یکی از عامل‌های دیگر $f(x)$ به دست می‌آید.

مثال: اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3+kx^2+x+6$ باشد، ابتدا k را بیابید. سپس صفرهای دیگر f را به دست آورید.

$$f(2)=0 \Rightarrow 2^3+k(2)^2+2+6=0 \rightarrow 8+4k+8=0$$

$$4k=-16 \rightarrow k=-4 \qquad f(x)=x^3-4x^2+x+6$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2+x+6 & x-2 \\ \hline -(x^3-2x^2) & x^2-2x-3 \\ \hline -2x^2+x+6 & \\ -(-2x^2+4x) & \\ \hline -3x+6 & \\ -(-3x+6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x-2)(x^2-2x-3)=0$$

حاصل‌ضرب

$$x^2-2x-3=0 \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس دوم: معادلات درجه دوم

(قسمت سوم: روش هندسی حل معادلات)

جلسه پنجم: صفحه ۱۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

روش هندسی حل معادلات

اگر طرفین رو تابع باشند، برای حل معادله $f(x)=g(x)$ به روش هندسی، می‌توان نمودار توابع را در یک دستگاه مختصات رسم کرد. طول نقاط برخورد نمودار توابع جواب معادله است.

تذکر ۱) از این روش بیشتر برای تعیین تعداد جواب معادله استفاده می‌شود.

تذکر ۲) گاهی اوقات برای رسم نمودار نیاز به جابه‌جایی نمودار از یک طرف به طرف دیگر معادله می‌باشد.

مثال:

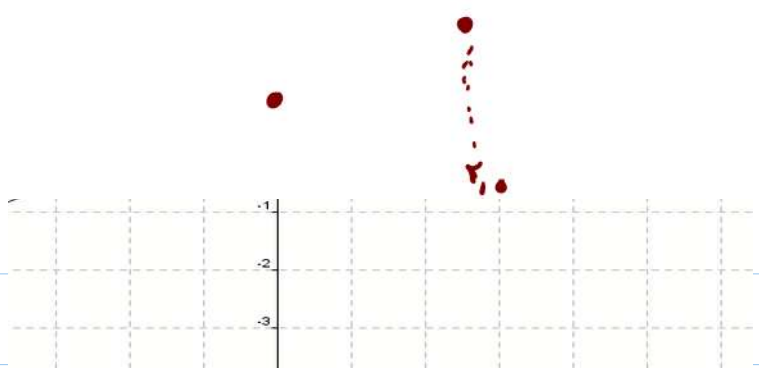
روش جبری: $x^2-2x+1=\frac{1}{2}x+1 \Rightarrow x^2-2x-\frac{1}{2}x=0$

$\Rightarrow x^2-\frac{5}{2}x=0 \longrightarrow x(x-\frac{5}{2})=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases}$

روش هندسی

$y=(x-1)^2$

$y=\frac{1}{2}x+1$



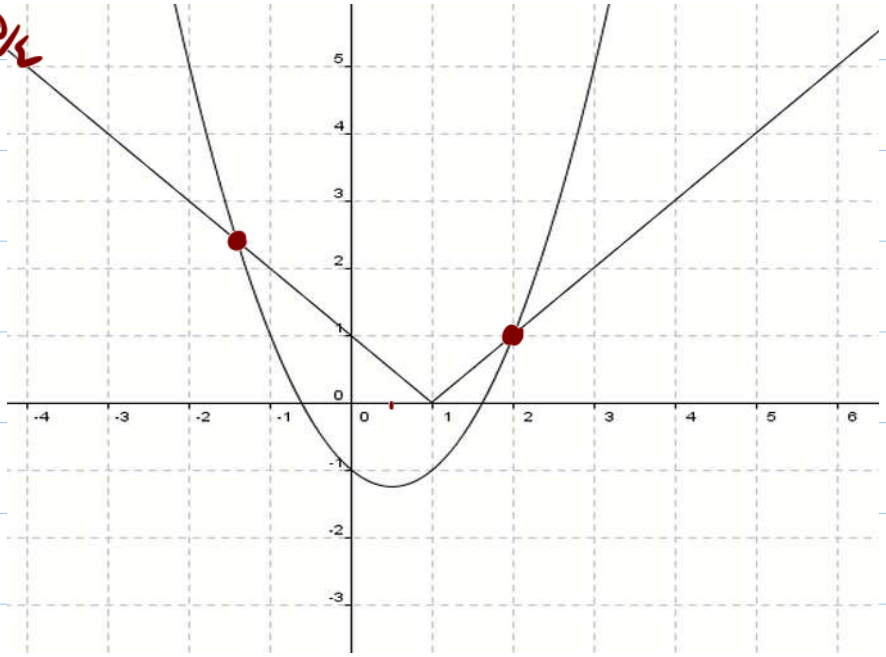
مثال :

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به‌دست آورید.

$g(x) = x^2 - x - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$

$g(x) = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$

$f(x) = |x-1|$

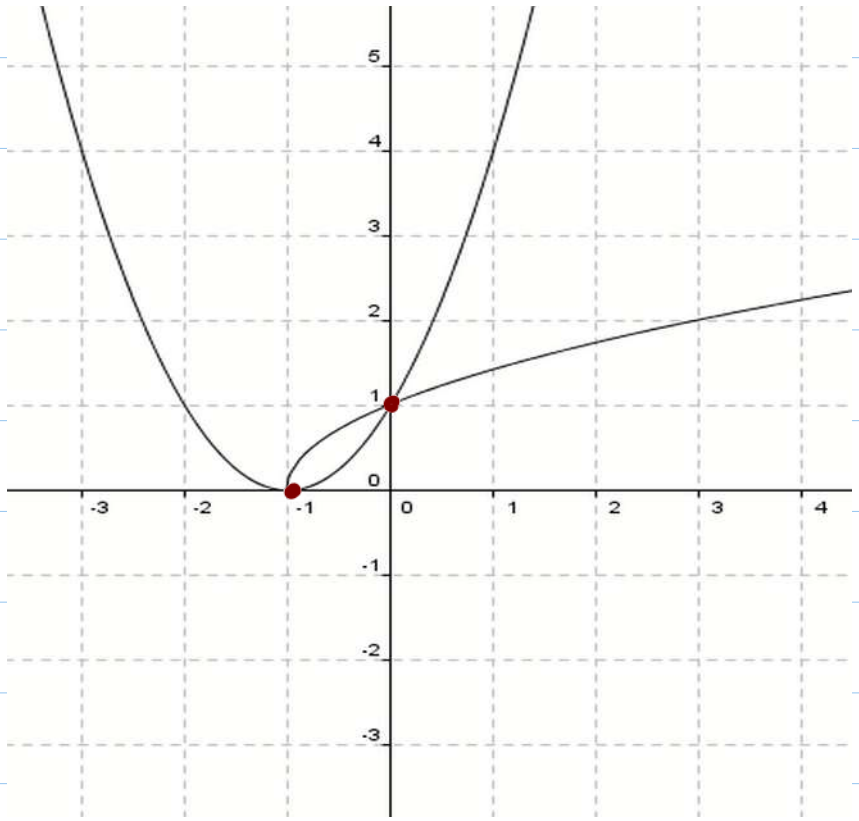


دو ریشه. یکی از ریشه‌ها $x = 2$ است و دیگری عددی بین -1 و -2.

مثال: معادله $\sqrt{x+1} = x^2 - x$ را به روش هندسی حل کنید.

$$\underbrace{\sqrt{x+1}}_{f} = \underbrace{x^2+2x+1}_{g} = (x+1)^2$$

$g(x) = (x+1)^2$



$f(x) = \sqrt{x+1}$

دو ریشه دارد: $x = 0 \quad , \quad x = -1$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس دوم: معادلات درجه دوم

حل تمرین: صفحات ۱۵ و ۱۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تمرین

۱ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که :

الف) ریشه‌های آن $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

الف) $x^۲ - Sx + P = ۰$ $\quad S = \alpha + \beta \quad P = \alpha\beta$

$S = \alpha + \beta = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} = ۱$ ، $P = \alpha\beta = \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۹}$

$x^۲ - x + \frac{۲}{۹} = ۰$

ب) $\alpha , ۲\alpha$ ریشه‌های معادله

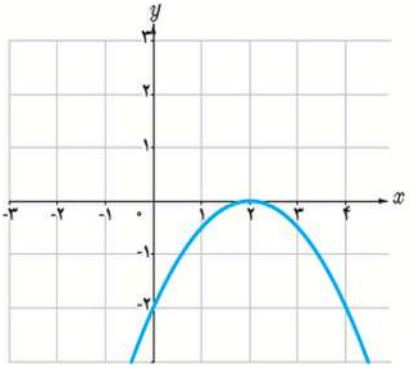
$S = \alpha + ۲\alpha = ۳\alpha$ $\quad P = \alpha \times ۲\alpha = ۲\alpha^۲$

$x^۲ - ۳\alpha x + ۲\alpha^۲ = ۰$ بی‌شمار جواب دارد.

$\alpha = ۱ \rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$

$\alpha = ۵ \rightarrow x^۲ - ۱۵x + ۵۰ = ۰$

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.



(الف)

الف) $x=2$ صفر مضاعف

نکته: اگر α و β دو صفر متمایز تابع $f(x)$ باشند (یعنی $f(\alpha)=0$ و $f(\beta)=0$) آنگاه ضابطه تابع درجه دوم f به صورت زیر است:

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

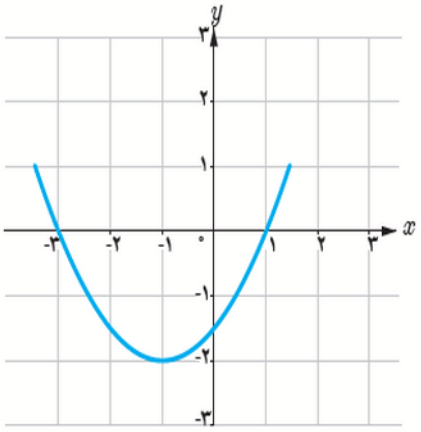
تذکر: در حالتی که $f(x)=0$ ریشه مضاعف دارد ($\Delta=0$) تابع درجه دوم $f(x)$ فقط در یک نقطه ریشه مضاعف را قطع کند رابطه بالا به صورت $f(x)=a(x-\alpha)^2$ نوشته می‌شود.

$p(x) = a(x-2)^2$ رأس سهمی $(0,-2)$

$-2 = a(0-2)^2 \rightarrow -2 = 4a \rightarrow a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$p(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2$

نکته: برای محاسبه a از نقاطی که طول رئوس آن روی نمودار مشخص است استفاده می‌کنیم مانند رأس سهمی، محل برخورد با محور xها.



(ب)

ب) $x=1, -3$ صفرهای تابع

$$p(x)=a(x-1)(x-(-3))=a(x-1)(x+3)$$

رأس سهمی $(\overset{x}{\uparrow}-1, \overset{p(x)}{\uparrow}-2)$ در $p(x)$ قرار می‌دهیم.

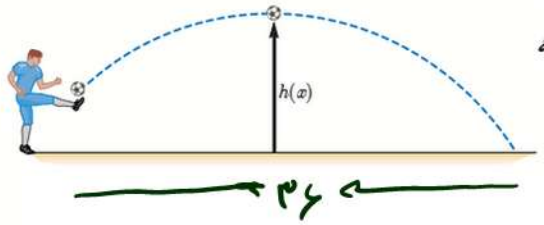
$$-2=a(-1-1)(-1+3)$$

$$-2=a(-2)(2) \longrightarrow 1=2a \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$p(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x+3)=\frac{1}{2}(x^2+2x-3)$$

$$p(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$$

۳ یک توپ فوتبال بر اثر ضربه بازیکن طبق شکل روبه‌رو حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد. در هر لحظه ارتفاع توپ از سطح زمین را می‌توانیم با رابطهٔ $h(x)=-۰/۰۳x(x-۳۶)$ مدل‌سازی کنیم که x فاصله افقی توپ از نقطه اولیه است (x برحسب متر است)



الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد.

حل الف) معلوم کردن ضرورت توپ با زمین $h(x)=0$

$$-۰/۰۳x(x-۳۶)=0 \begin{cases} -۰/۰۳x=0 \rightarrow x=0 \\ x-۳۶=0 \rightarrow x=۳۶ \end{cases}$$

حل ب)

$$h(x) = -۰/۰۳x^2 + ۱/۰۸x$$

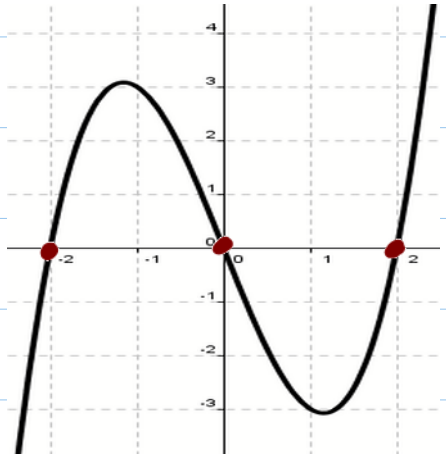
$$x_{max} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱/۰۸}{-۰/۶} = ۱۸$$

$$h(۱۸) = -۰/۰۳ \times ۱۸^2 + ۱/۰۸ \times ۱۸ = -۹/۷۲ + ۱۹/۴۴ = ۹/۷۲$$

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x^3 - 4x$

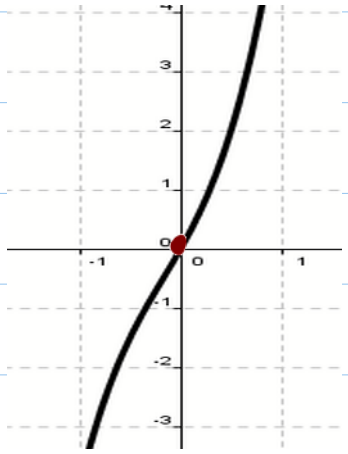
$x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$



ب) $g(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$ $\rightarrow$ $x(2x^2 + x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + x + 3 = 0 \end{cases}$

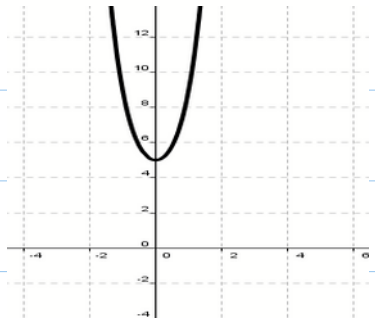
$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times 3$

$= 1 - 24 = -23$



پ) $h(x) = x^4 + 3x^2 + 5$ $u = x^2 \rightarrow u^2 + 3u + 5 = 0$ فاقد صفر حقیقی

$\Delta = 9 - 4 \times 1 \times 5 = -11 < 0$



۵ معادلات زیر را حل کنید.

$\Rightarrow (x^2)^2$

$u = x^2$

$u^2 - 3u - 4 = 0 \quad 1 - 4 = -3 \quad \begin{cases} u = -1 \\ u = 4 \end{cases}$

نکته: $a+b+c=0 \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a} \end{cases}$

$a+c=b \begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{c}{a} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = -1 \quad \times \\ x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2 \end{cases}$

ب) $(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 7(\frac{x^2}{3} - 2) + 6 = 0$

$u = \frac{x^2}{3} - 2$

$u^2 - 7u + 6 = 0 \quad 1 - 7 + 6 = 0 \quad \begin{cases} u = 1 \\ u = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \longrightarrow x^2 = 9 \longrightarrow x = \pm 3 \\ \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \longrightarrow \frac{x^2}{3} = 8 \longrightarrow x^2 = 24 \longrightarrow x = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$

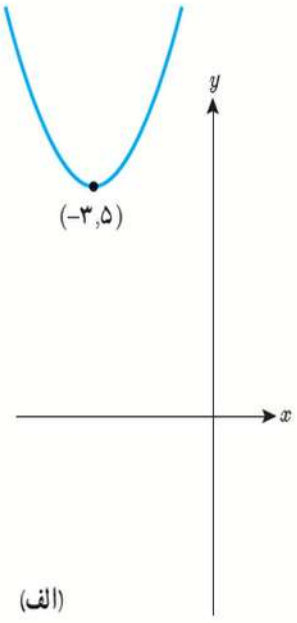
پ) $(۴-x^۲)^۲-(۴-x^۲)=۱۲$

$u=۴-x^۲$

$u^۲-u-۱۲=۰ \rightarrow (u-۴)(u+۳)=۰ \begin{cases} u=۴ \\ u=-۳ \end{cases}$

$\begin{cases} ۴-x^۲=۴ \rightarrow x=۰ \\ ۴-x^۲=-۳ \rightarrow -x^۲=-۷ \rightarrow x^۲=۷ \rightarrow x=\pm\sqrt{۷} \end{cases}$

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ است که در آن $|a|=۱$ است و نقطهٔ رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به‌دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.



(الف)

فاصله

$x=\frac{-b}{۲a} \xrightarrow{a=۱} -۳=\frac{-b}{۲} \rightarrow b=۶$

$(-۳,۰)$ رأس $\rightarrow f(x)=x^۲+۶x+c$

$۰=۹-۱۸+c \Rightarrow c=۱۴$

$f(x)=x^۲+۶x+۱۴$

$a=-1$ $\quad x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} \rightarrow -2 = \frac{-b}{2(-1)} \rightarrow -b = -4$

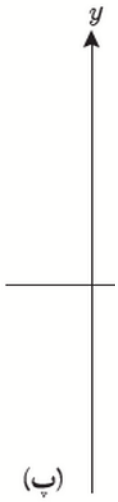
$(-2,2) \rightarrow f(x) = -x^2 - 4x + c$

$2 = -4 + 8 + c \longrightarrow c = -2$

$f(x) = -x^2 - 4x - 2 \rightarrow f(x) = 0$

$\xrightarrow{\div(-1)}$ $x^2 + 4x + 2 = 0 \quad \Delta = 16 - 8 = 8 \rightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$ صفر



$a=1$ $\quad x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 3 = \frac{-b}{2} \rightarrow -b = -6$

$f(x) = x^2 - 6x + c$

$(3,-4) \longrightarrow -4 = 9 - 18 + c$

$\longrightarrow c = 5$

$f(x) = x^2 - 6x + 5$ دو صفر دارد

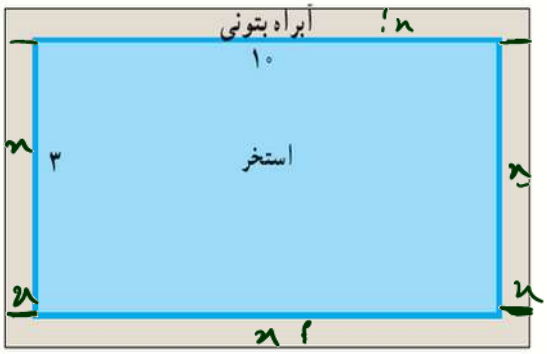
$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} \longrightarrow -2 = \frac{-b}{-4} \longrightarrow b = -8$

$f(x) = -x^2 - 8x + c$

$(-2,-1) \rightarrow -1 = -4 + 16 + c \rightarrow c = -13$

$f(x) = -x^2 - 8x - 13$

$a=-1$



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

مساحت آبراه $= 14 = 2(\text{عرض}) + 2(\text{طول})$

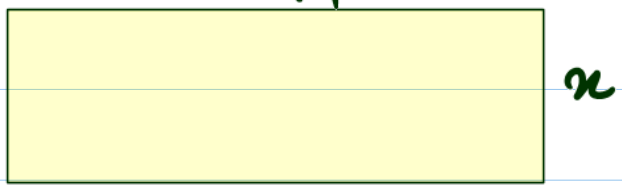
$\rightarrow 14 = 2(3x) + 2(10+2x)x \rightarrow 6x + 20x + 4x^2 - 14 = 0$

$4x^2 + 26x - 14 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 13x - 7 = 0$

$\Delta = 169 - 4 \times 2(-7) = 169 + 56 = 225$

$x = \dfrac{-13 \pm 15}{4}$ $\begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \longrightarrow x = \frac{1}{2} \\ -\frac{28}{4} = -7 \times \end{cases}$

۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشانیدن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟



مساحت یک کاشی $= (4x+1)x = 4x^2 + x$

$2000(4x^2+x) = 52,8 \times 10^4 \rightsquigarrow cm^2$

$\div 10^4 \longrightarrow 2(4x^2+x) = 52,8 \times 10 = 528$

$8x^2 + 2x - 528 = 0$

$\div 2 \longrightarrow 4x^2 + x - 264 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \times 4 \times (-264) = 1 + 4224 = 4225$

$x = \frac{-1 \pm 65}{8} < \begin{matrix} \frac{64}{8} = 8 \\ -\frac{66}{8} \end{matrix}$ $\quad x = 8$ عرض $\longrightarrow 4x+1 = 33$ طول

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

قسمت اول: حل معادلات گویا

جلسه ششم: صفحات ۱۷ تا ۱۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

عبارت گویا: عبارتی است که از تقسیم دو چندجمله‌ای به دست می‌آید.

عبارت‌های گویا: عبارت‌هایی هستند که در آن‌ها متغیر عبارت در مخرج عبارت گویا وجود دارد.

حل عبارت‌های گویا: ابتدا کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها را پیدا می‌کنیم.

پس از ضرب طرفین عبارت در ک.م.م مخرج‌ها، عبارت را از حالت گویا خارج می‌کنیم و عبارت حاصل را حل می‌کنیم. جوابی مورد قبول است که هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نکند.

ک.م.م عبارت‌های جبری: ابتدا عبارات را تجزیه می‌کنیم. حاصل ضرب عوامل مشترک و غیرمشترک با توان بزرگ‌تر ک.م.م عبارات است.

مثال: ک.م.م $2x^2(x-2)$ و $4x(x^2-4)$ را بیابید.

$x^2-4 \rightarrow (x-2)(x+2)$

ک.م.م $= 4x^2(x-2)(x+2)$

مثال: معادله گویای $\frac{1}{x^2+x} + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{3x-1}{x^3-x}$ را حل کنید.

$x(x+1)$ $\quad (x-1)(x+1)$ $\quad x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$

ک.م.م $= (x+1)x(x-1)$

$$x(x+1)(x-1)\frac{1}{x(x+1)} + x(x+1)(x-1)\frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = x(x+1)(x-1)\frac{3x-1}{x(x-1)(x+1)}$$

$$x-1+x(x^2) = 3x-1$$

$$x^3+x-3x=0 \Rightarrow x^3-2x=0 \Rightarrow x(x^2-2)=0$$

$$\begin{cases} x=0 & \text{یا} \\ x^2-2=0 \longrightarrow x^2=2 \longrightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{2}} \end{cases}$$

مثال :

معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۶}{x}=\frac{۲}{۱}+\frac{x-۳}{x}$ ۲) $\frac{P}{۲}+\frac{۲}{P}=\frac{-۳}{P}$ ۳) $\frac{۳y+۵}{y+۱}+\frac{y+۴}{y+۱}=\frac{y+۱}{y+۱}$

حل ۱ : $x \neq ۰ , x \neq -۱$

$$\frac{۶}{x}x(x+۱) = ۲x(x+۱) + x(x+۱)\frac{(x-۳)}{x+۱}$$

$$۶(x+۱) = ۲x^۲+۲x + x(x-۳)$$

$$۶x+۶ = ۲x^۲+۲x+x^۲-۳x$$

$$۳x^۲-۷x-۶=۰$$

$$\Delta = ۴۹-۴\times۳\times(-۶) = ۴۹+۷۲ = ۱۲۱$$

$$x=\frac{۷\pm۱۱}{۶} \Rightarrow x=\frac{۷+۱۱}{۶}=\frac{۱۸}{۶}=۳ \checkmark \quad , \quad x=\frac{۷-۱۱}{۶}=\frac{-۴}{۶}=-\frac{۲}{۳} \checkmark$$

حل ۲ $P \neq ۰ , P \neq ۲$

$$۲P(۲-P)\frac{P}{۲-P} + ۲P(۲-P)\frac{۲}{P} = ۲P(۲-P)\left(-\frac{۳}{۲}\right)$$

$$۲P^۲ + ۲(۲-P)۲ = P(۲-P)(-۳)$$

$$۲P^۲+۸-۴P = -۶P+۳P^۲$$

$$P^۲-۲P-۸=۰ \rightarrow (P-۴)(P+۲)=۰ \begin{cases} P=۴ \checkmark \\ P=-۲ \checkmark \end{cases}$$

حل ۳ $\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$

$y^2+5y = y(y+5)$ ک.م.م

$y(y+5)\frac{(3y+5)}{y(y+5)} + y(y+5)\frac{y+4}{y+5} = y(y+5)\frac{y+1}{y}$

$3y+5 + y(y+4) = (y+5)(y+1)$

$3y+5 + y^2+4y = y^2+6y+5$

$7y+8 = 6y+8 \longrightarrow y = 0$

صفر جزء مخرج کسر است

پس جواب ندارد.

مثال :

۲

$$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$(x-2)^2 \frac{1}{(x-2)^2} + (x-2)^2 \frac{2}{x-2} = 3(x-2)^2$$

$$1 + 2(x-2) = 3(x-2)^2$$

$$1 + 2x - 4 = 3(x^2 - 4x + 4)$$

$$2x - 3 = 3x^2 - 12x + 12$$

$$3x^2 - 14x + 15 = 0$$

$$\Delta = (14)^2 - 4 \times 3 \times 15 = 196 - 180 = 16$$

$$x = \frac{14 \pm 4}{6} \rightarrow x = \frac{14+4}{6} = \frac{18}{6} = 3 \quad \checkmark$$

$$x = \frac{14-4}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \quad \checkmark$$

مثال :

۲ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم : $\frac{L}{w}=\frac{w+L}{L}$ آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل‌شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

مستطیل طلایی : مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد.

w

L

$$p=2(L+w)=144 \longrightarrow L+w=72 \longrightarrow w=72-L$$

$$\frac{w+L}{L}=\frac{L}{w} \Rightarrow \frac{72-L+L}{L}=\frac{L}{72-L}$$

$$\frac{72}{L}=\frac{L}{72-L} \qquad \text{مساحت} = L(72-L)$$

$$L(72-L)\frac{72}{L}=L(72-L)\frac{L}{72-L}$$

$$(72-L)72=L^2 \longrightarrow L^2+72L-5184=0$$

$$\Delta=(72)^2-4(1)(-5184)=72^2+4(72)^2=5(72)^2$$

$$z = \frac{-72 \pm \sqrt{5(72)^2}}{2} = \begin{cases} \frac{-72 + 72\sqrt{5}}{2} = 36(\underbrace{-1+\sqrt{5}}_{+}) \checkmark \\ \frac{-72 - 72\sqrt{5}}{2} = 36(\underbrace{-1-\sqrt{5}}_{-}) \times \end{cases}$$

$$z = 36(-1+\sqrt{5})$$

$$\omega = 72 - z = 72 - (36(-1+\sqrt{5}))$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

قسمت دوم: مدلسازی با معادلات گویا

جلسه هفتم: صفحات ۱۷ تا ۱۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

در حل برخی مسائل بعد از مدل سازی کردن، به یک معادله می رسیم. برای راحت شدن حل آنگونه مسائل کلامی را به صورت زیر دسته بندی می کنیم.

نوع اول: مسائل سرعت ـ زمان

فعالیت صفحه ۲۰ ریاضی ۲

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام‌خمینی(قُدِّسَ سِرُّهُ) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت قطار $10\ km/h$ کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب‌است محاسبهٔ طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

در این نوع مسائل از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم: $x = vt$

$t = \frac{x}{v}$ $\quad t_{\text{رفت}} = \frac{60}{v}$

$t_{\text{برگشت}} = \frac{60}{v-10}$

$t_{\text{برگشت}} = t_{\text{رفت}} + \frac{1}{2}$

معادله گویا

$\Rightarrow \frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{2}$

$\xrightarrow{2v(v-10)} 120v = 120(v-10) + v(v-10)$

$v^2 - 10v + 120v - 120v - 1200 = 0$

$v^2 - 10v - 1200 = 0 \rightarrow (v-40)(v+30) = 0$

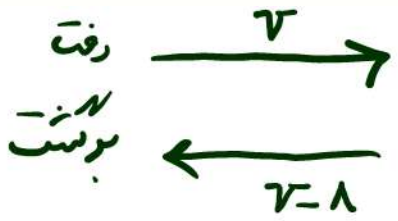
$v = 40 \rightarrow t_{\text{رفت}} = \frac{60}{40} = 1{,}5$ ساعت

$v = -30$ ✗

$t_{\text{برگشت}} = \frac{60}{40-10} = \frac{60}{30} = 2$ ساعت

تمرین صفحه ۲۲ حسابان ۱

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. درصورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.



$$t_{\text{رفت}} = \frac{144}{v} \qquad t_{\text{برگشت}} = \frac{144}{v-8}$$

$$\rightarrow t_{\text{رفت}} + t_{\text{برگشت}} = 17 - 2 \quad (\text{توقف})$$

$$\frac{144}{v} + \frac{144}{v-8} = 18 \xrightarrow{\div 3} \frac{48}{v} + \frac{48}{v-8} = 6$$

$$\xrightarrow{\times v(v-8)} 48(v-8) + 48v = 6v(v-8)$$

$$\rightarrow 6v^2 - 48v - 48v - 48v + 384 = 0$$

$$\rightarrow 6v^2 - 144v + 384 = 0$$

$$\Delta = (-144)^2 - (4 \times 6 \times 384) = 20736 - 9216 = 11520$$

$$\sqrt{11520} = 107.33$$

$$v = \frac{144 \pm 107.33}{12} \begin{cases} v = \frac{144 + 107.33}{12} = 20.94 \\ v = 3.06 \times \end{cases}$$

نوع دوم: مسائل تقسیم کار

تمرین صفحه ۲۴ ریاضی ۲

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کنند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

در حل این نوع مسائل می‌توانیم اگر کاری در n ساعت (دقیقه و ...) انجام می‌پذیرد، در یک ساعت (یک دقیقه و ...) $\frac{1}{n}$ از کار انجام شده است.

n: رضا به تنهایی

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{1\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{3}{4}$$

$\times 4n$ $\quad 2n + 4 = 3n \longrightarrow n = 4$

تمرین صفحه ۲۲ حسابان ۱

۹ ماشین A کاری را به‌تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

$A: x$

$B: x+15$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18}$$

$\xrightarrow{18x(x+15)}$ $18(x+15) + 18x = x(x+15)$

$$x^2 + 15x - 18x - 270 - 18x = 0$$

$$x^2 - 21x - 270 = 0$$

$$(x-30)(x+9) = 0 \begin{cases} x = 30 \longrightarrow A \\ x = -9 \text{ ق} \end{cases}$$

و B در ۴۵ ساعت

مثال: زمانی که طول می‌کشد تا شیر A به تنهایی حوضی را پر کند، از روی اندازه‌ی زمانی که شیر B همان حوض را پر کند، یک ساعت بیشتر است. اگر هر دو شیر را هم‌زمان باز کنیم، حوض در ۲ ساعت و ۶ دقیقه پر می‌شود. شیر A به تنهایی در چند ساعت حوض را پر می‌کند؟

t: زمانی که شیر B به تنهایی

$2t+1$: A

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2,1} = \frac{1}{\frac{21}{10}} = \frac{10}{21}$$

$\xrightarrow{21t(2t+1)}$

$$\rightarrow 21(2t+1) + 21t = 10t(2t+1)$$
$$\rightarrow 42t + 21 + 21t = 20t^2 + 10t$$
$$\rightarrow 20t^2 + 10t - 63t - 21 = 0$$
$$\rightarrow 20t^2 - 53t - 21 = 0$$
$$\Delta = (-53)^2 - (4 \times 20 \times (-21)) = 2809 + 1680 = 4489$$
$$\sqrt{4489} = 67$$
$$t = \frac{53 \pm 67}{40} \begin{cases} \frac{53+67}{40} = 3 \rightarrow \text{شیر } B \\ \frac{53-67}{40} = \frac{-14}{40} = -\frac{7}{20} \times \end{cases}$$

شیر A به تنهایی: $2 \times 3 + 1 = 7$ ساعت

نوع سوم : مسائل مخلوط

ص ۱۷ و ۱۸ حساب ۱

در یک مغازهٔ ماهی‌های تزیینی، ماهی‌های آب‌شور در محلول‌های آب‌نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟

حالت اول : فرض کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد.

مقدار نمک در محلول ۴ درصدی $200 \times \frac{4}{100} = 8\ kg$

x کیلوگرم نمک اضافه کنیم

$$\frac{8+x}{200+x} = \frac{7}{100}$$

$$\longrightarrow 100(8+x) = 7(200+x) \longrightarrow 800+100x = 1400+7x$$

$$\longrightarrow 93x = 600 \longrightarrow x = \frac{600}{93}\ kg$$

حالت دوم : اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

y کیلوگرم از آب تبخیر کنیم.

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100}$$

$$800 = 7(200-y) \longrightarrow 7y = -800+1400$$

$$7y = 600 \longrightarrow y = \frac{600}{7}\ kg$$

در مسئله ماهی‌های تزیینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازهٔ کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول

y: کیلوگرم تبخیر آب

$$\frac{8+5}{200+5-y} = \frac{7}{100}$$

$$\rightarrow \frac{13}{205-y} = \frac{7}{100}$$

$$\rightarrow 1300 = 7\times 205 - 7y$$

$$\rightarrow 7y = 1435 - 1300$$

$$\rightarrow 7y = 135 \rightarrow y = \frac{135}{7} \approx 19{,}28 \ kg$$

۱۹٫۲۸kg از آب تبخیر

مسائل متفرقه مانند :

تمرین صفحه ۲۲ حسابان ۱

۸ پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

x : قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف

قدار قبل از تخفیف ↑ ، قدار بعد از تخفیف ↓

$$\frac{۱۲۰۰۰۰}{x} + ۴ = \frac{۱۲۰۰۰۰}{x-۱۰۰۰}$$

$\times x(x-۱۰۰۰)$ →

$$۱۲\times ۱۰^۴(x-۱۰۰۰) + ۴x(x-۱۰۰۰) = ۱۲\times ۱۰^۴ x$$

$$۴x^۲ - ۴۰۰۰x + ۱۲\times ۱۰^۴ x - ۱۲\times ۱۰^۷ - ۱۲\times ۱۰^۴ x = ۰$$

$$۴x^۲ - ۴۰۰۰x - ۱۲\times ۱۰^۷ = ۰$$

$\div ۴$ →

$$x^۲ - ۱۰۰۰x - ۳۰\times ۱۰^۶ = ۰ \rightarrow \Delta = ۱۲۱\times ۱۰^۶$$

$$x = \begin{cases} \frac{۱۰۰۰ + ۱۱۰۰۰}{۲} = \frac{۱۲۰۰۰}{۲} = ۶۰۰۰ \checkmark \\ \frac{۱۰۰۰ - ۱۱۰۰۰}{۲} = -۵۰۰۰ \end{cases}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول : جبر و معادله

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

قسمت سوم: معادلات شامل عبارت‌های گنگ

جلسه هشتم: صفحات ۲۰و۲۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

معادلات گنگ (اصم)

معادله‌ای که در آن مجهول زیر رادیکال است را معادله گنگ می‌گوییم.

روش حل معادلات اصم با فرجه دو:

یک رادیکال را یک طرف و بقیه عبارت‌ها را سمت دیگر منتقل می‌کنیم.

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم تا رادیکال از بین برود. اگر باز هم رادیکال داشتیم این عمل را تکرار می‌کنیم تا همه رادیکال‌ها از بین بروند و معادله بدست آمده را حل می‌کنیم.

جواب‌های به دست آمده به شرطی قابل قبول هستند که در معادله اولیه صدق کنند.

تذکر: گاهی اوقات برای سرعت عمل در تشخیص مردود یا قبول بودن جواب می‌توان از نکات زیر استفاده کرد:

- عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.
- هر عبارت که با یک رادیکال برابر است باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

تذکر: در معادلات گنگی که رادیکال‌ها در مخرج قرار می‌گیرند ابتدا مانند معادلات گویا عمل کرده با ضرب طرفین معادله در ک.م.م مخرج‌ها، معادله را از حالت کسری خارج می‌کنیم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

ث) $k=\sqrt{6k-8}$

ج) $x+\sqrt{x}=6$

چ) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$

ح) $\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$

ث) $k^2=6k-8 \rightarrow k^2-6k+8=0$

$(k-4)(k-2)=0$

$k=4 \rightarrow 4=\sqrt{24-8}=\sqrt{16}=4$ ✓

$k=2 \rightarrow 2=\sqrt{12-8}=\sqrt{4}=2$ ✓

ج) $\sqrt{x}=6-x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x=(6-x)^2 \rightarrow$ با استفاده از اتحاد دوجمله‌ای

$x=36-12x+x^2$

$\rightarrow x^2-13x+36=0 \rightarrow (x-9)(x-4)=0$

$x=9$ ✗

$x=4$ ✓

$\sqrt{9}=6-9 \rightarrow 3=-3$ ✗

$\sqrt{4}=6-4 \rightarrow 2=2$ ✓

ج) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$

$\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{2x-5}$

به توان ۲ $\longrightarrow (\sqrt{x+1}-1)^2 = 2x-5$

$\longrightarrow x+1-2\sqrt{x+1}+1 = 2x-5$

$\longrightarrow x+2-2x+5 = 2\sqrt{x+1}$

$\longrightarrow -x+7 = 2\sqrt{x+1}$

به توان ۲ $\longrightarrow x^2-14x+49 = 4(x+1)$

$\longrightarrow x^2-14x+49-4x-4=0$

$\longrightarrow x^2-18x+45=0$

$\longrightarrow (x-3)(x-15)=0$ $\begin{cases} x=3 \rightarrow \sqrt{4}-\sqrt{1}=1 \checkmark \\ x=15 \rightarrow 4-3=1 \times \end{cases}$

د) $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$

$\times\sqrt{m}$ $\longrightarrow m+1 = 2\sqrt{m}$ به توان ۲ $\longrightarrow m^2+2m+1 = 4m$

$\longrightarrow m^2-2m+1=0 \longrightarrow (m-1)^2=0 \longrightarrow m=1 \checkmark$

$2 = \frac{1}{1}+1$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

۱)

$$\xrightarrow{\times(1+\sqrt{x})} 1-\sqrt{x}=(1-x)(1+\sqrt{x})$$

$$\rightarrow 1-\sqrt{x}=1-x+\sqrt{x}-x\sqrt{x}$$

$$\rightarrow x=\sqrt{x}+\sqrt{x}-x\sqrt{x}$$

$$\rightarrow x=2\sqrt{x}-x\sqrt{x}$$

$$\rightarrow x=\sqrt{x}(2-x)$$

$$\xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{هر دو}} x^2=x(4-4x+x^2)$$

$$x^2=4x-4x^2+x^3$$

$$\rightarrow x^3-5x^2+4x=0 \rightarrow x(x^2-5x+4)=0$$

$x=0$ ✓ $\quad \frac{1-0}{1+0}=1-0$

$x^2-5x+4=0$ ⟨ $x=1 \rightarrow \frac{1-1}{1+1}=1-0 \rightarrow 0=0$ ✓

$x=4 \rightarrow \frac{2-1}{1+4}=1-\frac{3}{5} \rightarrow \times$ $\quad 2=\frac{5}{5}$

۲)

$$\xrightarrow{\times(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} 3(\sqrt{x}-2)=2\underbrace{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}_{\text{جزء}}-(\sqrt{x}+2)$$

$$\rightarrow 3\sqrt{x}-10=2(x-4)-\sqrt{x}-2$$

$$\rightarrow 5\sqrt{x}-10-2x+8+\sqrt{x}+2=0$$

$$\rightarrow 6\sqrt{x}=2x \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{هر دو}} 36x=4x^2 \rightarrow 4x^2-36x=0$$

$$\rightarrow 4x(x-9)=0 \quad \begin{matrix} x=0 & 5/2=2+1/2 \checkmark \\ x=9 & 5/5=2-1/1 \checkmark \end{matrix}$$

۳) $\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{} 2x+7 = x+2\sqrt{x}+1$

$\rightarrow 6 = 2\sqrt{x} \rightarrow 3 = \sqrt{x} \rightarrow x = 9$ ✓ $4 = 3+1$

۴) $\rightarrow \times\sqrt{4}\ \sqrt{4-3} \rightarrow \sqrt{4} - 2\sqrt{4-3} = 0$

$\sqrt{4} = 2\sqrt{4-3} \xrightarrow[\text{دو}]{\text{به توان}} 4 = 4(4-3) \rightarrow 4 = 4x - 12$

$\rightarrow -3x = -12 \rightarrow x = 4$ ✓

$\frac{1}{1} - \frac{2}{2} = 0$

مثال: جواب معادلات زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\sqrt{t}+2=0$ ب) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}+1=0$ پ) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$

الف) $\sqrt{t} = -2$ ✗ جواب ندارد

ب) $(+)+(+)+1=0$ امکان ندارد ⟵ جواب ندارد

پ) $(+)+(+)=0 \xrightarrow{\text{عبارت}=0}$ $1-x=0 \rightarrow x=1$ ، $x-2=0 \rightarrow x=2$ جواب ندارد

در مثال های پایان حل شود.

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

$x+\sqrt{x}=6 \longrightarrow x=4$

۲ معادله $\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x-2}=0$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

$x^2-4=0 \longrightarrow x=\pm 2$

$x-2=0 \longrightarrow x=2$

$x=2$ هم زمان هر دو را صفر می‌کند.

پس جواب معادله است.

نکته: هرگاه جمع دو رادیکال صفر شود تنها حالتی دارد که هر دو برابر صفر باشند یعنی زیر رادیکال‌ها هم‌زمان صفر شوند.

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به‌طوری که $t=\sqrt{10-\frac{h}{5}}$.
این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

$2=\sqrt{10-\frac{h}{5}} \xrightarrow[2]{\text{به توان}} 4=10-\frac{h}{5} \longrightarrow -6=-\frac{h}{5}$

$\longrightarrow -h=-30 \longrightarrow h=30\ m$

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟
ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

الف) $\sqrt{x} - x = \frac{x}{2} \longrightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} + x = \frac{3}{2}x$

$\xrightarrow[2]{\text{به توان}} x = \frac{9}{4}x^2 \longrightarrow \frac{9}{4}x^2 - x = 0 \longrightarrow x(\frac{9}{4}x - 1) = 0$

$x = 0$ ✓

$\frac{9}{4}x = 1 \longrightarrow x = \frac{4}{9}$ ×

ب) $x - \sqrt{x} = \frac{x}{2} \longrightarrow x - \frac{x}{2} = \sqrt{x}$

$\frac{1}{2}x = \sqrt{x} \xrightarrow[2]{\text{به توان}} \frac{1}{4}x^2 = x \longrightarrow \frac{1}{4}x^2 - x = 0 \longrightarrow x(\frac{1}{4}x - 1) = 0$

$x = 0$ ✓
$x = 4$ ✓ $4 - 2 = \frac{4}{2}$

۵ معادله‌ای شاملِ مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

$\sqrt{2 - x} + \sqrt{x + 3} = 3$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

قسمت اول: ویژگی‌ها و رسم نمودار توابع قدرمطلقی

جلسه هشتم: صفحات ۲۳ تا ۲۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تعریف: قدر مطلق عدد حقیقی a به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

مثبت

تذکر: قدر مطلق یک عامل مزاحم است و باید در حل معادلات، نامعادلات، رسم نمودار و... با استفاده از تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق حذف شود.

کار در کلاس

۱ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

پ) $\left|۱/۵ - ۱\frac{۱}{۲}\right| =$ $\quad$ $۱/۵ < ۱\frac{۱}{۲}$ $\quad$ $۱/۷ < ۲/۲$ $\quad$ ستبر

الف) $|-۵+۳| = |-۲| = ۲$

ب) $-(\sqrt{۳}-\sqrt{۵}) = \sqrt{۵}-\sqrt{۳}$

پ) $|۰| = ۰$

۲ عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$|a^۲+۱| = a^۲+۱$ $\quad$ $a^۲ > ۱$ $\quad$ مثبت

$\sqrt{۳-۴\sqrt{۳}+۴} = \sqrt{(\sqrt{۳}-۲)^۲} = |\sqrt{۳}-۲| = -(\sqrt{۳}-۲) = ۲-\sqrt{۳}$

$۱/۷ < \sqrt{۳}$ $\quad$ منفی

ویژگی های قدر مطلق :

۱) $|a| \geq 0$

۲) $\sqrt{a^2} = |a|$

۳) $|x| = a \xrightarrow{a \geq 0} x = \pm a$

۴) $|x| = |a| \rightarrow x = \pm a$

۵) $|x|^2 = x^2$

۶) $|-x| = |x|$

فعالیت

فرض کنید a و b عددهای حقیقی دلخواه باشند.

۷)

۸)

اثبات :

حل۱) $|ab| = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = |a|\,|b|$

حل۲) $\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \times \frac{1}{b}\right| = |a| \times \left|\frac{1}{b}\right| = |a| \times \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$

فعالیت

۱ فرض کنید c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. هریک از نامعادله‌های زیر را به جواب متناظر آن وصل کنید.

الف) $|x| < c, (c \neq 0)$ (۲)

ب) $|x| > c$ (۳)

پ) $|x| \leq c$ (۱)

ت) $|x| \geq c$ (۴)

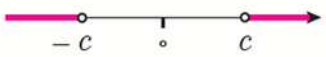
(۱)



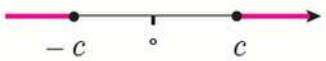
(۲)



(۳)



(۴)



9) $|x| \leq c \xrightarrow{c>0} -c \leq x \leq c$

10) $|x| \geq c \xrightarrow{c>0} x \geq c \quad \text{یا} \quad x \leq -c$

11) $-|a| \leq a \leq |a|$

اثبت: $|a| \leq |a| \xrightarrow{|a|=c} |a| \leq c \rightarrow -c \leq a \leq c \xrightarrow{c=|a|}$

$\rightarrow -|a| \leq a \leq |a|$

12) $-|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$

اثبت:

$$+\begin{cases} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{cases}$$

$$-|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$$

۱۳) $|a+b| \leq |a|+|b|$ نامساوی مثلث

اثبات: $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$

$\longrightarrow |a+b| \leq |a|+|b|$

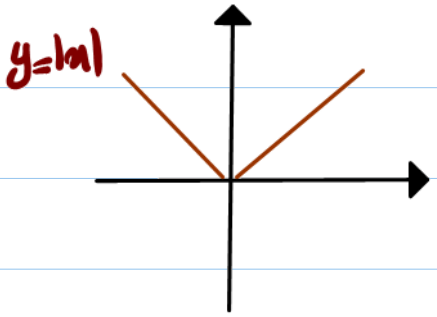
رسم نمودار توابع قدرمطلقی:

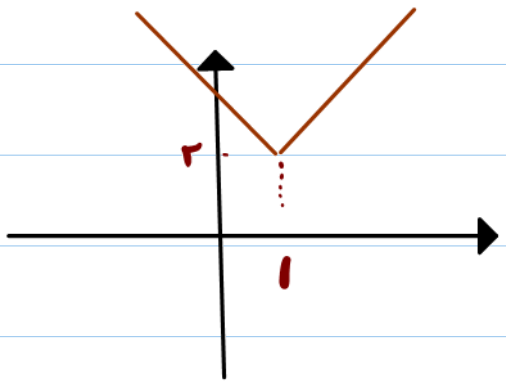
۱) اگر ضابطه تابع به صورت $y=|x+a|+b$ باشد با استفاده از انتقال نمودار تابع $y=|x|$ نمودار را رسم می‌کنیم.

۲) اگر ضابطه به صورت $y=|f(x)|$ باشد کافی است تابع $f(x)$ را رسم کنیم سپس قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور x هاست را قرینه کنیم و بالای محور x رسم کنیم.

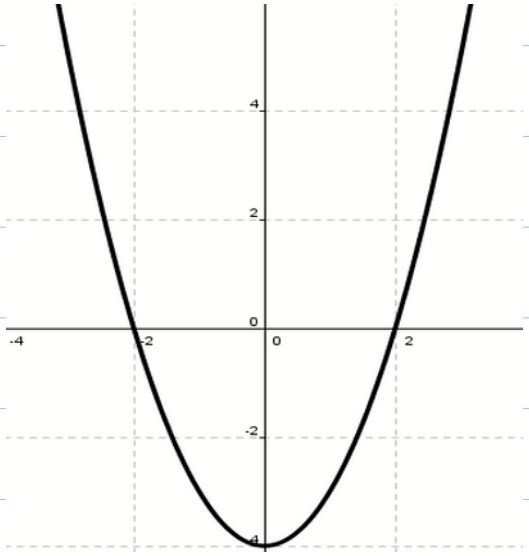
۳) اگر به هیچ یک از دو صورت بالا نبود، با استفاده از تعیین علامت عبارات داخل قدرمطلق تابع را به صورت چند ضابطه‌ای و بدون قدرمطلق می‌نویسیم.

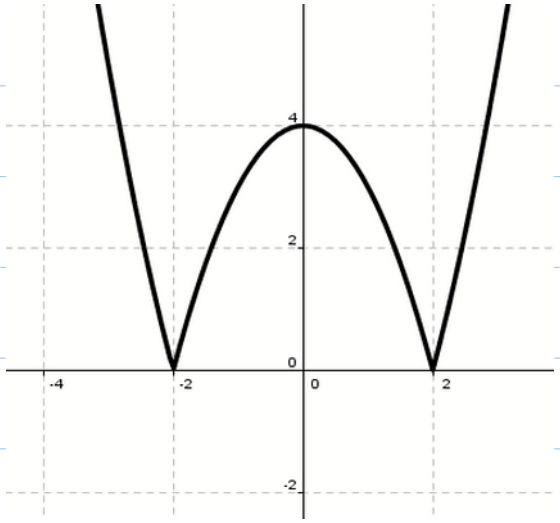
مثال : می‌خواهیم نمودار تابع $y=|x-1|+2$ را رسم کنیم.





مثال : نمودار $y=|x^2-4|$ را رسم کنید.





۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطهٔ هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید و رسم کنید.

الف) $f(x)=x|x|$

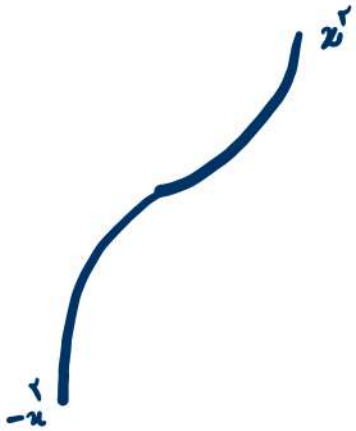
ب) $g(x)=|x^۲-۱|$

پ) $h(x)=|x-۱|+|x+۱|$

الف)

x		۰	
x	−	۰	+

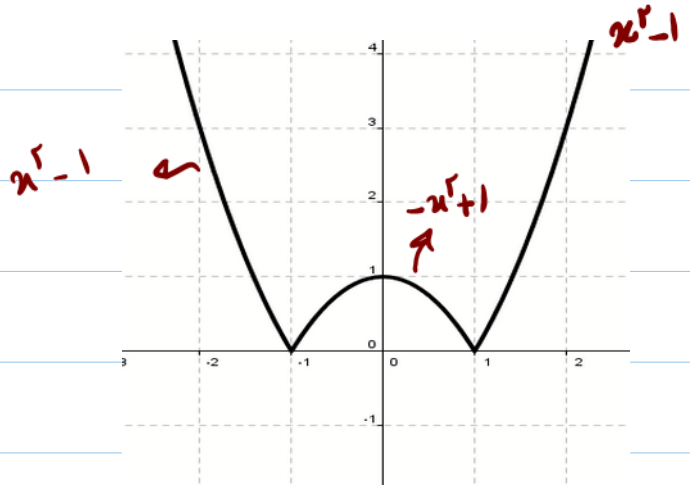
$$f(x)=\begin{cases} x\times x & x\geq 0 \\ x\times(-x) & x<0 \end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq 0 \\ -x^۲ & x<0 \end{cases}$$



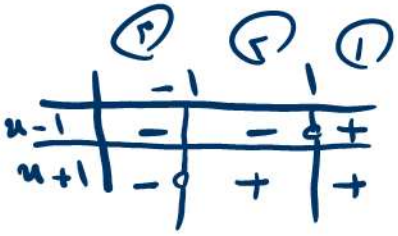
ب) $x^۲-۱=0 \rightarrow x=\pm 1$

x		-1		۱	
$x^۲-۱$	+	۰	−	۰	+

$$g(x)=\begin{cases} x^۲-1 & x\geq 1 \\ -x^۲+1 & -1<x<1 \\ x^۲-1 & x\leq -1 \end{cases}$$



ب) $h(x) = |x-1| + |x+1|$



$x-1=0 \rightarrow x=1$ $\quad$ $x+1=0 \rightarrow x=-1$

$$h(x) = \begin{cases} x-1+x+1 & x \geq 1 \\ -(x-1)+x+1 & -1 < x < 1 \\ -(x-1)-(x+1) & x \leq -1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ -2x & x \leq -1 \end{cases}$$

$-2x$ $\quad$ $2x$

$y=2$

-1 $\quad$ 1

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

قسمت دوم: معادلات و نامعادلات قدرمطلقی

جلسه نهم: صفحات ۲۶ و ۲۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

معادلات قدرمطلقی

معادلاتی که در آن‌ها مجهول داخل قدرمطلق قرار دارد را معادله قدرمطلقی می‌نامند.

روش‌های حل معادله قدرمطلقی:

$$\begin{cases} |x| = a \to x = \pm a \\ |x| = |a| \to x = \pm a \end{cases}$$

۱) استفاده از ویژگی‌ها:

الف) اگر فقط در یک طرف قدرمطلق وجود داشته باشد مانند: $|x-2| = 2x-3$.
در این حالت قدرمطلق را برداشته برای سمت دیگر $\pm$ می‌گذاریم و معادلات حاصل را حل می‌کنیم.
چون شرط بزرگ‌تر مساوی صفر بودن سمتی که قدرمطلق وجود ندارد را داریم باید جواب‌ها را در معادله امتحان کنیم.

ب) اگر هر دو طرف قدرمطلق باشد مانند: $|2x-3| = |4x+1|$. باز هم قدرمطلق را برداشته برای یک سمت $\pm$ می‌گذاریم و معادلات حاصل را حل می‌کنیم.

۲) توان دو رساندن:

معادلات دسته الف و ب را می‌توان با به توان دو رساندن دو طرف و حذف قدرمطلق هم حل کرد، البته باید در آخر جواب‌ها را در معادله قرار دهیم که از معادله صدق کنند.

۳) تعیین علامت:

اگر معادله به صورت دسته الف و ب نبود، چاره‌ای جز حذف قدرمطلق‌ها با استفاده از تعیین علامت قدرمطلق‌ها نداریم. به این صورت که:

مرحله اول: عبارت‌های درون قدرمطلق را در یک جدول تعیین علامت می‌کنم تا ببینم که این عبارت‌ها در ناحیه‌های ایجاد شده، مثبت اند یا منفی.

مرحله دوم: در هر ناحیه از جدول تعیین علامت، عبارت‌های درون قدرمطلق را با توجه به علامت آن‌ها از قدرمطلق خارج می‌کنم. (مثبت باشند بدون هیچ تغییری از قدرمطلق خارج و منفی باشند با بیرون آمدن از قدرمطلق در منفی ضرب می‌شوند.)
و معادله را بدون قدرمطلق حل می‌کنم.

مرحله سوم: هرکدام از جواب‌های بدست آمده زمانی قابل قبول اند که در ناحیه مورد نظر باشند.

مرحله چهارم: اجتماع جواب‌های به دست آمده در هر ناحیه، همان جواب معادله است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $|x-2| = 2x-3$

$$x-2 = \pm(2x-3) \begin{cases} x-2 = 2x-3 \longrightarrow -x = -1 \longrightarrow x = 1 \\ x-2 = -(2x-3) \rightarrow x-2 = -2x+3 \\ \longrightarrow 3x = 5 \longrightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

آزمون جواب‌ها: $\begin{cases} x=1 \rightarrow 1 = -1 \quad \times \\ \boxed{x=\frac{5}{3}} \quad |\frac{5}{3}-2| = 2\times\frac{5}{3}-3 \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \checkmark \end{cases}$

ب) $|2x-3| = |4x+1|$

$2x-3 = \pm(4x+1)$

$2x-3 = 4x+1 \rightarrow -2x = 4 \rightarrow x = -2$

$2x-3 = -4x-1 \rightarrow 6x = 2 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

ب) $|2-x| - |2x-2| = x$

ریشه ۱ ، ریشه ۲

x	①	1	②	2	③
$2-x$	+		+	0	−
$2x-2$	−	0	+		+

① حالت $x<1$: $2-x-(-(2x-2)) = x$

$2-x+2x-2 = x \rightarrow x = x$ همواره برقرار

② حالت $1 \le x \le 2$: $2-x-(2-2x) = x$

$2-x+2x-2 = x \rightarrow -4x = -4 \rightarrow x = 1$

③ حالت $x>2$: $-(2-x)-(2x-2) = x$

$-2+x-2x+2 = x \rightarrow -2x = 0$

$x = 0 \notin (2,+\infty)$ جواب ندارد

مجموعه جواب $= (-\infty,1) \cap \{1\} = (-\infty,1]$

تذکر: از روش هندسی هم می‌توان در حل معادلات قدرمطلقی کمک گرفت. (در نظر گرفتن دو طرف تساوی به عنوان دو تابع و رسم آن‌ها در دستگاه مختصات و یافتن محل برخورد آن‌ها)

کار در کلاس

معادله قدر مطلقی $|x-1|=4-3x$ را به سه روش زیر حل کنید.

الف) حذف قدرمطلق

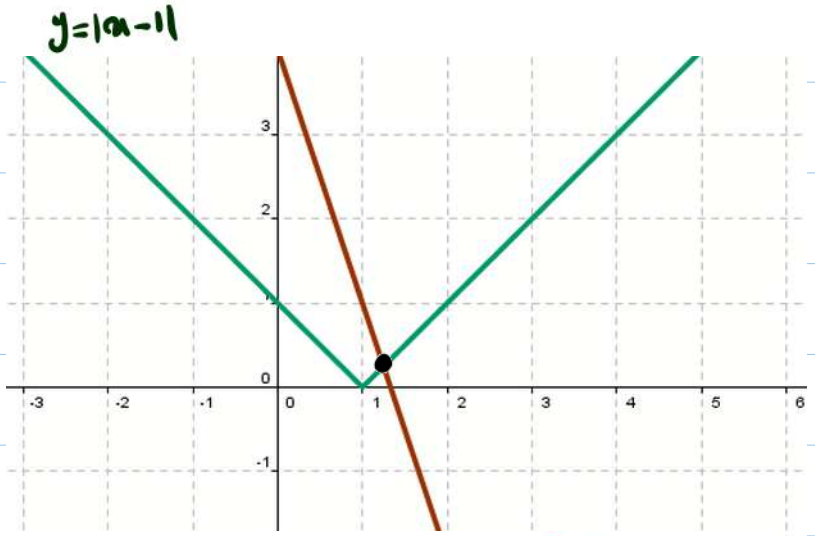
x		1	
$x-1$	$-$	0	$+$

$x<1$: $-(x-1)=4-3x \rightarrow -x+1=4-3x$

$\rightarrow 2x=3 \rightarrow x=\frac{3}{2}$ ✗

$x\geq 1$: $x-1=4-3x \rightarrow 4x=5 \rightarrow x=\frac{5}{4}$ ✓

ب) هندسی



پ) به توان ۲ رسانده

$|x-1|^2=(4-3x)^2 \rightarrow x^2-2x+1=16-24x+9x^2$

$8x^2-22x+15=0 \rightarrow \Delta=484-(4\times 8\times 15)=484-480=4$

$$x = \frac{22 \pm 2}{16} = \begin{cases} \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \times \\ \frac{20}{16} = \frac{5}{4} \checkmark \end{cases}$$

کار در کلاس

۱ با استفاده از شکل روبه‌رو، نمودار توابع $y=|2x-1|$ و $y=|x^2-1|$ را رسم کنید و تعداد جواب‌های معادله $|2x-1|=|x^2-1|$ و مقدار تقریبی جواب‌ها را به‌دست آورید.

۲ به روش جبری و با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق معادلهٔ $|2x-1|=|x^2-1|$ را حل کنید.

روش جبری : $x^2-1 = \pm(2x-1)$

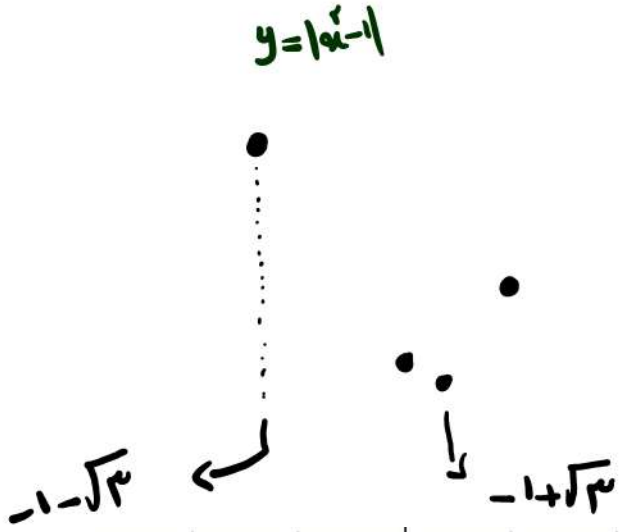
$x^2-1=2x-1 \rightarrow x^2-2x=0$

$x^2-1=-2x+1 \rightarrow x^2+2x-2=0$

$x(x-2)=0 \rightarrow \boxed{x=0}, \boxed{x=2}$

$x^2+2x-2=0 \rightarrow \Delta = 4-4\times1(-2) = 4+8 = 12$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{3})}{2} = \boxed{-1 \pm \sqrt{3}}$



روش های حل نامعادلات قدرمطلقی :

الف) اگر یک طرف قدرمطلق و یک طرف عدد باشد مانند $|2x-1| \leq 3$ از ویژگی های :

$$|u| \leq c \Rightarrow -c \leq u \leq c$$

و

$$|u| \geq c \Rightarrow u \geq c \ \text{یا} \ u \leq -c$$

استفاده می کنیم .

ب) اگر به صورت دسته الف نباشد ، باید با استفاده از تعیین علامت استفاده کرد و جواب هر ناحیه را با آن ناحیه اشتراک گرفت و در آخر جواب های نهایی هر قسمت را اجتماع می گیریم .

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $|2x-1| \leq 3$

$$-3 \leq 2x-1 \leq 3 \xrightarrow{+1} -2 \leq 2x \leq 4 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x \leq 2$$

$$ج.م = [-1, 2]$$

ب) $|2x-1| \leq x+1$

ریشه‌ها: $\frac{1}{2}$

x	①	$\frac{1}{2}$	②
$2x-1$	−	0	+

① حالت: $x < \frac{1}{2}$: $-(2x-1) \leq x+1 \longrightarrow -2x+1 \leq x+1$

$\longrightarrow -2x \leq 0 \xrightarrow{\div(-2)} x \geq 0$

اشتراک‌ها: $(-\infty, \frac{1}{2}) \cap [0, +\infty) = \underline{[0, \frac{1}{2})}$

② حالت: $x \geq \frac{1}{2}$: $2x-1 \leq x+1 \longrightarrow x \leq 2$

اشتراک‌ها: $[\frac{1}{2}, +\infty) \cap (-\infty, 2] = \underline{[\frac{1}{2}, 2]}$

جواب $= [0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, 2] = [0, 2]$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

جلسه دهم: حل تمرین صفحه۲۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

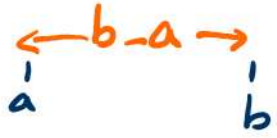
گروه ریاضی استان همدان

۲ بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های ۱- و ۳ روی محور xها برابر ۶ باشد؟



نکته: فاصله بین دو نقطه a و b روی محور:

اگر $a<b$ باشد، فاصله بین a و b برابر $b-a$ می‌شود:



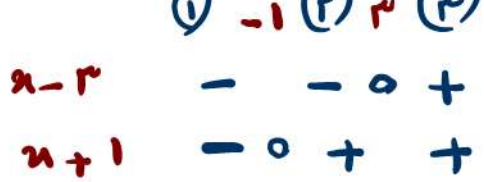
مثلاً



$2-(-4)=2+4=6$

اگر $a-b$ یعنی $2-4-2=-6$ بنویسیم، چون فاصله نمی‌تواند منفی باشد، باید جواب را قدر مطلق بگیریم. پس برای رفع این مشکل و زمانی که نمی‌دانیم a بزرگ‌تر است یا b، فاصله بین a و b روی یک محور را $|b-a|$ می‌گیریم.

$$|x-3|+|x-(-1)|=6 \rightarrow |x-3|+|x+1|=6$$



۱) $x<-1$: $-(x-3)-(x+1)=6$

$-x+3-x-1=6 \rightarrow -2x=4$

$\rightarrow x=-2$ ✓

۲) $-1 \le x \le 3$: $-(x-3)+(x+1)=7$

$-x+3+x+1=7$

$4=7$ غیرممکن

۳) $x>3$: $x-3+x+1=7$

$2x=8 \rightarrow x=4$ ✓

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به‌صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است.

$|x-3|=7 \rightarrow x-3=\pm 7$

$x-3=7 \rightarrow x=7+3=10$

$x-3=-7 \rightarrow x=-7+3=-4$



ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است.

$2|x-6|=4 \xrightarrow{\div 2} |x-6|=2 \rightarrow$

$x-6=2 \rightarrow x=8$

$x-6=-2 \rightarrow x=4$

هرکدام برابر شود حاصل هم میشود



پ) فاصله بین x و ۳- بزرگ‌تر از ۲ است.

$|x-(-3)| > 2 \rightarrow |x+3| > 2$

$\rightarrow$ بزرگی

$x+3 > 2 \rightarrow x > -1$

$x+3 < -2 \rightarrow x < -5$



۴ دو معادلهٔ زیر را حل کنید.

الف) $\frac{2-x}{|x-3|}=1$

$\rightarrow |x-3| = 2-x \rightarrow x-3 = \pm(2-x)$

$x-3 = 2-x \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2} = 2{,}5$ ← قابل قبول

$|2{,}5-3| = 2-2{,}5$

$0{,}5 \neq -0{,}5$

$x-3 = -2+x \rightarrow -3 = -2$ غیرممکن

این معادله جواب ندارد.

$\rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 2x+1$

روش دوم

$|x-1| = 2x+1$

$\rightarrow x-1 = \pm(2x+1)$

$x-1 = 2x+1 \rightarrow x = -2$ غ ق ق

$|-2-1| = -4+1$

$3 \neq -3$

$x-1 = -2x-1 \rightarrow 3x = 0 \rightarrow x = 0$ ✓

$|0-1| = 2\times 0+1$

$1 = 1$

۵ نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y=3$ معادله‌های به‌دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$

$\rightsquigarrow$ $+\ 0\ -\ |\ +$

$y = \begin{cases} x - \frac{x}{-x} & x<0 \\ x - \frac{x}{x} & x>0 \end{cases} \rightsquigarrow y = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$

$y = x-1$

روش هندسی:

$y=3$



جواب هندسی:

$x = 4$

$y = x+1$

روش جبری :

$y = x - \frac{x}{|x|}$

$x < 0 : \quad y = x + 1 \longrightarrow x = 2 \rightsquigarrow$ ورد حیریت ✗

$x > 0 : \quad y = x - 1 \longrightarrow x = 4$ ✓

$$\rightsquigarrow y = \left| x^2 - 6x + 9 - 9 \right| = \left| (x-3)^2 - 9 \right|$$

$$\rightsquigarrow y = |x^2 - 6x|$$

روش هندسی :

$y = 3$

۴ جواب داریم

$3+\sqrt{12}$ $3+\sqrt{7}$ $3-\sqrt{7}$ $3-\sqrt{12}$

روش جبری:

$|x^2 - 6x| = 3 \longrightarrow \left| (x-3)^2 - 9 \right| = 3$

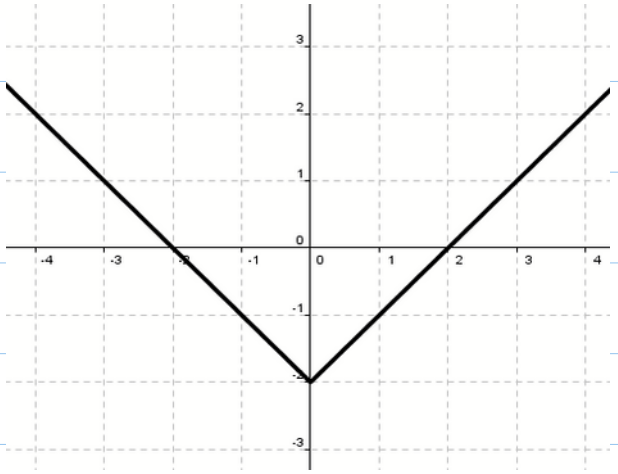
$(x-3)^2 - 9 = 3 \longrightarrow (x-3)^2 = 12 \xrightarrow{\sqrt{}} |x-3| = \sqrt{12} \rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{12}$

$\rightarrow x = 3 \pm \sqrt{12}$

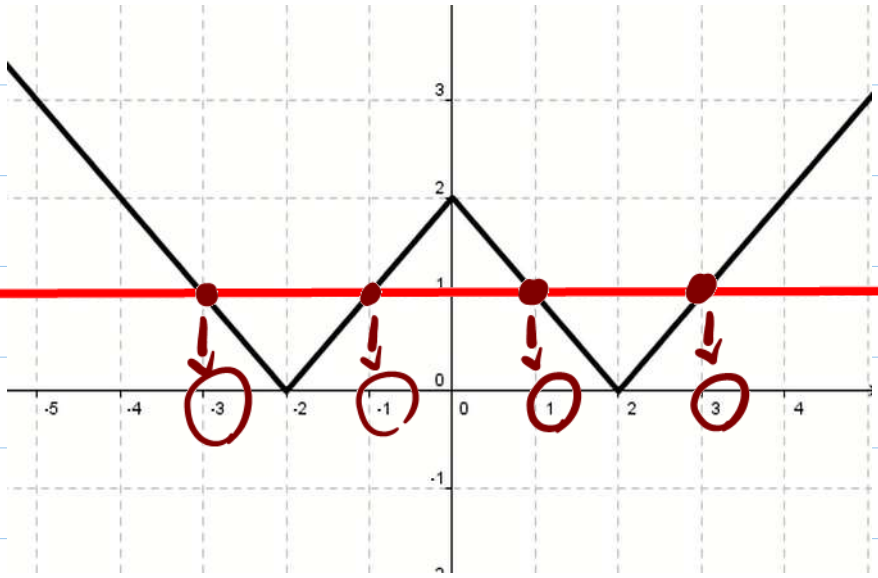
$(x-3)^2 - 9 = -3 \longrightarrow (x-3)^2 = 6 \xrightarrow{\sqrt{}} |x-3| = \sqrt{6} \rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{6}$

$\rightarrow x = 3 \pm \sqrt{6}$

۶ نمودار تابع $f(x)=||x|-۲|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x)=۱$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.



$y=|x|-۲$



$y=|x|-۲|$

روش هندسی :

$y=۱$

$x=-۳,-۱,۱,۳$

روش جبری :

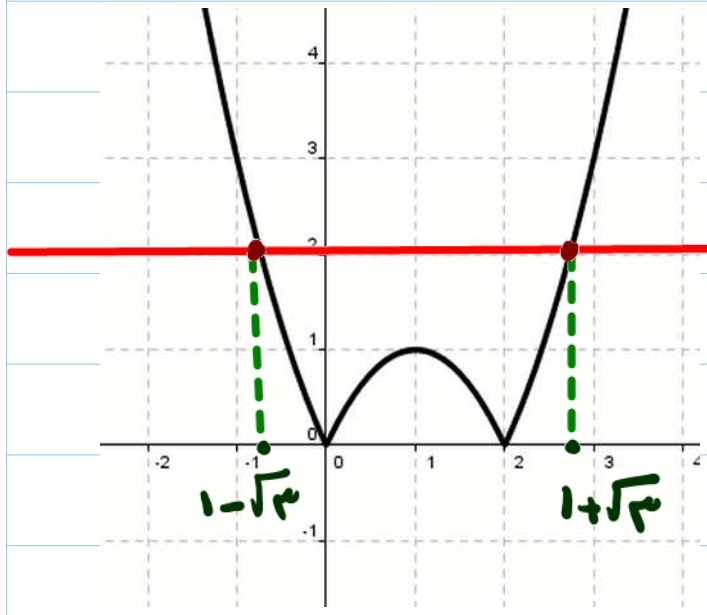
$|x|-۲|=۱ \rightarrow |x|-۲=\pm ۱$

$|x|-۲=۱ \rightarrow |x|=۳ \rightarrow x=\pm ۳$

$|x|-۲=-۱ \rightarrow |x|=۱ \rightarrow x=\pm ۱$

۷ نمودار تابع $f(x)=|x^2-2x|$ را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2-2x|=2$ را حل نمایید.

$y=|x^2-2x|=|x^2-2x+1-1|=|(x-1)^2-1|$



روش هندسی :

۲ جواب داریم.

روش جبری :

$|x^2-2x|=|(x-1)^2-1|=2$

$\rightarrow (x-1)^2-1=\pm 2$

$(x-1)^2-1=2 \longrightarrow (x-1)^2=3 \xrightarrow{\sqrt{}} x-1=\pm\sqrt{3}$

$\longrightarrow x=1\pm\sqrt{3}$ ✓

$(x-1)^2-1=-2 \longrightarrow (x-1)^2=-1$ ✗

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

قسمت اول و دوم

جلسه یازدهم و دوازدهم: صفحات ۲۹ تا ۳۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱) فاصله دو نقطه (طول پاره خط)

همانطور که در درس قبل دیدیم، اگر دو نقطه A و B متناظر با اعداد x_A و x_B روی محور اعداد باشند آنگاه فاصله بین دو نقطه $|AB| = |x_B - x_A|$ می‌شود.

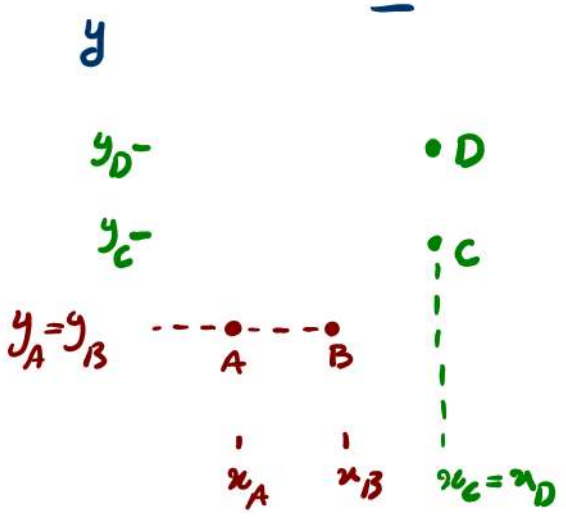


مانند:



$$|AB| = |۳-(-۲)| = |۳+۲| = ۵$$

تذکر: در دستگاه مختصات دو نقطه A و B که عرض برابر دارند هم عرض و به نقاط C و D که طول مساوی دارند هم طول گفته می‌شود و داریم:



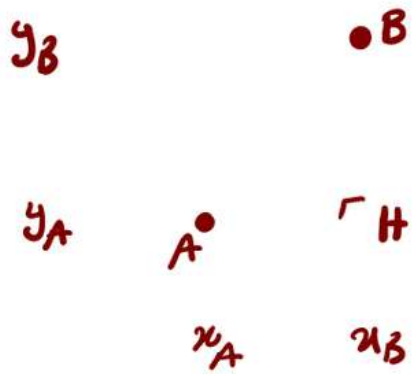
$$|AB| = |x_B - x_A|$$

$$|CD| = |y_D - y_C|$$

فرمول شماره (۱) : اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در دستگاه مختصات باشند، طول پاره خط AB یا فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

اثبات :



اگر از نقطه A بر خط تصویر B روی محور xها، x_B، عمود کنیم و پای عمود را H بنامیم،

مثلث ABH قائم‌الزاویه خواهد بود و طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \qquad (1)$$

ولی BH هم طول هستند پس : $|BH| = |y_B - y_A|$

همچنین H و A هم عرض هستند پس : $|AH| = |x_B - x_A|$

با جایگذاری روابط بالا در (۱) داریم:

$$AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

با گرفتن رادیکال از طرفین و این خاصیت قدرمطلق ($|a|^2 = a^2$) و توجه به این نکته که طول را همواره عددی مثبت در نظر می‌گیریم خودمان را راحت:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

یادآوری: شیب خط گذرا از دو نقطه $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ برابر: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

و معادله خط گذرنده از نقطه A با شیب m برابر: $y - y_A = m(x - x_A)$ است.

کار در کلاس

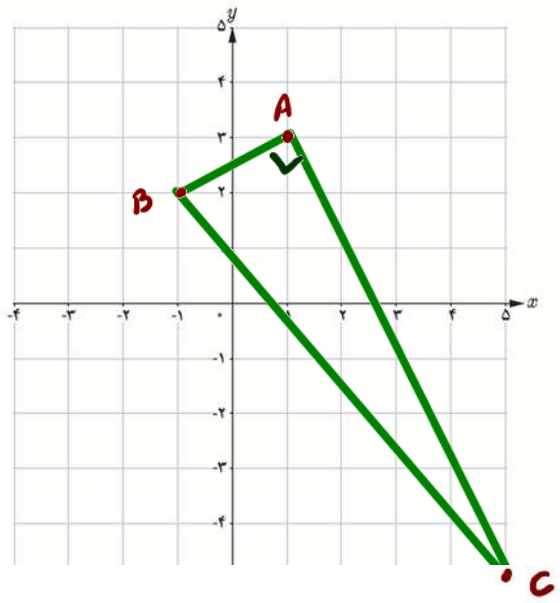
سه نقطهٔ $A(۱,۳)$، $B(-۱,۲)$ و $C(۵,-۵)$ سه رأس مثلث ABC، در صفحهٔ مختصات روبه‌رو، هستند.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) طول اضلاع مثلث را به‌دست آورید.

پ) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ت) شیب دو خط AB و AC را به‌دست آورید.
چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟



ب) $AB = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۲-۳)^۲} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$

$AC = \sqrt{(۵-۱)^۲ + (-۵-۳)^۲} = \sqrt{۱۶+۶۴} = \sqrt{۸۰}$

$BC = \sqrt{(۵-(-۱))^۲ + (-۵-۲)^۲} = \sqrt{۳۶+۴۹} = \sqrt{۸۵}$

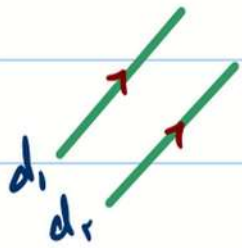
ب) $(\sqrt{۸۵})^۲ = (\sqrt{۸۰})^۲ + (\sqrt{۵})^۲ \rightarrow ۸۵ = ۸۵ \rightarrow BC^۲ = AC^۲ + AB^۲$

قدر مطلق دو عدد معکوس یکدیگر با هم برابر و حاصل ضرب آن‌ها منفی یک می‌شود.

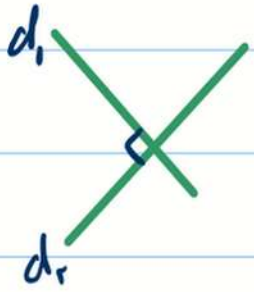
ت) $m_{AB} = \frac{۲-۳}{-۱-۱} = \frac{-۱}{-۲} = \frac{۱}{۲}$

$m_{AC} = \frac{-۵-۳}{۵-۱} = \frac{-۸}{۴} = -۲$

تذکر: شیب دو خط موازی با هم برابر و شیب دو خط عمود بر هم قرینه و معکوس یکدیگرند.



$m_1 = m_2$



$m_1 \times m_2 = -1$

مثال: وضعیت خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$d_1: y = 4x - 1$ $\quad d_2: 8y + 2x = 3$ $\quad d_3: 12x - 3y + 1 = 0$

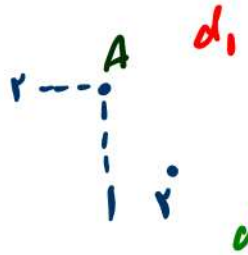
نکته: ضریب x در صورت استاندار خط ($y = mx + h$) شیب خط است.

نکته: شیب خط $ax + by + c = 0$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

$m_1 = 4$ $\quad m_2 = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$ $\quad m_3 = -\frac{12}{-3} = 4$

$m_1 = m_3 \rightarrow d_1 \parallel d_3$, $m_1 \times m_2 = m_2 \times m_3 = -1 \rightarrow d_2 \perp d_1, d_3$

مثال: معادله خط d_1 عمود بر d_2 را از نقطه A بیابید.



$d_1 \perp d_2 \Rightarrow m_1 \times m_2 = -1$

$(2,0), (1,2) \rightarrow m_2 = \frac{2-0}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$

$m_1 = \frac{1}{2}$

$d_1: \quad y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$

نکته: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است و برعکس.

کاردرکلاس

نشان دهید نقطه $P(-12,11)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه $A(0,-3)$ و $B(6,15)$ قرار دارد.



کافی است ثابت کنیم $AP=PB$.

$$AP=\sqrt{(-12-0)^2+(11+3)^2}=\sqrt{144+196}=\sqrt{340}$$

$$BP=\sqrt{(-12-6)^2+(11-15)^2}=\sqrt{324+16}=\sqrt{340}$$

$\rightarrow AP=BP$

۲) مختصات نقطه وسط یک پاره خط:

اگر M وسط پاره خط AB روی خط طول ها باشد:



$$AM=MB \Rightarrow x_M-x_A=x_B-x_M \Rightarrow 2x_M=x_A+x_B \xrightarrow{\div 2} x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$$

به همین ترتیب اگر M وسط پاره خط AB روی خط عرض ها باشد: $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$

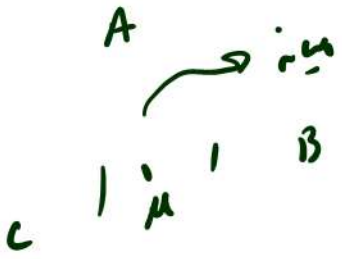
و در حالت کلی اگر $A(x_A,y_A)$ ، $B(x_B,y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند با

تصویر کردن این نقاط روی محور ها و خط ها به فرمول شماره (۲) می رسیم .

فرمول شماره (۲) : مختصات نقطه M وسط پاره خط AB :

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

مثال : اگر $A(1,9)$, $B(3,1)$, $C(7,11)$ سه رأس یک مثلث باشند ، معادله میانه AM را به دست آورید .



$$M=\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{3+7}{2}, \frac{1+11}{2}\right)=(5,6)$$

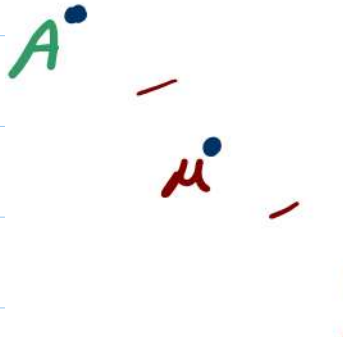
$$M,A \longrightarrow m=\text{شیب}=\frac{9-6}{1-5}=\frac{3}{-4}$$

$$y-9=-\frac{3}{4}(x-1)$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+9$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{39}{4}$$

نکته: قرینه نقطه $A(x_A, y_A)$ نسبت به نقطه $M(x_M, y_M)$:



اگر A' را نقطه مورد نظر بگیریم. چون M وسط AA' واقع می‌شود پس خواهیم داشت :

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \rightarrow 2x_M = x_A + x_{A'} \rightarrow x_{A'} = 2x_M - x_A$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \rightarrow 2y_M = y_A + y_{A'} \rightarrow y_{A'} = 2y_M - y_A$$

مثال: قرینه نقطه $A(1,2)$ را نسبت به نقطه $M(-1,4)$ بیابید.

A'

$$x_{A'} = 2 \times (-1) - 1 = -3$$

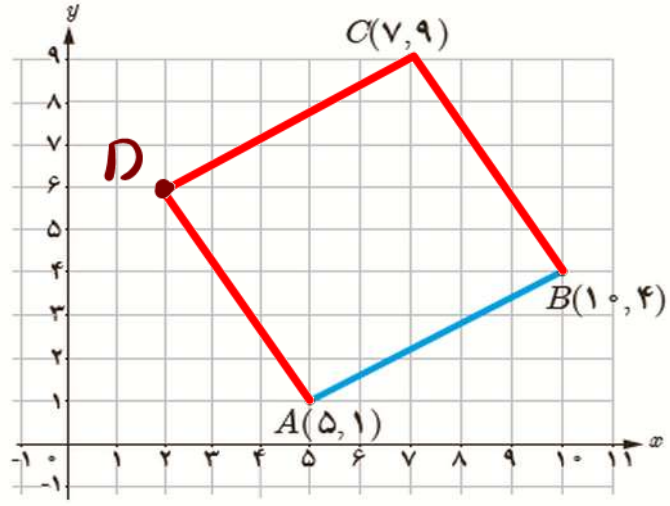
$$y_{A'} = 2 \times 4 - 2 = 6$$

$$A'(-3,6)$$

نکته : در هر چهارضلعی که قطرها همدیگر را نصف می‌کنند (مانند مربع، مستطیل، لوزی و متوازی الاضلاع) مجموع طول‌ها و مجموع عرض‌های دو رأس روبه‌رو با هم برابرند.

(اثبات جزو این تمرین)

مثال : مربع $ABCD$ را با رأس‌های : $A(5,1)$ ، $B(10,4)$ ، $C(7,9)$ در نظر بگیرید. مختصات رأس D را بیابید.



$$x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow 5+7 = 10+x_D \rightarrow x_D = 2$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow 1+9 = 4+y_D \rightarrow y_D = 6$$

$$D(2,6)$$

مثال : معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خطی را بنویسید که دو نقطهٔ $A(-۲,۱)$ و $B(۳,۴)$ را به هم وصل کرده است.

روش اول : صفحه ۳۱ کتاب حسابان ۱

روش دوم :



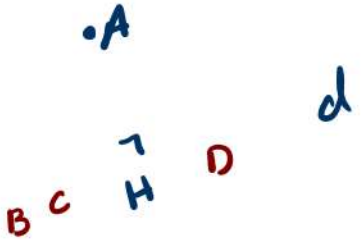
$$M=\left(\frac{-۲+۳}{۲},\frac{۱+۴}{۲}\right)=\left(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲}\right) \qquad m_{AB}=\frac{۴-۱}{۳+۲}=\frac{۳}{۵} \xrightarrow[\text{ضرب‌منفی}]{} m=-\frac{۵}{۳}$$

$$y-\frac{۵}{۲}=-\frac{۵}{۳}\left(x-\frac{۱}{۲}\right) \xrightarrow{\times ۶} ۶y-۱۵=-۱۰x+۵ \rightarrow ۶y+۱۰x=۲۰$$

$$\div ۲ \rightarrow \quad ۳y+۵x=۱۰$$

۳) فاصله نقطه از خط :

می‌دانیم فاصله یک نقطه از یک خط، کوتاه‌ترین فاصله یعنی فاصله عمودی در نظر می‌گیریم.



فرمول شماره ۳ : (بدون اثبات می‌پذیریم)

فاصله نقطه $A(x_A,y_A)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر :

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

کاردرکلاس

۱ اگر نقطهٔ $A(۲,۳)$ رأس یک مربع و معادلهٔ یک ضلع مربع $۳x-۴y=۹$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

A.

B. $۳x-۴y=۹$

$A(۲,۳) \xrightarrow{\text{در خط}}$ $۳\times۲-۴\times۳=۹$ روی خط قرار ندارد

$۶-۱۲=-۶\neq ۹$

صورت کلی خط: $۳x-۴y-۹=۰$

$$AB=\frac{|۳\times۲-۴\times۳-۹|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$$\Rightarrow S=۳\times۳=۹$$

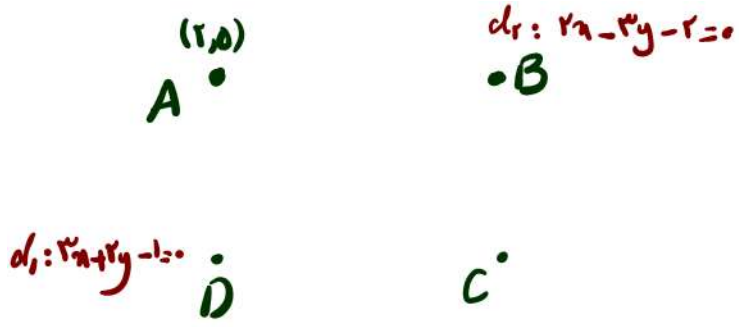
۲ دو خط $۳x+۲y=۱$ و $۲x-۳y=۲$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل‌اند و نقطهٔ $A(۲,۵)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

$d_۱: ۳x+۲y=۱ \rightarrow m=-\frac{۳}{۲}$ ، $d_۲: ۲x-۳y=۲ \rightarrow m=-\frac{۲}{-۳}=\frac{۲}{۳}$

$d_۱ \perp d_۲ \rightarrow$ $d_۱$ و $d_۲$ در وضع مجاور

$(۲,۵) \xrightarrow{d_۱}$ $۳\times۲+۲\times۵\neq ۱$ ، $(۲,۵) \xrightarrow{d_۲}$ $۲\times۲-۳\times۵\neq ۲$

$(۲,۵)$ روی اضلاع قرار ندارد پس A راس مستطیل است که مجاور در وضع قرار دارد.



پس داریم :

$$d_1 \text{ تا } A \text{ مربع} = AD = \frac{|3\times 2+2\times 5-1|}{\sqrt{9+4}} = \frac{15}{\sqrt{13}}$$

$$d_2 \text{ تا } A \text{ مربع} = AB = \frac{|2\times 2-3\times 5-2|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

$$S = \frac{15}{\sqrt{13}} \times \frac{13}{\sqrt{13}} = 15 \times \frac{13}{13} = 15$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

حل تمرین: صفحات ۳۵ و ۳۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تمرین

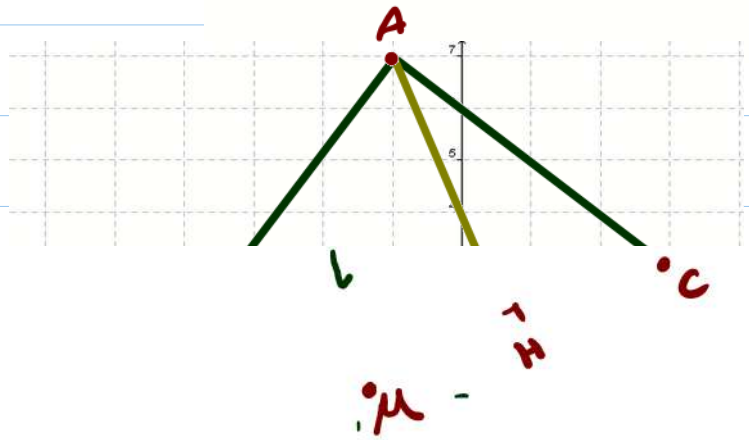
۱ مثلث ABC به رأس‌های $A(-۱,۷)$ و $B(-۶,-۲)$ و $C(۳,۳)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمودمنصف ضلع BC را به‌دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟



ب) $AB=\sqrt{(-۶+۱)^۲+(-۲-۷)^۲}=\sqrt{۲۵+۸۱}=\sqrt{۱۲۶}$

$BC=\sqrt{(۳+۶)^۲+(۳+۲)^۲}=\sqrt{۸۱+۲۵}=\sqrt{۱۲۶}$

$AB=BC$ پس مثلث متساوی‌الساقین است

پ) $M_{BC}=\left(\frac{-۶+۳}{۲},\frac{-۲+۳}{۲}\right)=\left(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$ وسط BC

$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۳+۲}{۳+۶}=\frac{۵}{۹}$ شیب BC

عمودمنصف BC بر BC عمود است پس $m_l=-\frac{۹}{۵}$.

با داشتن m_2 و نقطه M معادله را می‌نویسیم :

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{9}{5}\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\times 10} 10\left(y-\frac{1}{2}\right)=10\times\left(-\frac{9}{5}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 10y-5=-18x-27 \Rightarrow 18x+10y+22=0$$

$$\xrightarrow{\div 2} 9x+5y+11=0$$

معادله عمود منصف BC

ت) BC معادله : $m_{BC}=\frac{5}{9}$, $C(3,2)$

$$y-2=\frac{5}{9}(x-3) \xrightarrow{\times 9} 9y-18=5x-15$$

$$BC : -5x+9y-12=0 \quad , \quad A(-1,7)$$

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-5\times(-1)+9\times 7-12|}{\sqrt{(-5)^2+9^2}}$$

$$=\frac{|5+63-12|}{\sqrt{25+81}}=\frac{56}{\sqrt{106}}$$

۲ $A(۰,۶)$ و $B(۸,-۸)$ نقاط دوسر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به‌دست آورید.

وسط AB مرکز دایره

$$O=\left(\frac{۰+۸}{۲},\frac{۶-۸}{۲}\right)=(۴,-۱)$$

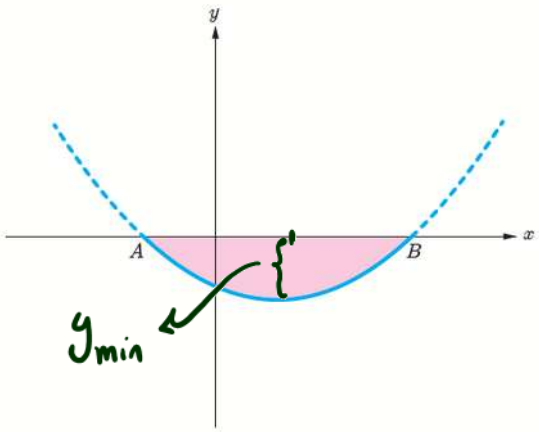
$$OA=R=\sqrt{(۰-۴)^۲+(۶+۱)^۲}=\sqrt{۱۶+۴۹}=\sqrt{۶۵}$$

۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۸x-۲۰$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.

الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به‌دست آورید.

ب) اگر x برحسب سانتی‌متر باشد طول AB را به‌دست آورید.

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y برحسب میلی‌متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟



الف) صفرهای سهمی: $x^۲-۸x-۲۰=۰ \rightarrow (x-۱۰)(x+۲)=۰ \begin{cases} x=۱۰ \\ x=-۲ \end{cases}$

$\Rightarrow x_A=-۲ \quad , \quad x_B=۱۰$

ب) $|AB|=|۱۰+۲|=۱۲\,cm$

پ) $x_{min}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۸}{۲}=۴ \rightarrow y_{min}=۴^۲-۸\times۴-۲۰=۱۶-۳۲-۲۰=-۳۶$

ضخامت عدسی $=۳۶\,mm$

۴ ثابت کنید فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می‌باشد.

$ax+by+c=0$

$ax+by+c'=0$

A

H

روش اول :

$A \rightsquigarrow x=0 \rightsquigarrow ax_0+by+c=0 \rightarrow by=-c \rightarrow y=-\frac{c}{b}$

$A(0,-\frac{c}{b})$

$$AH=\frac{|ax_0+bx(-\frac{c}{b})+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$|-x|=|x| \Longrightarrow AH=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

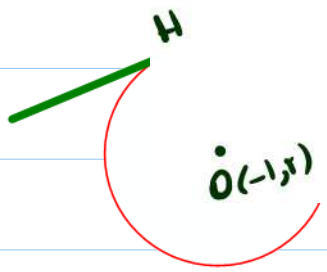
روش دوم :

$A(x_1,y_1) \xrightarrow{\text{از خط}} ax_1+by_1+c=0 \rightarrow ax_1+by_1=-c$

$$AH=\frac{|\overbrace{ax_1+by_1}^{-c}+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۵ خط $۴x + ۳y = ۵$ بر دایرهٔ C به مرکز $O(-۱,۲)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

$۴x+۳y-۵=۰$



قضیه: شعاع بر خط مماس در نقطه تماس عمود است.

$$OH = R = \frac{|۴\times(-۱)+۳\times۲-۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}} = \frac{|-۴+۶-۵|}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۳}{۵}$$

OH = R = فاصله نقطه O تا خط مماس

$m=\frac{۱}{۲}$ ∨ $m=-۲$

(-۱۰,۰) ، (۱۰,۰)

الف) $R = ۱۰ = OS = \sqrt{(x-۰)^۲+(۸-۰)^۲} = \sqrt{x^۲+۶۴}$

$۱۰ = \sqrt{x^۲+۶۴}$ (توان ۲) $\quad ۱۰۰ = x^۲+۶۴ \rightarrow x^۲ = ۳۶ \xrightarrow{x>۰} x = ۶$

ب) $S(۶,۸)$ ، $P(-۱۰,۰)$ ، $Q(۱۰,۰)$

$$m_{PS} = \frac{۸-۰}{۶+۱۰} = \frac{۸}{۱۶} = \frac{۱}{۲} \quad ، \quad m_{SQ} = \frac{۰-۸}{۱۰-۶} = \frac{-۸}{۴} = -۲$$

ب) $m_{PS} \times m_{SQ} = \frac{1}{2} \times (-2) = -1 \Rightarrow$ پس PS بر SQ عمود است.

۷ اگر فاصله نقطه $A(1,2)$ از خط $ax+4y=1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

$ax+4y-1=0$

$$AH = \frac{|a\times 1 + 4\times 2 - 1|}{\sqrt{a^2+16}} = 2 \Rightarrow \frac{|a+7|}{\sqrt{a^2+16}} = 2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{a^2+16} = |a+7| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4(a^2+16) = a^2+14a+49$$

$$\Rightarrow 4a^2+64-a^2-14a-49=0 \Rightarrow 3a^2-14a+15=0$$

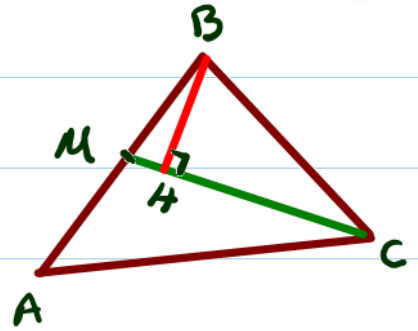
$$\Delta = 196-(4\times 3\times 15) = 196-180 = 16 \rightarrow a = \frac{14\pm 4}{6}$$

$$a = \begin{cases} \frac{14+4}{6} = 3 & \text{قبول} \\ \frac{14-4}{6} = \frac{5}{3} & \text{قبول} \end{cases}$$

۸ سه رأس مثلث ABC ، $A(-11,-13)$، $B(-3,3)$، $C(3,1)$ می‌باشند.

الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به‌دست آورید.

ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.



الف) ابتدا معادله MC را پیدا می‌کنیم. سپس فاصله

نقطه B تا MC را پیدا می‌کنیم.

$$M\left(\frac{-11-3}{2}, \frac{-13+3}{2}\right) \Rightarrow M(-7, 0)$$

$$m_{MC} = \frac{y_C - y_M}{x_C - x_M} = \frac{1-\omega}{3+7} = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}$$

معادله عمودمنصف MC : $y - 1 = -\frac{2}{5}(x-3) \xrightarrow{\times 5} 5y - 5 = -2x + 6$

$$\Rightarrow 2x + 5y - 11 = 0$$

$$BH = \frac{|2\times(-3) + 5\times 3 - 11|}{\sqrt{4+25}} = \frac{|-6+15-11|}{\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$



$ABCD$:

$$\begin{cases} x_B + x_D = x_A + x_C \\ y_B + y_D = y_A + y_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 + x_D = -11 + 3 \rightarrow x_D = -5 \\ 3 + y_D = -13 + 1 \rightarrow y_D = -15 \end{cases}$$

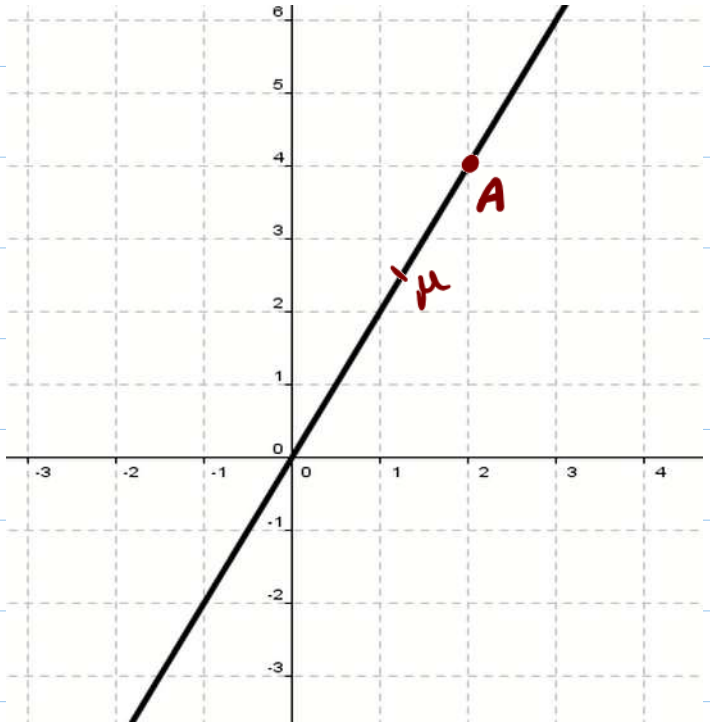
$$D(-5, -15)$$

$ABCD'$:

$$\begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_{D'} \\ y_A + y_B = y_C + y_{D'} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -11 - 3 = 3 + x_{D'} \rightarrow x_{D'} = -17 \\ -13 + 3 = 1 + y_{D'} \rightarrow y_{D'} = -11 \end{cases}$$

$$D'(-17, -11)$$

۹ نقطه‌ای روی خط $y=۲x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(۲,۴)$ برابر ۵ باشد.



$OM+MA=۵$

فرض کنیم مختصات M به صورت $M(a,۲a)$ باشد. ($y=۲x$)

$$OM=\sqrt{a^۲+(۲a)^۲}=\sqrt{a^۲+۴a^۲}=\sqrt{۵a^۲}$$

$$MA=\sqrt{(a-۲)^۲+(۲a-۴)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \sqrt{۵a^۲}+\sqrt{(a-۲)^۲+(۲a-۴)^۲}=۵$$

$$(۲(a-۲))^۲$$

$$\sqrt{۵a^۲}+\sqrt{(a-۲)^۲+۴(a-۲)^۲}=۵$$

$$\sqrt{۵a^۲}+\sqrt{۵(a-۲)^۲}=۵ \Rightarrow \sqrt{۵}|a|+\sqrt{۵}|a-۲|=۵$$

$$\div\sqrt{۵} \Rightarrow |a|+|a-۲|=\frac{۵}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۵\sqrt{۵}}{۵}=\sqrt{۵}$$

$|a|+|a-2|=\sqrt{5}$

		۰		۲
a	−	۰	+	+
$a-2$	−	−	۰	+

$a<0$: $-a-a+2=\sqrt{5} \rightarrow -2a=\sqrt{5}-2 \rightarrow a=\frac{2-\sqrt{5}}{2}$ قبول

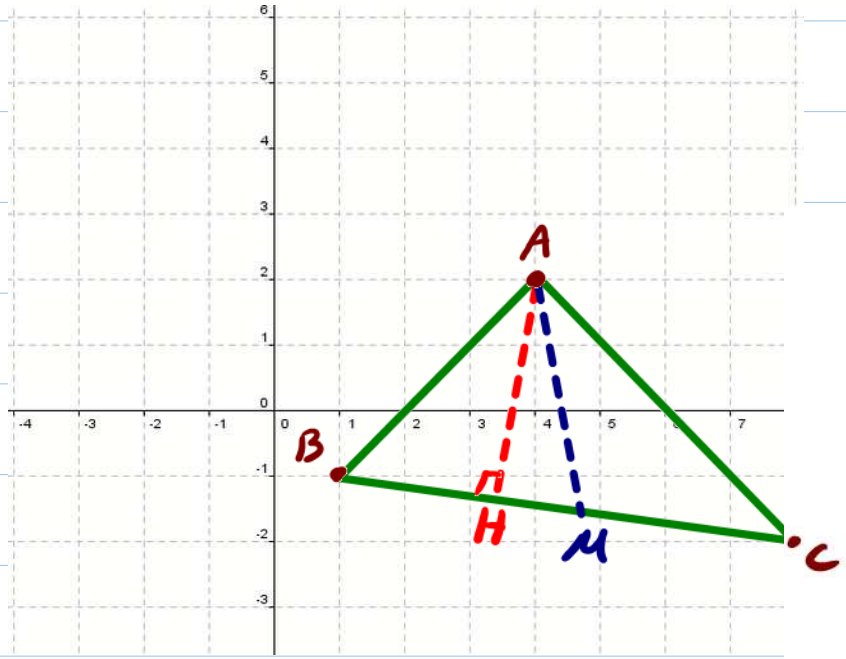
$0<a<2$: $2=\sqrt{5}$ غیرممکن

$a>2$: $a+a-2=\sqrt{5} \rightarrow 2a=\sqrt{5}+2 \rightarrow a=\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

$a=1+\frac{\sqrt{5}}{2}$ قبول

$M\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2}, 2-\sqrt{5}\right)$, $M'\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}\right)$

۱۰ نقاط $A(۴,۲)$ و $B(۱,-۱)$ و $C(۸,-۲)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به‌دست آورید.



$\hat{AHM}$ ← قضیه فیثاغورس

$AM^2=AH^2+MH^2$ → ?

AM^2 → طول میانه

AH^2 → فاصله A تا خط BC

(۱.)

AH : معادله خط BC را به دست آوردیم
سپس فاصله A را تا BC بدست آوردیم.

$$m_{BC} = \frac{-2+1}{8-1} = \frac{-1}{7} \xrightarrow{\text{با نقطه } B} y+1 = -\frac{1}{7}(x-1)$$

$$\xrightarrow{\times 7} 7y+7 = -x+1 \longrightarrow x+7y+6=0 \quad , A(4,2)$$

$$AH = \frac{|1\times 4+7\times 2+6|}{\sqrt{1+49}} = \frac{24}{\sqrt{50}}$$

AM : M و A فاصله وسط BC را بدست آوردیم
را حساب می‌کنیم.

$$M = \left(\frac{1+8}{2}, \frac{-1-2}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad \text{وسط } BC$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{9}{2}-4\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$AM^2 = AH^2 + MH^2 \longrightarrow MH^2 = AM^2 - AH^2$$

$$MH^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{24}{\sqrt{50}}\right)^2 = \frac{25}{2} - \frac{576}{50} = \frac{625-576}{50} = \frac{49}{50}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

جلسه اول: صفحات ۳۸ تا۴۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری مفهوم تابع :

هر تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. A را دامنه، B را هم‌دامنه این تابع می‌نامیم.



هم‌دامنه $= B = \{0, 4, -3, 5\}$

برد $= R = \{0, 4, -3\}$

مجموعه عضوهایی از B را که به عضوی از A نسبت داده شده‌اند برد این تابع می‌نامیم. بنابراین برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه تابع است.

مثال : برای تابع $\begin{cases} f:[-1,2) \to \mathbb{R} \\ f(x) = -3x+2 \end{cases}$ (دامنه، هم‌دامنه) کدام‌یک از گزینه‌های زیر قابل قبول است؟

- $R = (-4,5]$

الف) ✗ $\begin{cases} f:[-1,2) \to (-2,5) \\ f(x) = -3x+2 \end{cases}$ $(-4,5] \not\subset (-2,5)$

ب) ✗ $\begin{cases} f:[-1,2) \to [1,+\infty) \\ f(x) = -3x+2 \end{cases}$ $(-4,5] \not\subset [1,+\infty)$

ج) ✓ $\begin{cases} f:[-1,2) \to (-4,5] \\ f(x) = -3x+2 \end{cases}$



مثال :

برای تابع $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to[0,\frac{1}{9}] \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ کدام‌یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟

(ت) $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

(پ) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to[0,\frac{1}{9}] \\ f(x)=x \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to[0,\infty) \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

(الف) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

الف) قابل قبول نیست زیرا دامنه تغییر کرده است .

ب) قابل قبول است زیرا $[0,\frac{1}{9}] \subseteq [0,\frac{1}{3}]$.

پ) قابل قبول نیست زیرا ضابطه تابع تغییر کرده است .

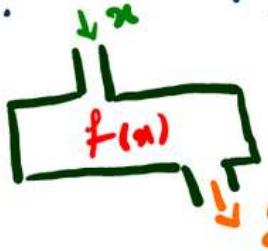
ت) قابل قبول است زیرا $[0,\frac{1}{9}] \subseteq \mathbb{R}$.

تابع به عنوان ماشین

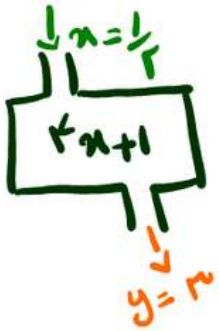
می‌توان تابع را ماشینی در نظر گرفت که به ازای هر ورودی یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه تابع داده می‌شوند و خروجی‌ها در برد هستند . در ضمن به ازای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد . البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسان داشته باشند

اگر x عضوی از دامنه تابع f و y خروجی این تابع به ازای x باشد، می‌نویسیم $y=f(x)$

به عملیاتی که ماشین تابع روی ورودی (مقدار) انجام می‌دهد تا خروجی را تحویل دهد، ضابطه تابع می‌گویند.



مثال: اگر خروجی ماشین تابع $f(x)=4x+1$ عدد 3 باشد، ورودی آن چه عددی بوده است؟



$$3=4x+1 \Rightarrow 3-1=4x$$

$$\Rightarrow 2=4x \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

جمع‌بندی:

- برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه، هم دامنه و ضابطه تابع داده شده باشد

- اگر هم دامنه داده نشده باشد و فقط ضابطه و دامنه را داشته باشیم، می‌توانیم هم دامنه را هر مجموعه‌ای که شامل برد باشد در نظر بگیریم.

- اگر دامنه داده نشده باشد، بزرگترین مجموعه‌ای که اعضای آن را بتوانیم به جای x قرار دهیم و خروجی y تحویل بگیریم، دامنه در نظر می‌گیریم.

تساوی دو تابع :

دو تابع f و g با هم برابرند هرگاه :

الف) $D_f = D_g$

ب) برای هر x از دامنه یکسان داشته باشیم $f(x) = g(x)$.

به عبارت دیگر برای هر x دوری یکسان ، خروجی ها هم یکی باشد .

مثال : در هر قسمت تساوی دو تابع را بررسی کنید .

الف) $f = \{(-2,7), (3,7), (4,0)\}$

$g = \{(-2,7), (4,0), (3,6)\}$

$D_f = D_g = \{-2, 3, 4\}$ ولی $f(3) \neq g(3)$ $\rightarrow f \neq g$

ب) $f(x) = 4x - 1$, $g(x) = \frac{8x-2}{2} = \frac{2(4x-1)}{2} = 4x - 1$

$f = g$

پ) $\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x \end{cases}$ $\begin{cases} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \end{cases}$

زیرا ضابطه‌ها یکسان نشد : $f \neq g$

ب)
$$\begin{cases} f: [0,2] \to \mathbb{R} \\ f(x) = 4x^2 - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} g: (0,2) \to \mathbb{R} \\ g(x) = 4x^2 - 1 \end{cases}$$

$D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$: دامنه‌ها برابر نیست

پ)
$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to [0,+\infty) \\ f(x) = x+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2} = \frac{x^2(x+1)}{x^2} = x+1 \end{cases}$$

$$f = g$$

ت)
$$f(x) = \frac{x}{x} \qquad g(x) = 1$$
$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \qquad D_g = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

جلسه دوم : حل تمرین صفحه۴۲و۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

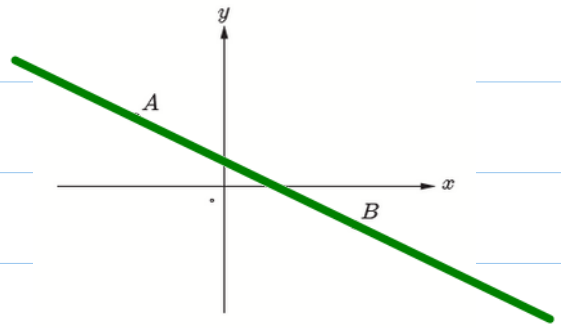
معاونت آموزش متوسطه

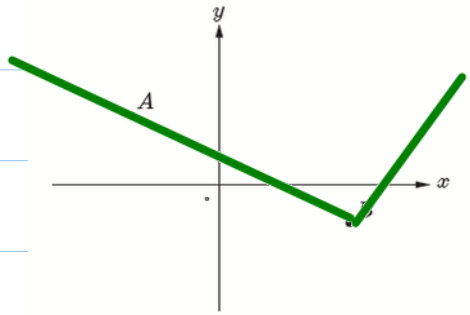
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

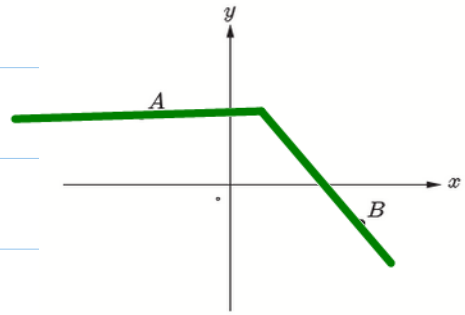
گروه ریاضی استان همدان

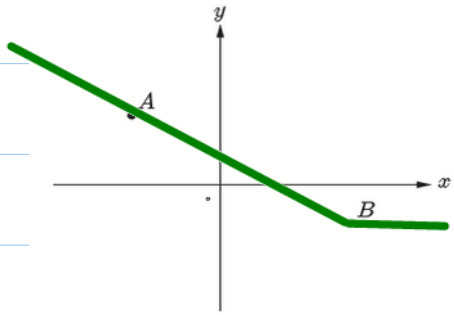
۱ در صفحه مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟

بی شمار تابع









۲ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب) برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم‌دامنهٔ تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است.

ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن بازهٔ $[0, 3]$ است.

الف) نادرست مثال نقض

$f = \{(1,2),(3,5)\}$ $D_f = D_g = \{1,3\}$

$g = \{(1,5),(3,2)\}$ $R_f = R_g = \{2,5\}$

$f(1) \neq g(1),\ f(2) \neq g(2) \Rightarrow f \neq g$

ب) درست است. هم دامنه تابع هر مجموعه‌ای شامل برد یا خود برد است.

پ) نادرست. برد زیر مجموعه هم دامنه است.

ت) درست مانند: $\begin{cases} f:[0,2] \to \mathbb{R} \\ y = 4x-1 \end{cases}$ $\begin{cases} f:[0,2] \to \mathbb{R} \\ y = 2\sqrt{x} \end{cases}$

۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟

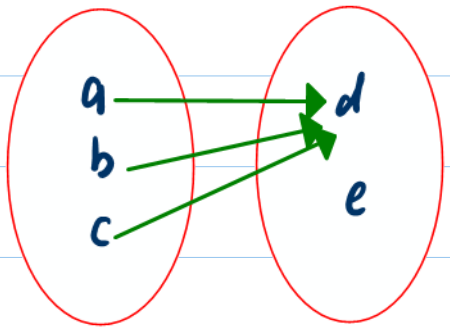
بی‌شمار تابع وجود دارد. $\begin{cases} f:(0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ y = x^2 \end{cases}$

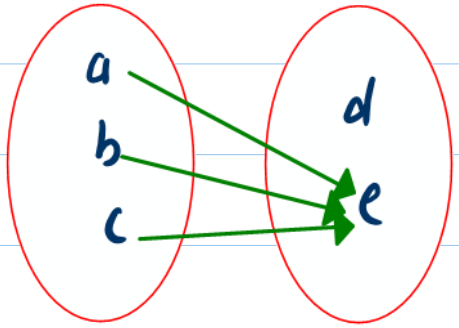
۴ همه تابع‌های از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{d,e\}$ را بنویسید(از نمودار پیکانی کمک بگیرید).

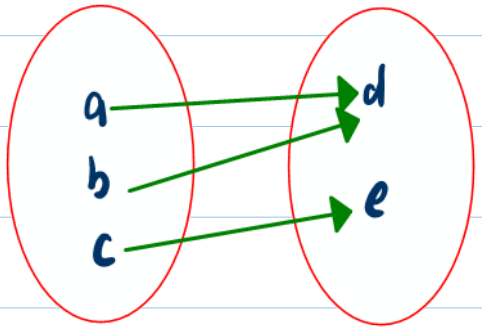
نکته: تعداد توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر n^m است.

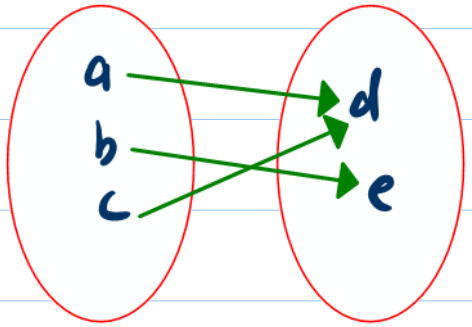
اصل ضرب : $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2} = 2^3 = 8$

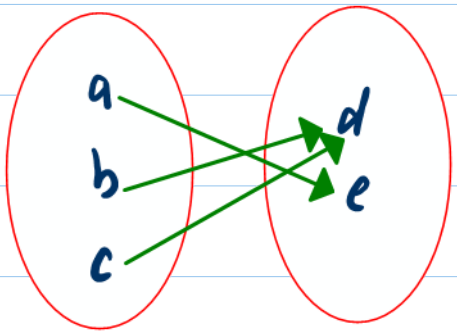
a b c

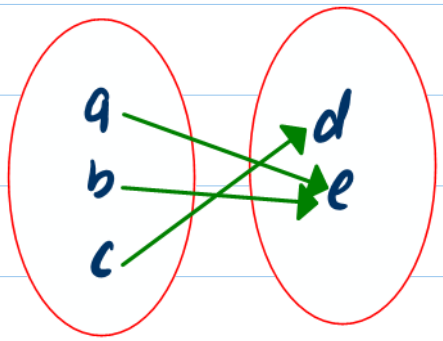

a
b
c
d
e

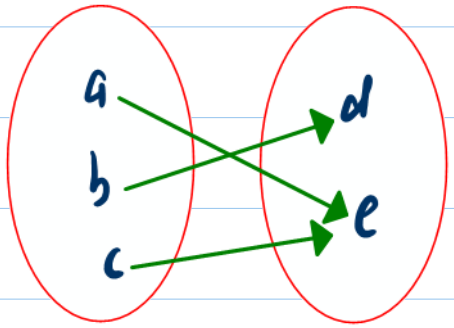

a
b
c
d
e

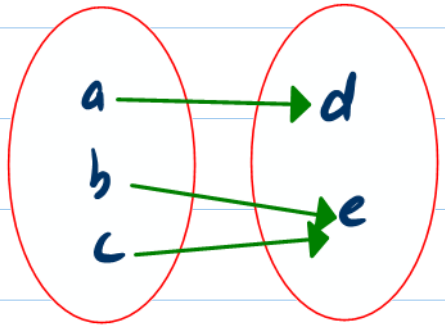

a
b
c
d
e


a
b
c
d
e


a
b
c
d
e


a
b
c
d
e


a
b
c
d
e


a
b
c
d
e

۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

✓ $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \lvert x \rvert \end{cases}$	$\begin{cases} r: [0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ r(a) = 5a \end{cases}$
✓ $\begin{cases} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = 5x \end{cases}$	✓ $\begin{cases} s: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ s(a) = 5a \end{cases}$
✓ $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} t: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \\ t(x) = 5x \end{cases}$

$f = h$ $\quad$ $g = s$

۲ و ۲+ با هیچ کدام برابر نیستند.

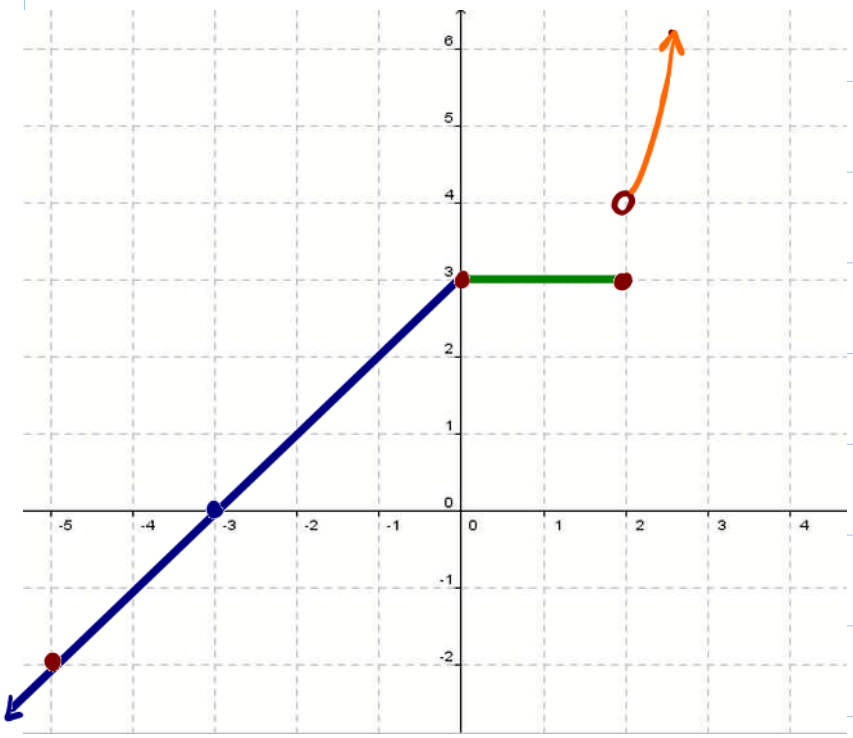
۶ تابع f در همهٔ شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(۲) = ۳$ و $f(-۵) = -۲$

ب) f در بازه $[۰, ۲]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول -۳ قطع می‌کند.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x+3 & x < 0 \end{cases}$$

۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ‌سال را برآورد کرد :

تابع خطی برای مردان $M(x) = ۲/۸۹x + ۷۰/۶۴$

تابع خطی برای زنان $F(x) = ۲/۷۵x + ۷۱/۴۸$

که در آنها x طول استخوان بازو برحسب سانتی‌متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی‌متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

الف) $M(۳۵) = ۲,۸۹ \times ۳۵ + ۷۰,۶۴ = ۱۰۱,۱۵ + ۷۰,۶۴ = ۱۷۱,۷۹ \text{ cm}$

ب) $۱۸۵ = ۲,۸۹x + ۷۰,۶۴ \Rightarrow ۱۸۵ - ۷۰,۶۴ = ۲,۸۹x$

$$x = \frac{۱۱۴,۳۶}{۲,۸۹} \approx ۳۹,۵۷ \text{ cm}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس دوم : انواع تابع

جلسه سوم : صفحات ۴۴ تا۴۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱) توابع گویا :

اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $q(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر نباشد

به تابع با ضابطه $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ و دامنه $D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid q(x)\neq 0\}$ تابع گویا می‌گوییم.

به عبارت دیگر دامنه توابع گویا = اعداد حقیقی همه‌ی ریشه‌های مخرج

یا

$D_f = \mathbb{R} - \{$ اعدادی که مخرج را صفر می‌کنند $\}$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{2x-1}{3x+3}$

$3x+3=0 \rightsquigarrow 3x=-3 \rightarrow x=-\frac{3}{3}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{3}\}$

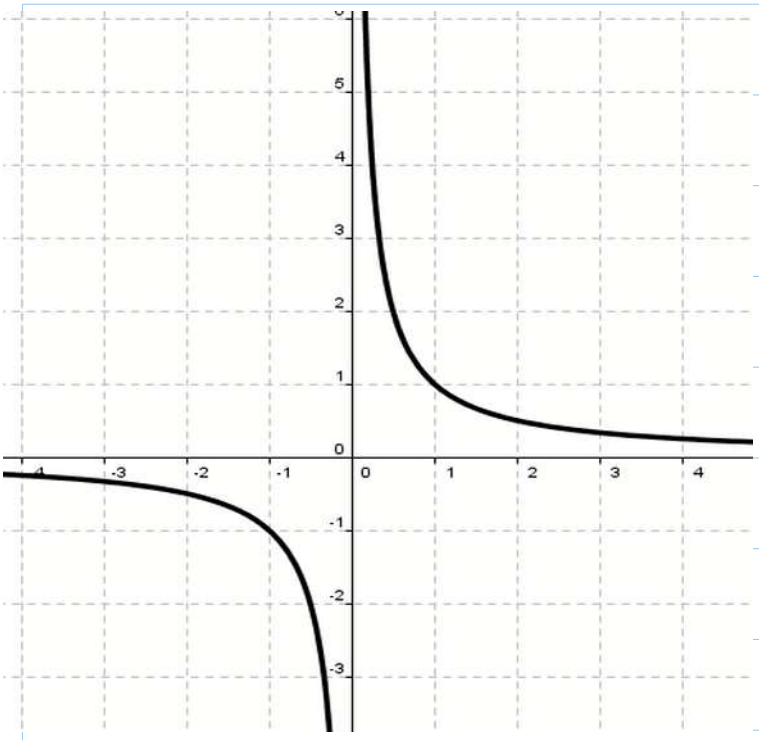
ب) $g(x)=\frac{4}{2x^2-3x+1}$

$2x^2-3x+1=0$

$2-3+1=0 \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \end{cases}$

$D_g = \mathbb{R}-\{1, \frac{1}{2}\}$

نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$



۲) تابع ریشه nام :

الف) اگر n عدد طبیعی و زوج باشد به تابعی که به هر عدد نامنفی، ریشه nام نامنفی آن را نسبت می دهد تابع ریشه nام می گوییم.

ب) اگر n عدد طبیعی و فرد و مخالف یک باشد، به تابعی که به هر عدد حقیقی ریشه nام آن را نسبت می دهد تابع ریشه nام می گوییم.

فرد n : $g(x)=\sqrt[n]{f(x)} \rightarrow D_g=D_f$

زوج n : $g(x)=\sqrt[n]{f(x)} \rightarrow D_g=\{x\in D_f \mid f(x)\geq 0\}$

به عبارت دیگر دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد همان دامنه تابع زیر رادیکال است و

برای یافتن دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر

قرار می‌دهیم و نامعادله حاصل را حل می‌کنیم.

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{1-2x}$ $\quad 1-2x\geq 0 \rightarrow -2x\geq -1 \xrightarrow{\div(-2)} x\leq \frac{1}{2}$

$$D_f=(-\infty,\frac{1}{2}]$$

ب) $g(x)=\sqrt[3]{\frac{2x}{x-4}}$ $\quad D_g=D_{\frac{2x}{x-4}}$ ← چون $D=\mathbb{R}-\{4\}$

$$D_g=\mathbb{R}-\{4\}$$

ج) $h(x)=\sqrt{\frac{1-x}{2x+4}}$

$\frac{1-x}{2x+4}\geq 0$

$1-x=0 \rightarrow x=1$

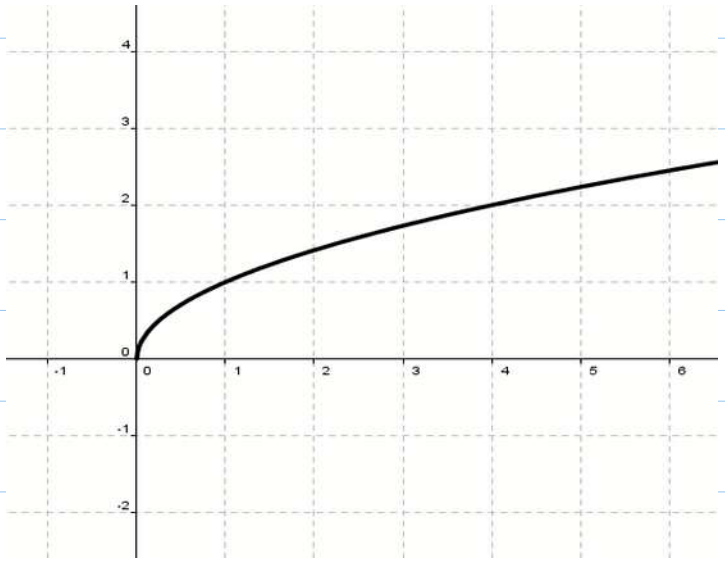
$2x+4=0 \rightarrow x=-2$

x		-2		1	
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$	
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{1-x}{2x+4}$	$-$	ت ن	$+$	0	$-$

$$D_h=(-2,1]$$

نمودار توابع رادیکالی (ریشه دوم مثبت)

نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به صورت زیر است :



در ریاضی ۱ با قوانین انتقال برای رسم نمودارها آشنا شدید. این قوانین را برای تابع رادیکالی به کار می بریم :

الف) $y=\sqrt{x}+k$: انتقال عمودی

- $k>0$: نمودار k واحد سمت بالا
- $k<0$: نمودار k واحد سمت پائین

ب) $y=\sqrt{x+k}$: انتقال افقی

- $k>0$: نمودار k واحد سمت چپ
- $k<0$: نمودار k واحد سمت راست

ج) $y=-\sqrt{x}$: نمودار نسبت به محور x ها قرینه می شود. انعکاس

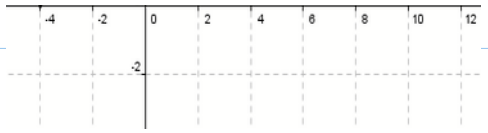
د) $y=\sqrt{-x}$: نمودار نسبت به محور y ها قرینه می شود. انعکاس

نکته: برای رسم توابعی به صورت $y = a\sqrt{bx+c} + d$ از دامنه و نقطه‌یابی کمک می‌گیریم (در حساب ۲ با ذکر قاعده‌های کلی این نوع تبدیل‌ها تبدیل‌ها بیشتر بررسی می‌شود در حساب ۱ به ذکر همین نکته اکتفا می‌کنیم.)

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

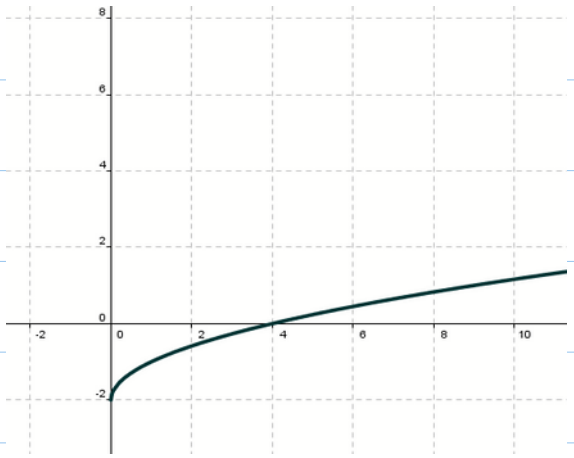
الف) $y = \sqrt{x+4}$

انتقال افقی ۴ واحد به چپ



ب) $y = \sqrt{x} - 2$

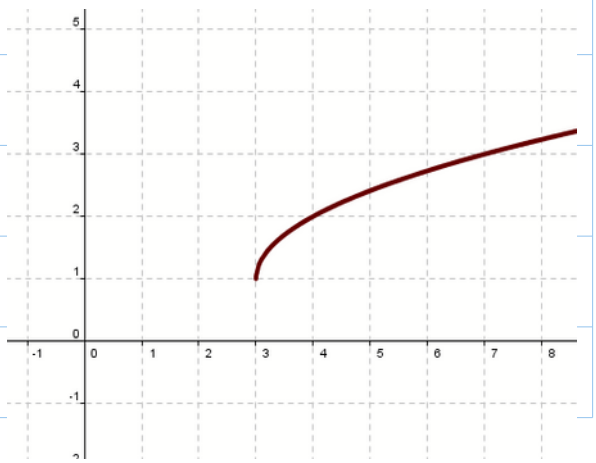
انتقال عمودی ۲ واحد به پایین



پ) $y = 1 + \sqrt{x-3}$

انتقال عمودی ۱ واحد به بالا

انتقال افقی ۳ واحد به راست



ت) $y=-\sqrt{x}-\frac{1}{2}$

انتقال عمودی $\frac{1}{2}$ به یک پایین

$-\frac{1}{2}$ ←

ث) $y=\sqrt{-x+5}$

$D: -x+5\geq 0 \rightarrow -x\geq -5$

$\xrightarrow{\div(-1)} x\leq 5$

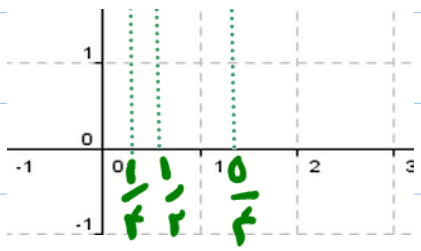
x	-4	1	4	5
y	3	2	1	0

مثال: نمودار تابع $y=\sqrt{4x-1}+2$ را رسم کنید.

$D: 4x-1\geq 0 \rightarrow 4x\geq 1$

$\rightarrow x\geq \frac{1}{4}$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$
y	2	3	4

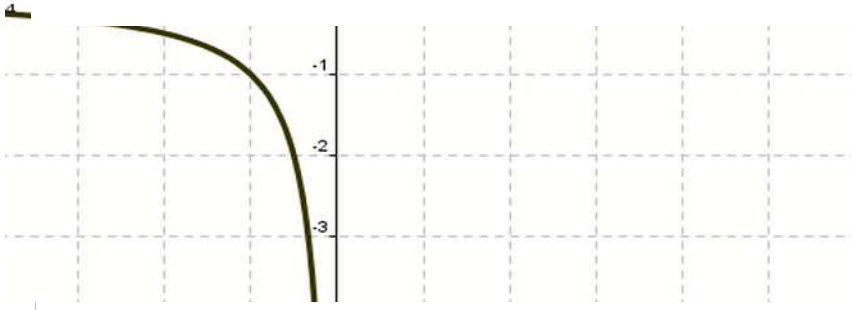


یادآوری: توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارند، توابع قطعه‌ای یا چندضابطه‌ای نامیده می‌شوند.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x<0\\ \sqrt{x-1}+2 & x\geq 1\end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

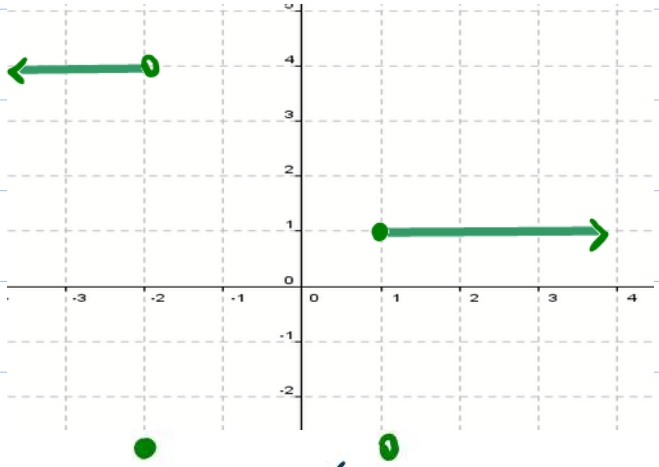
$D=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

$R=(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$



تذکر: اگر در توابع چندضابطه‌ای، همه ضابطه‌ها تابع ثابت باشد (یعنی نمودار هر خط افقی می‌شود.) آن را **تابع پله‌ای** می‌نامند.

مثال: نمودار تابع $g=\begin{cases}4 & x<-2\\ -3 & -2\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$ را رسم کنید.



قبل از اینکه آخرین نوع توابع خیلی توابع جزء صحیح را بگوئیم به نکته‌ای درباره تشخیص تابع بودن یا نبودن یک رابطه از روی ضابطه اشاره کنیم.

نکته: رابطه یا تابع

فرض کنید رابطه‌ای بین x و y به صورت یک تساوی داریم. در این صورت y تابعی از x است اگر و فقط اگر به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد که در تساوی داده شده صدق کند.

برای تشخیص تابع بودن یا نبودن یک رابطه سعی می‌کنیم y را برحسب x به دست آوریم و نشان دهیم که تابع هست یا خیر. روش دیگر استفاده از مثال نقض است.

مثال: کدام یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

الف) $y-\sqrt{y}=x-2$ $\quad x=2 \to y=1,\ y=0$ مثال نقض

تابع نیست

ب) $y^3-3y^2+3y=x$

$$+(-1)\downarrow \quad y^3-3y^2+3y-1=x-1 \to (y-1)^3=x-1 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} y-1=\sqrt[3]{x-1}$$

تابع هست $\quad y=\sqrt[3]{x-1}+1$

پ) $y^2+x=4$

$$y^2=4-x \xrightarrow{\sqrt{\ }} |y|=\sqrt{4-x} \to y=\pm\sqrt{4-x}$$

$x=1 \to y=\pm\sqrt{3}$ $\quad$ تابع نیست

ت) $|x|+|y|=1$

مثال نقض: $\quad x=0 \to |y|=1 \to y=\pm 1$ $\quad$ تابع نیست

ث) $y^2+4x^2=4xy$

$$y^2-4xy+4x^2=0 \to (y-2x)^2=0 \to y-2x=0$$

$y=2x$ تابع است

ج) $|x|+(y-1)^2=0$

جمع دو عبارت مثبت صفر شده است پس هر دو صفرند

$$|x|=0 \to x=0$$
$$(y-1)^2=0 \to y=1$$

این رابطه فقط شامل یک نقطه است پس تابع است $(0,1)$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس دوم : انواع تابع

جلسه چهارم : صفحات ۴۹ تا ۵۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

جزء صحیح

تعریف ۱) جزء صحیح هر عدد حقیقی بزرگترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچکتر یا با آن برابر باشد.

تعریف ۲) اگر عدد حقیقی x بین دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ باشد، جزء صحیح x را برابر k تعریف کرده و می‌نویسیم: $[x]=k$. جزء صحیح عدد صحیح با خودش برابر است.

تعریف ۳) برای هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

مثال:

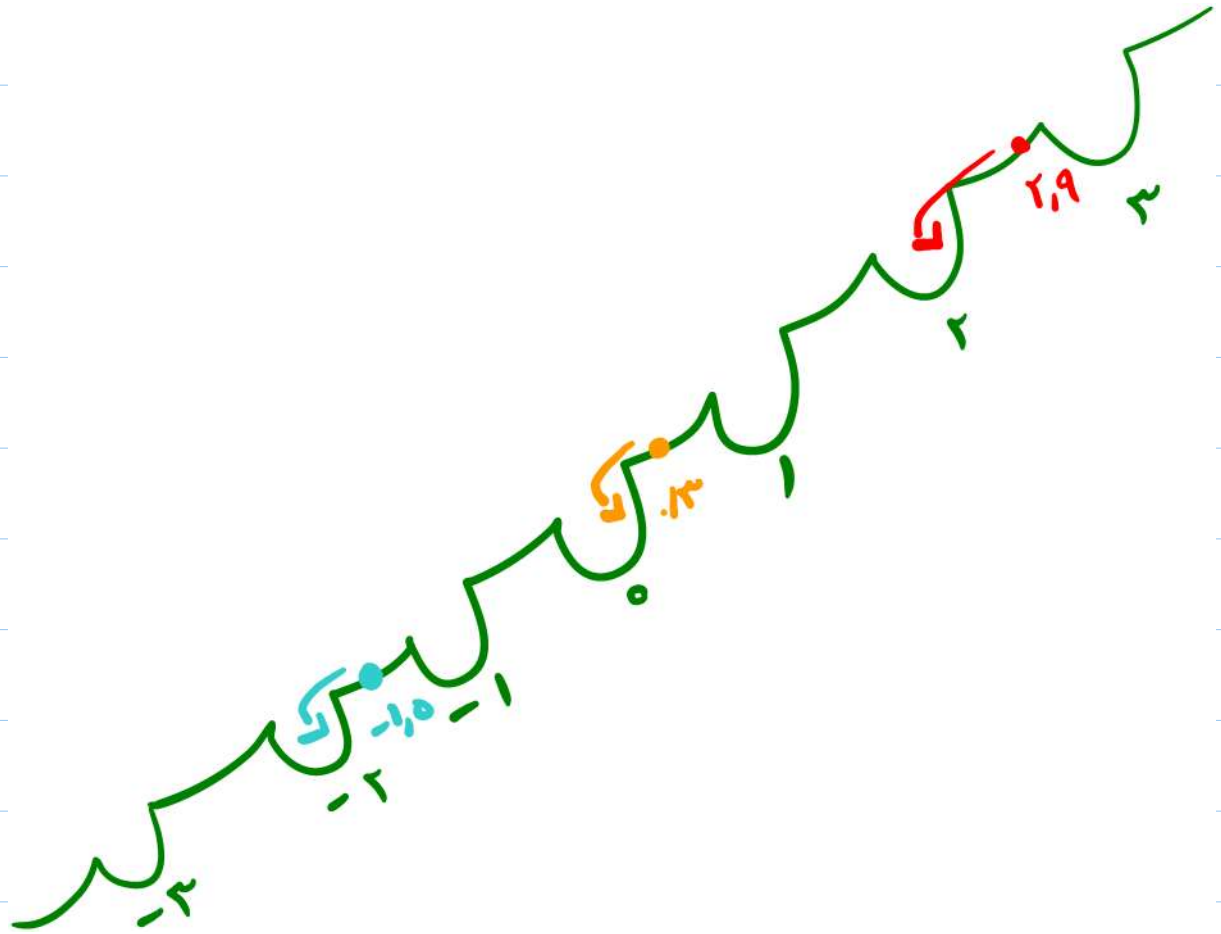
$[2,2] = 2$

$[-5] = -5$

$[-3,9] = -4$

نکته: برای یافتن جزء صحیح یک عدد حقیقی می‌توان از سطح شیب دار چاله دار زیر استفاده کنیم.

در این شکل اعداد صحیح چاله‌ها و اعداد غیر صحیح روی سطح شیب دار، بین چاله‌ها قرار می‌گیرند. با توجه به شیب این سطح، واضح است اگر توپی را در موقعیت یک عدد روی سطح قرار دهیم، توپ در این چاله می‌افتد. عدد صحیح مربوط به چاله همان جزء صحیح عدد است.



مثال: جزصحیح های زیر را بدست آورید.

الف) $\left[\frac{15}{4}\right] = [3{,}75] = 3$

ب) $[-1{,}6] = -2$

پ) $[\sqrt{2}] = 1$ ($\sqrt{2} \simeq 1{,}4$)

ت) $\left[\frac{1}{4}\right] = 0$

ث) $[-0{,}7] = -1$

ج) $-10 < x < -9 \rightarrow [x] = -10$

چ) $[\sqrt[3]{71}]$: $64 < 71 < 125 \rightarrow 4 < \sqrt[3]{71} < 5 \rightarrow [\sqrt[3]{71}] = 4$

برخی از ویژگی های جزءصحیح:

۱) اگر a عبارتی برحسب x باشد از اینکه $[a] = k$ می توان نتیجه گرفت:

$$k \leq a < k+1$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\left[\frac{1-4x}{3}\right]=-2$

$$-2 \le \frac{1-4x}{3} < -1 \xrightarrow{\times 3} -6 \le 1-4x < -3 \xrightarrow{-1} -7 \le -4x < -4$$

$$\xrightarrow{\div(-4)} \frac{7}{4} \ge x > 1 \quad \rightarrow \quad 1 < x \le \frac{7}{4}$$

ب) $\left[x^2+x\right]=-1$

$$-1 \le x^2+x < 0 \rightarrow \begin{cases} -1 \le x^2+x \rightarrow x^2+x+1 \ge 0 & (1) \\ x^2+x < 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $x^2+x+1=0 \rightarrow \Delta = 1-4\times 1\times 1 = -3 \rightarrow x^2+x+1 > 0 \rightsquigarrow x \in \mathbb{R}$

(2) $x^2+x=0 \rightarrow x(x+1)=0 \rightarrow x=0,-1$ $\quad x^2+x$: $+\ 0\ -\ -1\ +$ $\rightsquigarrow x \in (-1,0)$

(1) ∩ (2) $\Rightarrow -1 < x < 0$

۲) حاصل یک جزء صحیح همواره عددی صحیح است یعنی $[x] \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2[x]-7=0 \rightarrow 2[x]=7 \rightarrow [x]=\frac{7}{2}$

معادله جواب ندارد.

ب) $[x^2]-6=x$ $[x^2]$ عدد صحیح است. ۶ هم از آن کم شود حاصل عدد صحیح می‌شود. چون این عبارت با x برابر است پس x هم صحیح می‌شود.

می‌دانیم توان دوم یک عدد صحیح، عددی صحیح است پس $[x^2]=x^2$

$$x^2-6=x \rightarrow x^2-x-6=0 \rightarrow (x-3)(x+2)=0 \rightarrow x=3,-2$$

۳) اگر عدد صحیح k در درون جزء صحیح جمع یا تفریق شده باشد می‌توان آن را از جزء صحیح خارج کرد یعنی:

$$[x+k]=[x]+k$$

۴)
$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

مثال: اگر x صحیح نباشد، حاصل $[x^2-4]+[7-x^2]$ را به دست آورید.

$x=\frac{1}{3}\rightarrow x^2=\frac{1}{9}\notin\mathbb{Z}$

$x=\sqrt{5}\rightarrow x^2=5\in\mathbb{Z}$

$$[x^2]-7+4+[-x^2]=[x^2]+[-x^2]-3$$

$$[x^2]+[-x^2]=\begin{cases}0 & x^2\in\mathbb{Z}\\ -1 & x^2\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$[x^2]+[-x^2]-3=\begin{cases}-3 & x^2\in\mathbb{Z}\\ -4 & x^2\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

۱۳) تابع جزء صحیح :

به توابعی که متغیرش داخل جزء صحیح باشد ، تابع جزء صحیح می‌گوییم .

ساده‌ترین تابع جزء صحیح که به هر عدد جزء صحیحش را نسبت می‌دهد تابع

$y=[x]$ است .

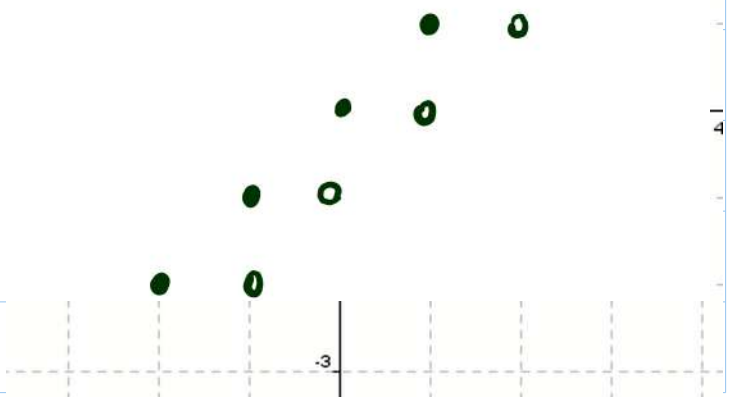
مثال : نمودار تابع $y=[x]$ را در بازه $(-2,2]$ رسم کنید .

ضابطه اول : $-2\leq x<-1 \Rightarrow y=[x]=-2$

ضابطه دوم : $-1\leq x<0 \rightarrow y=-1$

ضابطه سوم : $0\leq x<1 \rightarrow y=0$

ضابطه چهارم : $1\leq x<2 \rightarrow y=1$



رسم نمودار توابع به صورت $f(x)=[ax]+k$ در یک بازه

ابتدا طول پله‌ها را از رابطه $\frac{1}{|a|}$ می‌یابیم. سپس از ابتدای بازه داده شده پله‌ها را تشکیل داده و برای هر پله مقدار y را حساب می‌کنیم.

مثال: نمودار توابع زیر را در بازه داده شده رسم کنید.

الف) $f(x)=[2x]+1$ $\quad [-1,1]$

طول پله $=\frac{1}{2}$

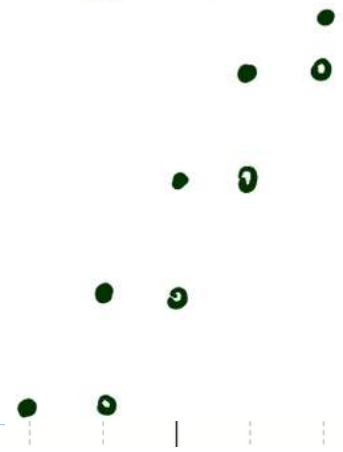
پله اول: $-1\le x<-\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} -2\le 2x<-1 \rightsquigarrow y=[2x]+1=-2+1=-1$

پله دوم: $-\frac{1}{2}\le x<0 \xrightarrow{\times 2} -1\le 2x<0 \rightsquigarrow y=-1+1=0$

پله سوم: $0\le x<\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 0\le 2x<1 \rightsquigarrow y=0+1=1$

پله چهارم: $\frac{1}{2}\le x<1 \xrightarrow{\times 2} 1\le 2x<2 \rightsquigarrow y=1+1=2$

$x=1 \rightarrow y=[2\times 1]+1=2+1=3$

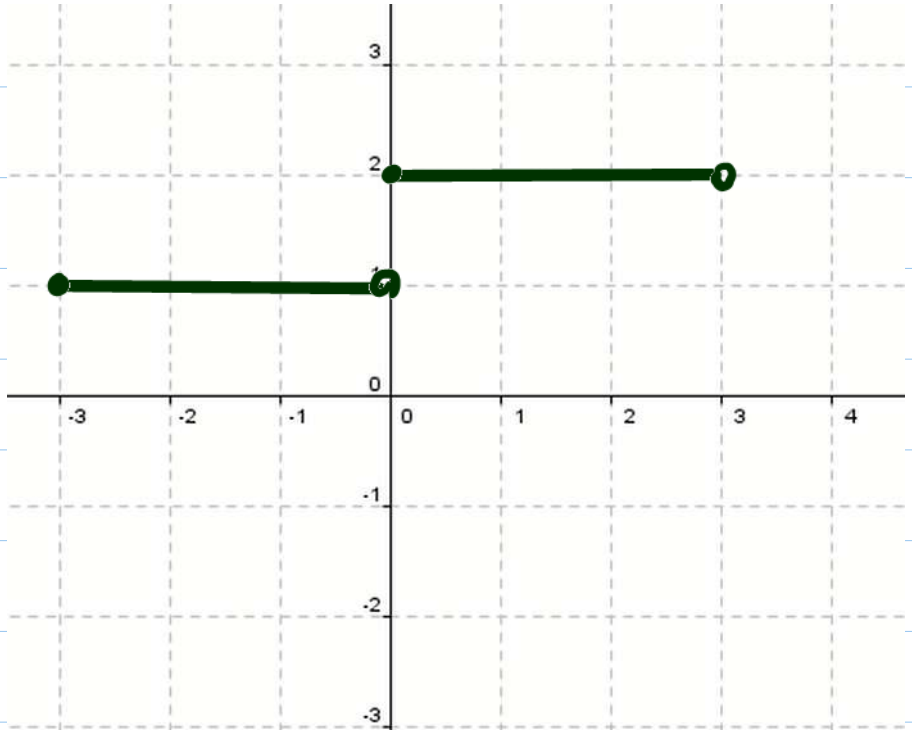


ب) $g(x)=\left[\frac{1}{3}x+2\right]=\left[\frac{1}{3}x\right]+2$ $\quad [-3,3)$

$\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$ = ضابطه بعد

بازه اول: $-3\le x<0 \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} -1\le\frac{1}{3}x<0 \rightarrow y=\left[\frac{1}{3}x\right]+2=-1+2=1$

بازه دوم: $0\le x<3 \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} 0\le\frac{1}{3}x<1 \rightarrow y=0+2=2$



حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس دوم : انواع تابع

جلسه پنجم : حل تمرین صفحات ۵۲و۵۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{x-۱}{۲-x}$ ب) $f(x)=\frac{-۳x}{x^۲+۱}$ پ) $f(x)=\frac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}$

ت) $f(x)=\sqrt{۳x+۱}$ ث) $f(x)=۲\sqrt{x}-۳$ ج) $f(x)=\sqrt{۸-x}$

الف) $۲-x=۰ \rightsquigarrow x=۲ \rightarrow D=\mathbb{R}-\{۲\}$

ب) $x^۲+۱\neq ۰ \rightarrow D=\mathbb{R}$

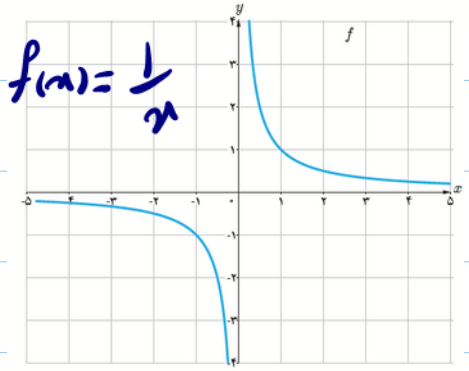
پ) $x^۲+x-۱۲=۰ \rightarrow (x+۴)(x-۳)=۰ \rightarrow x=-۴,۳ \rightarrow D=\mathbb{R}-\{۳,-۴\}$

ت) $۳x+۱\geq ۰ \rightarrow ۳x\geq -۱ \rightarrow x\geq -\frac{۱}{۳} \rightarrow D=[-\frac{۱}{۳},+\infty)$

ث) $x\geq ۰ \rightarrow D=[۰,+\infty)$

ج) $۸-x\geq ۰ \rightarrow ۸\geq x \rightarrow x\leq ۸ \rightarrow D=(-\infty,۸]$

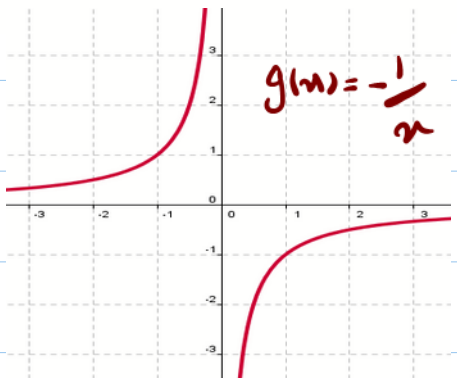
۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کرد.



$f(x)=\frac{۱}{x}$

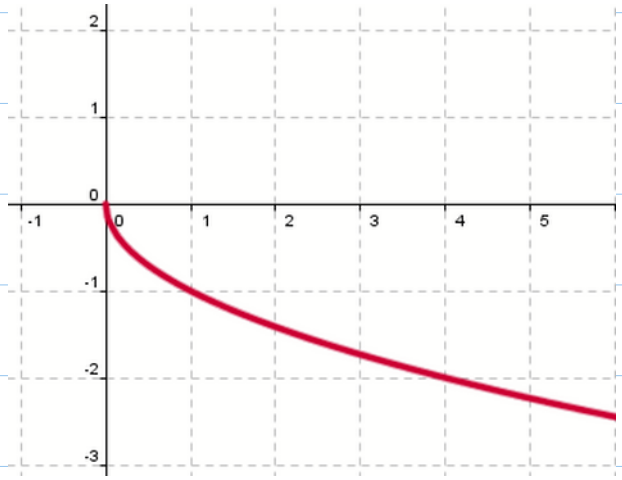
شاخه‌ها ناحیه اول و سوم

نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنم



شاخه‌ها ناحیه دوم و چهارم

۳ نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

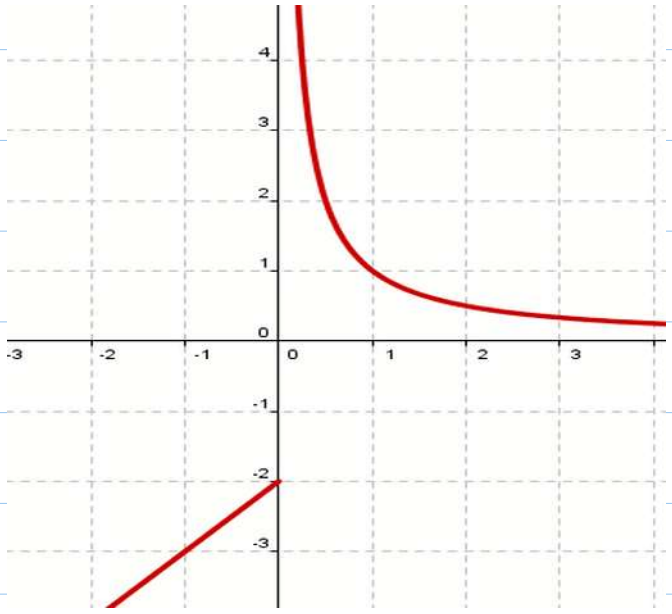


نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

$y=-\sqrt{x}$

۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

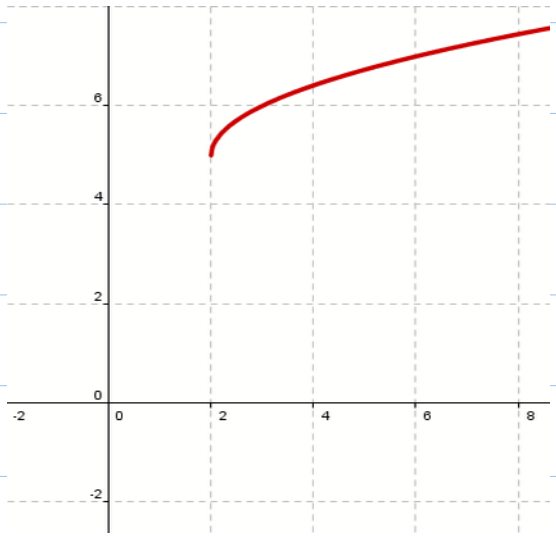
الف) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ x-2 & x\le 0\end{cases}$



$D=\mathbb{R}$

$R=(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$

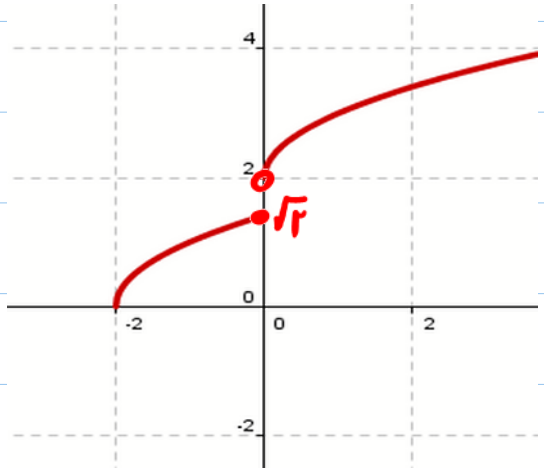
ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}+۵$



$D=[۲,+\infty)$

$R=[۵,+\infty)$

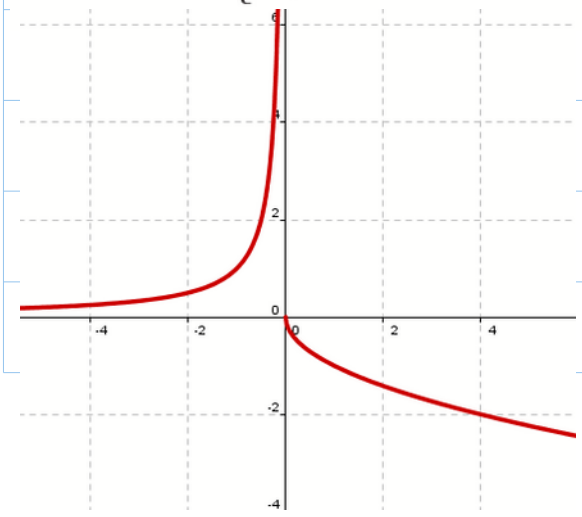
پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\le x\le ۰\end{cases}$



$D=[-۲,+\infty)$

$R=[۰,\sqrt{۲}]\cup(۲,+\infty)$

ت) $f(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x} & x\ge ۰\end{cases}$



$D=\mathbb{R}$

$R=\mathbb{R}$

۵ کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) $3x+2y=12$ ب) $x=1$ پ) $y=-2$ ت) $f(x)=\begin{cases}x+3 & x\le 0\\ x-1 & x\ge 0\end{cases}$ ث) $y^2=x^2$ ج) $y=|x|$

الف) تابع خطی

ب) تابع نیست

پ) $x=1$ تابع ثابت

ت) $x=0 \Rightarrow \begin{cases}y=0+3=3\\ y=0-1=-1\end{cases}$ تابع نیست

ث) $x=1 \rightarrow y^2=1 \rightarrow y=1,-1$ تابع نیست

ج) تابع قدرمطلقی

۶ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به‌وسیله تابع $f(x)=\frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

الف) $f(50)=\frac{225\times 50}{100-50}=\frac{225\times 50}{50}=225$

ب) $D=[0,100)$

۷ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=[x]+1 \quad , \quad -2 \le x < 3$ ب) $f(x)=[\frac{1}{2}x] \quad , \quad -4 \le x < 4$

روش کلی برای رسم نمودار $y=[f(x)]$:

مرحله اول : نمودار تابع را بدون توجه به جزء صحیح رسم می‌کنیم.

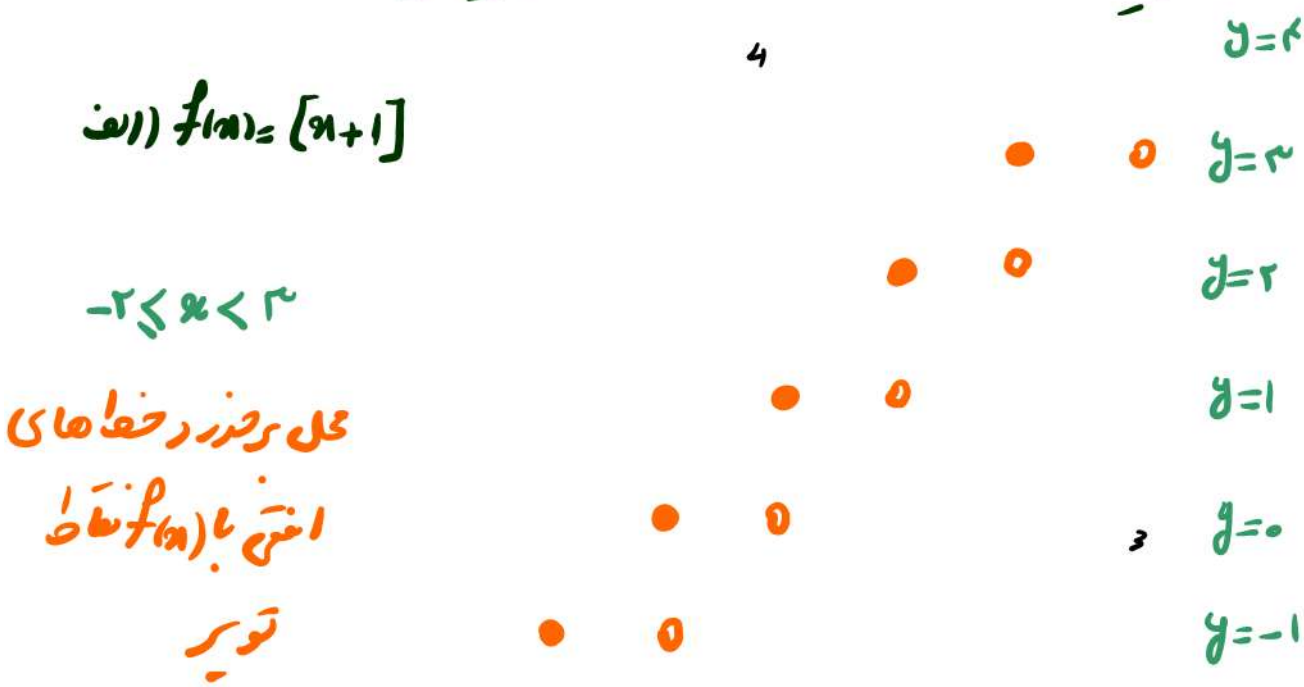
مرحله دوم : خط‌های افقی با مقادیر صحیح یعنی $y=0$ ، $y=\pm1$ ، $y=\pm2$ و ... که نمودار تابع $y=f(x)$ را قطع می‌کنند رسم می‌کنیم.

مرحله سوم : حال جزء صحیح را روی این تابع اثر می‌دهیم به این صورت که هر نقطه که بین دو خط افقی قرار دارد روی خط پائین ریزش می‌کند.

الف) $f(x)=[x+1]$

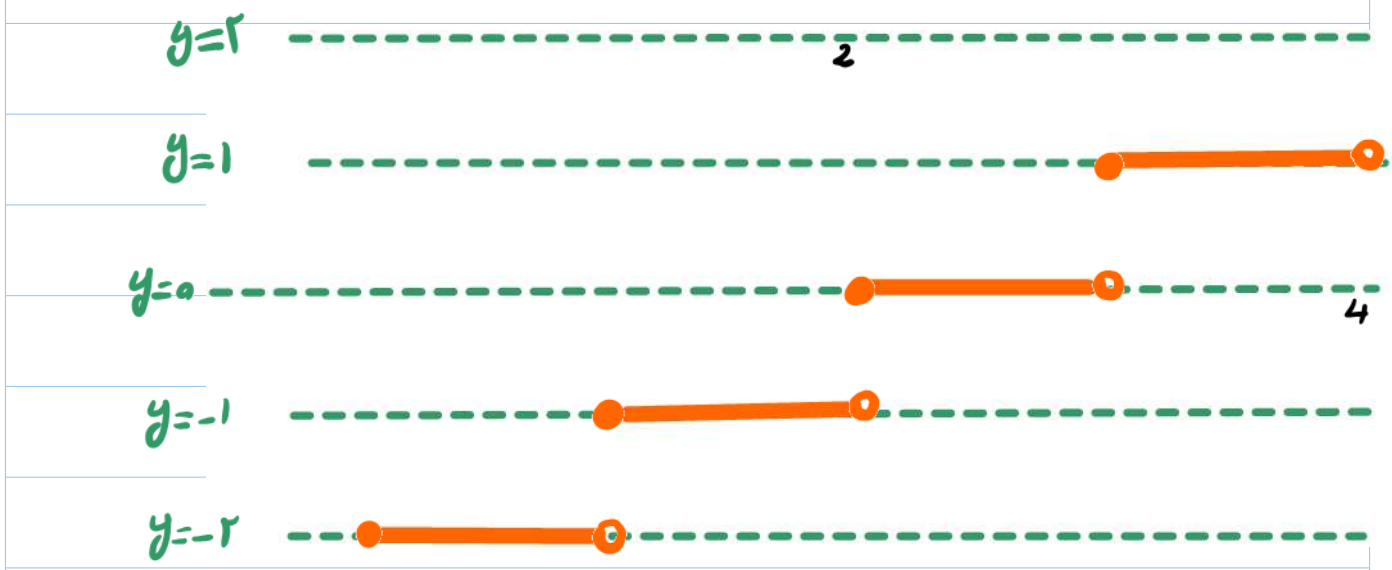
$-2 \le x < 3$

محل برخورد خط‌های افقی با $f(x)$ نقاط توپر



ب) $f(x)=\left[\frac{1}{2}x\right]$

$-4\le x<4$

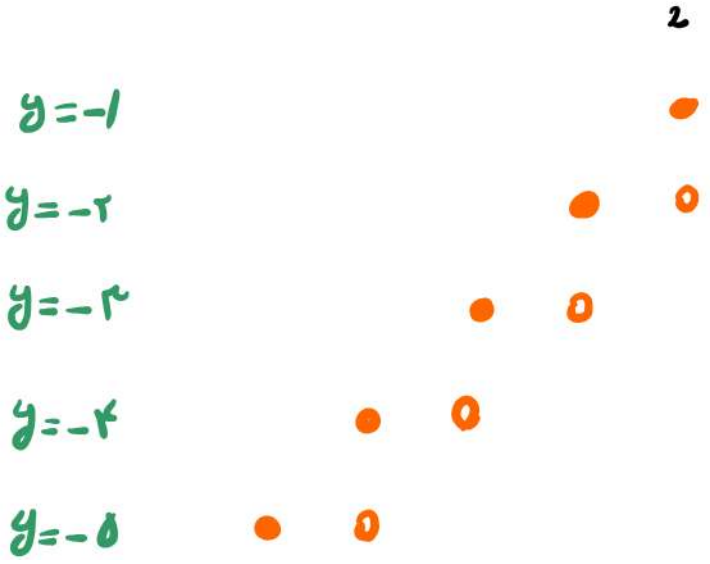


۸ نمودارهای دو تابع $y=[x-3]$ و $y=[x]-3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

$y=[x-3]=[x]-3$

نمودارهایشان هستند (دو تابع برابرند)

در بازه $[-2,2]$



۹ اگر تعداد افرادی که،طی یک مدت معین، به‌وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t)=\frac{۹۵۰t-۲۰۰۰}{۴+t}$ به‌دست آید که در آن $t>۰$ زمان برحسب ماه است :

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

الف) $n(۵)=\frac{۹۵۰\times ۵-۲۰۰۰}{۴+۵}=\frac{۴۷۵۰-۲۰۰۰}{۹}=\frac{۴۵۵۰}{۹}=۵۰۵۵,۵$

۵۰۵۵ نفر

ب) $\frac{۵۵۰۰}{۱}=\frac{۹۵۰t-۲۰۰۰}{۴+t}$

$۹۵۰t-۲۰۰۰=۵۵۰۰(۴+t)$

$۹۵۰t-۲۰۰۰=۲۲۰۰۰+۵۵۰t$

$۹۵۰t-۵۵۰t=۲۲۰۰۰+۲۰۰۰$

$۴۰۰t=۲۴۰۰۰\rightarrow t=\frac{۲۴۰۰۰}{۴۰۰}=۶$

پس از ۶ ماه

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس سوم :وارون تابع

جلسه ششم : صفحات ۵۴تا۵۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تابع یک به یک :

تابع f را یک به یک می گوئیم به شرطی که دو عضو متمایز از دامنه به دو عضو متمایز در برد نظیر شوند . به عبارت دیگر f یک به یک است هرگاه به ازای هر دو عضو دلخواه از دامنه f مانند x_1 و x_2 داشته باشیم :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

بررسی یک به یک بودن تابع در نمایش های مختلف آن :

۱) نمایش زوج مرتبی : زمانی یک به یک است که مولفه دوم مساوی نداشته باشد . اگر مولفه های دوم مساوی داشت باید مولفه های اول هم برابر باشند .

مثال :

یک به یک نیست
$f = \{(2,\frac{1}{2}),(3,4),(0,\sqrt{2}),(1,\frac{1}{2})\}$

یک به یک است
$g = \{(3,\frac{1}{2}),(9,0),(4,1),(5,2)\}$

۲) نمایش نمودار ون : زمانی یک به یک است که به هر عضو دایره دوم (سمت راست) بیشتر از یک خط وارد نشود .

مثال :



یک به یک نیست — یک به یک هست

۳) نمایش نموداری : زمانی یک به یک است که هر خط موازی محور xها حداکثر در یک نقطه نمودار تابع را قطع کند.

مثال :



یک به یک نیست — یک به یک هست

۴) نمایش ماشینی : زمانی یک به یک است که هر خروجی فقط مربوط به یک ورودی باشد به عبارت دیگر خروجی تکراری نداشته باشیم.

مثال:



یک به یک نیست — یک به یک هست

۵) نمایش جبری (ضابطه‌ای) : زمانی یک به یک است که برای هر دو عضو دلخواه از دامنه f مانند x_1 و x_2 :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

به عبارت دیگر یک بار به جای x_1 در ضابطه تابع x_1 و یک بار x_2 قرار داده و با یکدیگر مساوی قرار می‌دهیم. اگر به تساوی $x_1 = x_2$ رسیدیم آنگاه تابع یک به یک خواهد بود.

مثال:

الف) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1^3 + 1} = \sqrt{x_2^3 + 1} \xrightarrow{\text{به توان } 2} x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$$

$$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} x_1 = x_2$$

یک به یک هست

ب) $f(x) = x^2 - 4$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{}} |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

یک به یک نیست

مثال: اگر تابع $f = \{(a^2, 1), (4, 1), (2a + b, 2), (6, 2), (a, b)\}$ یک به یک باشد a, b را بیابید.

$$a^2 = 4 \longrightarrow a = \pm 2$$

$2a+b=7$ $\begin{cases} a=2 \to 4+b=7 \to b=3 \\ a=-2 \to -4+b=7 \to b=11 \end{cases}$

$a=2, b=3 \to f=\{(1,1),(6,2),(2,2)\}$ تابع یک به یک نیست

$a=-2, b=11 \to f=\{(1,1),(6,2),(-2,11)\}$ تابع یک به یک هست

مثال: کدامیک از توابع زیر یک به یک است و چرا؟

الف) $f(x)=x+2|x|$

$f(x)=\begin{cases} x-2x & x<0 \\ x+2x & x\geq 0 \end{cases}=\begin{cases} -x & x<0 \\ 3x & x\geq 0 \end{cases}$ $y=-x$ $y=3x$

یک به یک نیست

ب) $f(x)=x-|x|$

$f(x)=\begin{cases} x-(-x) & x<0 \\ x-x & x\geq 0 \end{cases}=\begin{cases} 2x & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases}$ $y=0$ $y=2x$

یک به یک نیست

ب) $f(x)=x^3-2x^2$

$x=0 \longrightarrow y=0$

$x=2 \longrightarrow y=2^3-2(2)^2=8-8=0$

تابع یک به یک است

ج) $f(x)=x^2+2x$

$x=0 \longrightarrow y=0$

$x=-2 \longrightarrow y=4+2(-2)=0$

تابع یک به یک نیست

د) $f(x)=\dfrac{[x]+[-x]}{x}$

$x \in \mathbb{Z} \overset{x \neq 0}{\Longrightarrow} [x]+[-x]=0 \longrightarrow y=0$ تابع یک به یک نیست.

ه) $f(x)=\dfrac{x}{[x]+[-x]}$ $\quad D=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

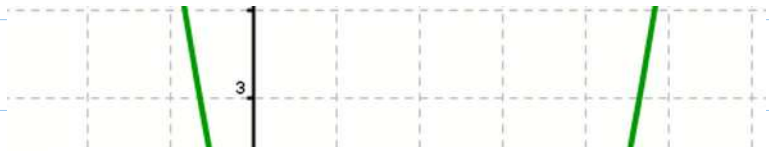
$[x]+[-x]=0 \longrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=-1 \longrightarrow f(x)=\dfrac{x}{-1} \Rightarrow f(x)=-x$

تابع یک به یک است.

نکته: می‌توانیم با محدود کردن دامنه، از یک تابع غیریک‌به‌یک تابعی یک‌به‌یک بسازیم.

مثال: ابتدا ثابت کنید تابع $f(x)=x^2-4x$ یک‌به‌یک نیست. سپس با محدود کردن دامنه آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنید.



خط‌های موازی محور xها



وجود دارند که تابع را در

دو نقطه قطع می‌کنند پس تابع

یک‌به‌یک نیست.

بزرگترین بازه‌ها

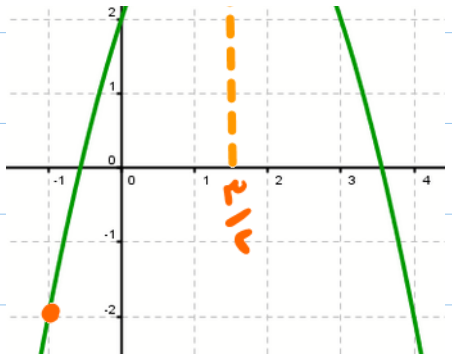
$[0,2] \quad [2,+\infty) \quad (-\infty,2] \quad [2,+\infty) \quad (-\infty,2]$

نکته: تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ با دامنه $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ یا $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ یک‌به‌یک است.

مثال: تابع $f(x)=-x^2+3x+2$ روی بازه $[-1,a]$ یک به یک است. حداکثر مقدار a را چقدر است؟

راس سهمی

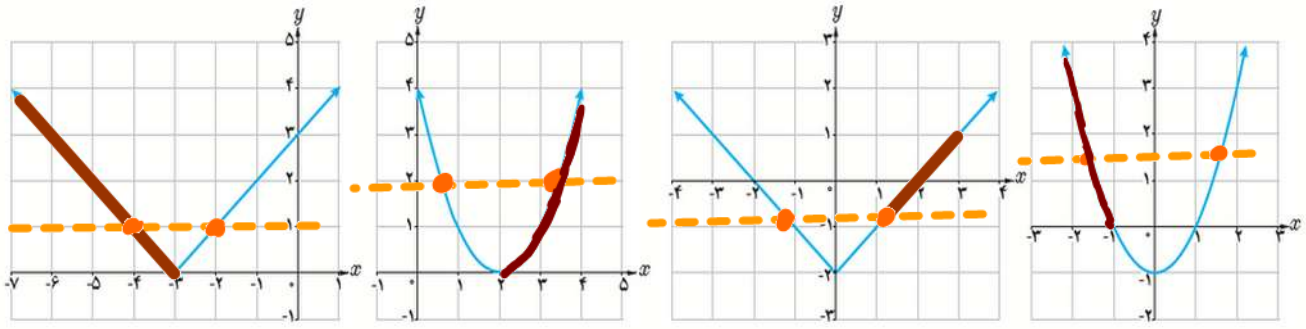
$$a=\frac{-3}{2(-1)}=\frac{3}{2}$$



مثال:

تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y=|x+3|$ ب) $y=(x-2)^2$ پ) $y=|x|-2$ ت) $y=x^2-1$



$D=(-\infty,-1)$ $D=[1,2]$ $D=[2,+\infty)$ $D=(-\infty,-3]$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس سوم :وارون تابع

جلسه هفتم : صفحات ۵۷تا۶۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

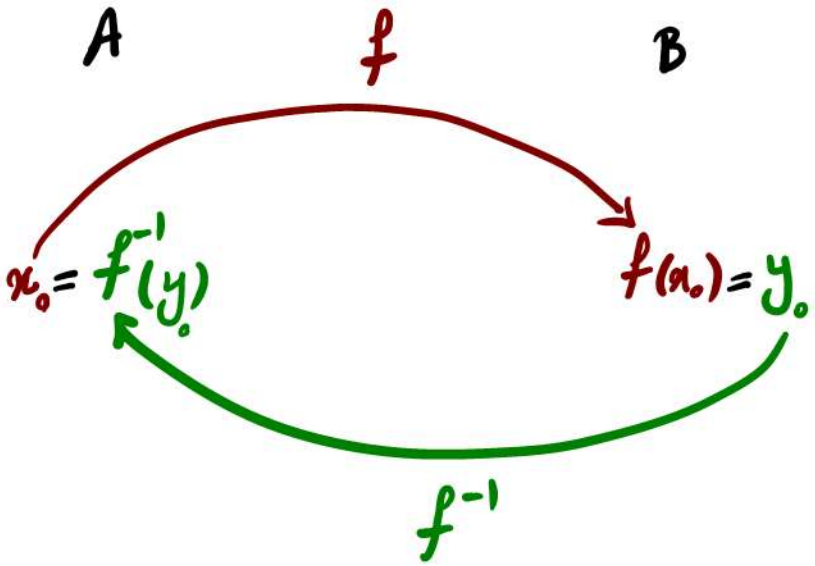
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

وارون تابع :

برای برخی توابع ، تابعی دیگر وجود دارد که عکس تابع اصلی عمل کرده و خروجی را به ورودی تبدیل می‌کند . به چنین تابعی ، تابع عکس یا تابع وارون می‌گویند.

تعریف : وارون تابع f رابطه‌ای است که در آن به ازای هر خروجی f ، به ورودی مربوطه می‌رسیم . مثلاً اگر تابع f عدد x_0 از دامنه را به y_0 از برد ببرد ، وارون تابع f که آن را با f^{-1} نشان می‌دهند عضو y_0 را به عنوان تصویری از دامنه خودش به x_0 از مجموعه برد می‌برد .



مثال :

$f(x) = 2x + 1$

$f(1) = 3$ ، $f(2) = 5$ ، $f(4) = 9$

$1 = f^{-1}(3)$ ، $2 = f^{-1}(5)$ ، $4 = f^{-1}(9)$

$f^{-1}(y)$

خلاصه وارون تابع f :

f^{-1} : $3 \to 1$ ، $5 \to 2$ ، $9 \to 4$

$f(x) = x^2$

$f(3) = 9$ ، $f(-3) = 9$

$3 = f^{-1}(9)$ ، $-3 = f^{-1}(9)$

$f^{-1}(y)$

خلاصه وارون تابع f :

f^{-1} : $9 \to 3$ ، $9 \to -3$

وارون تابع خود تابع است :

تابع وارون پذیر : اگر وارون تابع f ، تابع باشد ، f را وارون پذیر می‌گوییم.

نکته : تابع f وارون پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد

۱) محاسبه وارون تابع از روی نمایش زوج مرتبی :

$f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\}$: کافی است جای مولفه اول و دوم را عوض کنیم

مثال: الف) $f = \{(1,6),(-1,5),(2,4)\}$ وارون پذیر است

$$f^{-1} = \{(6,1),(5,-1),(4,2)\}$$

ب) $g = \{(2,3),(4,-1),(5,2),(7,3)\}$ وارون پذیر نیست

تابع نیست : $g^{-1} = \{(3,2),(-1,4),(2,5),(3,7)\}$ ← رابطه

۲) محاسبه وارون تابع از روی نمایش نمودار ون :

کافی است جهت فلش‌ها یا جای دایره‌ها را عوض کنیم .

مثال :

f		f^{-1}	
۲	۱	۱	۲
۴	۳	۳	۴
۵	۸	۸	۵

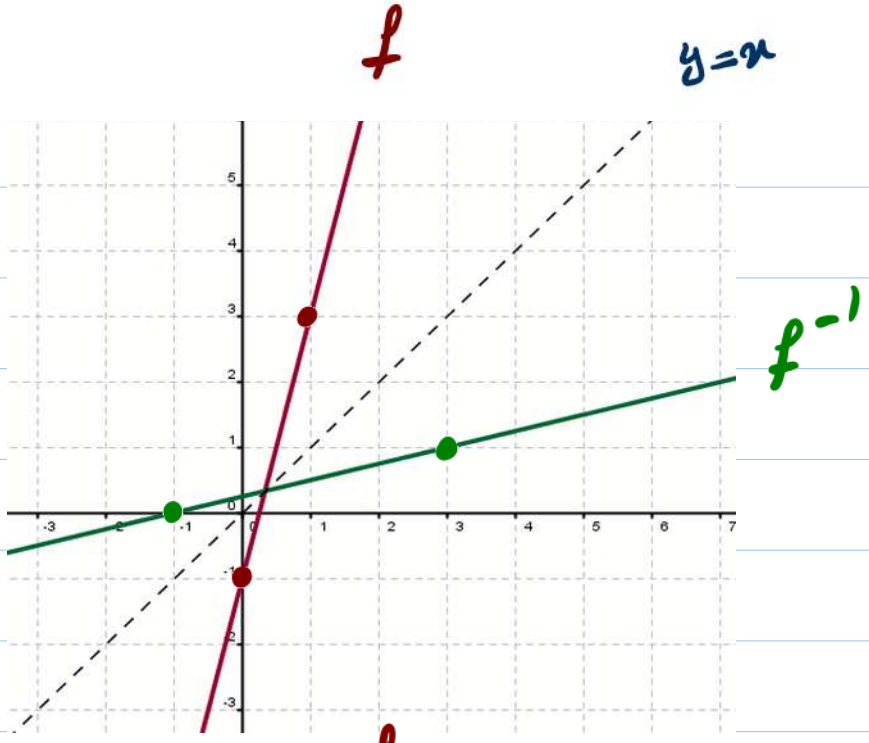
وارون پذیر

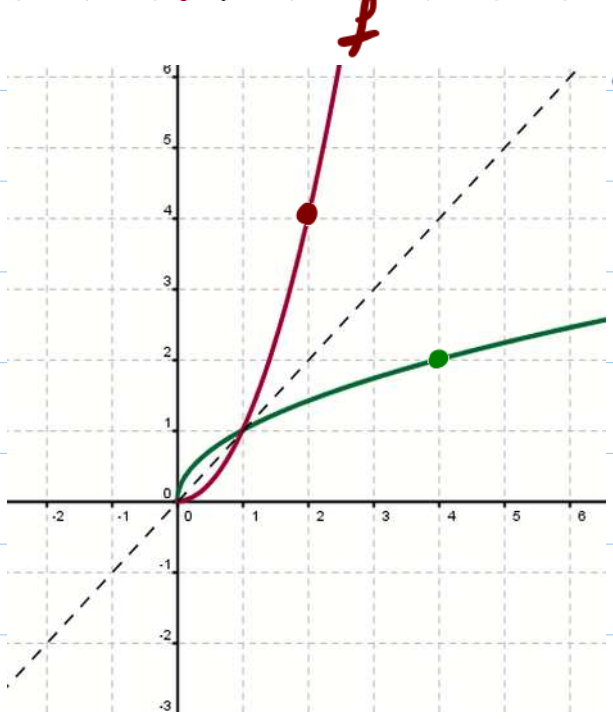
۱۳ محاسبه وارون تابع از روی نمایش دستگاه مختصات :

کافی است قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) بیابیم

زیرا دو نقطه (x,y) و (y,x) نسبت به خط $y=x$ قرینه اند.

مثال:





تذکر: بهتر است برای دقیق‌تر شدن نمودار f^{-1} چند نقطه روی f پیدا کنیم و جای x و y را عوض کنیم تا نقاط روی f^{-1} به دست آید.

چند نکته : اگر f وارون پذیر باشد آنگاه

۱- اگر $f(a)=b$ آنگاه $f^{-1}(b)=a$. به عبارت دیگر اگر نقطه (a,b) روی نمودار تابع f باشد آنگاه نقطه (b,a) روی نمودار f^{-1} است .

۲- $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$

۳- $D_{f^{-1}}=R_f$ ، $D_f=R_{f^{-1}}$

۴- اگر f و f^{-1} در نقطه (a,b) متقاطع باشند آنگاه $f(a)=b$, $f(b)=a$.

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{18-x}+\sqrt[3]{18+x}$ باشد مقدار $f(9)+f^{-1}(4)$ را بیابید .

$$f(9)=\sqrt{18-9}+\sqrt[3]{18+9}=3+3=6$$

$$f^{-1}(4)=9$$

$$f(9)+f^{-1}(4)=4+9=10$$

مثال: اگر $g=\{(2,4),(3,2),(1,5),(5,-1)\}$ و $f=\{(3,2),(2,3),(4,-1),(5,6)\}$

$f^{-1}(a)+g^{-1}(2)=6$ ، مقدار $g(a)$ را بدست آورید.

$g(3)=2 \rightarrow g^{-1}(2)=3$

$f^{-1}(a)+2=6 \rightarrow f^{-1}(a)=3 \rightarrow f(3)=a=2$

$g(a)=g(2)=4$

مثال: نمودار تابع $f(x)=-x^3+mx+n$ در نقطه $(\frac{1}{3},-1)$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند.

مقدار m و n را بیابید.

$f(-1)=\frac{1}{3} \rightarrow \underbrace{-(-1)^3}_{+1}-m+n=\frac{1}{3} \rightarrow -m+n=-\frac{2}{3}$ (1)

$f(\frac{1}{3})=-1 \rightarrow -\frac{1}{27}+\frac{1}{3}m+n=-1 \rightarrow \frac{1}{3}m+n=-1+\frac{1}{27}$

$\frac{1}{3}m+n=\frac{-26}{27} \xrightarrow{\times 3} m+3n=-\frac{26}{9}$ (2)

$$\begin{cases} -m+n=-\frac{2}{3} \\ m+3n=-\frac{26}{9} \end{cases}$$

$4n=\frac{-32}{9}$

$\rightarrow n=-\frac{32}{9\times 4}=-\frac{8}{9}$

$-m-\frac{8}{9}=-\frac{2}{3}$

$m=\frac{2}{3}-\frac{8}{9}=\frac{-2}{9}$

۴) یافتن ضابطه تابع وارون :

اگر تابع به صورت ضابطه نمایش داده شده باشد، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم :

۱- به جای $f(x)$ ، y قرار می‌دهیم .

۲- مانند یک معادله به آن نگاه می‌کنیم که می‌خواهیم x را بیابیم یعنی x را برحسب y می‌یابیم .

۳- به جای x ، $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x قرار می‌دهیم .

مثال: وارون توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=4x-7$

$$y=4x-7 \rightarrow y+7=4x \xrightarrow{\div 4} \frac{y+7}{4}=x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+7}{4}$$

۲) $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$

$$y=\frac{3x+2}{x-1} \rightarrow yx-y=3x+2 \rightarrow yx-3x=2+y$$

$$x(y-3)=2+y \rightarrow x=\frac{2+y}{y-3} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-3}$$

۳) $y=3-\sqrt{x+1}$

$$\sqrt{x+1}=3-y \xrightarrow[\text{توان ۲}]{} x+1=(3-y)^2 \rightarrow x=(3-y)^2-1$$

$$f^{-1}(x)=(3-x)^2-1$$

صورت دوم

$$x+1=9-6y+y^2 \rightarrow x=y^2-6y+8$$

$$f^{-1}(x)=x^2-6x+8$$

تذکر: اگر تابعی یک به یک نباشد پس وارون پذیر نیست ولی می‌توانیم با محدود کردن دامنه تابع آن را یک به یک کنیم و وارونش را به دست آوریم.

مثال: با محدود کردن دامنه تابع $f(x)=x^2+4x+5$، ضابطه تابع وارون را بیابید.

$$D=(-\infty,-\frac{b}{2a}]=(-\infty,-\frac{4}{2}]=(-\infty,-2]$$

با این دامنه تابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می‌شود.

$f(x) = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1$

$x+2 \;|\; a \;|\; -2$

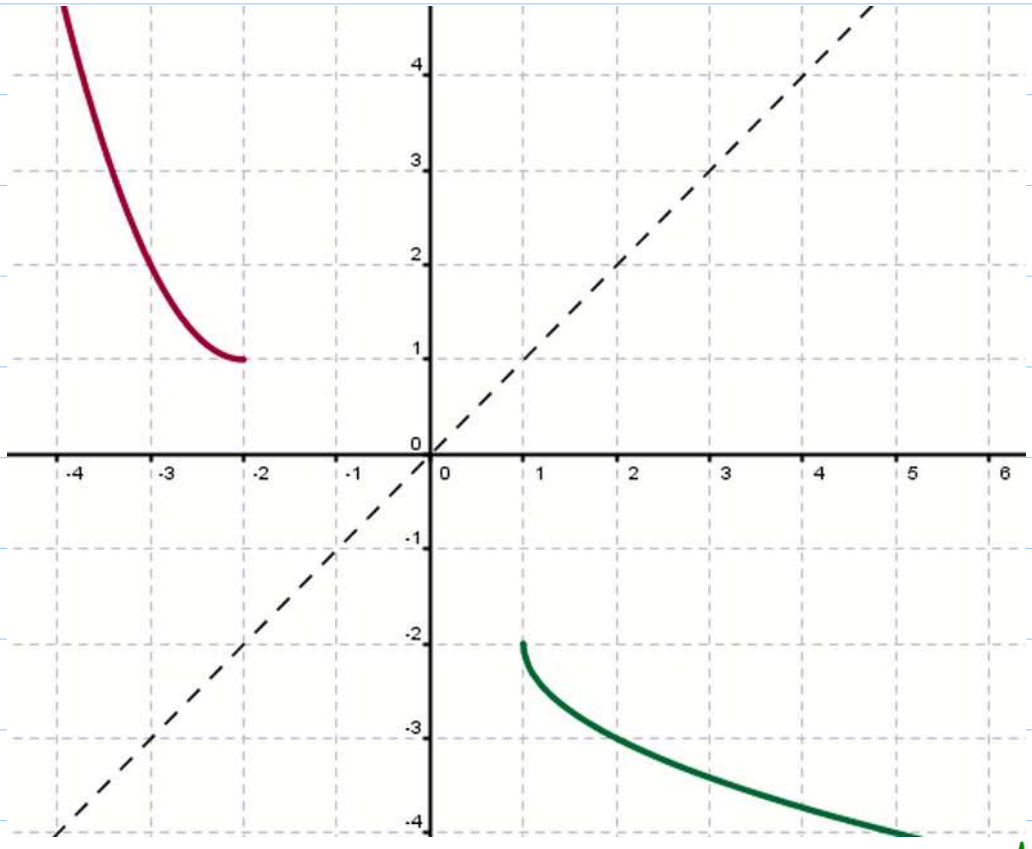
$-2 \;|\; -1 \;|\; +$

$y = (x+2)^2 + 1 \longrightarrow y - 1 = (x+2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y-1} = |x+2|$

$\sqrt{y-1} = -(x+2) \rightarrow \sqrt{y-1} = -x-2$

$x = -2 - \sqrt{y-1} \longrightarrow f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x-1}$

f: $x \leq -2$



f^{-1}

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}7x+2 & x<1\\ 5x+4 & x\geq 1\end{cases}$ ، آیا وارون f را بیابید.

دامنهٔ f^{-1}:

$$D_{f^{-1}} = R_f$$

$$x<1 \xrightarrow{\times 7} 7x<7 \xrightarrow{+2} 7x+2<9$$

$$x\geq 1 \xrightarrow{\times 5} 5x\geq 5 \xrightarrow{+4} 5x+4\geq 9$$

ضابطهٔ f^{-1}:

$$y=7x+2 \rightarrow y-2=7x \rightarrow x=\frac{y-2}{7} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-2}{7}$$

$$y=5x+4 \rightarrow y-4=5x \rightarrow x=\frac{y-4}{5} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-4}{5}$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{7} & x<9\\ \frac{x-4}{5} & x\geq 9\end{cases}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس سوم :وارون تابع

جلسه هشتم : حل تمرین صفحه۶۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

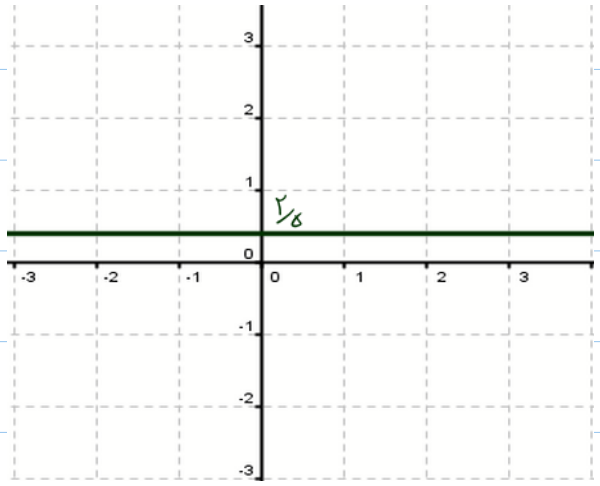
۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک‌به‌یک نباشد.

دمای هوا در طول یک روز : مثلاً دمای هوا ۸ صبح ۳ درجه سانتی گراد و

۲۲ شب هم ۳ درجه باشد . $\{(8,3),(22,3)\}$

خیر.

تابع ثابت است پس یک‌به‌یک نیست در نتیجه وارون پذیر نیست. $f(x)=\frac{2}{5}$



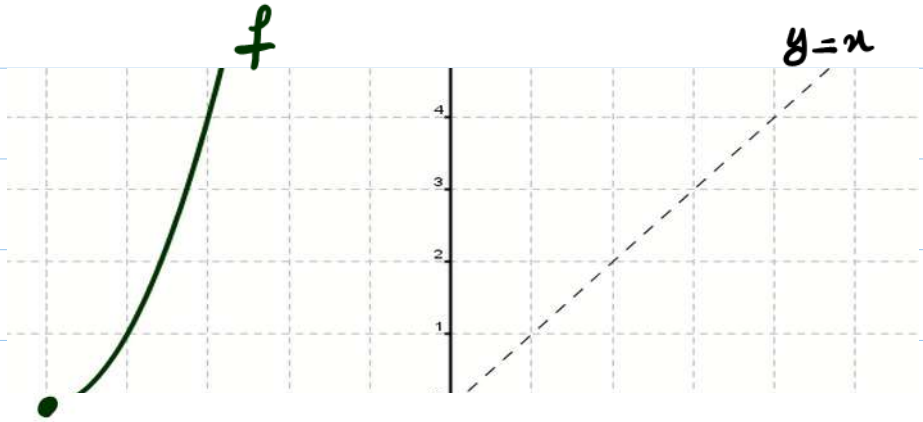
$f(x)=\frac{2}{5}$

۳ به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به‌دست آورید :

یک‌به‌یک با : $D_f=[-5,+\infty)$ و $(-5,0)$ رأس سهمی

$y=(x+5)^2 \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{y}=|x+5| \xrightarrow{x>-5} \sqrt{y}=x+5 \Rightarrow \sqrt{y}-5=x$

$\rightarrow \quad f^{-1}(x)=\sqrt{x}-5$



f^{-1}

x	$x-1$
<1	$-$
1	0
>1	$+$

$f(x) = -(x-1)+1 = -x+1+1 = -x+2 \quad : x \geq 2 : D_f = [2, +\infty)$

تابع به یک تابع خطی تبدیل شده که توابع خطی همواره یک‌به‌یک هستند.

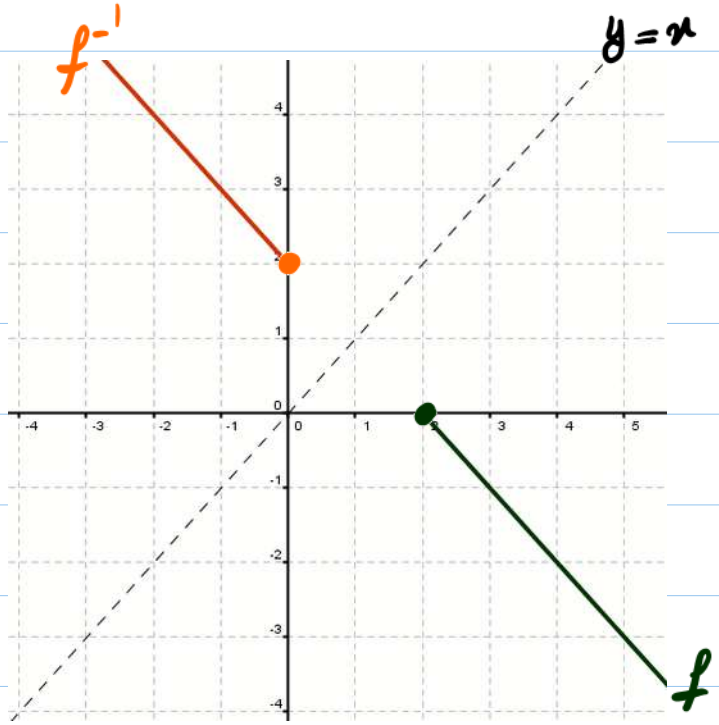
ضابطه‌ی f

$y = -x+2 \longrightarrow x = 2-y \longrightarrow f^{-1}(x) = 2-x = -x+2$

پس باید برد f را بیابیم تا دامنه f^{-1} تعیین شود:

$R_f : \quad x \geq 2 \xrightarrow{\times(-1)} -x \leq -2 \xrightarrow{+2} -x+2 \leq 0 \longrightarrow R_f = (-\infty, 0]$

$R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 0]$



پ) $f(x)=(x-۳)^۲$



تابع f یک به یک نیست زیرا خط

$y=۲$ در دو نقطه تابع را قطع کرد.

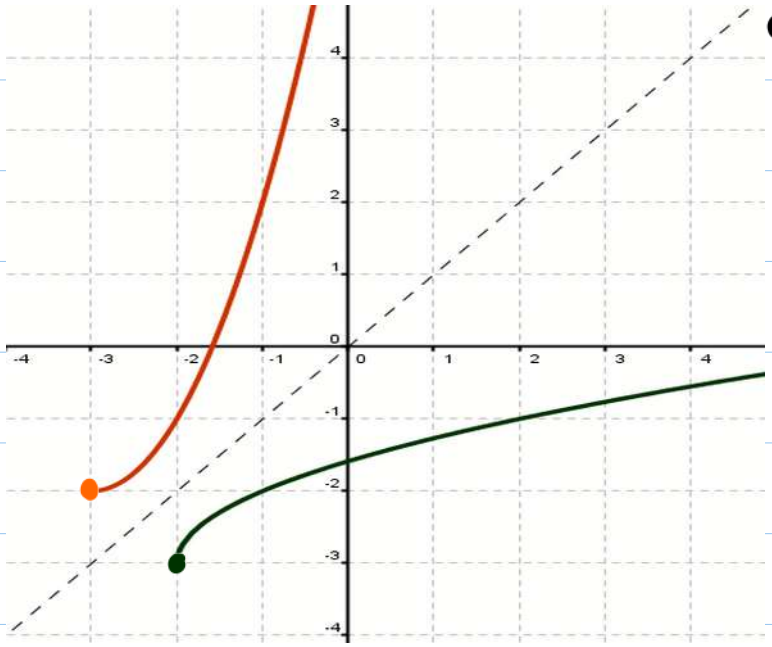
در نتیجه تابع وارون ندارد هم نخواهد بود.

ت

$$R_f=[-۳,+\infty)=D_{f^{-1}}$$

$$y=\sqrt{x+۲}-۳ \longrightarrow y+۳=\sqrt{x+۲} \xrightarrow[\text{دو}]{\text{به توان}} (y+۳)^۲=x+۲$$

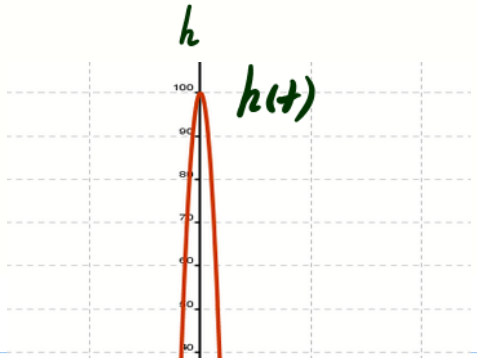
$$(y+۳)^۲-۲=x \longrightarrow f^{-1}(x)=(x+۳)^۲-۲ \quad : D_{f^{-1}}=[-۳,+\infty)$$



$f \rightsquigarrow$ یک‌به‌یک

هر خط موازی محورها آن را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=100-5t^2$ به‌دست می‌آید.



الف) دامنه و برد h را به‌دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون h را به‌دست آورید.

چون زمان منفی نداریم شاخه سمت چپ حذف می‌شود.

چون ارتفاع منفی نداریم، زیر محور tها حذف می‌شود.

$-\sqrt{20}$ $\quad$ $\sqrt{20}$

الف) D_h : $100-5t^2=0 \rightarrow 5t^2=100 \rightarrow t^2=20 \rightarrow t=\pm\sqrt{20}$

فقط مثبت‌ها قبول

$D_h=[0,\sqrt{20}]$ $\quad$ $R_h=[0,100]$

ب) سنگ در هر زمان یک ارتفاع منحصر به فرد دارد.

$$y = 100 - 5t^2 \rightarrow 5t^2 = 100 - y$$

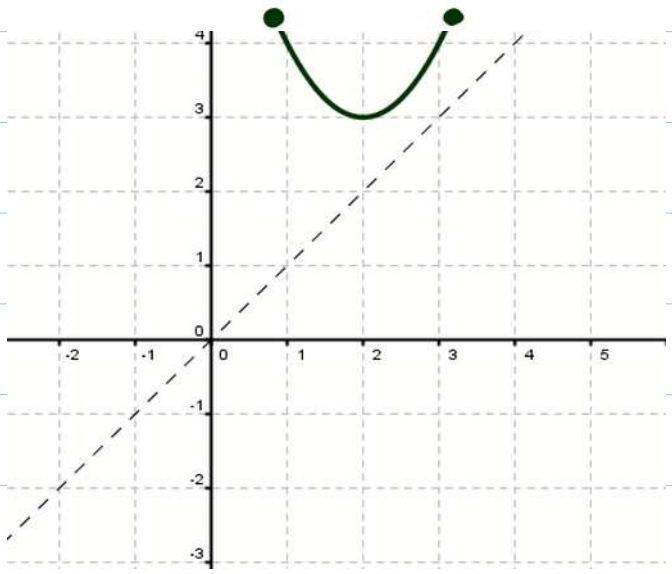
$$\xrightarrow{\div 5} t^2 = \frac{100-y}{5} \xrightarrow[t>0]{\sqrt{\ }} t = \sqrt{\frac{100-y}{5}}$$

$$h^{-1}(t) = \sqrt{\frac{100-t}{5}}$$

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x < f(x)$.

نمودار f باید بالای $y=x$ باشد.

$f(x)$: یک به یک نیست



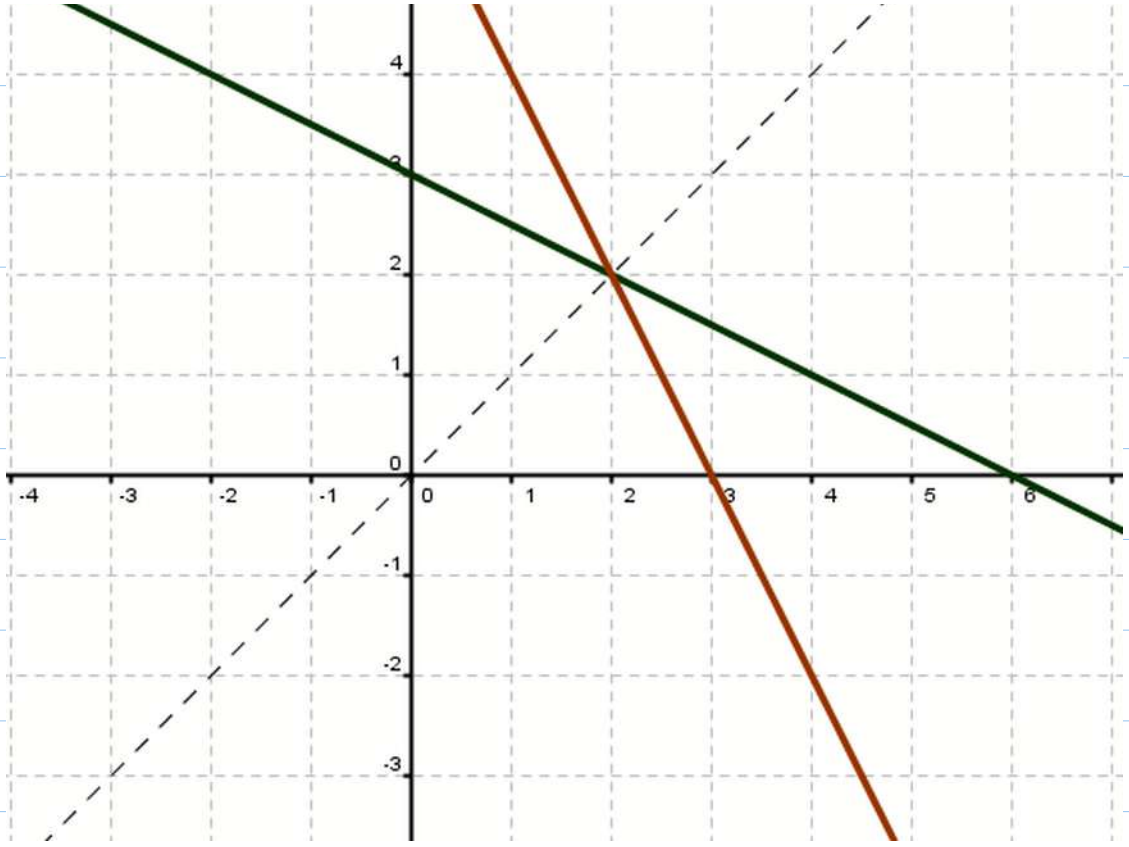
۶ وارون تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

$y=-\frac{۱}{۲}x+۳ \rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۲}x \xrightarrow{\times(-۲)} -۲(y-۳)=x$

$\rightarrow f^{-1}(x)=-۲(x-۳)=-۲x+۶$

f^{-1} $\quad y=x$

f



حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس چهارم : اعمال روی توابع

جلسه نهم : صفحات ۶۳ تا ۶۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

اعمال روی توابع :

فرض کنید f و g دو تابع باشند، در این صورت :

۱- جمع f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از این دامنه مشترک داریم: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

حاصل جمع دو تابع f و g را با $f+g$ نمایش می‌دهیم.

۲- تفاضل f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از این دامنه مشترک داریم: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

تفاضل دو تابع f و g را با $f-g$ نمایش می‌دهیم.

۳- ضرب f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از این دامنه مشترک داریم: $(fxg)(x)=f(x)xg(x)$

حاصل ضرب دو تابع f و g را با fxg نمایش می‌دهیم.

۴- تقسیم f بر g : تابعی است که دامنه‌ی آن $D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=0\}$

است و برای هر x از دامنه‌ی این تابع داریم: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

تقسیم تابع f بر تابع g را با $\frac{f}{g}$ نمایش می‌دهیم.

مثال (زوج مرتب) :

اگر داشته باشیم : $f = \{(-2,1), (3,5), (1,4), (6,0)\}$

مطلوب است: $g = \{(1,9), (5,0), (3,7), (-2,2), (6,\sqrt{2})\}$

$D_f \cap D_g = \{1, 3, -2, 6\}$

الف) $f+g = \{(1,13), (3,12), (-2,3), (6,\sqrt{2})\}$

ب) $f \times g = \{(1,36), (3,35), (-2,2), (6,0)\}$

ج) $\frac{f}{g} = \{(1,\frac{4}{9}), (3,\frac{5}{7}), (-2,\frac{1}{2}), (6,0)\}$

د) $\frac{g}{f} = \{(1,\frac{9}{4}), (3,\frac{7}{5}), (-2,2), (6,\frac{\sqrt{2}}{0})\}$

در واحد بررسی می‌شوند

ه) $2f-3g$

$2f=\{(-2,2),(3,10),(1,8),(6,0)\}$

$3g=\{(1,27),(5,0),(3,21),(-2,6),(\frac{1}{2},3\sqrt{2})\}$

$2f-3g=\{(-2,-4),(3,-11),(1,-19),(6,-3\sqrt{2})\}$

مثال (ضابطه جبری)

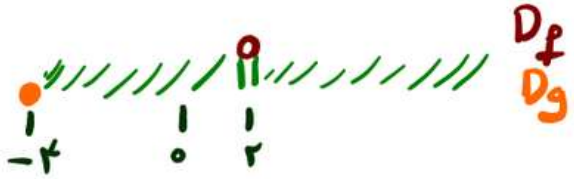
دو تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ ، $g(x)=\sqrt{x+4}$ را در نظر بگیرید. مطلوب است:

الف) دامنه ضابطه توابع $f-g$ و $\frac{f}{g}$.

ب) محاسبه مقادیر $(f+g)(0)$ ، $(\frac{g}{f})(-4)$ و $(4f-\frac{1}{4}g)(3)$.

الف) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+1}{x-2}-\sqrt{x+4}$

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ $\quad D_g: x+4\geq 0 \longrightarrow x\geq -4 \longrightarrow D_g=[-4,+\infty)$



$D_f \cap D_g = [-4,2)\cup(2,+\infty)$ $\quad D_{f-g}=[-4,2)\cup(2,+\infty)$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\frac{x+1}{x-2}}{\sqrt{x+4}}=\frac{x+1}{(x-2)(\sqrt{x+4})}$

$g(x)=0 \longrightarrow \sqrt{x+4}=0 \longrightarrow x=-4$ ⟶ از دامنه مشترک خارج می‌کنیم

$D_{\frac{f}{g}} = (-4,2) \cup (2,+\infty)$

ب) $(f+g)(0)=f(0)+g(0)=\frac{0+1}{0-2}+\sqrt{0+4}=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(-3)=\frac{g(-3)}{f(-3)}=\frac{\sqrt{-3+4}}{\frac{-3+1}{-3-2}}=\frac{1}{\frac{-2}{-5}}=\frac{5}{2}$$

$$\left(4f-\frac{1}{2}g\right)(0)=4f(0)-\frac{1}{2}g(0)=4\times\frac{0+1}{0-2}-\frac{1}{2}\sqrt{0+4}$$

$$=4\times 2-\frac{1}{2}\times 2=8-\frac{2}{2}=\frac{16-2}{2}=\frac{14}{2}$$

مثال : (زوج مرتب و ضابطه جبری)

اگر $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ و $g=\{(3,1),(1,7),(-4,2),(0,6)\}$ باشند، تابع $f+g$ و $\frac{g}{f}$ را بیابید.

$D_g=\{3,1,-4,0\}$

$D_f : x^2-2x \geq 0$ ریشه‌ها: $0, 2$

x		0		2	
x^2-2x	$+$	0	$-$	0	$+$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$D_f \cap D_g = \{2, -2, 0\}$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = \sqrt{9-2} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

$$(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = \sqrt{16+8} + 2 = \sqrt{24} + 2$$

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 2 = 2$$

$$f+g = \{(2, 1+\sqrt{2}), (-2, 2+\sqrt{24}), (0, 2)\}$$

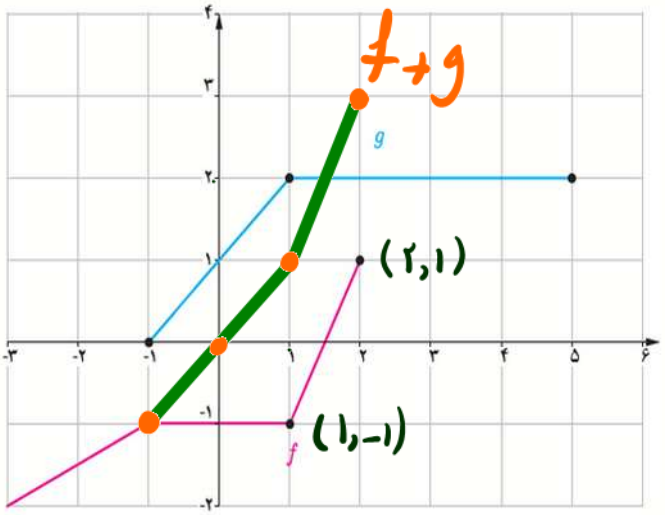
$$\left(\frac{g}{f}\right)(2) = \frac{g(2)}{f(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = \frac{g(-2)}{f(-2)} = \frac{4}{\sqrt{24}} = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{2}{0}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{\left(2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-2, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

مثال: (سنجاری)



نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع $f+g$ و f ، g را به‌دست آورید.

ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.

الف) $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = -1+2 = 1$

$(f+g)(-1) = f(-1)+g(-1) = -1+0 = -1$

ب) $D_f = [-1,5]$ $\quad D_g = (-\infty, 2]$

$D_f \cap D_g = [-1,2]$ با بدست آوردن چند نقطه از این ناحیه تابع را رسم می‌کنیم.

$(f+g)(-1) = -1$, $(f+g)(0) = f(0)+g(0) = -1+1 = 0$

$(f+g)(1) = 1$, $(f+g)(2) = f(2)+g(2) = 1+2 = 4$

این نقاط روی $f+g$ هستند: $(-1,-1), (0,0), (1,1), (2,4)$

ب)

$$m=\frac{1+1}{-1-1}=2$$

$$y-1=2(x-2)$$

$$y-1=2x-4$$

$$y=2x-3$$

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x\le 1\\ 2x-3 & 1<x\le 2\end{cases}$$

(در بازه بزرگ)

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & -1\le x\le 1\\ 2 & 1<x\le 2\end{cases}$$

(در بازه بزرگ)

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}-1+x+1 & -1\le x\le 1\\ 2+2x-3 & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}x & -1\le x\le 1\\ 2x-1 & 1<x\le 2\end{cases}$$

ت) نمودار هر دو تابع است ولی رسم نمودار به کمک ضابطه دقیق‌تر است.

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس چهارم : اعمال روی توابع

جلسه دهم : صفحات ۶۶ تا ۶۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

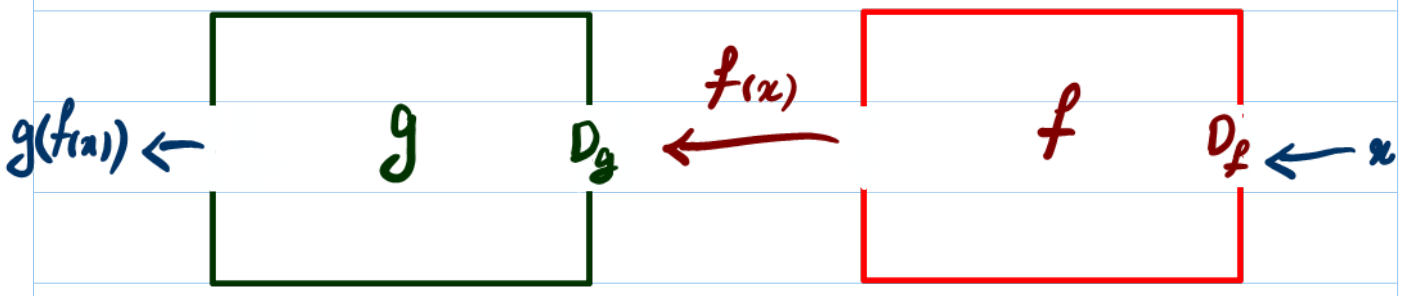
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

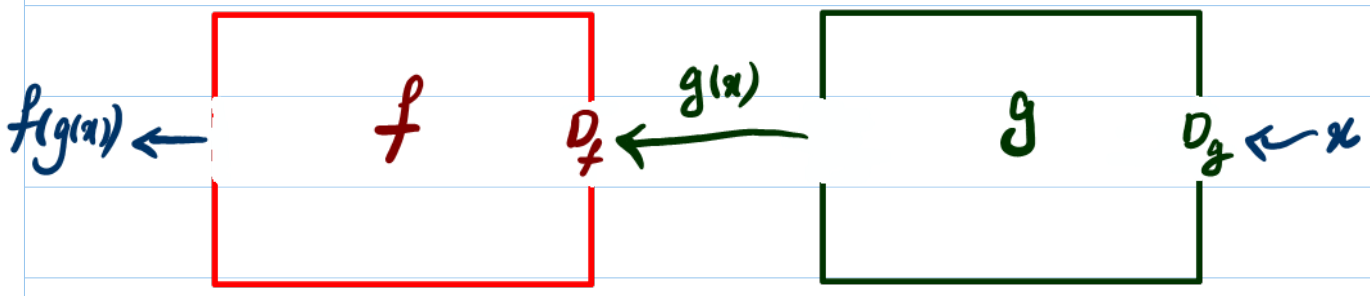
گروه ریاضی استان همدان

ترکیب توابع :

اگر f و g دو تابع باشند، ماشین این توابع را به صورت های زیر در نظر بگیرید :

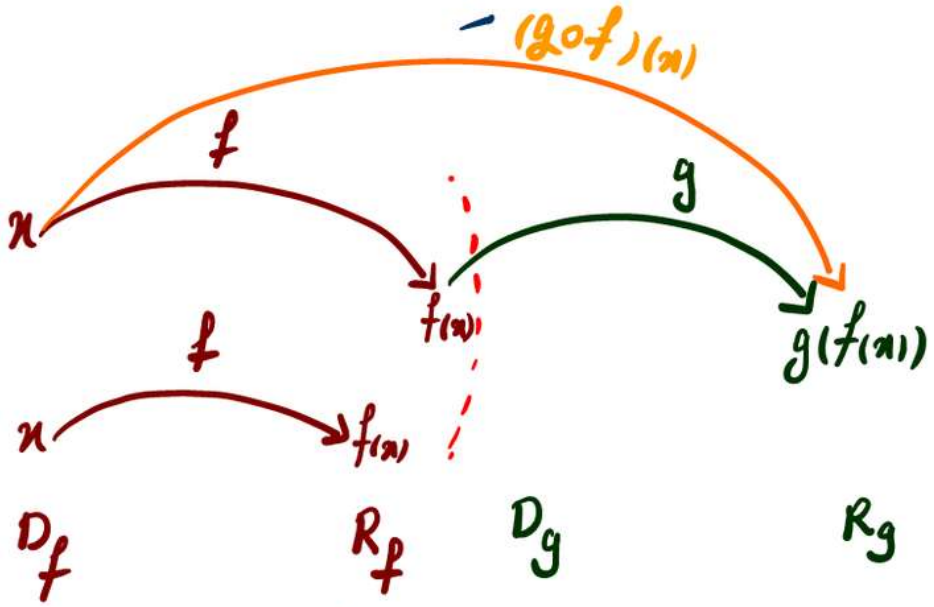


xهای که حق ورود به f را دارند خیلی در D_f هستند وارد تابع f می شوند و عمل f روی x انجام می پذیرد و $f(x)$ تحویل داده می شود. اگر $f(x)$ها اجازه ورود به g را داشته باشند خیلی در D_g باشند، ماشین g روی $f(x)$ اثر کرده و $g(f(x))$ را به عنوان خروجی تحویل می دهد.



در شکل دوم، x هایی که حق ورود به g را دارند یعنی در دامنه g هستند وارد ماشین تابع می‌شوند و خروجی $g(x)$ تحویل داده می‌شود. اگر $g(x)$ اجازه ورود به f را داشته باشد یعنی در دامنه f باشد، ماشین f روی $g(x)$ اثر کرده و $f(g(x))$ را تحویل می‌دهد.

همین مفهوم را در نمودار ون هم ببینیم.



تمرین: نموداری مشابه، نمودار بالا برای $f(g(x))$ رسم کنید.

تعریف: ترکیب g با f را با $g\circ f$ نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنه آن:

$$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

است و برای هر x در دامنه این تابع داریم:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

تذکر: به همین ترتیب $f\circ g$ با دامنه $\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ تعریف می‌شود که برای هر x در این دامنه خواهیم داشت: $(f\circ g)(x) = f(g(x))$.

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\cos x$ باشند، $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$ را بدست آورید.

یعنی در تابع f به جای x، $g(x)$ بگذارید: $(f\circ g)(x) = f(g(x))$

$$= \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$$

یعنی در تابع g به جای x، $f(x)$ بگذارید: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

$$= \cos\sqrt{1-x^2}$$

مثال: اگر $f=\{(1,2),(2,-1),(-1,1),(0,2)\}$ و $g=\{(1,1),(2,0),(3,-1)\}$ باشند، توابع fog و gof را تشکیل دهید.

fog: ست چپ ها ی g را می‌نویسم و به g ها در برش نسبت می‌دهم. بعد f را اثر می‌دهم.

$$1 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 2$$
$$2 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} 2$$
$$3 \xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} 1$$

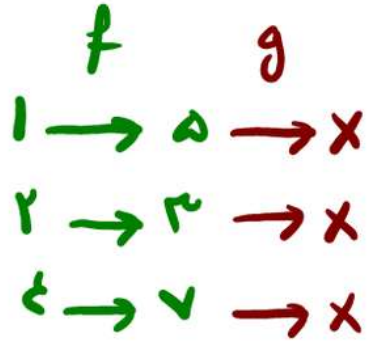
$$fog=\{(1,2),(2,2),(3,1)\}$$

gof: ست چپ ها ی f را می‌نویسم و به g ها در برش نسبت می‌دهم. بعد g را اثر می‌دهم.

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 0$$
$$2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} \times$$
$$-1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 1$$
$$0 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 0$$

$$gof=\{(1,0),(-1,1),(0,0)\}$$

مثال: اگر $f=\{(1,5),(2,3),(4,7)\}$ ، $g=\{(5,12),(3,11)\}$ باشند آیا gof تشکیل می‌شود؟ چرا؟



حاصل را: $R_f \cap D_g = \phi$

نتیجه: برای تشکیل gof باید $R_f \cap D_g \neq \phi$ باشد.

برای تشکیل fog باید $R_g \cap D_f \neq \phi$ باشد.

مثال: اگر $f(x)=\frac{2x-2}{x+1}$ ، $g(x)=\frac{x+2}{x-1}$ باشد، دامنه و ضابطه gof را به دست آورید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{\frac{2x-2}{x+1}+2}{\frac{2x-2}{x+1}-1}=\frac{\frac{2x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x-2-x-1}{x+1}}$$

$$(gof)(x)=\frac{4x}{x-3}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{-1\} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \underbrace{\mathbb{R} - \{-1\}}_{1} \mid \underbrace{\frac{2x-2}{x+1} \in \mathbb{R} - \{1\}}_{2}\}$$

۲: $\frac{2x-2}{x+1} \neq 1 \rightarrow 2x-2 \neq x+1 \rightarrow x \neq 3 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{3\}$

$1 \cap 2$

$$D_{gof} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x^2 - 7$ باشند، دامنه و ضابطه fog را بیابید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2-7-2} = \sqrt{x^2-9}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \qquad D_g = \mathbb{R} \qquad D_f = [2, +\infty)$$

$$= \{\underbrace{x \in \mathbb{R}}_{1} \mid \underbrace{x^2 - 7 \in [2, +\infty)}_{2}\}$$

۲: $x^2 - 7 \geq 2 \rightarrow x^2 \geq 9 \rightarrow x \geq 3$ یا $x \leq -3$

$1 \cap 2$: $D_{fog} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{3-2x}$, $g(x)=\frac{6}{3x-5}$ ضابطه fog را بنویسید. D_{fog}

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{3-2\times\frac{6}{3x-5}}=\sqrt{3-\frac{12}{3x-5}}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$D_g:\ 3x-5\neq 0\rightarrow x\neq\frac{5}{3}\qquad D_g=\mathbb{R}-\{\tfrac{5}{3}\}$$

$$D_f:\ 3-2x\geq 0\rightarrow -2x\geq -3\xrightarrow{\div(-2)} x\leq\frac{3}{2}\rightarrow D_f=(-\infty,\tfrac{3}{2}]$$

$$D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}-\{\tfrac{5}{3}\}\ \underbrace{\mid}_{1}\ \underbrace{\frac{6}{3x-5}\in(-\infty,\tfrac{3}{2}]}_{2}\}$$

۲:
$$\frac{6}{3x-5}\leq\frac{3}{2}\xrightarrow{\div 3}\frac{2}{3x-5}\leq\frac{1}{2}\rightarrow\frac{2}{3x-5}-\frac{1}{2}\leq 0$$

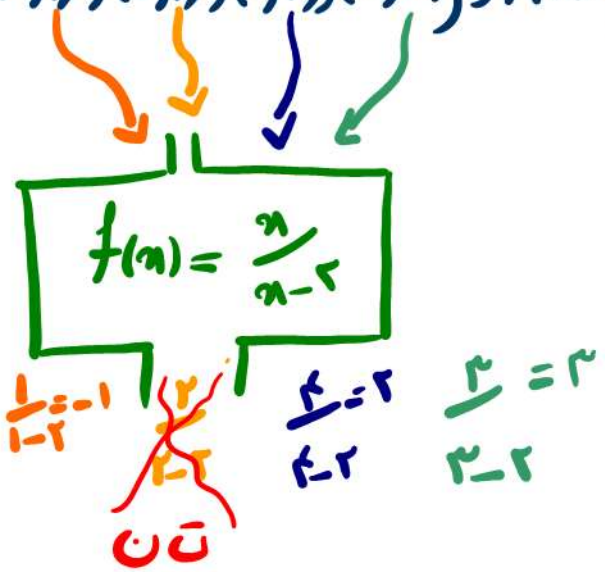
$$\frac{4-3x+5}{2(3x-5)}\leq 0\rightarrow\frac{9-3x}{2(3x-5)}\leq 0$$

x		$\frac{5}{3}$		3
$9-3x$	$+$	$+$	0	$-$
$3x-5$	$-$	0	$+$	$+$
	$-$	$\nexists$	$+$	$-$

$$\text{؟}\cdot 3=(-\infty,\tfrac{5}{3})\cup[3,+\infty)$$

$$①\cap②=D_{fog}=(-\infty,\tfrac{5}{3})\cup[3,+\infty)$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{x}{x-2}$ و $g=\{(0,1),(1,2),(3,4),(5,3)\}$ باشد، fog را بیابید.



$$fog=\{(0,-1),(3,2),(5,3)\}$$

نکته: اگر f و fog را داشته باشیم و بخواهیم g را محاسبه کنیم. چون f را داریم، تابع fog را تشکیل می‌دهیم و با fog داده شده مساوی قرار می‌دهیم. معادله حاصل را حل می‌کنیم تا $g(x)$ بدست آید.

مثال: اگر $(fog)(x)=\frac{2x}{x-1}$ و $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ باشد، ضابطه $g(x)$ را بیابید.

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)+1}{g(x)-2}=\frac{2x}{x-1}$$

$$2x(g(x)-2)=(x-1)(g(x)+1)$$

$$2xg(x) - 4x = xg(x) + x - g(x) - 1$$

$$2xg(x) - xg(x) + g(x) = 4x + x - 1$$

$$xg(x) + g(x) = 5x - 1 \Rightarrow g(x)(x+1) = 5x - 1 \rightarrow g(x) = \frac{5x-1}{x+1}$$

نکته: اگر g و fog را داشته باشیم و بخواهیم f را بدست آوریم، ابتدا g را مساوی t می‌گیریم و x را برحسب t بدست می‌آوریم و در fog قرار می‌دهیم تا $f(t)$ بدست آید. ($f(t)$ همان $f(x)$ است فقط به جای t، x می‌نویسیم.)

مثال: اگر $f(\frac{x+1}{x}) = \frac{2x}{x-1}$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

$$g(x) = \frac{x+1}{x} = \frac{t}{1} \rightarrow xt = x + 1 \rightarrow xt - x = 1$$

$$\rightarrow x(t-1) = 1 \rightarrow x = \frac{1}{t-1}$$

$$f(\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{t}) = \frac{2x}{x-1} \rightarrow f(t) = \frac{2 \times \frac{1}{t-1}}{\frac{1}{t-1} - 1} = \frac{\frac{2}{t-1}}{\frac{1-t+1}{t-1}}$$

$$f(t) = \frac{2}{-t+2} \xrightarrow{t \to x} f(x) = \frac{2}{2-x}$$

نکته: ترکیب تابعی مانند f با خودش را بصورت $f \circ f$ می‌نویسند.

مثال: اگر $f=\{(2,1),(3,5),(7,2),(5,9),(4,3)\}$ ، $f \circ f$ را بیابید.

f f

$2 \to 1 \to X$

$3 \to 5 \to 9$

$7 \to 2 \to 1$

$5 \to 9 \to X$

$4 \to 3 \to 5$

$f \circ f=\{(3,9),(7,1),(4,5)\}$

مثال: اگر $f=\{(1,2),(3,-1),(4,5)\}$ باشد، $f \circ f^{-1}$ ، $f^{-1} \circ f$ را بیابید.

$f^{-1}=\{(2,1),(-1,3),(5,4)\}$

$f \circ f^{-1}$:

$2 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{f} 2$

$-1 \to 3 \to -1$

$5 \to 4 \to 5$

$f \circ f^{-1}=\{(2,2),(-1,-1),(5,5)\}$

$f^{-1}f$:

$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f^{-1}} 1$

$3 \to -1 \to 3$

$4 \to 5 \to 4$

$f^{-1}f = \{(1,1), (3,3), (4,4)\}$

نکته: اگر f تابعی وارون پذیر باشد آنگاه:

$$(f^{-1}\circ f)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

$$(f\circ f^{-1})(x) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

توجه کنید عکس گزاره بالا هم درست است یعنی اگر دو تابع در دو تساوی بالا صدق کنند آنگاه f تابعی وارون پذیر است که وارون آن f^{-1} خواهد بود.

مثال: ثابت کنید $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$ ، $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$ وارون یکدیگرند.

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = -\frac{7}{2}\times\left(-\frac{2x+6}{7}\right) - 3$$

$$= \frac{2(x+3)}{2} - 3$$

$$= x + 3 - 3 = x$$

به عنوان تمرین ثابت کنید: $(g\circ f)(x) = x$

مثال: دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-1}$ داده شده‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a))=6$ باشد، a را بدست آورید.

$$f^{-1}(g(2a))=6 \longrightarrow g(2a)=f(4)=3$$

$$3=\frac{2a}{2a-1} \longrightarrow 6a-3=2a \longrightarrow 4a=3$$

$$\longrightarrow a=\frac{3}{4}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس چهارم : اعمال روی توابع

جلسه یازدهم و دوازدهم : حل تمرین صفحات ۶۹و۷۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱ اگر $f(x)=۴x$ و $g(x)=۲-x$، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f-g$ و fog را به همراه دامنهٔ آنها به‌دست آورید.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۴x}{۲-x} \qquad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}$$

$$=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{x\mid ۲-x^{۲}=۰\}=\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۴x-(۲-x)=۴x-۲+x=۵x-۲$$

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=۴(۲-x)=۸-۴x$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\mid ۲-x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

۲ برای دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۴}{x}$ تابع fog و دامنهٔ آن را به‌دست آورید.

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۱}{\frac{۴}{x}-۳}=\frac{۱}{\frac{۴-۳x}{x}}=\frac{x}{۴-۳x}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{۳\}\ ,\qquad D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{4}{x} \in \mathbb{R} - \{3\}\}$$

(1) (2)

(2): $\frac{4}{x} \neq 3 \rightarrow 3x \neq 4 \rightarrow x \neq \frac{4}{3}$

$$(1) \cap (2) = D_{fog} = \mathbb{R} - \{0, \frac{4}{3}\}$$

---

۳ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(۴) = ۷$ و $f(۷) = ۵$ آن‌گاه $(fog)(۴) = ۳۵$

ب) اگر $f(x) = x + ۴$ و $g(x) = ۳x$ آن‌گاه $(\frac{f}{g})(۲) = ۱$

پ) اگر $g(x) = ۲x - ۱$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن‌گاه $(fog)(۵) = g(۲)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $fog = gof$

ث) اگر $f(x) = x^۲ - ۴$ و $g(x) = \sqrt{x^۲ - ۴}$، آن‌گاه $(fog)(۵) = -۲۵$ و $(fog)(x) = -x^۲$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg = gf$

الف) نادرست است زیرا: $(fog)(۴) = f(g(۴)) = f(۷) = ۵ \neq ۳۵$

ب) درست است زیرا: $(\frac{f}{g})(۲) = \frac{f(۲)}{g(۲)} = \frac{۲+۴}{۳\times۲} = \frac{۶}{۶} = ۱$

پ) درست است زیرا: $(fog)(۵) = f(g(۵)) = f(۹) = \sqrt{۹} = ۳$

$g(۲) = ۲\times۲ - ۱ = ۳$

ت) نادرست است . مثال نقض :

$f(x)=x^2+5 \qquad g(x)=\sqrt{x}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x})^2+5=x+5$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2+5}$

$\Rightarrow f\circ g \neq g\circ f$

ث) نادرست است زیرا :

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x^2-4})^2-4=x^2-4-4=x^2-8\neq -x^2$

ج) درست است زیرا :

$(fg)(x)=f(x)\times g(x)=g(x)\times f(x)=(gf)(x)$

$fg=gf$

۴ فرض کنیم $\begin{cases} g:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ g(n)=2n \end{cases}$ و $f:A\to\mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود : $f=\{(1,2),(2,3),(3,5),(4,7)\}$ که در آن :

$A=\{1,2,3,4\}$، توابع $f+g$ و gof را به‌دست آورید.

$D_f=\{1,2,3,4\} \qquad D_g=\mathbb{N} \rightarrow D_f\cap D_g=\{1,2,3,4\}$

$g=\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$

$$f+g=\{(1,4),(2,7),(3,11),(4,15)\}$$

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 4$$
$$2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6$$
$$3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 10$$
$$4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 14$$

$$gof=\{(1,4),(2,6),(3,10),(4,14)\}$$

۵ اگر $f=\{(-4,13),(-1,7),(0,5),(\frac{5}{2},0),(3,-5)\}$ و $g=\{(-4,-7),(-2,-5),(0,-3),(3,0),(5,2),(9,6)\}$

توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

$$D_f \cap D_g=\{-4,0,3\}$$

$$f+g=\{(-4,7),(0,2),(3,-5)\}$$

$$f-g=\{(-4,13-(-7)),(0,5-(-3)),(3,-5-0)\}$$

$$=\{(-4,20),(0,8),(3,-5)\}$$

$$\frac{f}{g}=\{(-4,\frac{13}{-7}),(0,-\frac{5}{3}),(3,\frac{-5}{0})\}$$

۶ اگر $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

D_f: $x^2+5\geq 0 \rightarrow D_f=\mathbb{R}$

D_g: $4-x^2\geq 0 \rightarrow -x^2\geq -4 \xrightarrow{\div(-1)} x^2\leq 4 \rightarrow -2\leq x\leq 2$

$D_g=[-2,2]$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[-2,2] \mid \sqrt{4-x^2}\in\mathbb{R}\}=[-2,2]$

$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{(\sqrt{4-x^2})^2+5}=\sqrt{4-x^2+5}=\sqrt{9-x^2}$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \sqrt{x^2+5}\in[-2,2]\}$

* : $\sqrt{x^2+5}\in[0,2]$: حاصل رادیکال با فرجه زوج هیچ‌گاه منفی نمی‌شود پس

$0\leq \sqrt{x^2+5}\leq 2$

$\rightarrow x^2+5\leq 4 \rightarrow x^2\leq -1$ غیرممکن

$*\ [2,3]=\emptyset \rightarrow D_{gof}=\emptyset \rightarrow$ gof تشکیل نمی‌شود

۷ اگر $f(x)=x^۲-۹$ و $g(x)=x+۳$، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۹}{x+۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳\ ,\ D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}$$

$x+۳$ از صورت و مخرج بدون در نظر گرفتن اینکه $x+۳\neq ۰$ باشد، ساده شده است

درست: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳\ ;\ x\neq -۳$

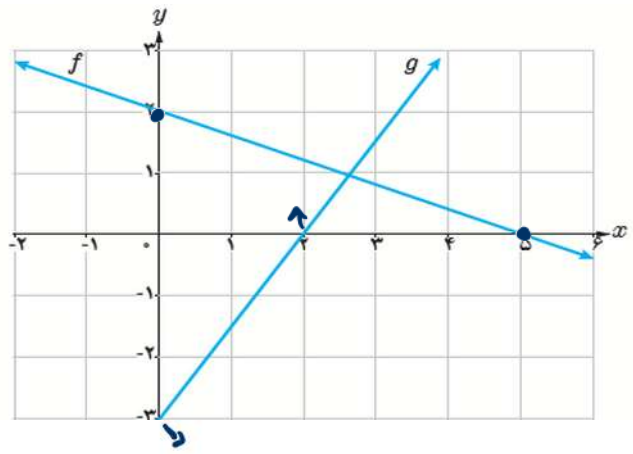
۸ اگر $f(x)=۲x+۵$، $f^{-۱}(x)$، $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به‌دست آورید.

$$y=۲x+۵ \longrightarrow y-۵=۲x \longrightarrow x=\frac{y-۵}{۲} \longrightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$$

$$(f^{-۱}of)(x)=f^{-۱}(f(x))=\frac{۲x+۵-۵}{۲}=\frac{۲x}{۲}=x\ ;\ x\in D_f=\mathbb{R}$$

$$(fof^{-۱})(x)=f(f^{-۱}(x))=۲\frac{x-۵}{۲}+۵=x-۵+۵=x\ ;\ x\in D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$$

۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.



$f: (0,2), (5,0) \rightarrow y-2=\frac{0-2}{5-0}(x-0) \rightarrow f(x)=-\frac{2}{5}x+2$

$g: (2,0), (0,-3) \rightarrow y+3=\frac{-3-0}{0-2}(x-0) \rightarrow g(x)=\frac{3}{2}x-3$

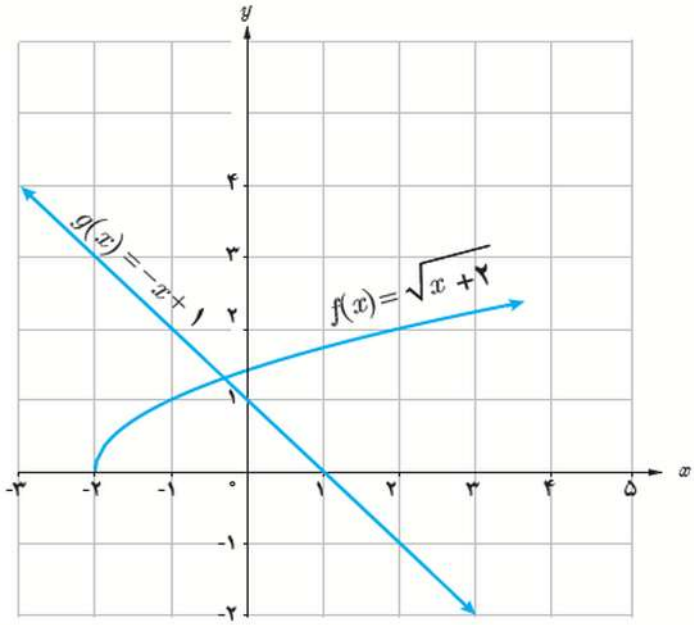
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-\frac{2}{5}x+2+\frac{3}{2}x-3=\frac{11}{10}x-1$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=-\frac{2}{5}x+2-\frac{3}{2}x+3=\frac{-19}{10}x+5$

$(fg)(x)=f(x)g(x)=(-\frac{2}{5}x+2)(\frac{3}{2}x-3)$

$D_{f\pm g}=D_f \cap D_g=\mathbb{R}$

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



الف) $(f+g)(2)$

$f(2)+g(2) = \sqrt{2+2} + (-2+1) = 2-1 = 1$

ب) $(f+g)(-3)$

$f(-3)+g(-3) = \sqrt{-3+2}+g(-3) =$ تعریف نشده

(تعریف نشده)

پ) $(fg)(\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2}) \times g(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1}{2}+2} \times (-\frac{1}{2}+1)$

$= \sqrt{\frac{5}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$

ت) $(fog)(-۴)$

$$f(g(-۴)) = f(-۱-۴+۱) = f(۵) = \sqrt{۵+۲} = \sqrt{۷}$$

ث) $(\frac{f}{g})(۰)$

$$\frac{f(۰)}{g(۰)} = \frac{\sqrt{۰+۲}}{۰+۱} = \sqrt{۲}$$

ج) $(gof)(-۱)$

$$g(f(-۱)) = g(\sqrt{-۱+۲}) = g(۱) = -۱+۱ = ۰$$

۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به‌صورت $y = ax + b$ $(a \neq ۰)$ باز هم یک تابع خطی است.

$$y = ax+b \longrightarrow y-b = ax \xrightarrow{\div a} x = \frac{y-b}{a}$$

$$f^{-۱}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{۱}{a}x - \frac{b}{a} \quad (a \neq ۰)$$

$f^{-۱}$ هم تابع خطی شد.

۱۲ تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

وارون f را می‌یابیم:

$$y=\frac{۵}{۹}(x-۳۲) \xrightarrow{\times \frac{۹}{۵}} \frac{۹}{۵}y=x-۳۲$$

$$\frac{۹}{۵}y+۳۲=x \longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$$

x: سانتی‌گراد

f^{-1}: فارنهایت

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزهٔ خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.

کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به‌چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دوکتاب را برحسب شماره چاپ نمایش دهند.

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شدهٔ هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

الف)

$$f(n)=۱۰۰۰۰+(n-۱)(۷۰۰۰) \qquad n\geq ۱$$

$$g(n)=۲۰۰۰۰+(n-۱)(۹۰۰۰) \qquad n\geq ۱$$

ب)

$$(f+g)(n)=f(n)+g(n)=۳۰۰۰۰+(n-۱)(۱۶۰۰۰) \; ; n\geq ۱$$

ت) برای ساده‌ترشدن رسم بهتر است روی محورها واحد را هزار نسخه درنظر بگیریم:

$$f(n)=۱۰+(n-۱)۷=۷n-۷+۱۰=۷n+۳ \; ; \; n\geq ۱$$

$$g(n) = ۲۰ + (n-۱)۹ = ۹n - ۹ + ۲۰ = ۹n + ۱۱ \quad ; \quad n \geq ۱$$

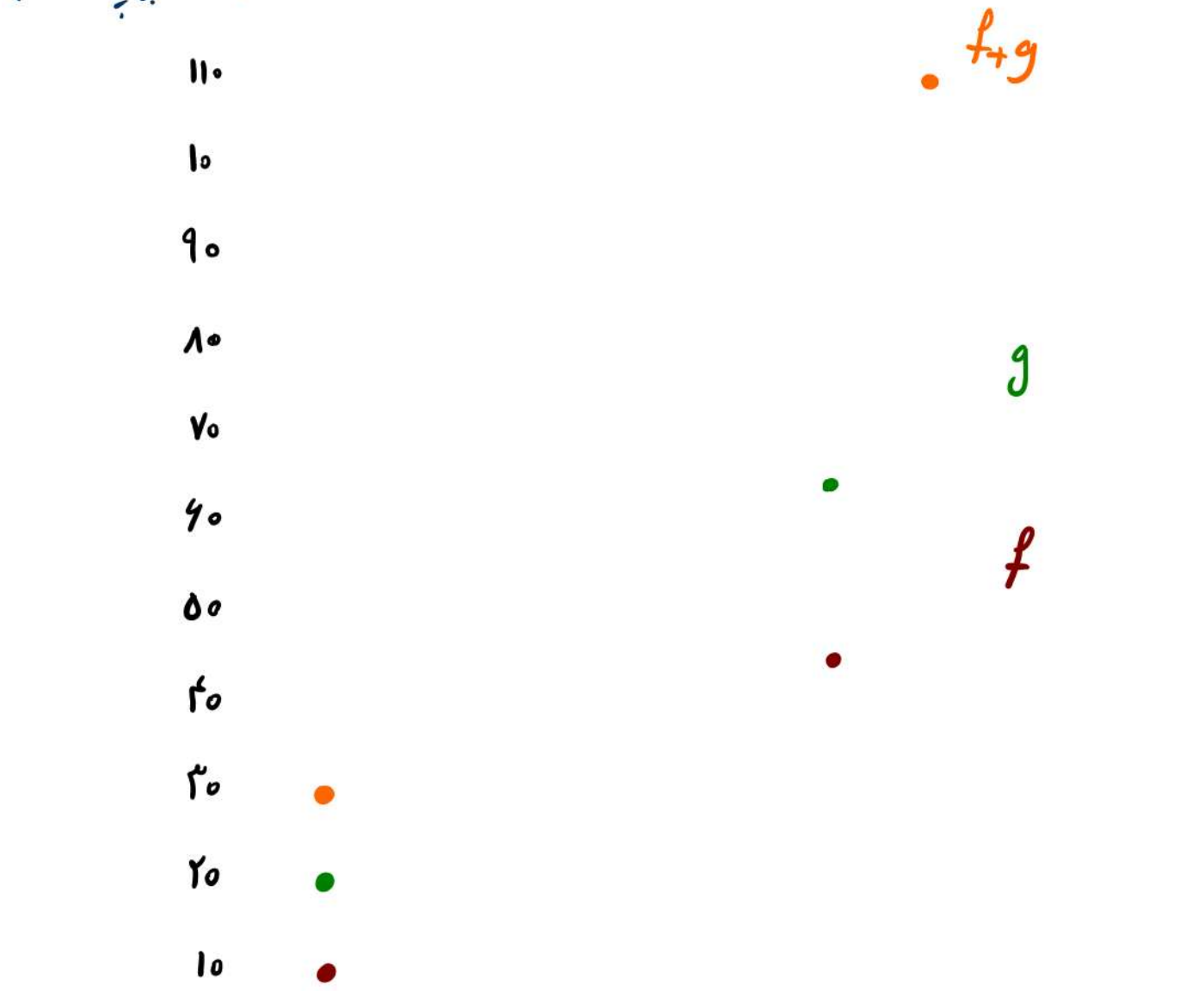
$$(f+g)(n) = ۳۰ + (n-۱)۱۴ = ۱۴n - ۱۴ + ۳۰ = ۱۴n + ۱۶ \quad ; \quad n \geq ۱$$

n	۱	۲
$f(n)$	۱۰	۴۵

n	۱	۲
$g(n)$	۳۰	۵۲

n	۱	۲
$f+g$	۳۰	۱۱۰

مقدار نسخه‌های چاپ (هزار نسخه)



شماره چاپ

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی قسمت اول

جلسه اول: صفحات ۷۲ تا ۷۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تابع نمایی :

تعریف : اگر a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد، تابع $f(x)=a^x$ را تابع نمایی می‌نامیم.

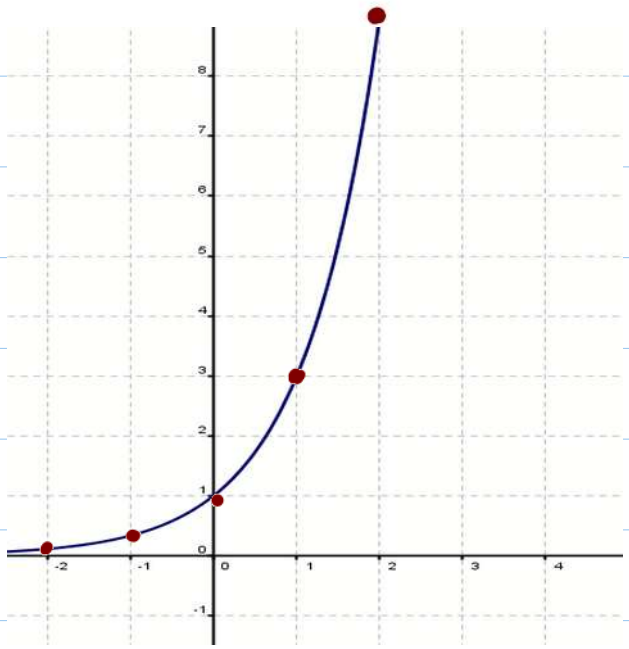
$y=2^x$ و $y=(\frac{2}{5})^x$ و $y=(\sqrt{3})^x$ تابع نمایی و $y=1^x$ و $y=(-4)^x$ نمایی نیستند.

برای اینکه اطلاعات بیشتری از تابع نمایی بدست آوریم نیاز به رسم آن را داریم.

برای نمونه دو تابع $y=3^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ را رسم می‌کنیم و نتیجه را تعمیم می‌دهیم.

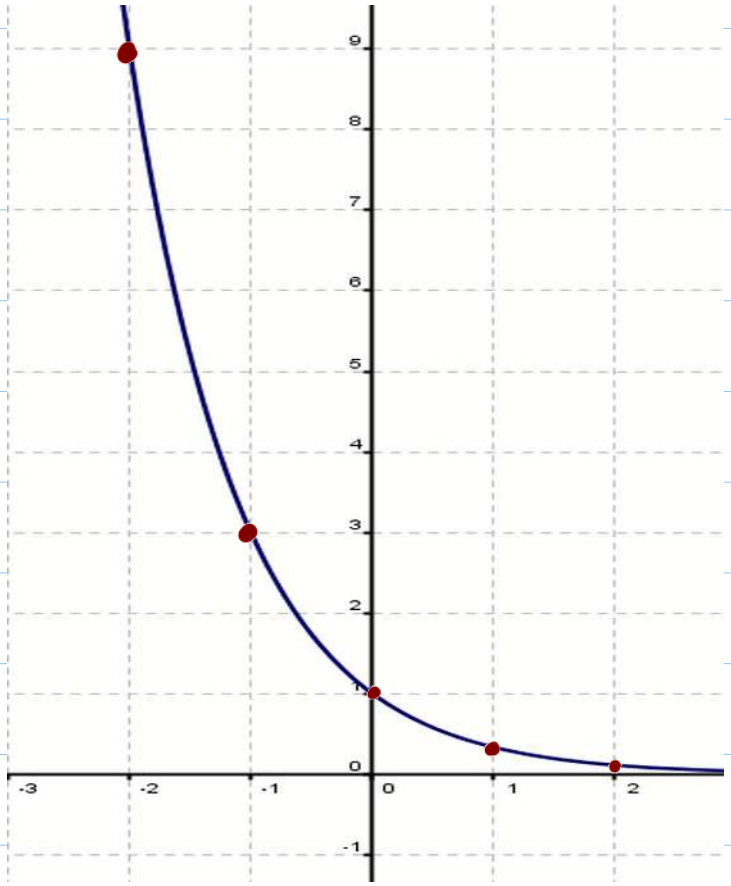
الف) $y=3^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$3^{-2}=\frac{1}{9}$	$3^{-1}=\frac{1}{3}$	1	3	9



ب) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$



نتیجه: الف) اگر $a>1$ باشد نمودار تابع نمایی $f(x)=a^x$ به صورت زیر است:

$D=\mathbb{R}$, $R=(0,+\infty)$

تابع یک به یک است

با افزایش مقادیر x، yها هم افزایش می‌یابند.

ب) اگر $0<a<1$ باشد نمودار تابع نمایی $f(x)=a^x$ به صورت زیر است:

$D=\mathbb{R}$, $R=(0,+\infty)$

تابع یک به یک است

با افزایش مقادیر x، yها کاهش می‌یابند.

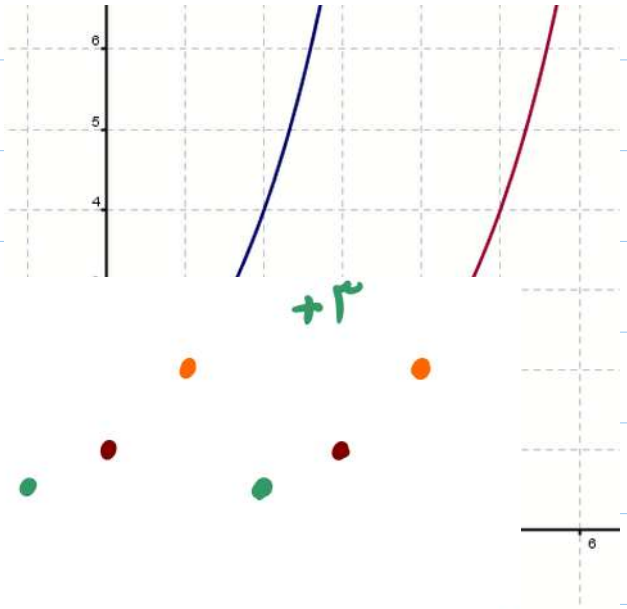
فرم کلی تابع نمایی: $y=ba^{cx+d}+f$ یک تابع نمایی به شرطهای گفته شده برای a به صورت می باشد که b,c,d,f اعداد حقیقی و $b,c\neq 0$ هستند.

نکته: از نقطه یابی و جدول انتقال برای رسم نمودار توابع نمایی کمک می گیریم.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

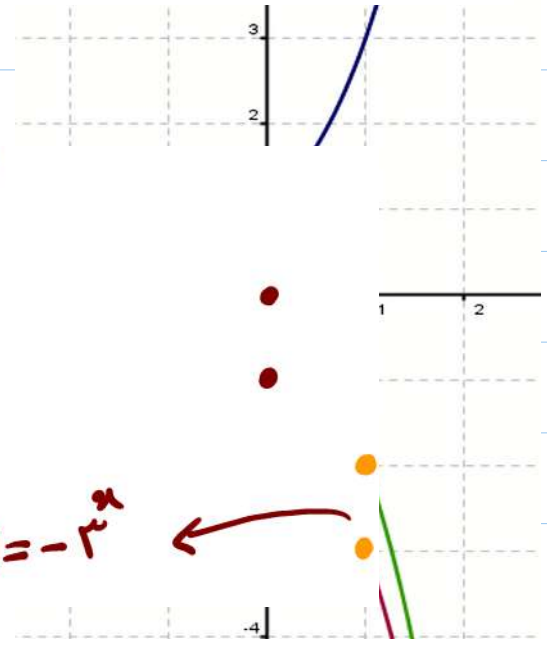
1) $f(x)=2^{x-3}$

$y=2^x$ $\quad$ $y=2^{x-3}$



2) $f(x)=1-3^x$

$y=3^x$



انتقال نمودار $y=1-3^x$

$y=-3^x$ قرینه نسبت به محور xها

$y=(\frac{1}{2})^x$

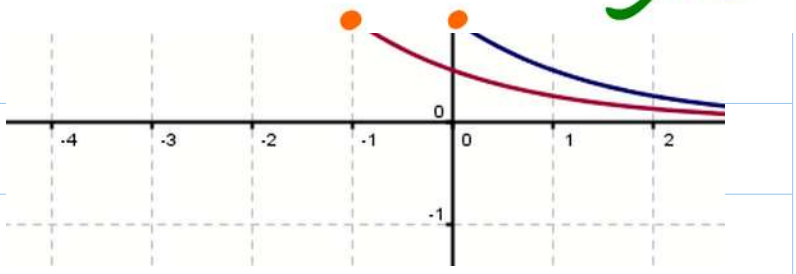
۳) $f(x)=(\frac{1}{2})^{x+1}+2$

انتقال اصلی $y=(\frac{1}{2})^{x+1}$ ←



$y=(\frac{1}{2})^{x+1}+2$

انتقال بعدی



۴) $f(x)=3^{-x+2}+1$

نقطه‌یابی : توان $=0 \rightarrow -x+2=0 \rightarrow x=2$

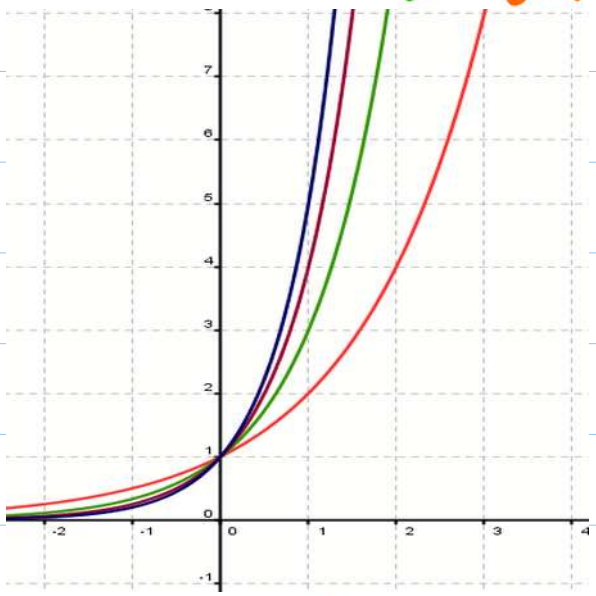
x	۲	۳	۴
y	۴	۲	$3^{-1}+1=\frac{4}{3}$



مقایسه توابع نمایی $y=a^x$ ، $y=b^x$ ، $y=c^x$ ، ...

(الف) اگر پایه‌ها بزرگتر از یک باشند هرچه پایه بزرگتر شود نمودار تابع در راستای افقی فشرده‌تری شود و به محور y ها نزدیک‌تری شود.

$y=5^x$ $y=4^x$ $y=3^x$ $y=2^x$



ب) اگر پایه‌ها بین صفر و یک باشند هرچه پایه بزرگتر باشد نمودار در راستای افقی کشیده‌تر می‌شود و از محور y ها دورتری شود.

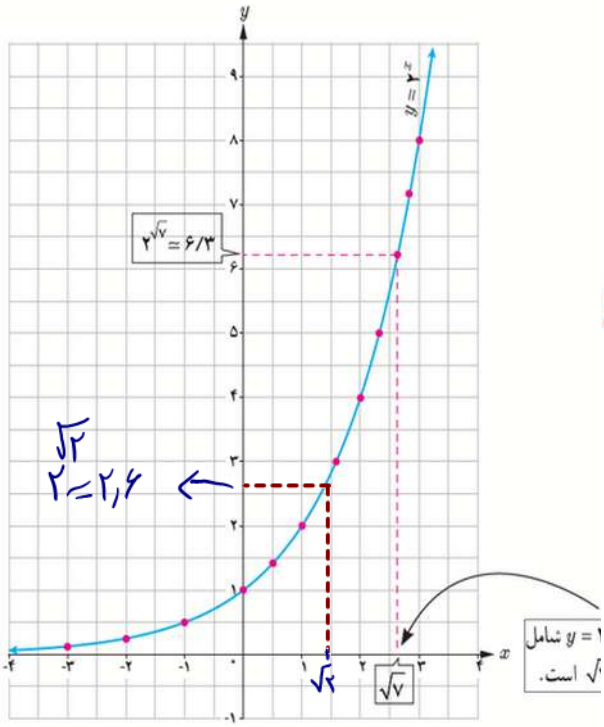
$y=(\frac{1}{2})^x$ $y=(\frac{1}{3})^x$ $y=(\frac{1}{4})^x$ $y=(\frac{1}{5})^x$



فعالیت کتاب درسی :

(الف)

$2^{\sqrt{2}} \simeq 2,6$



ب)

$y = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$

نمودار $y = 2^x$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

پ)

با توجه به نمودار تابع نمایی داریم:

$2^4 > 2^3 > 2^2 > 2^1 > (\frac{1}{2})^1 > (\frac{1}{2})^2 > (\frac{1}{2})^3 > (\frac{1}{2})^4$

نتیجه: در سال‌های گذشته با توان‌های گویا آشنا شدیم. با تعریف تابع نمایی، از توان‌های حقیقی هم با همان ویژگی‌های توان‌های گویا استفاده می‌کنیم.

ویژگی‌های توان حقیقی:

1) $a^0 = 1$

2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

3) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

4) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

5) $(a \times b)^x = a^x \times b^x$

6) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

7) $(a^x)^y = a^{xy}$

مثال: اگر $f(x)=8^x$ و $g(x)=2^{2x+5}$، حاصل $f(\frac{x}{3})g(x-2)$ را بیابید.

$$f(\frac{x}{3})=8^{\frac{x}{3}}=(2^3)^{\frac{x}{3}}=2^x$$

$$g(x-2)=2^{2(x-2)+5}=2^{2x-4+5}=2^{2x+1}$$

$$f(\frac{x}{3})g(x-2)=2^x\times 2^{2x+1}=2^{x+2x+1}=2^{3x+1}$$

معادله‌های نمایی:

معادله‌ای که در آن مجهول در توان (نما) قرار گرفته است را معادله نمایی می‌گوییم.

چون تابع نمایی یک به یک است هرگاه a حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد، اگر $a^x=a^y$ آنگاه $x=y$. پس برای حل معادلات نمایی در صورت لزوم پایه‌ها را یکی می‌کنیم و با حذف پایه‌ها یکسانی قرار دارند توان‌ها را حل معادله حاصل، مجهول به دست می‌آید.

مثال: معادله $(\frac{2}{3})^{x+2}=(\frac{81}{16})^{1-x}$ را حل کنید.

$$(\frac{81}{16})^{1-x}=(\frac{3^4}{2^4})^{1-x}=((\frac{3}{2})^4)^{1-x}=(\frac{2}{3})^{-4(1-x)}=(\frac{2}{3})^{-4+4x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x+4}$$

$$\rightarrow \quad x+2 = -2x+4 \longrightarrow \quad 5x = 2 \longrightarrow x = \frac{2}{5}$$

نامعادله‌های نمایی :

اگر a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد داریم :



ب) اگر $0<a<1$ و $a^x > a^y$ آنگاه $x<y$.



یعنی در صورت ضرب طرفین نامساوی در یک عدد منفی جهت نامساوی عوض می‌شود. اگر پایه بزرگتر از یک باشد با حذف پایه‌ها جهت نامساوی عوض نمی‌شود ولی اگر پایه بین صفر و یک باشد با حذف پایه‌ها

جهت نامساوی عوض می‌شود.

مثال: مجموعه جواب نامعادله $4^{x-3} < 32^{5-x}$ را بیابید.

$$(2^2)^{x-3} < (2^5)^{5-x} \Rightarrow 2^{2(x-3)} < 2^{5(5-x)}$$

$$\xrightarrow{2>1} 2(x-3) < 5(5-x)$$

$$\rightarrow 2x-6 < 25-5x \rightarrow 7x < 31 \rightarrow x < \frac{31}{7}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی های آن

جلسه دوم: کاربرد تابع نمایی

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

کاربرد توابع نمایی

به صورت کلی یک تابع با ضابطه $f(x)=ka^x$ که $k\in\mathbb{R}$ و a عدد حقیقی، مثبت و مخالف یک است، رفتارهای نمایی دارد که کاربرد فراوانی در مسائل زیستی، اقتصادی، مهندسی و ... دارد.

مفهوم رشد نمایی

مثال های زیر را در نظر بگیرید:

- باکتری ها می توانند هر ۲۴ ساعت یک بار دو برابر شوند.

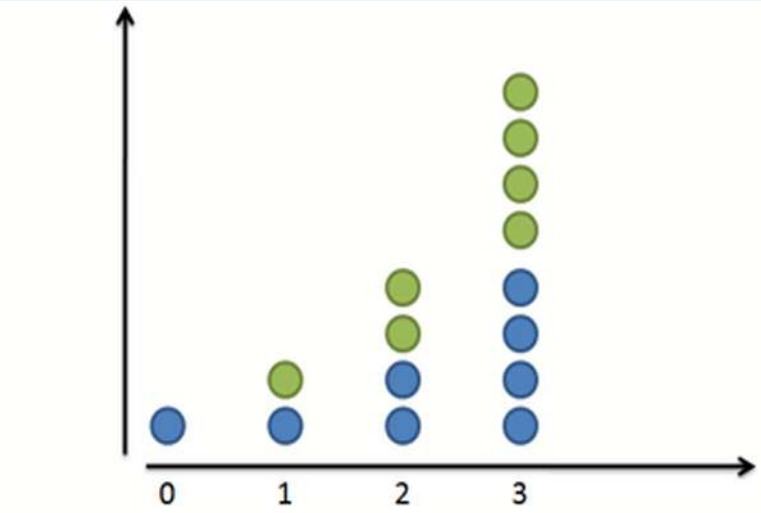
- اگر نرخ سود سالانه ٪۱۰۰ روی سرمایه خود داشته باشید، هر سال سرمایه شما دو برابر خواهد شد.

برای این مسائل می توانیم رفتارهای را به صورت $f(x)=2^x$ بنویسیم. از طرفی چون دو برابر کردن، همان رشد ٪۱۰۰ است رابطه بالا را می توان به صورت زیر هم نوشت:

$$f(x) = (1 + 100\%)^x$$

این همان معادله قبل است. فقط ۲ را به آن چیزی که واقعاً هست تغییر داده‌ایم.

یعنی مقدار ۱ اولیه بعلاوه ۱۰۰٪.



می‌توانیم هر عددی را به جای ۱۰۰٪ بنویسیم مثل ۵۰٪، ۲۵٪، ۲۰۰٪ و...

و فرمول رشد را برای آن نرخ رشد بدست آوریم.

معادله کلی رشدنمایی به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است که در آن $f(t)$

مقدار نهایی، c مقدار اولیه و r بیانگر میزان رشد یا نرخ رشد و t زمان است.

تذکر: تابع $f(t) = c(1-r)^t$ را زوال نمایی می‌گویند.

مثال ۱) : مقدار k گرم باکتری در هر ساعت، ۱٫۵ برابر می‌شود. اگر بعد از دو ساعت مقدار باکتری ۴٫۵ گرم باشد، در پایان ساعت سوم مقدار باکتری‌ها چند گرم خواهد شد؟

$$f(t) = k(1,5)^t$$

$$f(2) = 4,5 \xrightarrow{\text{زمان}} f(2) = 4,5 = k(1,5)^2$$

$$k(1,5)^2 = 4,5 \rightarrow k = \frac{4,5}{(1,5)^2} = \frac{4,5}{2,25} = 2$$

$$f(3) = 2(1,5)^3 = 2 \times 3,375 = 6,75 \text{ gr}$$

مثال ۲) قیمت یک کالا ۴۰۰ تومان است وی به طور سالیانه با نرخ تورم ۳۰ درصد رو به افزایش است. قیمت آن دو سال دیگر چقدر خواهد بود؟

$$f(t) = c(1+r)^t \Rightarrow f(2) = 400\left(1 + \frac{30}{100}\right)^2$$

$$f(2) = 400 \times (1,3)^2 = 400 \times 1,69 = 676 \text{ تومان}$$

مثال ۳) اگر جمعیت یک کشور با طرحهای با ضریب ثابت ۰/۲ در سال کاهش یابد

پس از چند سال، جمعیت این کشور ۰/۸ برابر جمعیت اولیه می شود؟

($(0/98)^5 \simeq 0/9$ ، $(0/9)^2 \simeq 0/8$)

$$f(t) = c(1-r)^t$$

$$\begin{cases} r = 0/2 \\ f(t) = 0/8c \end{cases} \Rightarrow 0/8c = c(1-0/2)^t$$

$$\div c \Rightarrow 0/8 = (0/98)^t$$

$$0/8 \simeq (0/9)^2 \longrightarrow (0/9)^2 = (0/98)^t \xrightarrow{0/9 \simeq (0/98)^5} ((0/98)^5)^2 = (0/98)^t$$

$$\Rightarrow (0/98)^{10} = (0/98)^t \Rightarrow t = 10$$

مفهوم نیمه عمر:

منظور از نیمه عمر یک ماده، مدت زمانی است که پس از آن از مقدار اولیه آن از بین می رود.

اگر A_0 مقدار اولیه و A مقدار ماده بعد از n نیمه عمر باشد خواهیم داشت:

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

برای یافتن تعداد نیمه عمر از رابطه مقابل کمک می گیریم : $n = \frac{\text{کل مدت زمان } t}{\text{طول نیمه عمر } T}$

مثال ۴) نیمه عمر یک ماده ۴۰ سال است. اگر در ابتدا ۱۰۰ میلی گرم از این ماده موجود باشد، بعد از ۸۰ سال چند میلی گرم از این ماده از بین می رود؟

$$\begin{cases} T = 40 \\ A_0 = 100 \\ t = 80 \\ A = \text{مقدار ماده بعد از ۸۰ سال} \end{cases}$$

$$n = \frac{t}{T} = \frac{80}{40} = 2$$

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow A = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 100 \times \frac{1}{4} = 25$$

مقدار ماده ای که بعد از ۸۰ سال از بین می رود $= 100 - 25$

$\downarrow$

۷۵ میلی گرم

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی های آن

جلسه سوم: حل تمرین صفحات ۷۷ تا ۷۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک تودهٔ معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

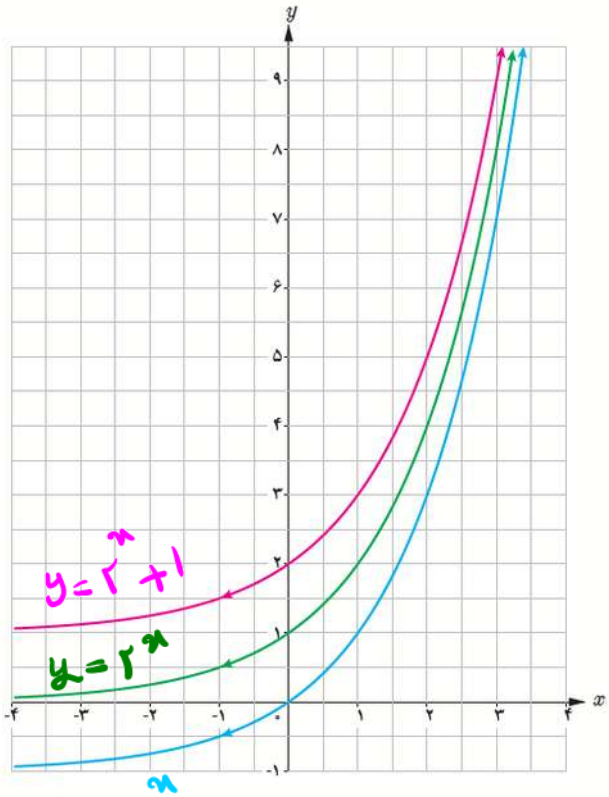
الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

الف) $f(t) = 100 \times 2^t$

ب) $f(20) = 100 \times 2^{20}$

۲ نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 2^x + 1$ و $y = 2^x - 1$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y = a^x$ ، $y = a^x + 2$ و $y = a^x - 2$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $(a > 1)$.



برای رسم تابع $y = a^x + 2$ ، نمودار $y = a^x$ را دو واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

برای رسم تابع $y = a^x - 2$ ، نمودار $y = a^x$ را دو واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

۳ داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t)=10(0/8)^t$ به‌دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

الف) $A(8)=10(0.8)^8 \approx 1.67$

ب) $A(0)=10$, $A(1)=10(0.8)^1=8$

درصد تغییرات $=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}\times 100=\frac{8-10}{10}\times 100=-\frac{2}{10}\times 100=-20\%$

بیست درصد

$3^{2/5} < 3^{2/8} < 3^{2/9} < 3^{3} < 3^{\sqrt{10}}$

ب) نامعادلهٔ توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید.

$(2^2)^{2x-1} > \frac{1}{2^{10}} \rightarrow 2^{4x-2} > 2^{-10}$

$\xrightarrow{2>1} 4x-2 > -10 \rightarrow 4x > -8$

$\longrightarrow x > -2$

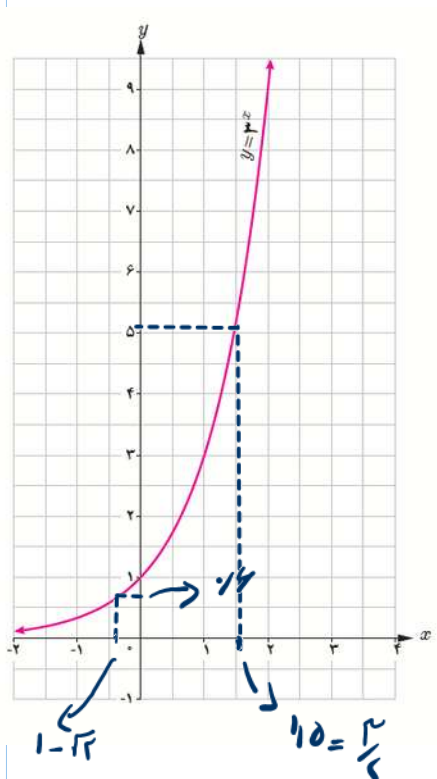
پ) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری که $a^x > a^y > a^z$ ، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ $(a>1)$.

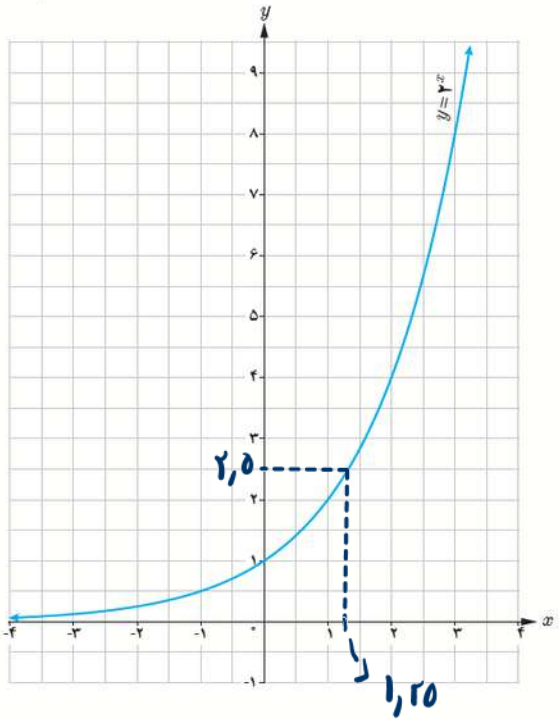
$x>y>z$

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

الف) $3^{1-\sqrt{2}}$ ب) $2^{1/25}$ پ) $3^{\frac{3}{2}}$

$1-1,4 = -0,4$





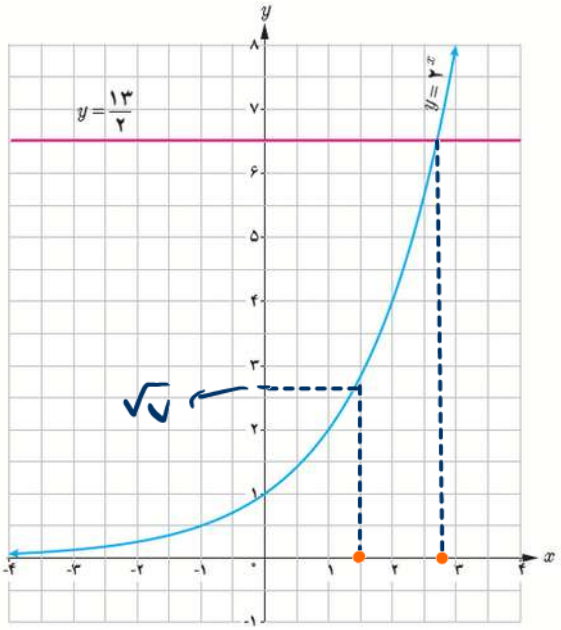
$3^{1-\sqrt{2}} \approx 0,4$

$3^{\frac{3}{2}} \approx 5,19$

$2^{1,25} \approx 2,37$

۶ الف) در شکل زیر خط $y=\frac{۱۳}{۲}$ نمودار $y=۲^x$ را قطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟چرا؟

ب) خط $y=\sqrt{۷}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y=۲^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



الف) $۲<x<۳$

ب) $۱<x<۲$

۷ در تصفیهٔ آب، داخل فیلترها، لایهٔ تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه ۰/۴۹ = ۰/۷ × ۰/۷ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

الف) $f(x)=(۰/۷)^x$ + تعداد لایه‌های فیلتر

ب) + $(۰/۷)^x$ درصد از ناخالصی‌ها باقی‌مانده

$(\%۱۷)^t < \frac{۴}{۱۰۰} \rightarrow (\%۱۷)^t < \%۰.۴$

با لگاریتم گیری $\rightarrow t \geq ۱۰$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم قسمت اول

جلسه چهارم: صفحات ۸۰ تا ۸۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

مقدمه :

انگیزه اصلی برای تعریف تابع لگاریتم یا معکوس لگاریتم، ساده کردن عملیات پیچیده ضرب است. همچنین لگاریتم گیری از اعداد، مقیاس آنها را کوچکتر می کند.

لگاریتم یک عدد در یک پایه، برابر با توانی از پایه است که آن عدد را می دهد. عنوان مثال لگاریتم ۸ در پایه ۲ برابر ۳ است زیرا : $8 = 2\times2\times2 = 2^3$

در واقع حاصل $\log_2^8$ جواب این سوال است که چه تعداد از عدد ۲ را باید در هم ضرب کنیم تا عدد ۸ بدست آید؟ $\log_2^8 = 3$

از طرف دیگر می توان لگاریتم را وارون تابع نمایی در نظر گرفت.

بعنوان مثال تابع $f(x) = 2^x$ را در نظر بگیرید. اگر ورودی یعنی x، ۳ باشد خروجی یعنی y برابر ۸ می شود: $(3,8) \in f$. تابع وارون این تابع باید y را بگیرد و x را بدهد مثلاً ۸ را بگیرد و ۳ را بدهد : $(8,3) \in f^{-1}$. طبق آنچه در بالا گفتیم این تابع را

لگاریتم در پایه ۲ تعریف می‌کنیم :

$$y = 2^x \Rightarrow \log_2 y = x$$

پس x را برحسب y حساب کردیم. طبق آنچه در فصل تابع برای یافتن وارون تابع گفتیم باید x را به $f^{-1}(x)$ و y را به x تبدیل کنیم پس :

$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$

تعریف : اگر a عدد حقیقی، مثبت و مخالف یک باشد تابع $f(x) = a^x$ یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است. وارون این تابع را تابع لگاریتم با پایه a می‌نامیم و آن را با $f^{-1}(x) = \log_a^x$ نمایش می‌دهیم.

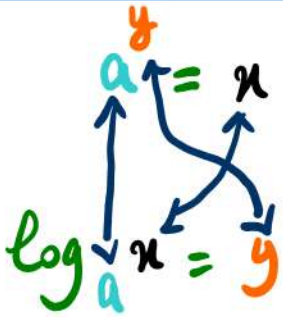
همچنین $D_{f^{-1}} = R_f = (0, +\infty)$ و $D_f = R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

نتیجه : نحوه محاسبه لگاریتم را به یکی از دو شکل زیر به خاطر بسپارید :

۱) $y = \log_a x \iff a^y = x$

(به توان)

۲)



مثال: لگاریتم‌های زیر را پیدا کنید.

۱) $\log_{10} 100 = 2$ (بتوان) $\quad 10^2 = 100$

۲) $\log_3 81 = 4$ $\quad 3^4 = 81$

۳) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ $\quad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

۴) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ $\quad 2^{-1} = \frac{1}{2}$

مثال: ضابطه تابع وارون $f(x) = \log_3(x-2)$ را بدست آورید.

$y = \log_3(x-2)$ (بتوان) $\xrightarrow{\text{تبدیل به نما}}$ $3^y = x - 2$

$\rightarrow 3^y + 2 = x \rightarrow f^{-1}(x) = 3^x + 2$

مثال: اگر $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3$ باشد. ضابطه تابع وارون f را بیابید.

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3 \longrightarrow y-3=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \rightarrow y-3=\frac{1}{2^{x-1}}$$

$$\xrightarrow[\text{معکوس}]{\text{دو طرف}} \frac{1}{y-3}=2^{x-1} \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} \log_2 \frac{1}{y-3}=x-1$$

(به توان)

$$\log_2 \frac{1}{y-3}+1=x \Rightarrow f^{-1}(x)=1+\log_2 \frac{1}{x-3}$$

تذکر: به پایه لگاریتم مبنا هم گفته می‌شود. هرگاه مبنا یا پایه لگاریتم ۱۰ باشد به آن لگاریتم اعشاری می‌گوییم. هرزمان مبنای یک لگاریتم نوشته نشود آن را ۱۰ در نظر می‌گیریم.

مثال: اگر $f(x)=2+\log(2x-4)$، مقدار $f^{-1}(4)$ را بیابید.

$$f^{-1}(4)=a \xrightarrow[\text{لگاریتم}]{f} 4=f(a) \Rightarrow 4=2+\log(2a-4)$$

$$\rightarrow \underset{\text{به توان}}{2=\log_{10}(2a-4)} \xrightarrow[\text{لگاریتم}]{\text{تعریف}} 10^2=2a-4$$

$$100=2a-4 \rightarrow 2a=104 \rightarrow a=52 \Rightarrow f^{-1}(4)=52$$

نکته: همانطور که در تعریف تابع لگاریتمی اشاره کردیم دامنه تابع لگاریتمی به صورت $y=\log_a^u$ است. در حالت کلی برای یافتن دامنه تابع $y=\log_a^u$ باید عبارت u را مثبت بگیریم یعنی $u>0$ باید اشتراک سه شرط $u>0$ ، $a>0$ ، $a\neq 1$ را بیابیم.

مثال: دامنه تابع $f(x)=\log_{(x-1)}(16-x^2)$ را بدست آورید.

① $16-x^2>0 \rightarrow 16>x^2 \rightarrow x^2<16 \rightarrow -4<x<4$

② $x-1>0 \rightarrow x>1$

③ $x-1\neq 1 \rightarrow x\neq 2$

$D_f = ① \cap ② \cap ③ = (1,4)-\{2\}$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی قسمت اول

جلسه پنجم صفحات:۸۶و۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

ویژگی های لگاریتم :

برای محاسبه ساده تر لگاریتم ها، از ویژگی های زیر که همگی با استفاده از تعریف لگاریتم اثبات می شوند، استفاده می کنیم.

ویژگی ۱. لگاریتم یک در هر پایه ای عدد مثبت و مخالف یک، برابر صفر است یعنی:

$$\log_a 1 = 0$$

مثال: $\log_{100} 1 = 0$ ، $\log 1 = 0$ ، $\log_{\pi} 1 = 0$

ویژگی ۲. لگاریتم هر عدد مثبت و مخالف یک در مبنای خودش مساوی یک است یعنی :

$$\log_a a = 1$$

مثال: $\log 10 = 1$ ، $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$ ، $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1$

ویژگی ۳. اگر عدد یا عبارت جلوی لگاریتم توان دار باشد، توان را ضریب لگاریتم قرار می دهیم یعنی:

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

مثال: $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3\times 1 = 3$

یادآوری $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

$\log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_5 5 = \frac{1}{3}$

$\log \frac{1}{100} = \log \frac{1}{10^2} = \log 10^{-2} = -2\log 10 = -2$

ویژگی ۴. لگاریتم ضرب دو عدد برابر است با جمع لگاریتم‌هایشان یعنی:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

مثال: $\log_4 12 + \log_4 3 = \log_4 12\times 3 = \log_4 36 = \log_4 6^2 = 2\log_4 6 = 2$

* $\log 2 + \log 5 = \log 2\times 5 = \log 10 = 1$

ویژگی ۵. لگاریتم تقسیم دو عدد برابر است با تفریق لگاریتم‌هایشان یعنی:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

مثال: $\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2\log_5 5 = 2$

$\log_3 54 - \log_3 2 = \log_3 \frac{54}{2} = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3\log_3 3 = 3$

ویژگی ۶.

$$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$$

مثال:

$$\log_8 32 = \log_{2^3} 2^5 = \frac{5}{3} \log_2 2 = \frac{5}{3}$$

$$\log_{\sqrt{6}} 216 = \log_{6^{\frac{1}{2}}} 6^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \log_6 6 = 6$$

ویژگی ۷.

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

مثال: اگر $\log_2 3 = n$، مقدار $\log_{12} 18$ را برحسب n بیابید.

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (3^2 \times 2)}{\log_2 (2^2 \times 3)} = \frac{\log_2 3^2 + \log_2 2}{\log_2 2^2 + \log_2 3} = \frac{2\log_2 3 + 1}{2 + \log_2 3} = \frac{2n+1}{2+n}$$

نتیجه: اگر جای b، x قرار دهیم داریم:

$$\log_a x = \frac{\log_x x}{\log_x a} \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{\log_x a} \quad \text{یا} \quad \log_a x \times \log_x a = 1$$

مثال:

$$\frac{1}{\log_4 4} + \frac{1}{\log_9 4} = \log_4 4 + \log_4 9 = \log_4 4 \times 9$$

$$= \log_4 36 = \log_4 4^2 = 2$$

ویژگی ۸.

$$b^{\log_a^x} = x^{\log_a^b}$$

مثال:

$$3^{\log_9^4} = 4^{\log_9^3} = 4^{\log_{3^2}^{3^1}} = 4^{\frac{1}{2}\log_3^3} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}$$

نتیجه: اگر جای b ، a قرار دهیم داریم:

$$a^{\log_a^x} = x^{\log_a^a} \Rightarrow a^{\log_a^x} = x$$

(ساده)

مثال:

$$7^{\log_7^3} = 3$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی قسمت دوم

جلسه ششم صفحات:۸۶و۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

مثال‌های بیشتری از لگاریتم :

۱) حاصل عبارت های لگاریتمی زیر را بیابید.

الف) $\log_2 \sqrt[5]{8} + \log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_2 8^{\frac{1}{5}} + \log_{\frac{1}{3}} 3^2$

$= \frac{1}{5}\log_2 2^3 + 2\log_{\frac{1}{3}} 3 = \frac{3}{5}\log_2 2 + 2 = \frac{3}{5} + 2 = \frac{13}{5}$

ب) $7\log_4 \sqrt[7]{81} - 2\log_7 \frac{1}{49} + 3\log 0.01$ ($0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$)

$= 7\log_4 3^{\frac{4}{7}} - 2\log_7 7^{-2} + 3\log 10^{-2}$

$= 7 \times \frac{4}{7}\log_4 3 - 2(-2)\log_7 7 + 3(-2)\log 10 = 4 + 4 - 9 = -1$

۲) اگر $\log 3 = 0.5$ و $\log 7 \simeq 0.8$ باشند، مقدار $\log \frac{8100}{\sqrt[5]{3432}}$ را بیابید.

$\log 8100 - \log \sqrt[5]{3432} = \log 3^4 \times 10^2 - \log \sqrt[5]{7^3}$

$= \log 3^4 + \log 10^2 - \log 7^{\frac{3}{5}} = 4\log 3 + 2\log 10 - \frac{3}{5}\log 7$

$= 4 \times 0.5 + 2 - \frac{3}{5} \times 0.8 = 2 + 2 - 0.48 = 4 - 0.48 = 3.52$

۳) حاصل عبارت های لگاریتمی زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt{2(\log 25)^2+(\log\frac{1}{5})^2}$

$\log 25 = \log 5^2 = 2\log 5$

$\log\frac{1}{5} = \log 1 - \log 5 = -\log 5$

$= \sqrt{2(2\log 5)^2+(-\log 5)^2}$

$= \sqrt{2(4)(\log 5)^2+(\log 5)^2} = \sqrt{8(\log 5)^2+(\log 5)^2} = \sqrt{9(\log 5)^2}$

$= 3\log 5$

ب) $\log_{16\sqrt[3]{4}} 8\sqrt{2} = \log_{2^4\times 2^{\frac{2}{3}}} 2^3\times 2^{\frac{1}{2}}$

$= \log_{2^{\frac{14}{3}}} 2^{\frac{7}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{14}{3}}\log_2 2 = \frac{3\times 7}{2\times 14} = \frac{3}{4}$

پ) $\log(3+2\sqrt{6}) + \log(3-2\sqrt{6}) = \log(3-2\sqrt{6})(3+2\sqrt{6})$

$= \log(3^2-(2\sqrt{6})^2) = \log(25-24) = \log 1 = 0$

ت) $\log_{(\sqrt{5}-2)}(\sqrt{5}+2)$

$(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = (\sqrt{5})^2-2^2 = 5-4 = 1$

$\sqrt{5}+2 = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$

$= \log_{\sqrt{5}-2}\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \log_{\sqrt{5}-2}(\sqrt{5}-2)^{-1} = -\log_{\sqrt{5}-2}(\sqrt{5}-2) = -1$

ث) $\frac{1}{1+\log_2^3} + \frac{1}{1+\log_3^2} = \frac{1}{1+\log_2^3} + \frac{1}{1+\frac{1}{\log_2^3}}$

$= \frac{1}{1+\log_2^3} + \frac{1}{\frac{\log_2^3+1}{\log_2^3}} = \frac{1}{1+\log_2^3} + \frac{\log_2^3}{1+\log_2^3} = \frac{1+\log_2^3}{1+\log_2^3}$

$= 1$

ج) $\left(a^{\log_4^3}\right)^{\log_a^8} = a^{\log_4^3 \times \log_a^8}$

حاسبه توان: $\log_4^3 \times \log_a^8 = \frac{\log 3}{\log 4} \times \frac{\log 8}{\log a} = \frac{\log 3}{\log 2^2} \times \frac{\log 2^3}{\log a}$

$= \frac{\log 3}{2\log 2} \times \frac{3\log 2}{\log a} = \frac{3}{2}\frac{\log 3}{\log a} = \frac{3}{2}\log_a^3$

عبارت $= a^{\frac{3}{2}\log_a^3} = \left(a^{\log_a^3}\right)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$

ج) $\log_{\sqrt{9}} \frac{1}{81} + \log_{16} \sqrt{8} + 10^{2\log 3}$

$\log_{\sqrt{9}} \frac{1}{81} = \log_{3^2}^{3^{-4}} = \frac{-4}{2}\log_3^3 = -\frac{12}{2} = -6$

$\log_{2^4}^{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{4}\log_2^2 = \frac{3}{8}$

$$10^{2\log 4} = 10^{\log 4^2} = 10^{\log 16} = 9$$

حاصل عبارت $= -6 + \frac{4}{8} + 9 = 4 + \frac{4}{8} = \frac{27}{8}$

۴) اگر $A = 3^9$، مقدار $\log_4 9A^2$ را برحسب a بدست آورید.

$$\log_4 9(3^9)^2 = \log_4 3^2 \times 3^{2a} = \log_4 3^{2+2a}$$

$$= (2+2a)\log_4 3 = 2+2a$$

۵) اگر $\log 4 = a$، $\log 2 = b$، مقدار $\log \sqrt[4]{54}$ را برحسب a و b بیابید.

$$\log \sqrt[4]{54} = \log 54^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log 54 = \frac{1}{4}\log(27 \times 2)$$

$$= \frac{1}{4}(\log 27 + \log 2) = \frac{1}{4}(3\log 3 + \log 2)$$

$$= \frac{1}{4}(3a + b)$$

۶)

۱) $\frac{13}{18}$ ۲) $\frac{8}{11}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{7}{9}$

$$\log_4 18 = \log_{2^2} 3^2 = \frac{1}{2}\log_2 3 \rightarrow \log_2 3 = 1.6$$

$$\log_{12}^{6} = \frac{\log_2^{6}}{\log_2^{12}} = \frac{\log_2^{2\times 3} + \log_2^{2}}{\log_2^{2^2} + \log_2^{3}} = \frac{1,6 + 1}{2 + 1,6} = \frac{2,6}{3,6} = \frac{13}{18}$$

گزینه ۱

۷)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2n-1} = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{3}\right)^{n^2} \rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2n-1} = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right)^{n^2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2n-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3n^2} \rightarrow 2n-1 = -3n^2$$

$$\rightarrow 3n^2 + 2n - 1 = 0 \xrightarrow{3-1=2} \begin{cases} n = -1 \\ n = -\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$n=-1 \rightarrow \log_8(-9+1) = \log_8^{-8}$ ✗

$n = \frac{1}{3} \rightarrow \log_8(9\times\frac{1}{3}+1) = \log_8^{4} = \log_{2^3}^{2^2}$

$$= \frac{2}{3}\log_2^{2} = \frac{2}{3}$$

گزینه ۱

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی قسمت سوم

جلسه هفتم صفحات:۸۷ تا۸۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

معادله لگاریتمی :

معادله‌ای که در آن‌ها، مجهول در جلوی لگاریتم یا در پایه‌ی لگاریتم قرار دارد را معادلات لگاریتمی می‌گوییم.

برای حل معادلات لگاریتمی در صورت لزوم از ویژگی‌های لگاریتم استفاده می‌کنیم تا به یکی

از دو صورت زیر درآید :

۱) هر دو طرف فقط یک عبارت لگاریتمی هم‌پایه باشد . در این حالت چون تابع لگاریتم

یک به یک است می‌توانیم لگاریتم‌ها را از دو طرف حذف بزنیم و معادله حاصل را حل کنیم .

یعنی : $\log_a u = \log_a v \Rightarrow u = v$

۲) یک طرف لگاریتم و طرف دیگر عدد (یا عبارت) باشد . در این حالت از تعریف

لگاریتم استفاده می‌کنیم و معادله را به شکل توانی می‌نویسیم یعنی :

$$\log_a u = b \Rightarrow u = a^b$$

تذکر مهم : بعد از یافتن جواب یا جواب‌ها آن‌ها را در معادله لگاریتمی قرار می‌دهیم .

طبق آنچه در تواتع لگاریتمی گفتیم باید جلوی لگاریتم مثبت و مبناهم مثبت و مخالف یک باشد. جوابی که یکی از شرط‌ها را نقض کند مورد قبول نیست.

مثال: معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log(2x-1)+\log(x+2)=\log 20-\log 2$

$\log(2x-1)(x+2)=\log\frac{20}{2} \rightarrow \log(2x^2+4x-x-2)=\log 10$

$\Rightarrow 2x^2+5x-2=10 \rightarrow 2x^2+5x-12=0$

$\Delta=25-4(2)(-12)=25+192=169 \rightarrow x=\frac{-5\pm 13}{4}$ $\begin{cases}\frac{-5+13}{4}=2 \checkmark\\ \frac{-5-13}{4}=-\frac{9}{2} \times\end{cases}$

$x=-\frac{9}{2} \rightarrow \log(2\times(-\frac{9}{2})-1)=\log -10 \times$, $\log(-\frac{9}{2}+2)\times$

ب) $\log(x+1)=\frac{1}{3}\log(x^3+x^2+2)$

$\xrightarrow{\times 3}$ $3\log(x+1)=\log(x^3+x^2+2)$

$\rightarrow \log(x+1)^3=\log(x^3+x^2+2)$

$\rightarrow x^3+3x^2+3x+1=x^3+x^2+2 \rightarrow 2x^2+3x-1=0$

$\Delta = 9 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 \rightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{4} < \begin{matrix} \frac{1}{2} \checkmark \\ -2 \times \end{matrix}$

ب) $\log_3(2x^2+1) - \log_3(x+2) = 1$

$\rightarrow \log_3 \frac{2x^2+1}{x+2} = 1 \rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = 3^1 \rightarrow 2x^2+1 = 3x+6$

بتوان

$\rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$

$x = \frac{3 \pm 7}{4} < \begin{matrix} \frac{5}{2} \checkmark \\ -1 \checkmark \end{matrix}$

ج) $\log_x(3x+1) = 2 - \log_x(x-4)$

$\rightarrow \log_x(3x+1) + \log_x(x-4) = 2$

$\rightarrow \log_x(3x+1)(x-4) = 2 \rightarrow (3x+1)(x-4) = x^2$

$3x^2 - 12x + x - 4 = x^2 \rightarrow 2x^2 - 11x - 4 = 0$

$\div 2 \rightarrow x^2 - 5x - 12 = 0 \rightarrow (x-4)(x+3) = 0$

$< \begin{matrix} x = 4 \checkmark \\ x = -3 \times \end{matrix}$

ت) $\log_{2}(2+\log_{4}x)=2$ (به توان ۲)

$\rightarrow 2+\log_{4}x=2^{2}\rightarrow \log_{4}x=4-2$

$\rightarrow \log_{4}x=2$ (به توان ۴) $\rightarrow x=4^{2}=9$

ج) $\log_{5}x+\log_{\sqrt{5}}x-2\log_{25}x=\log_{2}25$

$\rightarrow \log_{5}x+\log_{5^{\frac{1}{2}}}x-2\log_{5^{2}}x=\log_{2}5^{2}$

$\rightarrow \log_{5}x+\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_{5}x-2\times\frac{1}{2}\log_{5}x=2\log_{2}5$

$\rightarrow \log_{5}x+2\log_{5}x-\log_{5}x=2\log_{2}5$

$\rightarrow 2\log_{5}x=2\log_{2}5\rightarrow \log_{5}x=\log_{2}5$ (به توان ۲)

$\rightarrow x=5^{\log_{2}5}$

کاربرد لگاریتم:

۱) مسائل زلزله : اگر قدرت (بزرگی) زمین‌لرزه M ریشتر و انرژی آزاد شده از آن E (با واحد ارگ) باشد داریم:

$$\log E = 11,8 + 1,5M$$

مثال: در یک زلزله ۵ ریشتری مقدار انرژی آزاد شده چقدر است؟

$$\log E = 11,8 + 1,5 \times 5 = 11,8 + 7,5 = 19,4 \rightarrow \log E = 19,4 \rightarrow E = 10^{19,4}$$

۲) مسائل نیمه‌عمر، رشد و زوال :

هرگاه در این مسائل مجهول در توان باشد (مخلب زمان) با گرفتن لگاریتم از دو طرف تساوی و استفاده از ویژگی $\log_a x^n = n \log_a x$ و مقادیر لگاریتم داده شده، مقدار مجهول را می‌یابیم.

مثال:

مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر موردنظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ $(\log 3 = 0/48)$

۱) ۳۶۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۴۰

ماه یا دوره ۳۰ روزه

$A = 24(1 - 0.1)^t \xrightarrow{\div 24} \frac{1}{4} = (0.9)^t \xrightarrow{\log} \log\frac{1}{4} = \log 0.9^t$

$\log 4^{-1} = t \log\frac{9}{10} \rightarrow -\log 4 = t(\log 4 - \log 10)$

$\rightarrow -0.48 = t(2 \times 0.48 - 1) \rightarrow t = \frac{-0.48}{-0.4} = 12$ ماه

$12 \times 30 = 360$ روز = روز

مثال: یک قایق کاملاً باری روزانه ۱۰ درصد بارش را از دست می‌دهد. باد این قایق پس از چند روز به نصف بار روز اول می‌رسد؟ ($\log 2 = 0.301$ و $\log 19 = 1.287$)

$\frac{1}{2}A_0 = A_0(1 - 0.05)^t \rightarrow \frac{1}{2} = 0.95^t$

$\xrightarrow{\log} \log\frac{1}{2} = \log 0.95^t \rightarrow \log 2^{-1} = t \log 0.95$

$\rightarrow -\log 2 = t \log\frac{19}{20} \rightarrow -\log 2 = t(\log 19 - \log 2 \times 10)$

$\rightarrow -\log 2 = t(\log 19 - \log 2 - \log 10)$

$\rightarrow -0.301 = t(1.287 - 0.301 - 1) \rightarrow -0.301 = t(-0.014)$

$t = \frac{-0.301}{-0.014} = 21.5$

مثال: نیمه‌عمر یک ماده رادیواکتیو ۱۰ سال است. پس از چند سال از ۱۰۰ میلی‌گرم آن ۴۰ میلی‌گرم باقی می‌ماند؟ ($\log 0.4 = -0.39$, $\log 2 = 0.3$)

$$40 = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} \xrightarrow{\div 100} 0.4 = 2^{-\frac{t}{10}}$$

$$\xrightarrow{\log} \log 0.4 = \log 2^{-\frac{t}{10}}$$

$$\rightarrow -0.39 = -\frac{t}{10} \times 0.3 \rightarrow t = \frac{-0.39}{-0.3} = 13 \text{ سال}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

رسم توابع لگاریتمی

جلسه هشتم

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

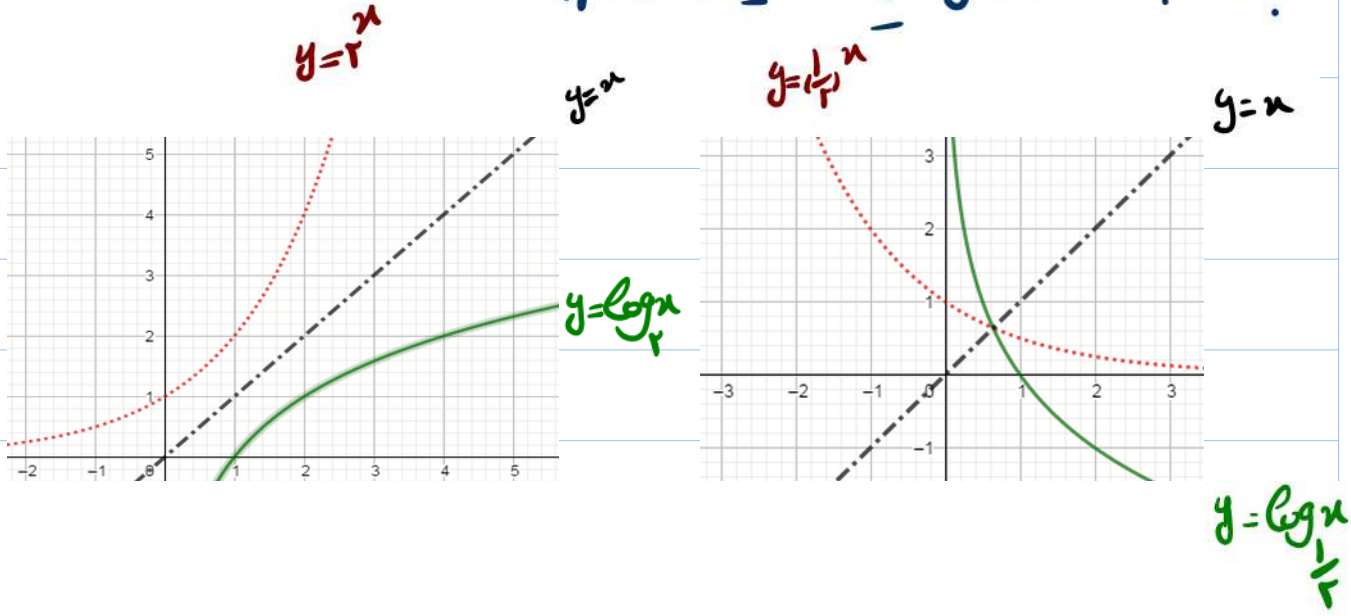
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

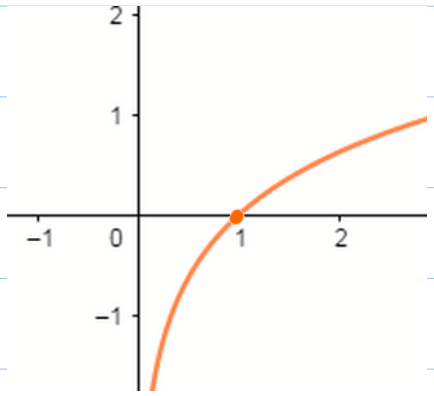
گروه ریاضی استان همدان

رسم نمودار تابع لگاریتمی :

همانطور که گفتیم تابع لگاریتمی وارون تابع نمایی است. پس نمودار آن قرینه نمودار تابع نمایی نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) است.

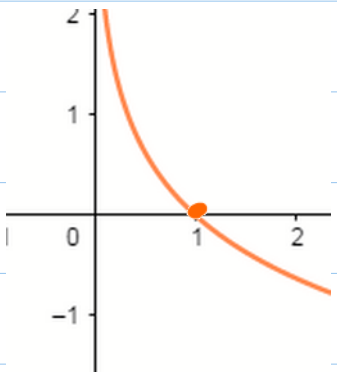


در حالت کلی نمودار تابع $y=\log_a x$ با توجه به مقدار a به یکی از دو صورت زیر است:



$a>1$

$D=(0,+\infty)$, $R=\mathbb{R}$, افزایشی



$0<a<1$

$D=(0,+\infty)$, $R=\mathbb{R}$, کاهشی

برای رسم توابع لگاریتمی ساده مانند $y = \log_a x$ از روش نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم.

سه مقدار زیر را به x می‌دهیم:

۱) مبنا ۲) یک ۳) معکوس مبنا

مثال: نمودار سه تابع $y = \log_2 x$، $y = \log_4 x$ و $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را رسم کنید و با یکدیگر مقایسه کنید.

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{2^{-1}} 2^{-1} = -1$

$y = \log_2 x$	x	$\frac{1}{2}$	1	2
	y	-1	0	1

$y = \log_4 x$	x	$\frac{1}{4}$	1	4
	y	-1	0	1

$y = \log_5 x$	x	$\frac{1}{5}$	1	5
	y	-1	0	1

هرچه پایه بزرگ‌تر شود نمودار در راستای محور yها فشرده‌تر می‌شود و به محور xها نزدیک‌تر می‌شود.

$y = \log_2 x$

$y = \log_4 x$

$y = \log_5 x$

تمرین: توابع $y=\log_{\frac{1}{2}}^{x}$ ، $y=\log_{\frac{1}{4}}^{x}$ و $y=\log_{\frac{1}{5}}^{x}$ را رسم کنید و با یکدیگر مقایسه کنید.

تذکر: از قرارداشتن انتقال برای رسم توابع لگاریتمی به صورت $y=k\log_a(x\pm b)\pm c$ استفاده کنیم.

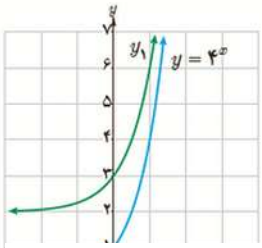
نکته: می‌توان از نقطه‌ای هم برای رسم اینگونه توابع استفاده کرد. دقت کنید همیشه لگاریتمی به جای x قرار دهید تا به $\log_a^1$ ، $\log_a^0$ یا $\log_{a^2}^{a^m}$ برسیم.

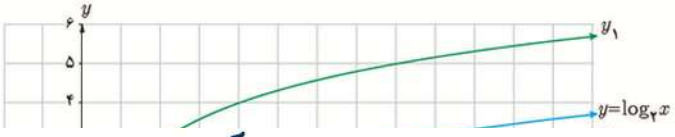
نکته: برای یافتن محل برخورد نمودار تابع لگاریتمی با محور xها کافی است y را برابر با صفر قرار داده و معادله لگاریتمی حاصل را حل کنیم.

نکته: برای یافتن خط مجانبی که تابع لگاریتمی به آن نزدیک می‌شود (مجانب قائم) داخله تابع را برابر

مثال

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.





+۲ ↑

۴ →

الف

ب

الف) $y_1=4^x+2$ ، $y_2=-4^x-2$

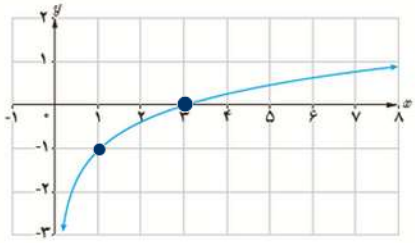
ب) $y_1=\log_4 x+2$ ، $y_2=\log_2(x-4)$ $\begin{cases}x=0\to y=0\\x=4\to y=1\end{cases}$

مثال :

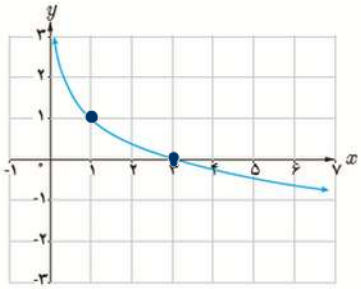
کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

۱) $y = \log_۳ (x - ۱)$ ۲) $y = ۳^x + ۱$ ۳) $y = ۱ - ۳^x$

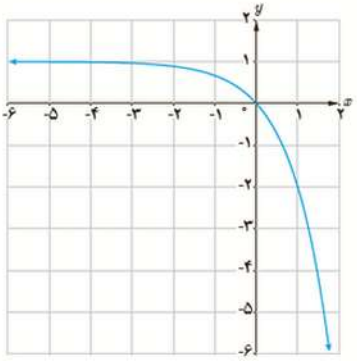
۴) $y = \log_۳ x - ۱$ ۵) $y = ۱ - \log_۳ x$ ۶) $y = ۳^{(x-۲)}$



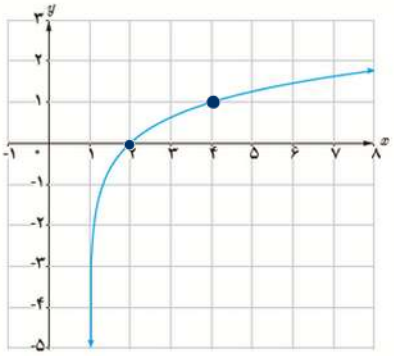
(الف)



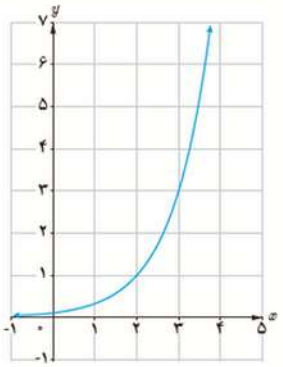
(ب)



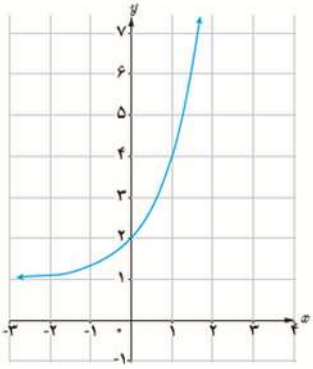
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

الف) ۴) $y = \log_۳ x - ۱$

$\begin{cases} x = ۳ \rightarrow y = ۱ - ۱ = ۰ \\ x = ۱ \rightarrow y = ۰ - ۱ = -۱ \end{cases}$

ب) ۵) $y = ۱ - \log_۳ x$

$\begin{cases} x = ۳ \rightarrow y = ۱ - ۱ = ۰ \\ x = ۱ \rightarrow y = ۱ - ۰ = ۱ \end{cases}$

پ) ۳) $y = ۱ - ۳^x$

$x = ۰ \rightarrow y = ۱ - ۱ = ۰$

ت) ۱) $y = \log_۳ (x - ۱)$

$\begin{cases} x = ۲ \rightarrow y = ۰ \\ x = ۴ \rightarrow y = \log_۳ (۴ - ۱) = \log_۳ ۳ = ۱ \end{cases}$

ث) ۶) $y = ۳^{x-۲}$ ۲) ۲) $y = ۳^x + ۱$

مثال: نمودار توابع لگاریتمی زیر را رسم کنید.

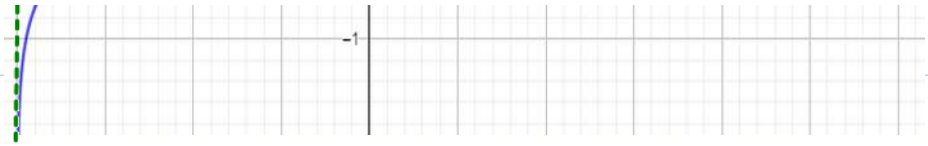
الف) $y = \log_{10}(x+4)$

x	-3	6
y	0	1

$\log_{10}^{1}$ ← $\log_{10}^{1}$ → $\log_{10}^{10}$

$D: x+4>0$

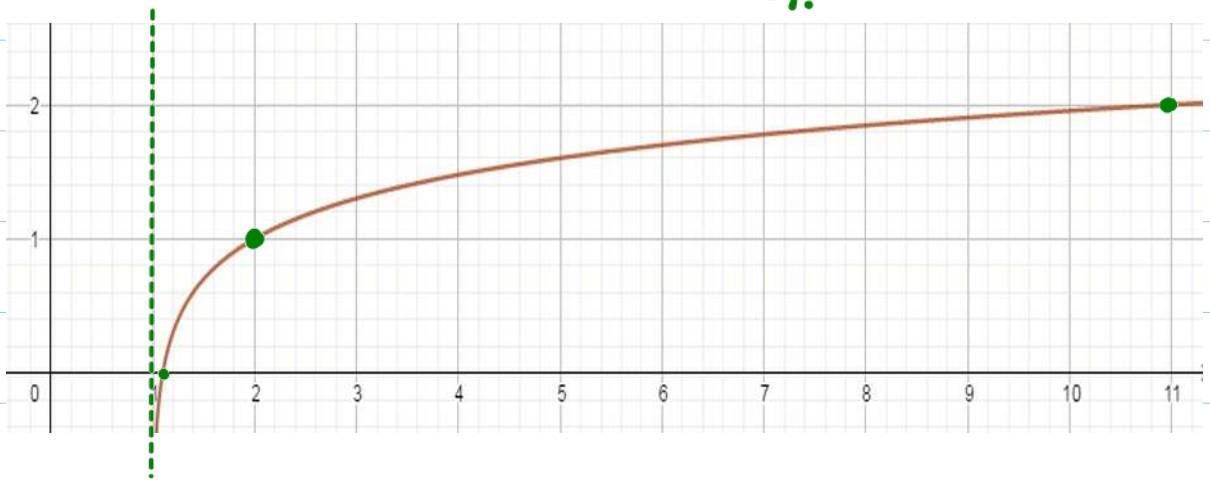
$x>-4$



ب) $y = 1 + \log_{10}(x-1)$

x	2	11
y	1	2

$1+\log_{10}^{1}$ ← $1+\log_{10}^{1}$ → $1+\log_{10}^{10}$



محل برخورد با محور x ها: $0 = 1 + \log_{10}(x-1) \rightarrow -1 = \log_{10}(x-1)$

$\rightarrow x-1 = 10^{-1} = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{1}{10}+1 = \frac{11}{10}$

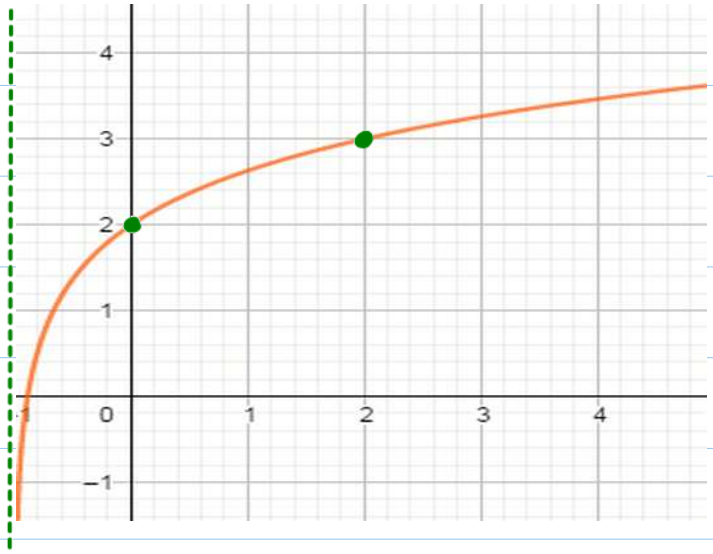
$D: x-1>0 \rightarrow x>1$

ب) $y = 2 - \log_{\frac{1}{4}}(x+1)$

x	۰	۲
y	۲	۳

$x=2$ ← $\log_{\frac{1}{4}} 4 = \log_{4^{-1}} 4^1 = -1$

تمرین: محل برخورد نمودار را با محور x ها مشخص کنید.



$D: x+1>0 \longrightarrow x>-1$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس اول: رادیان

جلسه اول: صفحات ۹۲ تا ۹۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

زاویه و موقعیت استاندارد :

زاویه از یک رأس و دو ضلع تشکیل شده است. اگر رأس زاویه روی مبدأ مختصات و ضلع ابتدایی آن روی قسمت مثبت محور ها باشد می گوییم زاویه در موقعیت استاندارد مشخص شده است. اگر زاویه مثبت باشد پادساعتگرد و اگر منفی باشد ساعتگرد می چرخیم.

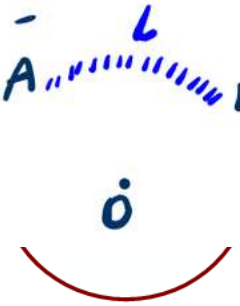
مثبت ↶

منفی ↷

چند تعریف در دایره :

۱) **زاویه مرکزی** : زاویه ای است که رأس آن روی مرکز دایره است و اضلاع آن شعاع دایره اند.

۲) **کمان** : هر دو نقطه روی دایره آن را به دو قسمت تقسیم می کند که به آن ها کمان می گوییم.



و به اندازه ای از محیط دایره که جدا کرده اند، طول کمان می گوییم.

$\overset{\frown}{AB} = L$

۳) اندازه کمان : اندازه کمان های زاویه مرکزی مقابل به آن است : $\hat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$

واحدهای اندازه گیری زاویه :

الف) درجه : اگر محیط دایره را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، زاویه مرکزی مقابل به هر کمان ۱° است.

اگر در دایره $C(O,r)$ داشته باشیم $\hat{AOB} = \alpha$ و طول کمان AB را L بگیریم آنگاه :

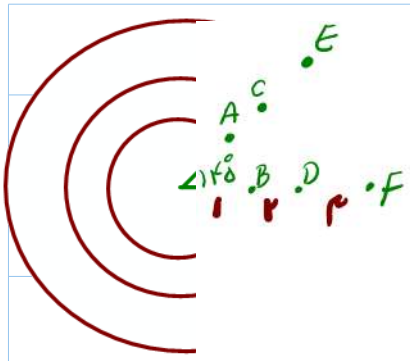


$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{۳۶۰^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

$$\frac{\alpha}{۳۶۰} = \frac{L}{۲\pi r}$$

$$L = \frac{\alpha}{۳۶۰}(۲\pi r) = \frac{\alpha}{۱۸۰}\pi r$$

مثال : طول کمان مقابل به زاویه ۴۵° در دایره هایی به شعاع ۱ و ۲ و ۳ را حساب کنید.



$$\widehat{AB} = \frac{۴۵}{۱۸۰} \pi \times ۱ = \frac{\pi}{۴}$$

$$\widehat{CD} = \frac{۴۵}{۱۸۰} \pi \times ۲ = \frac{\pi}{۲}$$

$$\widehat{EF} = \frac{۴۵}{۱۸۰} \pi \times ۴ = \frac{۳\pi}{۴}$$

مثال: در مثال قبل نسبت طول کمان به شعاع را در هر قسمت بیابید.

$$\frac{\widehat{AB}}{۲} = \frac{\frac{\pi}{۴}}{۱} = \frac{\pi}{۴}$$

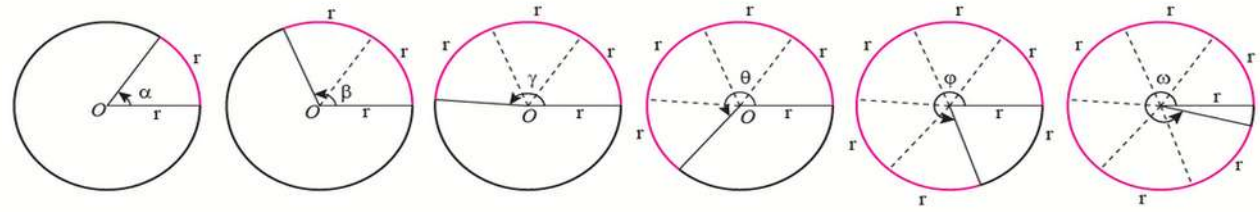
$$\frac{\widehat{CD}}{۲} = \frac{\frac{\pi}{۲}}{۲} = \frac{\pi}{۴}$$

$$\frac{\widehat{EF}}{۲} = \frac{\frac{۳\pi}{۴}}{۳} = \frac{\pi}{۴}$$

نتیجه: نسبت طول کمان روبه‌رو به یک زاویه خاص به شعاع دایره در هر دایره‌ای همواره مقدار ثابتی است. از این مقدار ثابت برای بیان زاویه به واحدی خیلی رایج استفاده می‌کنیم.

ب) رادیان: یک رادیان، اندازه زاویه مرکزی مقابل کمانی است که طول آن برابر شعاع دایره است. یک رادیان تقریباً ۵۷٫۲۹° است.

۲ rad ≈ ۱۱۴°



$\alpha = \frac{r}{r} = ۱\ rad$ $\beta = \frac{۲r}{r} = ۲\ rad$ $\gamma = \frac{۳r}{r} = ۳\ rad$ $\theta = \frac{۴r}{r} = ۴\ rad$ $\varphi = \frac{۵r}{r} = ۵\ rad$ $\omega = \frac{۶r}{r} = ۶\ rad$

تبدیل واحدهای زاویه:

محیط دایره

طول کمان روبه‌رو به زاویه ۱۸۰°، نصف محیط دایره است پس:

$$\alpha = \frac{۲\pi r}{۲} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

پس ۱۸۰°، π رادیان است.

به‌صورت دیگری نیز می‌توانیم به این نتیجه برسیم. دایره‌ای به شعاع واحد داریم:



با توجه به شکل: $A\hat{O}B = ۳\ rad$

زاویه $A\hat{O}C$ یک زاویه نیم‌صفحه است پس $A\hat{O}C = ۱۸۰°$.

جالب است بدانید از B تا C، قدر دایره یک عدد معروف π است پس:

$\hat{AOC} = \pi \text{ rad}$

پس نتیجه می‌گیریم π رادیان 180° است.

نتیجه: اگر D اندازه زاویه برحسب درجه و R اندازه زاویه برحسب رادیان باشد داریم:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

با استفاده از تناسب بالا:

الف) تبدیل رادیان به درجه:

$$D = R \times \frac{180}{\pi}$$

ب) تبدیل درجه به رادیان

$$R = D \times \frac{\pi}{180}$$

مثال: زوایای زیر را به رادیان تبدیل کنید.

۱) 30° $\quad R = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$

۲) 45° $\quad R = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$

۳) 60° $\quad R = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

۴) ۲۷° $\quad R = ۲۷ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۳\pi}{۲}$

۵) ۴۶° $\quad R = ۴۶ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۲\pi$

۶) ۱۴۵° $\quad R = ۱۴۵ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۳\pi}{۴}$ (۴۵)

۷) ۲۱۰° $\quad R = ۲۱۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۷\pi}{۶}$ (۳۰)

۸) ۳۳۰° $\quad R = ۳۳۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۱۱\pi}{۶}$ (۶۰)

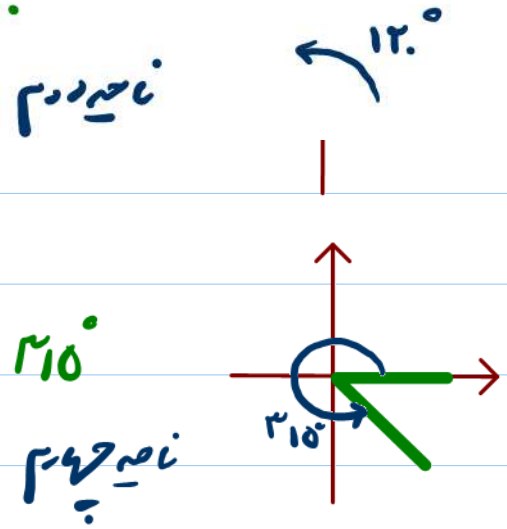
۹) ۷۲° $\quad R = ۷۲ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۵}$

۱۰) ۹۰° $\quad R = ۹۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۲}$

مثال: زوایای زیر را به درجه تبدیل کنید و مشخص کنید انتهای کمان در کدام ناحیه قرار می‌گیرد.

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ $\quad D = \frac{۲\pi}{۳} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۱۲۰^\circ$

ناحیه دوم

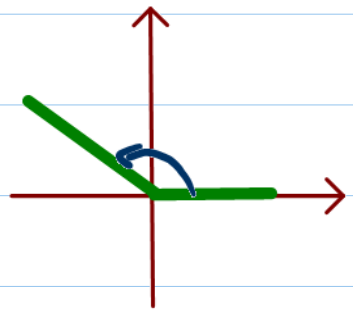


۲) $\frac{۷\pi}{۴}$ $\quad D = \frac{۷\pi}{۴} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۳۱۵^\circ$

ناحیه چهارم

۳) $\frac{۴\pi}{۵}$ $\quad D = \frac{۴\pi}{۵} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۱۴۴^\circ$

ناحیه دوم



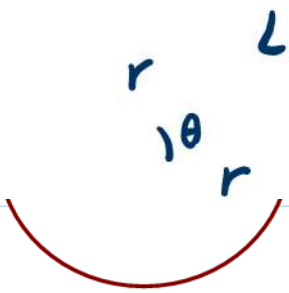
۴) $۵\ rad$ $\quad D = ۵ \times \frac{۱۸۰}{\pi} = \frac{۹۰۰}{\pi}$

ناحیه چهارم

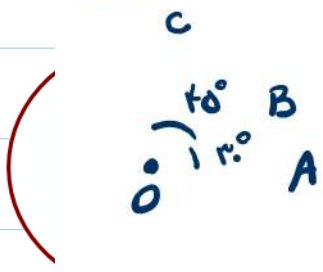
$$D = \frac{۹۰۰}{\pi} \simeq ۲۸۶,۴۷^\circ$$

نکته: اگر در دایره‌ای به شعاع r اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو کمان را برابر θ بگیریم طول کمان l از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow l = r\theta$$ (رادیان)



مثال: در شکل زیر طول کمان AB برابر ۴π است. طول کمان BC را بیابید.



$$\begin{cases} \overset{\frown}{AB} = ۴\pi \\ \theta_۱ = AB \text{ کمان روبه‌رو اندازه‌ی زاویه} = ۱۲۰^\circ \xrightarrow{\text{رادیان}} \frac{۲\pi}{۳} \\ \theta_۲ = BC \text{ کمان روبه‌رو اندازه‌ی زاویه} = ۴۵^\circ \xrightarrow{\text{رادیان}} \frac{\pi}{۴} \\ \overset{\frown}{BC} = ? \end{cases}$$

$\overset{\frown}{AB} = r\theta_1 \rightarrow 4\pi = r \times \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\times \frac{4}{\pi}} r = 8\pi \times \frac{4}{\pi} = 32$

$\overset{\frown}{BC} = r\theta_2 \rightarrow \overset{\frown}{BC} = 32 \times \frac{\pi}{8} = 4\pi$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس اول: رادیان

حل تمرین: صفحات ۹۶و۹۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

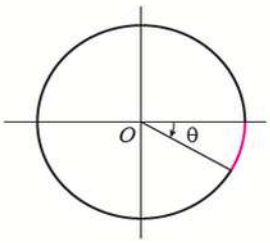
اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

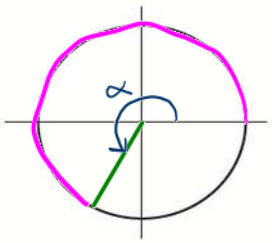
گروه ریاضی استان همدان

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



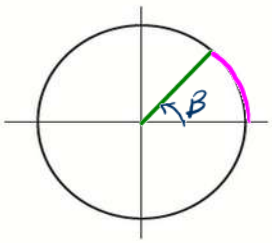
$\theta = -\frac{\pi}{6}$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



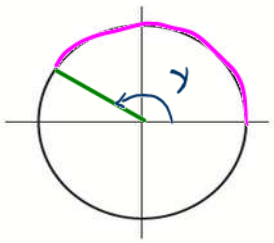
$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

انتهای کمان در ربع سوم است.



$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

انتهای کمان در ربع اول است.



$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

انتهای کمان در ربع دوم است.



۲ طول برف پاک‌کن عقب خودرویی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف‌پاک‌کن، کمانی به اندازه 120° طی می‌کند. ($\pi \simeq 3/14$)

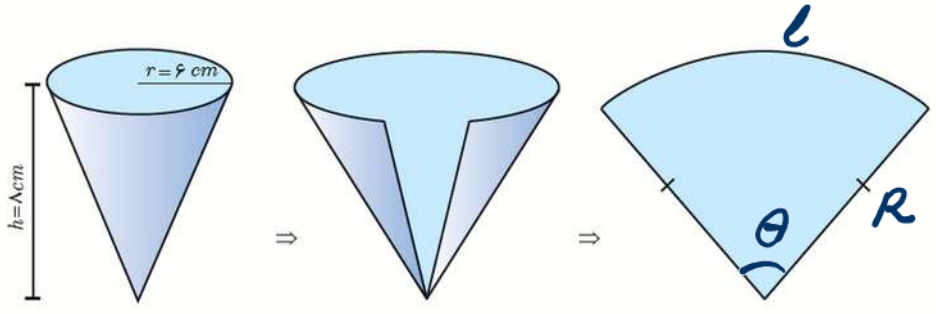
الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به‌دست آورید.

ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

الف) $\theta = 120^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$

ب) $l = r\theta \rightarrow l = 24 \times \frac{2\pi}{3} = 16\pi \simeq 16 \times 3/14 = 50/24\ cm$

۳ شکل فضایی و نیز شکل گستردهٔ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r = 6\ cm$ و ارتفاع آن $h = 8\ cm$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع[1] حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



۱ــ به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع گفته می‌شود.

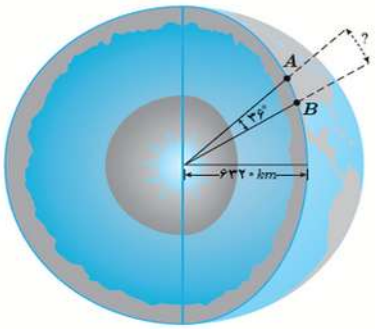
$$R^2 = h^2 + r^2$$

$$R^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$R = 10$$

$$l = \text{طول کمان} = 2\pi r = 2\pi \times 6 = 12\pi$$

$$\theta = \frac{l}{R} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5} \ Rad$$



۴ فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از کرهٔ زمین، که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازهٔ شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطهٔ داده شده را بیابید.

$$\theta = 36^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5} \ Rad$$

$$\overline{AB} = r\theta = 6370 \times \frac{\pi}{5} = 3958{,}94 \ km$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

قسمت اول

جلسه دوم: صفحات ۹۸ تا ۱۰۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

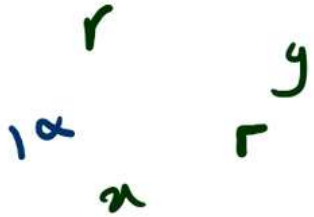
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری :

نسبت های مثلثاتی :



۱) $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}}$

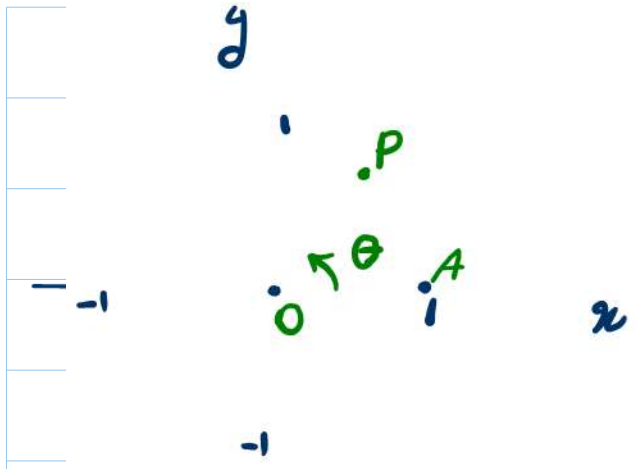
۲) $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$

۳) $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha}$

۴) $\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha}$

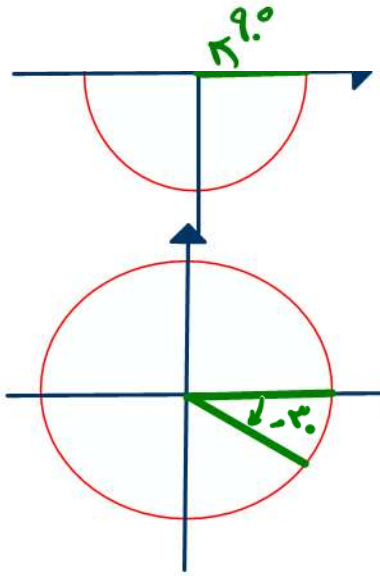
تعریف دایره مثلثاتی : دایره‌ای به شعاع یک واحد که مرکز آن مبدأ مختصات است.

زاویه در دایره مثلثاتی : ضلع ابتدای هر زاویه روی قسمت مثبت محور x ها واقع است و ضلع دوم حرکت می‌کند (این ضلع همیشه دایره را قطع می‌کند) اگر ضلع دوم در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کند زاویه مثبت می سازد و اگر در جهت عقربه های ساعت حرکت کند زاویه منفی می سازد.



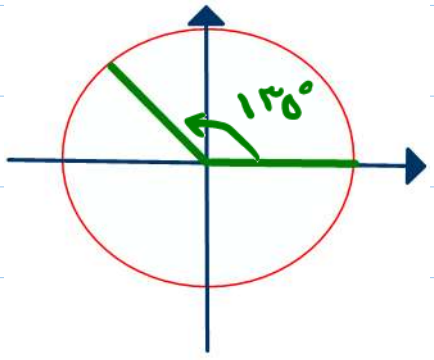
مثال: زوایای زیر را در دایره مثلثاتی مشخص کنید.

الف) 90°

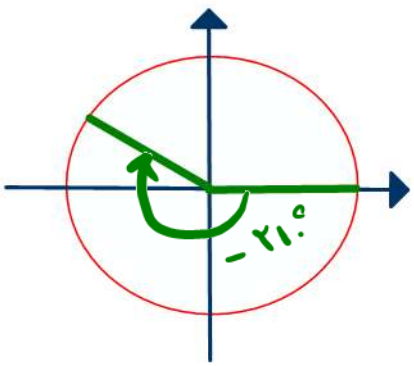


ب) -30°

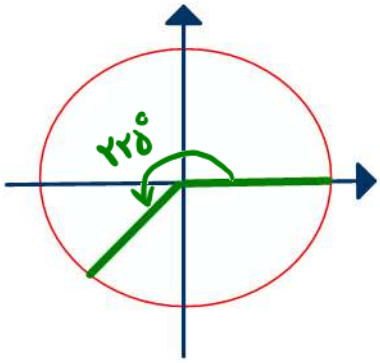
پ) 135°



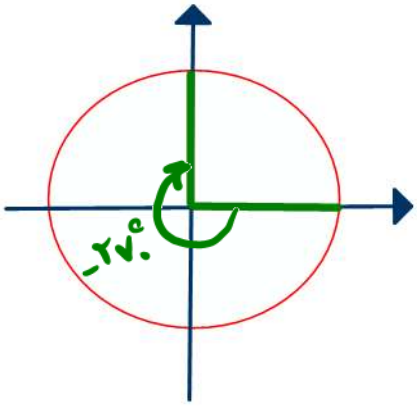
ت) -210°



ث) 225°

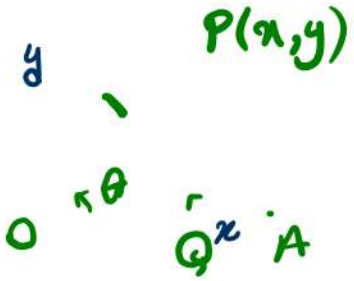


ج) -270°



نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی :

زاویه θ را در دایره مثلثاتی در نظر بگیرید.



اگر ضلع دوم این زاویه محیط دایره را در نقطه $P(x,y)$ قطع کند و از این نقطه بر محور xها عمود کنیم تا این محور را در Q قطع کند، مثلث قائم‌الزاویه OPQ به دست می‌آید. حال داریم :

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin\theta$$

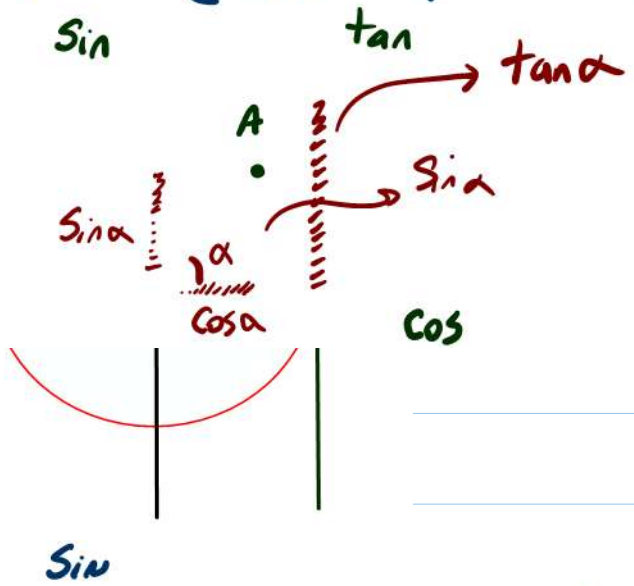
$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos\theta$$

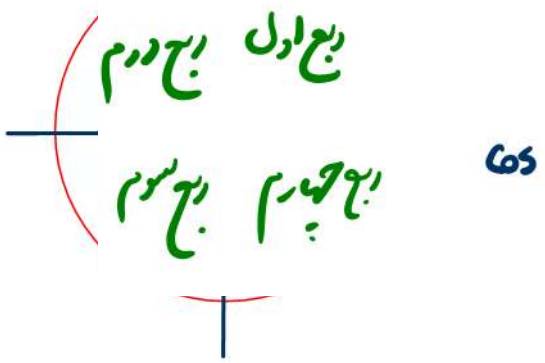
$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\theta$$

$$\cot\theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \cot\theta$$

قرارداد : در دایره مثلثاتی محور xها را محور cosها و محور yها را محور sinهای نامیم.

این دو محور محور بر هم، دایره مثلثاتی را به چهار ناحیه یا ربع مثلثاتی تقسیم می‌کنند.



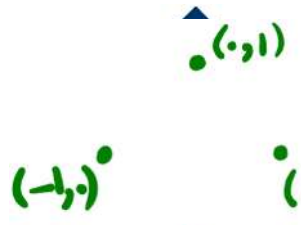


θ در ربع اول : $0^\circ < \theta < 90^\circ$

θ در ربع دوم : $90^\circ < \theta < 180^\circ$

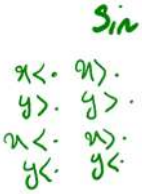
θ در ربع سوم : $180^\circ < \theta < 270^\circ$

θ در ربع چهارم : $270^\circ < \theta < 360^\circ$



جدول نسبت های مثلثاتی زوایای مرزی ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰°، ۳۶۰°

زاویه θ / نسبت	۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
sinθ	۰	۱	۰	-۱	۰
cosθ	۱	۰	-۱	۰	۱
tanθ	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
cotθ	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده



* جدول علامت های نسبت های مثلثاتی در نواحی چهارگانه

ناحیه / نسبت	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

نکته: sinθ و cosθ برای هر زاویه دلخواه همواره عددی بین ۱ و ۱- هستند یعنی:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-1 \le \cos\theta \le 1$$

* جدول نسبت های مثلثاتی زوایای $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

زاویه / نسبت	30 ($\pi/6$)	45 ($\pi/4$)	60 ($\pi/3$)
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

کمان های هم خانواده :

زاویه حاده $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

نوع اول : برای بدست آوردن نسبت های مثلثاتی زوایایی به صورت $k\pi \pm \alpha$

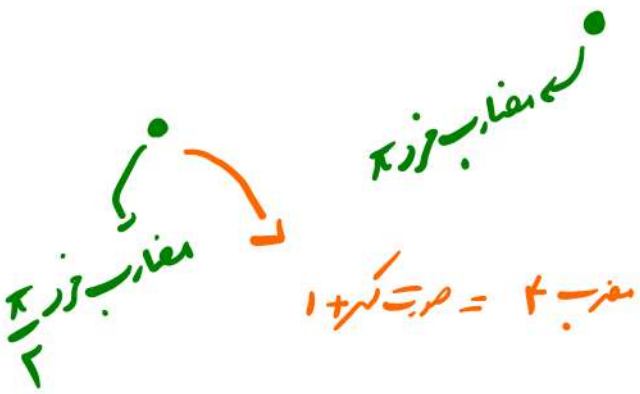
اگر k زوج باشد کل $k\pi$ را حذف می کنیم و اگر k فرد باشد، k را حذف می کنیم (یعنی $\pi \pm \alpha$). حال ناحیه مربوط به زاویه را یافته و نسبت را می یابیم.

نوع دوم : برای بدست آوردن نسبت های مثلثاتی زوایایی به صورت $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$

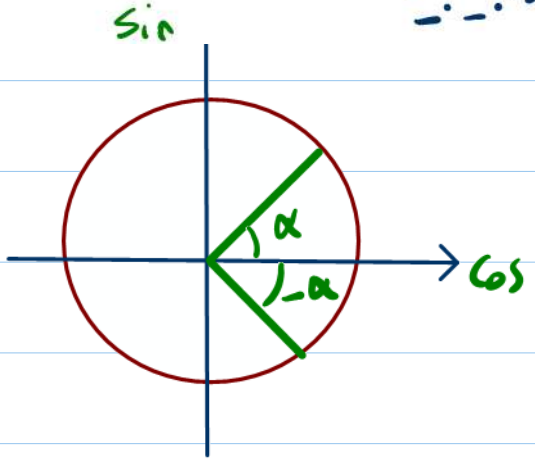
یعنی مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$، ابتدا ناحیه و علامت نسبت را مشخص می کنیم. در آخر اسم نسبت را عوض می کنیم یعنی به جای Sin، Cos و برعکس و به جای tan، Cot

tan و cot در یک تا را هم و نسبت را می‌سنجیم.





مثال: نسبت مثلثاتی زاویه $-\alpha$ (قرینه زاویه) را بیابید.



$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

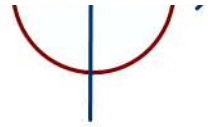
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زیر را برحسب α بنویسید.

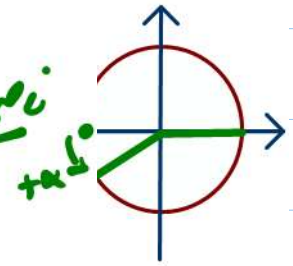
۱) $\sin(۲۸۰\pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ (از π تا $\pi - \alpha$)

ربع ۲



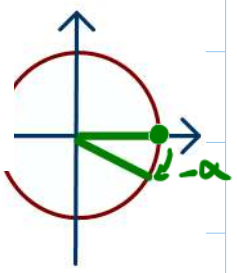
۲) $\cos(۳۳\pi + \alpha) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ (از π تا $\pi + \alpha$)

ربع ۳



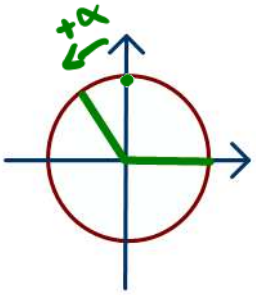
۳) $\cos(۲۴\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (از ۲۴π تا $-\alpha$)

ربع ۴



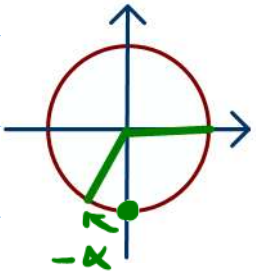
۴) $\sin\left(\frac{۲۵\pi}{۲} + \alpha\right) = \cos\alpha$ ($۲۵+۱=۲۶ \neq ۴k$)

ربع ۱



۵) $\tan\left(\frac{۱۱\pi}{۲} - \alpha\right) = \cot\alpha$ ($۱۱+۱=۱۲=۴k$)

ربع ۳



نکته: اگر زوایا به صورت مضرب یا تفاضل با $k\pi$ یا $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ داده نشوند باید با شکستن زاویه آن‌ها را به یکی از دو نوع گفته شده در آوردیم.

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را بیابید.

۱) $\sin 210^\circ = \sin(180+30) = \sin(\pi+\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{1}{2}$

π ↓ $\frac{\pi}{6}$

۲) $\tan(-10^\circ) = -\tan 10^\circ = -\tan(180-30)$

$= -\tan(\pi-\frac{\pi}{6})$

$= -(-\tan\frac{\pi}{6}) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

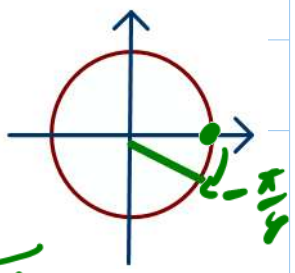
$-\frac{\pi}{6}$ ↑ 0

۳) $\cos 225^\circ = \cos(180+45) = \cos(\pi+\frac{\pi}{4})$

$= -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

π ↓ $\frac{\pi}{4}$

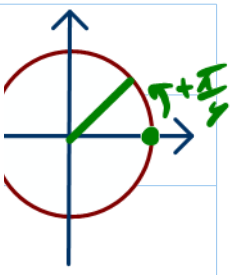
۴) $\cot 330^\circ = \cot(360-30) = \cot(2\pi-\frac{\pi}{6})$



$= \cot(-\frac{\pi}{6}) = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

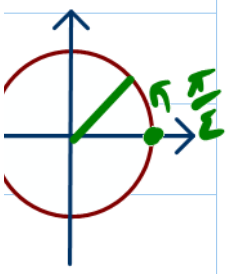
٥) $\sin\frac{17\pi}{4} = \sin\left(\frac{12\pi+\pi}{4}\right) = \sin\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$



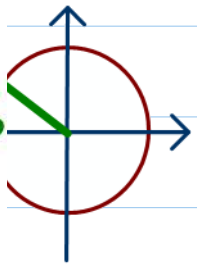
٦) $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = \cos\frac{17\pi}{4} = \cos\frac{16\pi+\pi}{4}$

$= \cos\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



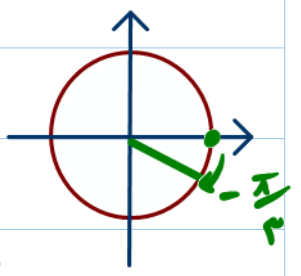
٧) $\tan\frac{3\pi}{4} = \tan\frac{4\pi-\pi}{4} = \tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\tan\frac{\pi}{4} = -1$



٨) $\sin\frac{23\pi}{3} = \sin\frac{24\pi-\pi}{3} = \sin\left(8\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



مثال:

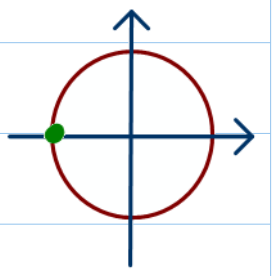
1)

$\sin 420^\circ = \sin(360-90) = \sin\left(4\pi-\frac{\pi}{2}\right)$ ($360 = 2\times180$)

$= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$



$\tan(-540^\circ) = -\tan(540^\circ) = -\tan(3\times180^\circ) = -\tan(3\pi) = 0$



حاصل $= -1 + 0 = -1$

۲)

$\cos(-720^\circ) = \cos 720^\circ = \cos(2\times360^\circ) = \cos 4\pi = 1$

$\cot(-900^\circ) = -\cot 900^\circ = -\cot(540^\circ + 360^\circ) = -\cot(3\pi + \frac{\pi}{2})$

$= -\cot(\pi + \frac{\pi}{2}) = -\cot\frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan 720^\circ = \tan 4\pi = 0$

$\tan(-450^\circ) = -\tan 450^\circ = -\tan(2\pi + \frac{\pi}{2}) = -\tan\frac{\pi}{2} = -\sqrt{3}$

حاصل $= 1 - \sqrt{\frac{3}{3}} + 0 + \sqrt{3} = \frac{3 - \sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$

۳)

$\sin(\frac{25\pi}{3}) = \sin\frac{24\pi + \pi}{3} = \sin(8\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{23\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{24\pi-\pi}{4}\right) = \cos\left(6\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{جواب} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

f) $\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4}$

$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{4\pi-\pi}{4} = \sin\pi - \frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{4\pi-\pi}{4} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\tan\frac{4\pi}{3} = -\tan\frac{3\pi+\pi}{3} = -\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$= -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$\text{جواب} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

قسمت دوم

جلسه سوم: صفحات ۹۸ تا ۱۰۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

با توجه به آنچه جلسه قبل درباره کمان های هم خانواده گفتیم، نتایج زیر را برای زوایای متمم و مکمل داریم :

(الف) دو زاویه متمم :

می دانیم هرگاه مجموع دو زاویه 90° یا $\frac{\pi}{2}$ شود می گوییم آن دو متمم یکدیگرند.

پس α و $\frac{\pi}{2}-\alpha$ متمم اند زیرا : $\frac{\pi}{2}-\alpha+\alpha=\frac{\pi}{2}$

حال با توجه به زوایای نوع دوم خود هم داشت:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$$

ب) دو زاویه مکمل:

می دانیم هرگاه جمع دو زاویه 180° یا π رادیان باشد، مکمل یکدیگر خواهند بود.

پس α و $\pi-\alpha$ مکمل هم اند زیرا: $(\pi-\alpha)+\alpha=\pi$

حال با توجه به رابطه‌های نوع اول داریم:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 20^\circ=\cos 70^\circ$ ✓ $\quad 20^\circ+70^\circ=90^\circ$ متمم

ب) $\tan 40^\circ=\cot 50^\circ$ ✗ $\quad 40^\circ+50^\circ=80^\circ\neq 90^\circ$

ب) $\sin 140^\circ = \sin 40^\circ$ ✓ — مکمل $140^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

ت) $\cos 125^\circ = -\cos 55^\circ$ ✗ — مکمل $125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$

ث) $\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ$ ✓ — مکمل $120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

ج) $\cot 110^\circ = -\cot 80^\circ$ ✗ — $110^\circ + 80^\circ = 190^\circ \neq 180^\circ$

مثال: کدام دو زاویه مکمل هم هستند؟

۱) $\frac{4\pi}{3}$ ، -30° ۲) 144° ، $\frac{\pi}{5}$ ✓ ۳) $-\frac{3\pi}{8}$ ، 247.5 ۴) $\frac{7\pi}{12}$ ، 15°

۱) $\frac{4\pi}{3} = 4 \times 60^\circ = 240^\circ \rightarrow 240^\circ + (-30^\circ) = 210^\circ \neq 180^\circ$ ✗

۲) $\frac{\pi}{5} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 36^\circ \rightarrow 144^\circ + 36^\circ = 180^\circ$ ✓

۳) $-\frac{3\pi}{8} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -67.5^\circ \rightarrow 247.5^\circ - 67.5^\circ = 180^\circ \neq 180^\circ$ ✗

۴) $\frac{7\pi}{12} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 105^\circ \rightarrow 105^\circ + 15^\circ = 120^\circ \neq 180^\circ$ ✗

مثال: اگر $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، θ زاویه‌ای حاده باشد، حاصل $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ را بیابید.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

یادآوری: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - (\frac{1}{4})^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$$\rightarrow \cos^2\theta = \frac{15}{16} \xrightarrow{\sqrt{}} \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4} \xrightarrow{0^\circ < \theta < 90^\circ} \cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

مثال: حاصل عبارت $A = \sin 140^\circ + \sin 160^\circ + \sin 170^\circ + \cos 100^\circ + \cos 110^\circ + \cos 120^\circ$ را بدست آورید.

$$\sin 140^\circ = \sin 40^\circ \ , \ \sin 160^\circ = \sin 20^\circ \ , \ \sin 170^\circ = \sin 10^\circ$$

$$\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ \ , \ \cos 110^\circ = -\cos 70^\circ \ , \ \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$$

$$A = \sin 40^\circ + \sin 20^\circ + \sin 10^\circ - \cos 80^\circ - \cos 70^\circ - \cos 60^\circ$$

$$\cos 80^\circ = \sin 10^\circ \ , \ \cos 70^\circ = \sin 20^\circ \ , \ \cos 60^\circ = \sin 40^\circ$$

$$A = \underline{\sin 40^\circ} + \underline{\sin 20^\circ} + \underline{\sin 10^\circ} - \underline{\sin 10^\circ} - \underline{\sin 20^\circ} - \underline{\sin 40^\circ} = 0$$

مثال: مقدار عبارت $A=\frac{-\sin^2 40^\circ-\sin^2 50^\circ+1-\sin 70^\circ}{\tan 40^\circ \tan 50^\circ-1-2\cos 20^\circ}$ را بدست آورید.

$-\sin^2 40^\circ-\sin^2 50^\circ=-(\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ)=-(\cos^2 50^\circ+\sin^2 50^\circ)=-1$

(متمم)

$\tan 40^\circ \times \tan 50^\circ=\cot 50^\circ \times \tan 50^\circ=1$

(متمم)

یادآوری: $\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta} \rightarrow \tan\theta \times \cot\theta=1$

$A=\frac{-1+1-\sin 70^\circ}{1-1-2\cos 20^\circ}=\frac{-\sin 70^\circ}{-2\cos 20^\circ}=\frac{\sin 70^\circ}{2\sin 70^\circ}=\frac{1}{2}$

(متمم)

مثال: اگر حاصل عبارت $\tan 10^\circ=a$ را بیابید. $B=\frac{\sin 70^\circ+2\sin 100^\circ}{2\sin 140^\circ-\sin 190^\circ}$

متمم: $\sin 70^\circ=\cos 10^\circ$, $\sin 100^\circ=\cos(-10^\circ)=\cos 10^\circ$ (زوایای روبه‌رو $90^\circ+10$)

مکمل: $\sin 140^\circ=\sin 10^\circ$, $\sin 190^\circ=\sin(-10^\circ)=-\sin 10^\circ$ (زوایای روبه‌رو $180^\circ+10$)

$B=\frac{\cos 10^\circ+2\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ+\sin 10^\circ}=\frac{3\cos 10^\circ}{3\sin 10^\circ}=\cot 10^\circ=\frac{1}{\tan 10^\circ}=\frac{1}{a}$

یادآوری: $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

مثال: کنکور ۹۹ (تجربی)

حاصل عبارت $\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰)+\tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$، کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند.)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

$\tan ۳۰۰ = \tan(۳۶۰-۶۰) = \tan(۲\pi-\frac{\pi}{۳}) = \tan(-\frac{\pi}{۳}) = -\tan ۶۰^\circ$

$\cos ۲۱۰ = \cos(۱۸۰+۳۰) = -\cos ۳۰^\circ$

$\tan ۴۸۰ = \tan(\overset{۴\pi}{\uparrow}۷۲۰-۶۰) = \tan(۱۸۰-۶۰) = -\tan ۶۰^\circ$

$\sin ۸۴۰ = \sin(\overset{۵\pi}{\uparrow}۹۰۰-۶۰) = \sin(۱۸۰-۶۰) = \sin ۶۰^\circ$

عبارت $= (-\tan ۶۰)(-\cos ۳۰)+(-\tan ۶۰)(\sin ۶۰)$

$= -\tan ۶۰\,(-\cos ۶۰ + \sin ۶۰) = -\tan ۶۰\,(-\sin ۶۰ + \sin ۶۰)$

(تفریق)

$= -\tan ۶۰ \times ۰ = ۰$ گزینه ۳

مثال: کنکور ۹۹ (تجربی خارج)

حاصل عبارت $\tan(۲۸۵)\tan(-۱۶۵)-\sin(۱۰۹۵)\cos(۲۵۵)$، کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند.)

۱) $\sin^۲(۱۵)$ ۲) $\cos^۲(۱۵)$ ۳) $-\sin^۲(۱۵)$ ۴) $-\cos^۲(۱۵)$

$\tan 215^\circ = \tan(270^\circ - 55^\circ) = \cot 55^\circ$

$\tan(-148^\circ) = -\tan 148^\circ = -\tan(180^\circ - 32^\circ) = -(-\tan 32^\circ) = \tan 32^\circ$

$\sin(1090^\circ) = \sin(1080^\circ + 10^\circ) = \sin 10^\circ$

$\cos(260^\circ) = \cos(270^\circ - 10^\circ) = -\sin 10^\circ$

عبارت $= (-\cot 55^\circ)(\tan 32^\circ) - \sin 10^\circ(-\sin 10^\circ)$

$= -1 + \sin^2 10^\circ = -(1 - \sin^2 10^\circ) = -\cos^2 10^\circ$: گزینه ۴

مثال: کنکور ۹۸ (ریاضی)

حاصل عبارت $\tan\frac{11\pi}{4} + \sin\frac{15\pi}{4}\cos\frac{13\pi}{4}$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$\tan\frac{11\pi}{4} = \tan\frac{12\pi - \pi}{4} = \tan(3\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

$\sin\frac{10\pi}{4} = \sin\frac{14\pi - \pi}{4} = \sin(4\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{13\pi}{4} = \cos\frac{12\pi + \pi}{4} = \cos(3\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

عبارت $= -1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + \frac{2}{4} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ گزینه ۲

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: نسبت های مثلثاتی برخی زوایا

حل تمرین: صفحه ۱۰۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin(۳۰۰^\circ) =$ $\sin(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin(-\frac{\pi}{۳}) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) $\cot(۷۵^\circ) =$ $\cot(۷۲۰^\circ + ۳۰^\circ) = \cot(۴\pi + \frac{\pi}{۶}) = \cot\frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳}$

پ) $\cos(-\frac{\pi}{۶}) =$ $\cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ت) $\cos(-\frac{۲۳\pi}{۴})$ $\cos\frac{۲۳\pi}{۴} = \cos\frac{۲۴\pi - \pi}{۴} = \cos(۶\pi - \frac{\pi}{۴}) = \cos(-\frac{\pi}{۴})$

$= \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ث) $\sin(\frac{۵\pi}{۴}) =$ $\sin(\frac{۴\pi + \pi}{۴}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\sin\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (ناحیه سوم)

ج) $\tan(-۸۴^\circ$ $-\tan(۸۴۰^\circ) = -\tan(۹۰۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\tan(۵\pi - \frac{\pi}{۳})$

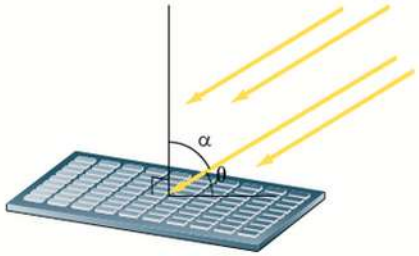
$= -\tan(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -(-\tan\frac{\pi}{۳}) = \tan\frac{\pi}{۳} = \sqrt{۳}$ (ناحیه دوم)

چ) $\tan(-۱۵۰^\circ) =$ $-\tan(۱۵۰^\circ) = -\tan(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -(-\tan\frac{\pi}{۶}) = \tan\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ (ناحیه دوم)

ح) $\cos(\frac{۹\pi}{۴}) =$ $\cos(\frac{۸\pi + \pi}{۴}) = \cos(۲\pi + \frac{\pi}{۴}) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

خ) $\tan\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{9\pi+\pi}{3}\right) = \tan\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ (تانژانت سوم)

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم، رابطهٔ $I = k\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به‌دست می‌دهد.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب کسینوس زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

$\alpha+\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}-\alpha \rightarrow I=k\sin\theta \Rightarrow I=k\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$

ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta=0$ ، $\theta=\frac{\pi}{6}$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$ بر حسب k به‌دست آورید.

$I=k\sin\theta \xrightarrow{\theta=0} I=k\sin 0 = k\times 0 = 0$

$\xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{6}} I=k\sin\frac{\pi}{6} = k\times\frac{1}{2} = \frac{k}{2}$

$\xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{3}} I=k\sin\frac{\pi}{3} = k\frac{\sqrt{3}}{2}$

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به‌دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی : از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

$-1 \leq \sin\theta \leq 1 \xrightarrow{\max}$ $I_{max} = k\sin\theta = k\sin 90^\circ = k \times 1 = k$

$\theta_{max} = 90^\circ$

۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا برحسب رادیان است).

الف) $\cos\theta + \cos(\pi - \theta) = 0$ (دو زاویه)

$\cos\theta - \cos\theta = 0$ درست

ب) $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) + \cos\theta = 1$

$\cos\theta + \cos\theta = 2\cos\theta \neq 1$ نادرست

ج) $\cos(7) = \cos(-7)$ درست ($\cos(-\theta) = \cos\theta$)

د) $\tan(\pi - \theta) = \tan\pi - \tan\theta$

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ (دو زاویه) نسبت چپ

درست

$\tan\pi - \tan\theta = 0 - \tan\theta = -\tan\theta$ نسبت راست

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس سوم: توابع مثلثاتی

جلسه چهارم: صفحات ۱۰۵تا ۱۰۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

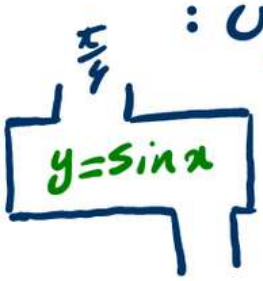
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

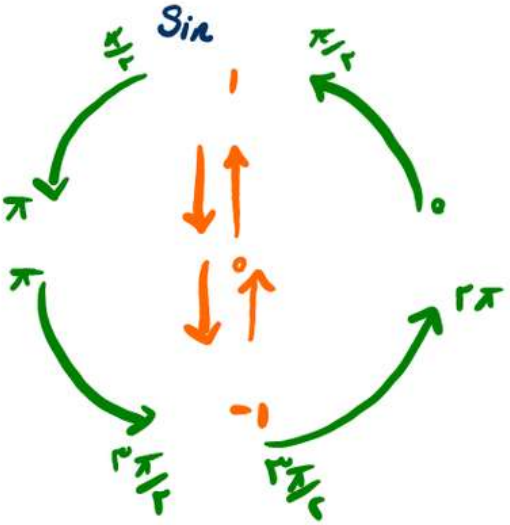
نسبت های مثلثاتی را می توان بعنوان تابع نیز در نظر گرفت زیرا برای هر زاویه بعنوان ورودی فقط یک مقدار نسبت مثلثاتی بعنوان خروجی داده می شود مثلاً برای سینوس :



$y=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

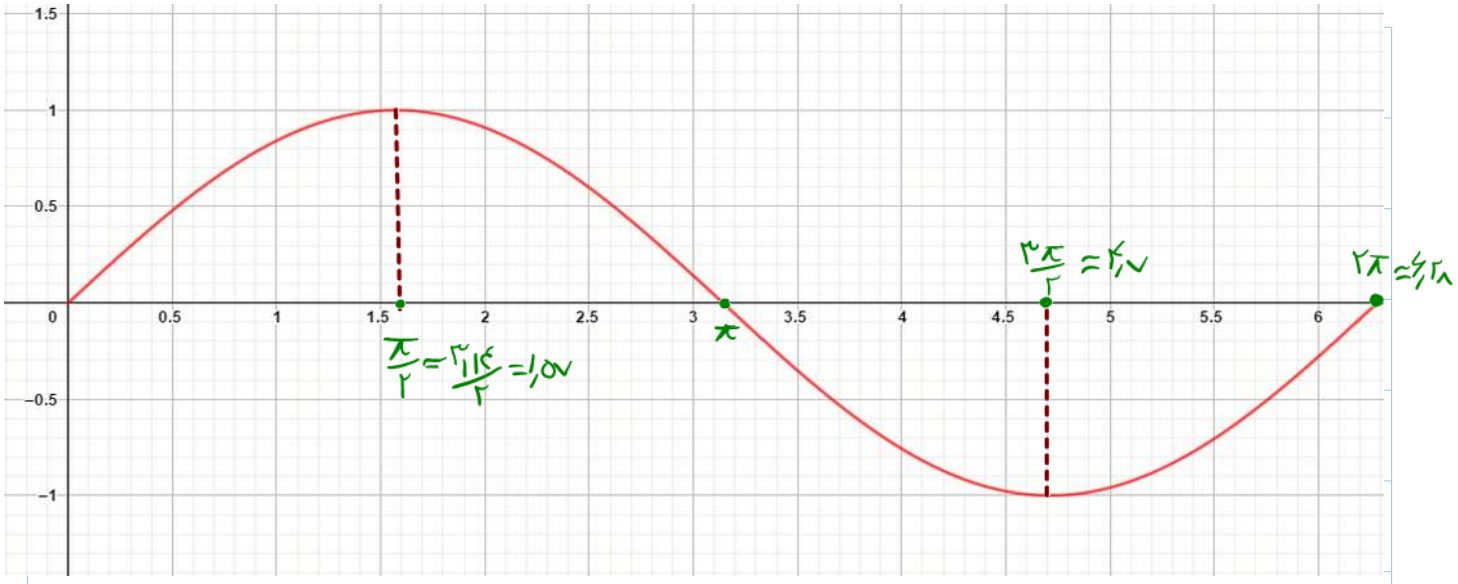
(الف) رسم نمودار تابع $y=\sin x$

اگر x برحسب رادیان باشد با استفاده از دایره مثلثاتی جدول زیر را تشکیل می دهیم :



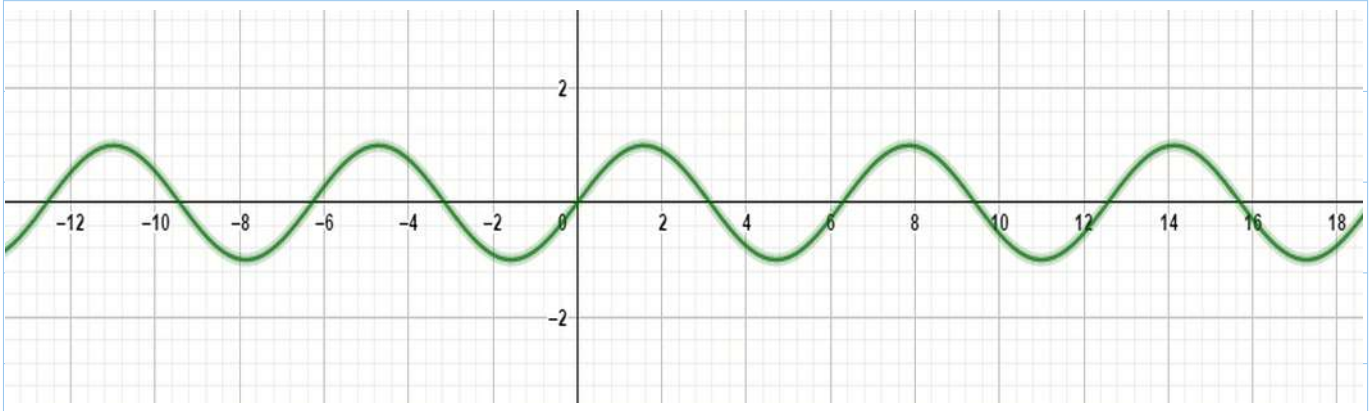
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
		1			
$y=\sin x$	0		0		0
				-1	

حال با داشتن چند زاویه دیگر به سینوس نمودار زیر را می توانیم رسم کنیم :



از نمودار $y=\sin x$ به نتایج زیر می‌رسیم:

۱) نمودار تابع سینوس در بازه‌های به طول 2π تکرار می‌شود زیرا داریم: $\sin(x+2\pi)=\sin x$



۲) $D_f = \mathbb{R}$ ، $R_f = [-1,1]$

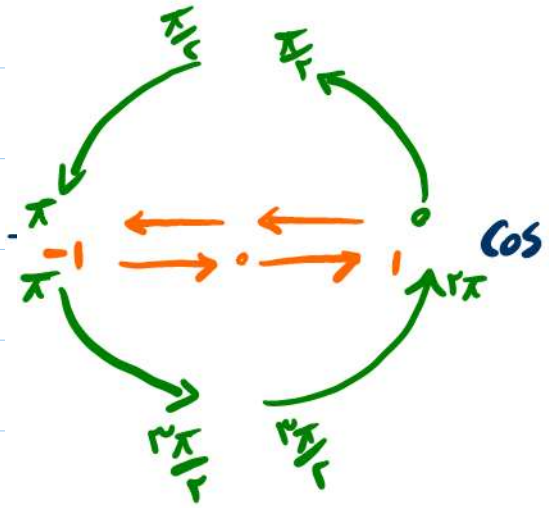
۳) نمودار این تابع در $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) محور xها را قطع می‌کند.

۴) بیشترین مقدار تابع $y=\sin x$ برابر یک است که در $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد.

۵) کمترین مقدار تابع $y=\sin x$ برابر -1 است که در $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد.

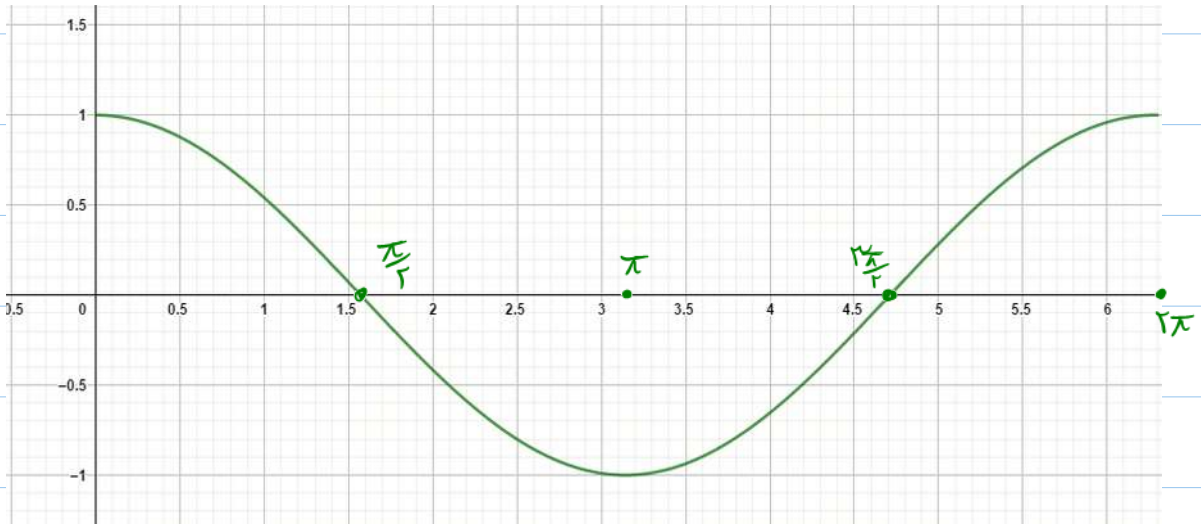
ب) رسم نمودار تابع $y=\cos x$

اگر x برحسب رادیان باشد از دایره مثلثاتی جدول زیر را نتیجه می‌گیریم :



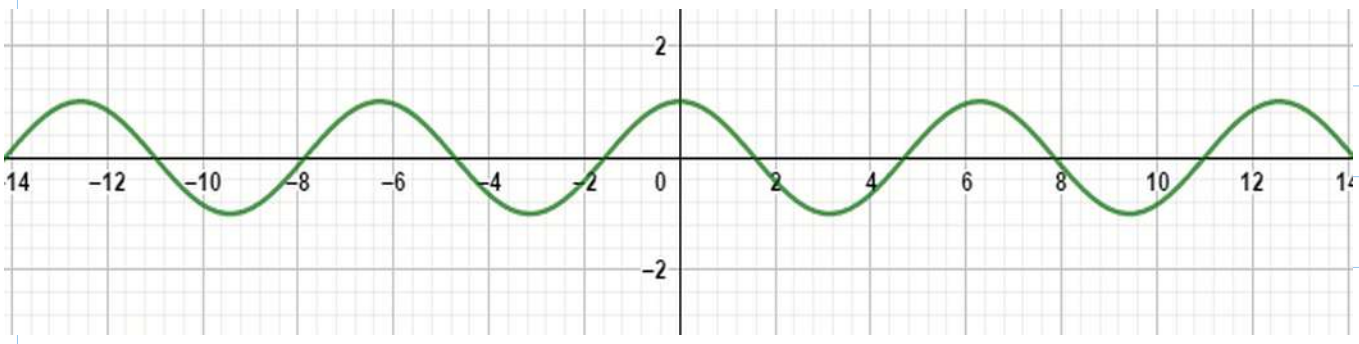
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\cos x$	1	0	-1	0	1

حال با داشتن چند زاویه دیگر به کشیدن نمودار زیر را می‌توانیم رسم کنیم :



از نمودار $y=\cos x$ به نتایج زیر می‌رسیم:

۱) نمودار تابع کسینوس در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود زیرا داریم: $\cos(x+2\pi)=\cos x$



۲) $D_f=\mathbb{R}$ ، $R_f=[-1,1]$

۳) نمودار این تابع در $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ محور x را قطع می‌کند.

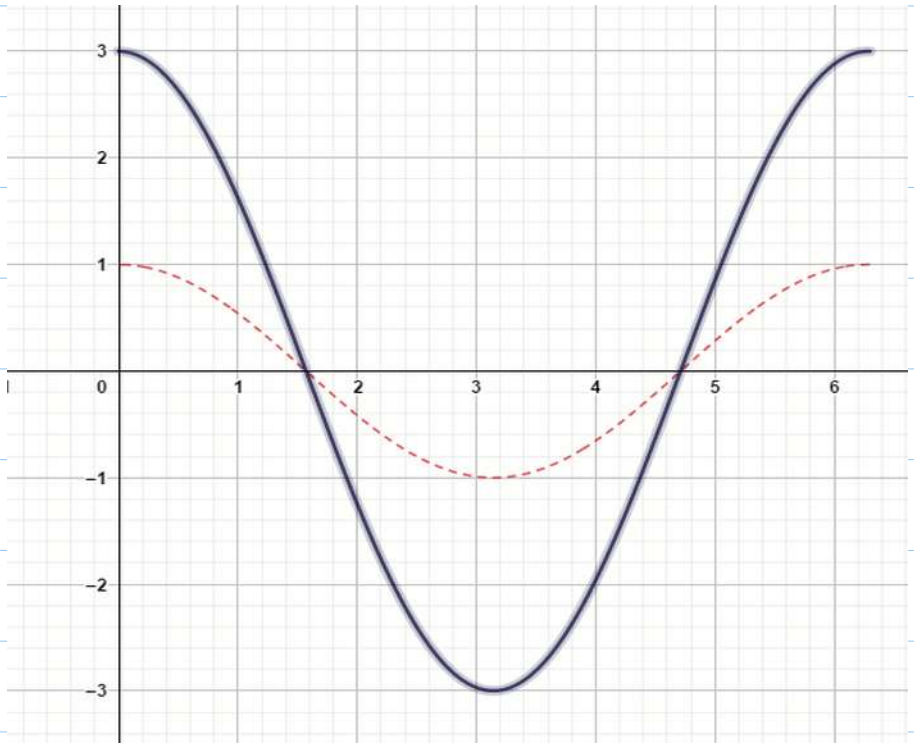
۴) بیشترین مقدار تابع $y=\cos x$ برابر یک است که در $x=2k\pi$ رخ می‌دهد. (مضارب زوج π)

۵) کمترین مقدار تابع $y=\cos x$ برابر -1 است که در $x=(2k+1)\pi$ رخ می‌دهد. (مضارب فرد π)

نکته: از قوانین انتقال برای رسم نمودار توابع مثلثاتی کمک می‌گیریم.

مثال: با توجه به نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

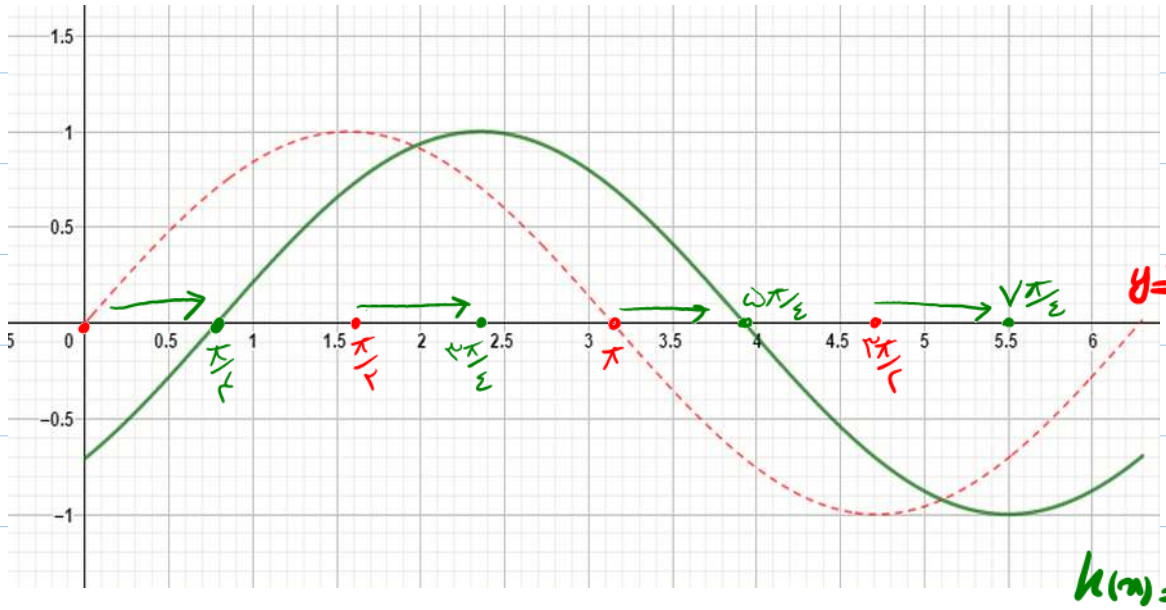
الف) $f(x)=3\cos x$



$f(x) = 2\cos x$

$y = \cos x$

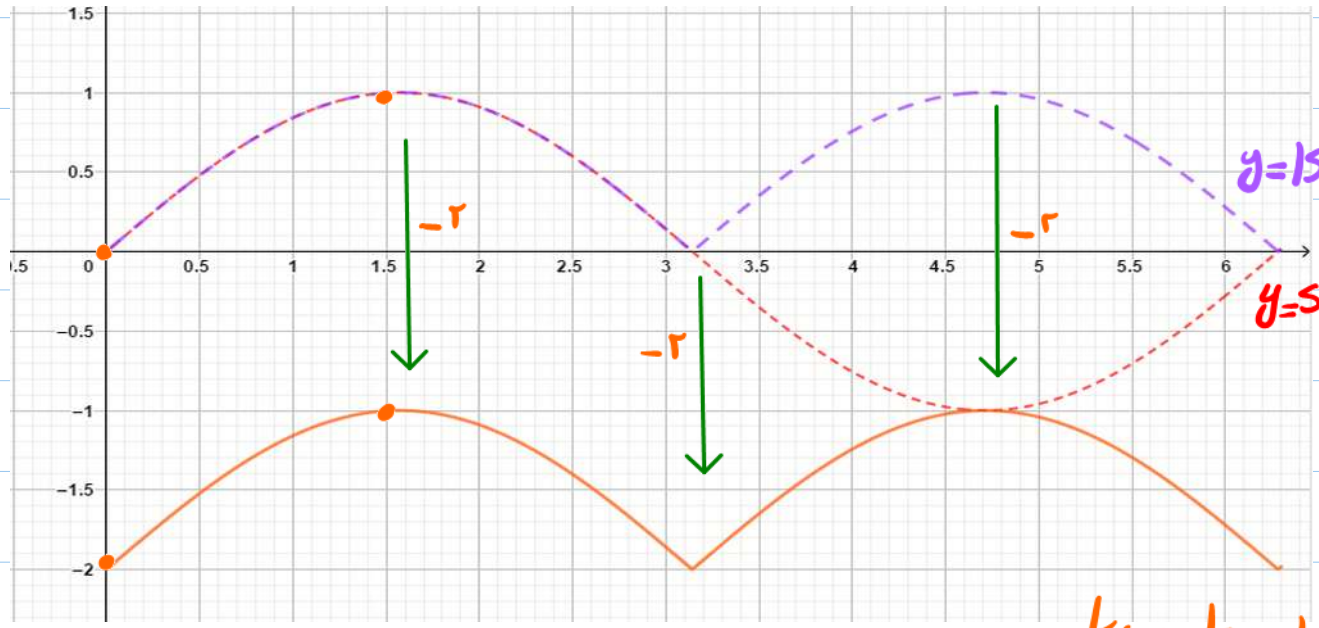
۲) $h(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$



$y = \sin x$

$h(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$

ب) $k(x) = |\sin x| - 2$



مثال:

آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y = \sin x \ , \quad y = \cos(x - \frac{\pi}{۲})$

۲) $y = \cos x \ , \quad y = \sin(\frac{\pi}{۲} + x)$

۳) $y = \cos x \ , \quad y = \cos(۲\pi - x)$

۴) $y = \sin x \ , \quad y = \sin(۵\pi - x)$

۱) $y = \cos(x - \frac{\pi}{۲}) = \cos(-(\frac{\pi}{۲} - x)) = \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = \sin x$ بله

۲) $y = \sin(\frac{\pi}{۲} + x) = \cos x$ (تبدیل ۲۰۰) بله

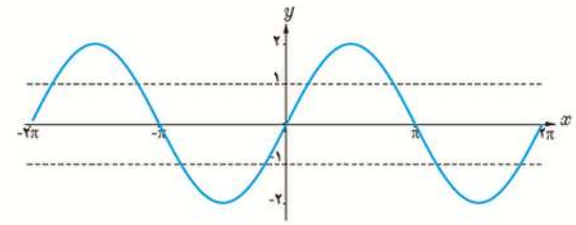
۳) $y = \cos(۲\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$ بله

۴) $y = \sin(۵\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$ بله

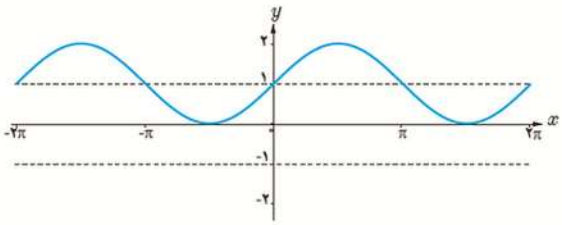
مثال:

هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

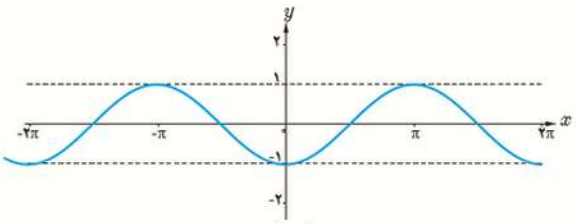
۱) $y=۲\sin x$ ۲) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ ۳) $y=\sin x+۱$ ۴) $y=-\sin x+۱$



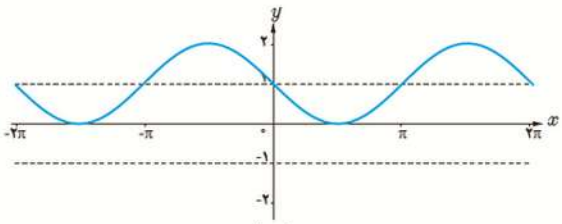
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

۱) $y=۲\sin x$ نمودار (الف)

۲) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})=\sin(-(\frac{\pi}{۲}-x))=-\sin(\frac{\pi}{۲}-x)=-\cos x$ نمودار (پ)

۳) $y=\sin x+۱$ نمودار (ب)

۴) $y=-\sin x+۱$ نمودار (ت)

مثال:

$x\in\mathbb{R}$ نادرست

نادرست

نادرست

درست

نادرست

نادرست

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس سوم: توابع مثلثاتی

حل تمرین: صفحه ۱۰۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

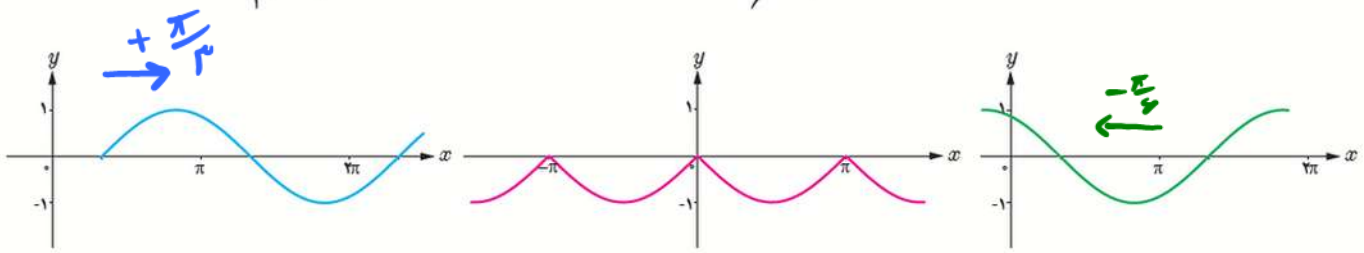
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

الف) $y = -|\sin x|$ ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$ پ) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$



الف) $y=-|\sin x|$ ب) $y=\cos(x+\frac{\pi}{6})$ پ) $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$

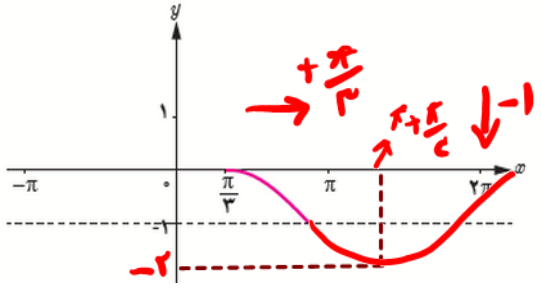
نمودار به اندازه $\frac{\pi}{6}$ به چپ منتقل می‌شود

قسمت زیر محور xها به بالا منتقل می‌شود. پس نسبت به محور xها قرینه می‌شود و همه قسمت‌ها زیر محور xها می‌افتند.

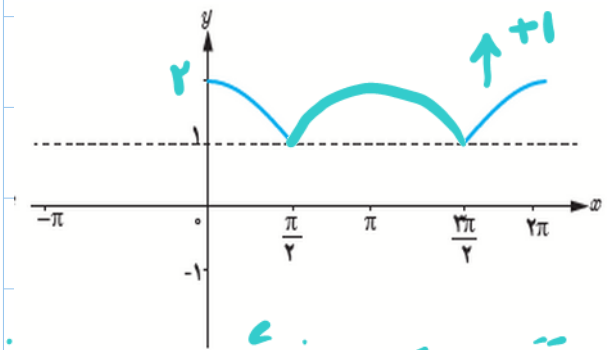
نمودار به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به راست منتقل شده است.

۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$ ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$ پ) $y = 1 + |\cos x|$

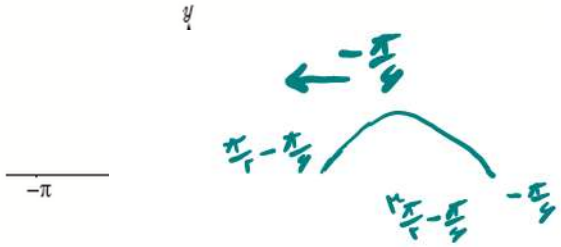


ب) $y=\cos(x-\frac{\pi}{3})-1$



پ) $y=1+|\cos x|$

قسمتی زیر محور xها قرینه شده به بالا آمده



نسبت به محور xها قرینه شده

الف) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{6})$

۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

الف) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$y_{max}=1 : x=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$

$y_{min}=-1 : x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$

ب) $y=\cos(x-\frac{\pi}{6})-1$

$y_{max}=0 : x=\frac{\pi}{6}, 2\pi+\frac{\pi}{3}$

$y_{min}=-2 : x=\pi+\frac{\pi}{3}$

پ) $y=|\cos x|+1$

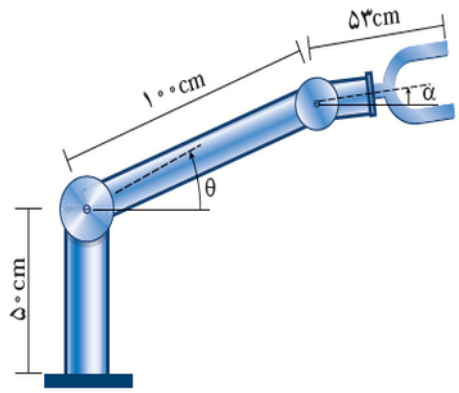
$y_{max}=2 : x=0, \pi, 2\pi$

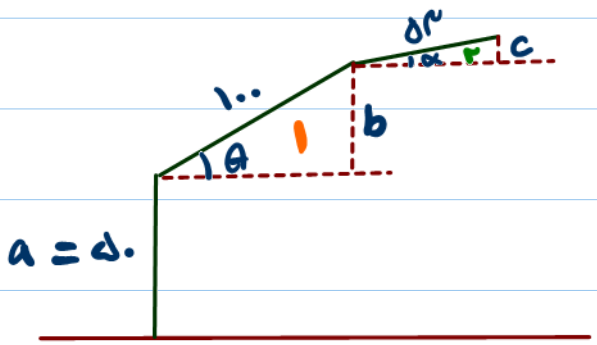
$y_{min}=1 : x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام‌یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازهٔ $(0, \pi)$ یک به یک است؟

هیچکدام یک به یک نیستند.

۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.





الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید. $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} , -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$

$$h = a + b + c = 50 + b + c$$

مثلث ۱ : $\sin\theta = \frac{b}{100} \rightarrow b = 100\sin\theta$

مثلث ۲ : $\sin\alpha = \frac{c}{53} \rightarrow c = 53\sin\alpha$

$$h = 50 + 100\sin\theta + 53\sin\alpha$$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $23/5\,cm$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -30^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟

$\alpha = -30^\circ \rightarrow h = 23{,}5 = 50 + 100\sin\theta + 50\sin(-30^\circ)$

$\rightarrow \quad 23{,}5 - 50 = 100\sin\theta - 50\sin 30^\circ$ $\quad \hookrightarrow \frac{1}{2}$

$\rightarrow \quad 23{,}5 - 50 + \frac{50}{2} = 100\sin\theta$

$\rightarrow \quad 25{,}5 - 50 + 24{,}5 = 100\sin\theta$

$\rightarrow \quad 50 - 50 = 100\sin\theta \rightarrow 100\sin\theta = 0 \rightarrow \sin\theta = 0$

$\rightarrow \quad \theta = 0$

پس بازوی برنر باید افقی باشد.

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

قسمت اول

جلسه پنجم: صفحات ۱۱۰و۱۱۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری:

در سال گذشته با روابط زیر که به آن‌ها اتحادهای مثلثاتی می‌گفتیم آشنا شدید:

۱) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\Leftarrow \begin{cases} \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \end{cases}$

۲) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\Rightarrow (\tan\alpha)(\cot\alpha) = 1$

۳) $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

۴) $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

مثال: کنکور ۹۸

– ✓

$$\text{عبارت} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sin^2 x\right) = \frac{1}{|\cos x|}\left(2\times\frac{2}{4} - \sin^2 x\right)$$

$$\xrightarrow[\cos x<0]{x \text{ ناحیه سوم}} \text{عبارت} = \frac{1}{-\cos x}(1-\sin^2 x) = \frac{1}{-\cos x}\times\cos^2 x = -\cos x$$

گزینه ۴

سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان :

۱) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

۲) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

مثال : مقادیر زیر را بیابید .

الف) $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

ب) $\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

پ) $\cos 255^\circ = \cos(180^\circ + 75^\circ) = -\cos 75^\circ$

$$= -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

مثال: اگر $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ ، $\cos\beta = \frac{12}{13}$ و α و β به ترتیب در ربع سوم و چهارم باشند، $\cos(\alpha+\beta)$ را بیابید.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\surd} \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{\alpha \text{ ناحیه سوم}} \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1-\frac{144}{169} = \frac{25}{169} \xrightarrow{\surd} \sin\beta = \pm\frac{5}{13}$$

$$\xrightarrow{\beta \text{ ناحیه چهارم}} \sin\beta = -\frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{4}{5}\times\frac{12}{13} - \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{-48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{-63}{65}$$

مثال: اگر $\sin 28^\circ + \cos 28^\circ = a$ ، مقدار $\cos 17^\circ$ را برحسب a بدست آورید.

$$\cos 17^\circ = \cos(45^\circ - 28^\circ) = \cos 45^\circ\cos 28^\circ + \sin 45^\circ \sin 28^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 28^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 28^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 28^\circ + \cos 28^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

مثال: مقدار $\frac{\sin 61^\circ \sin 41^\circ + \sin 59^\circ \sin 29^\circ}{\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ}$ را محاسبه کنید.

$61^\circ + 29^\circ = 90^\circ \rightarrow \sin 29^\circ = \cos 61^\circ$

$41^\circ + 59^\circ = 90^\circ \rightarrow \sin 59^\circ = \cos 41^\circ$

$$\frac{\sin 61^\circ \sin 41^\circ + \cos 41^\circ \cos 61^\circ}{\sin(12^\circ + 18^\circ)} = \frac{\cos(61^\circ - 41^\circ)}{\sin(12^\circ + 18^\circ)} = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$= \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

مثال کنکور ۹۹:

$\cos\left(11\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos 11\frac{\pi}{4} \cos\alpha - \sin 11\frac{\pi}{4} \sin\alpha$

$\cos 11\frac{\pi}{4} = \cos\frac{12\pi - \pi}{4} = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 11\frac{\pi}{4} = \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 = 1 - \frac{2}{100} = \frac{98}{100} \rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{98}}{10}$

$$\cos(11\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{98}}{10}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \frac{\sqrt{196}}{20} - \frac{2}{20}$$

$$= \frac{14}{20} - \frac{2}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$ گزینه ۳ ✔

مثال کنکور ۹۹:

اگر انتهای کمان α در ربع اوّل دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha = \frac{1}{7}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{13\pi}{4}+\alpha)$، کدام است؟

۱) $-\frac{4}{\cdot}$ ۲) $-\frac{3}{\cdot}$ ۳) $\frac{3}{\cdot}$ ۴) $\frac{4}{\cdot}$ ✔

$$\sin\left(\frac{13\pi}{4}+\alpha\right) = \sin\frac{12\pi}{4}\cos\alpha + \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}$$

روش اول: برای α به $\cos\alpha, \sin\alpha$ رسیده و از رکار مثلثی

روش دوم: $\sqrt{50}$، 1α، 7، 1

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{50}}, \quad \cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{50}}$$

$$\sin\frac{13\pi}{4} = \sin\frac{12\pi+\pi}{4} = \sin(3\pi+\frac{\pi}{4}) = \sin(\pi+\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{12\pi}{4} = \cos(\pi+\frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{13\pi}{4}+\alpha\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{7}{\sqrt{50}} + \frac{1}{\sqrt{50}}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-7\sqrt{2}}{2\sqrt{50}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{50}}$$

$$= \frac{-8\sqrt{2}}{2\sqrt{50}} = \frac{-4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = -\frac{4}{5}$$ گزینه ۱

$\sqrt{50}$، 2×25

مثال: ثابت کنید: $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$

طرف راست $= \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} \pm \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin\alpha \pm \cos\alpha\right) = \sin\alpha \pm \cos\alpha =$ طرف چپ

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

مثال: حاصل $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$ را بدست آورید.

$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{2}\sin(15^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2}\sin(60^\circ) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{2}$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

قسمت دوم

جلسه ششم: صفحات ۱۱۰و۱۱۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان (2α)

الف) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

اثبات :

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \square$$

ب) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

اثبات :

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \square$$

پ) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

اثبات : می‌دانیم : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

به جای گذاری $\sin^2\alpha$ در (ب) داریم :

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$\square$

ت) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

اثبات: با جای‌گذاری $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ در رابطه ب داریم:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \blacksquare$$

مثال: اگر $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ باشد و α در ناحیه سوم واقع باشد مقدار $\sin 2\alpha$ را بیابید.

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$

$$\rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

مثال: حاصل $\cos 105^\circ \cos 165^\circ$ را بدست آورید.

$$\cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$
$$\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$
$$\text{عبارت} = (-\cos 15^\circ)(-\sin 15^\circ) = \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

تذکر: $\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$

$\Rightarrow$ حاصل $= \frac{1}{2}\sin 2(15^\circ) = \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

مثال: اگر $\sin 65^\circ = k$ باشد، حاصل $\sin 40^\circ$ را برحسب k بدست آورید.

$k = \sin 65^\circ = \cos 25^\circ \quad : \quad 65^\circ + 25^\circ = 90^\circ$

$\sin 40^\circ = \cos 50^\circ \quad : \quad 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$

از ب

$\sin 40^\circ = \cos 50^\circ = \cos(2\times 25^\circ) = 2\cos^2 25 - 1 = 2k^2 - 1$

مثال: اگر $\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos 2x$ را بیابید.

$\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4} + \cos x\cos\frac{\pi}{4} + \sin x\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}$

$\rightarrow \quad 2\cos x\cos\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} \rightarrow 2\cos x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 1 = 2\times\frac{4}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = \frac{-1}{9}$

مثال: روابط زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

ب) $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

اثبات الف : $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \rightarrow 2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$

$\xrightarrow{\div 2} \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

اثبات ب : $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \rightarrow \cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha$

$\xrightarrow{\div 2} \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

مثال: برای زاویه 15°، سینوس و کسینوس را محاسبه کنید.

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 2(15^\circ)}{2} = \frac{1-\cos 30^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 2(15^\circ)}{2} = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

حل تمرین: صفحه ۱۱۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

ب) $\tan 105^\circ$

روش اول: به خوش‌ترین $\tan 105^\circ = \frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ}$

روش دوم: استفاده از رابطه: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \times \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

پ) $\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ت) $\sin 120^\circ$

روش اول: $\sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

روش دوم: $\sin(120^\circ) = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

روش سوم :

$\sin(120^\circ) = \sin(2\times 60^\circ) = 2\sin 60^\circ \cos 60^\circ$

$= 2\times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ث) $\cos 135^\circ$

روش اول :

$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

روش دوم :

$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

روش سوم :

$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = \cos 90^\circ \cos 45^\circ - \sin 90^\circ \sin 45^\circ$

$= 0\times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha+\beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

الف)

$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-(\frac{4}{5})^2 = 1-\frac{16}{25} = \frac{9}{25} \rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ربع اول } \alpha}$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-(-\frac{12}{13})^2 = 1-\frac{144}{169} = \frac{169-144}{169} = \frac{25}{169}$

$\rightarrow \sin\beta = \pm\frac{5}{13} \xrightarrow{\text{ربع دوم } \beta} \sin\beta = \frac{5}{13}$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$=\frac{3}{5}\times\left(\frac{-12}{13}\right)+\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{-36}{65}+\frac{20}{65}=\frac{-16}{65}$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\times\left(\frac{-12}{13}\right)+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{-48+15}{65}=\frac{-33}{65}$

ب) α ربع اول، β ربع دوم، $\sin(\alpha+\beta)$ منفی شده است پس $\alpha+\beta$ در ناحیه سوم است.

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

الف) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

ب) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

پ) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ت) $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

در متن درس اثبات کردیم.

۴ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویهٔ $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 22,5^\circ=\frac{1-\cos 45^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\sqrt{}} \sin 22{,}5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \rightarrow \cos^2 22{,}5^\circ = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\sqrt{}} \cos 22{,}5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس اول و دوم: مفهوم حد و فرایندهای حدی-حدهای یک طرفه

جلسه اول: صفحات ۱۱۴ تا ۱۲۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

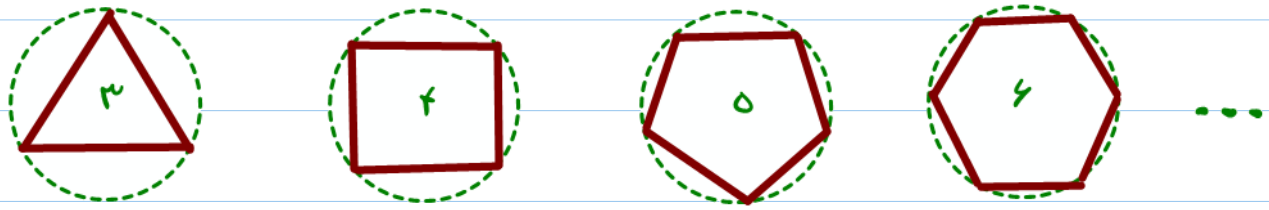
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

قبل از اینکه تعریف دقیق حد یک تابع را بگوئیم، لازم است با مفاهیم زیر آشنا شویم.

۱) فرایند حدی:

- در شکل‌های زیر در هر مرحله یک n ضلعی منتظم را در دایره قرار داده‌ایم. اگر n را زیاد کنیم مساحت n ضلعی به مساحت دایره نزدیک می‌شود.



پس می‌توانیم بگوئیم مساحت چند ضلعی‌های محاطی را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

- دنباله $\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ را در نظر بگیرید. اگر n عضو شاره جمله را بزرگ و بزرگتر کنیم، جملات دنباله کوچکتر شده و به صفر نزدیک می‌شود.

مثال‌های بالا نمونه‌ای از فرایندهای حدی هستند.

۲) میل کردن :

وقتی می گوییم x به a میل می کند یعنی x بسیار به عدد a نزدیک می شود ولی هرگز برابر عدد a نمی شود و می نویسیم $x \to a$.

مثلاً



$x \to 3$: x ها از هر دو طرف به ۳ نزدیک شوند

وقتی می نویسیم $x \to a^+$ یعنی x از مقادیر بزرگتر از a، به a بسیار نزدیک می شود. در این حالت می گوییم x از سمت راست به a میل می کند.

مثلاً



$x \to 5^+$: x از مقادیر بزرگتر از ۵ به ۵ نزدیک شود

وقتی می نویسیم $x \to a^-$ یعنی x از مقادیر کوچکتر از a، به a بسیار نزدیک می شود. در این حالت می گوییم x از سمت چپ به a میل می کند.

مثلاً



$x \to 4^-$: x از مقادیر کوچکتر از ۴ به ۴ نزدیک می شود

۳) همسایگی :

فرض کنید x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می گوییم.

(a,b) یک همسایگی x_0



مثال: بازه $(5,8)$ یک همسایگی عدد ۶ است.



اگر عدد x_0 را از همسایگی (a,b) حذف کنیم یعنی $(a,b)-\{x_0\}$، به مجموعه بدست آمده

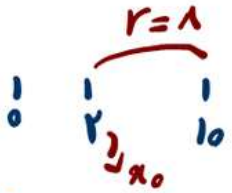
یک همسایگی محذوف x_0 می گوئیم.



اگر $r>0$ باشد بازه باز (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست عدد x_0 و بازه باز

(x_0-r, x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می گوئیم.

مثال: $(1,10)$ یک همسایگی راست ۲



$(0,2)$ یک همسایگی چپ ۲



حال می توانیم تعریف حد را بیان کنیم.

تعریف حد تابع:

فرض کنید تابع $y=f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد (یعنی در حوزه a تعریف شود

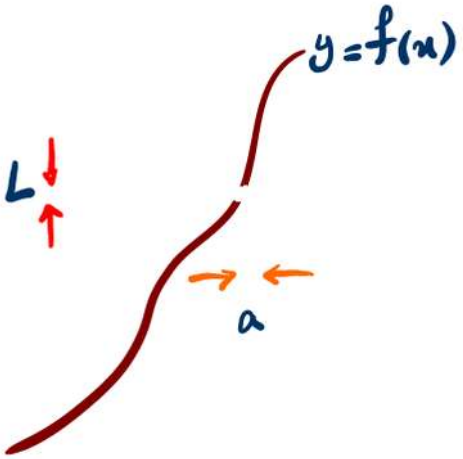
یا نشود فرقی ندارد.) می‌گوییم حد تابع f وقتی $x \to a$ برابر عدد L است هرگاه

با نزدیک شدن x به a مقادیر تابع f (همان yها) به L نزدیک شوند و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

تعریف بالا را به این صورت هم می‌توان گفت:

حد تابع f وقتی $x \to a$ برابر L است هرگاه مقادیر تابع f (همان yها) را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود.

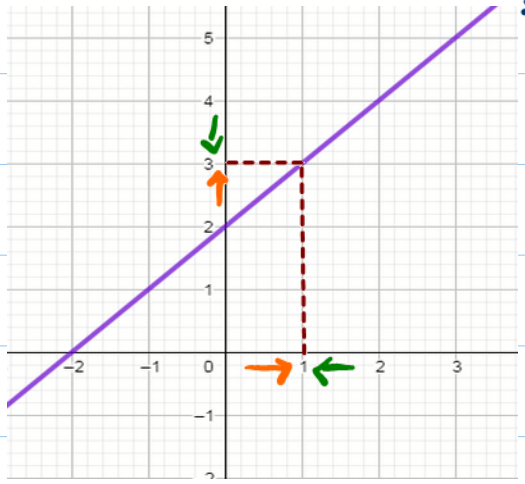


$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

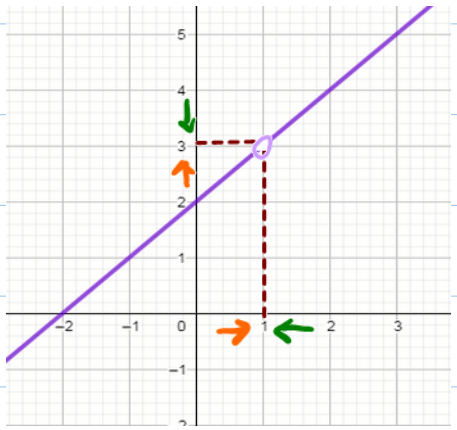
مثال: تابع $f(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول و نمودار، حد تابع را وقتی $x \to 1$ بدست آورید.

x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	$\rightarrow 1 \leftarrow$	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	۲
$y=x+2$	۲	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	$\rightarrow 3 \leftarrow$	۳/۰۱	۳/۱	۳/۵	۴

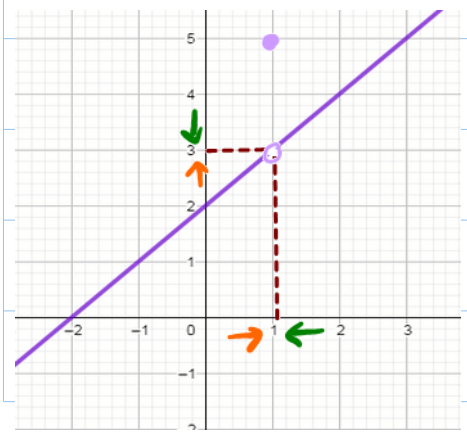
$$\lim_{x \to 1} (x+2) = 3$$



در وضعیت زیر هم حد تابع در $x=1$ برابر ۳ است.



$$g(x) = x+2 \quad , \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$



$$h(x) = \begin{cases} x+2 & x \neq 1 \\ \omega & x = 1 \end{cases}$$

تعریف حد راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد می‌گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر L_1 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_1 نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به a نزدیک شود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$

تعریف حد چپ :

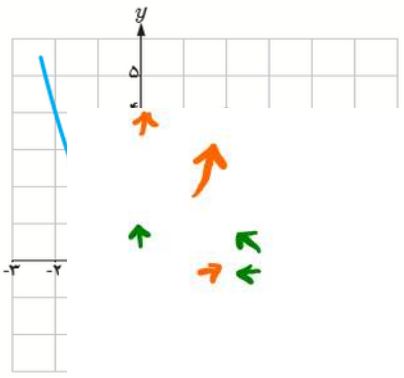
اگر تابع f در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر L_2 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_2 نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به a نزدیک شود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

نکته: حد تابع f در $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حدرات چپ تابع در $x=a$ موجود و برابر باشند یعنی:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -x+3 & x>2 \\ x^2 & x<2 \end{cases}$ به صورت روبه‌رو است:



$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$

تابع در $x=2$ حد ندارد زیرا $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$

مثال:

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$ $\quad$ $= 1$ $\quad$ وجود ندارد $=$

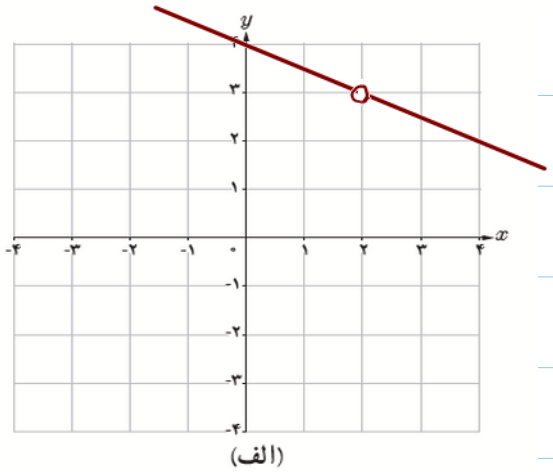
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$ $\quad$ $= 1$ $\quad$ $= 1$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = 3$ $\quad$ وجود ندارد $=$ $\quad$ وجود ندارد $=$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ $\quad$ $= 1$ $\quad$ $= 1$

مثال: نموداری از یک تابع رسم کنید که :

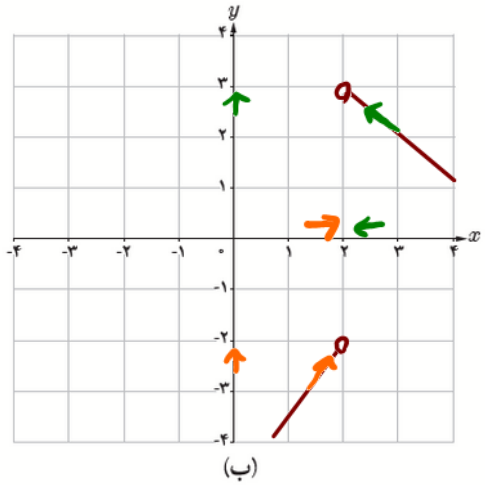
الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.



(الف)

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.



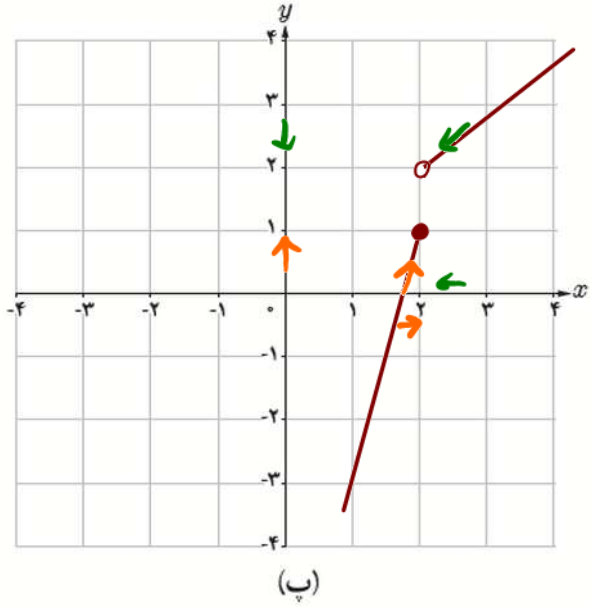
(ب)

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -2$$

در $x=2$ حد ندارد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.



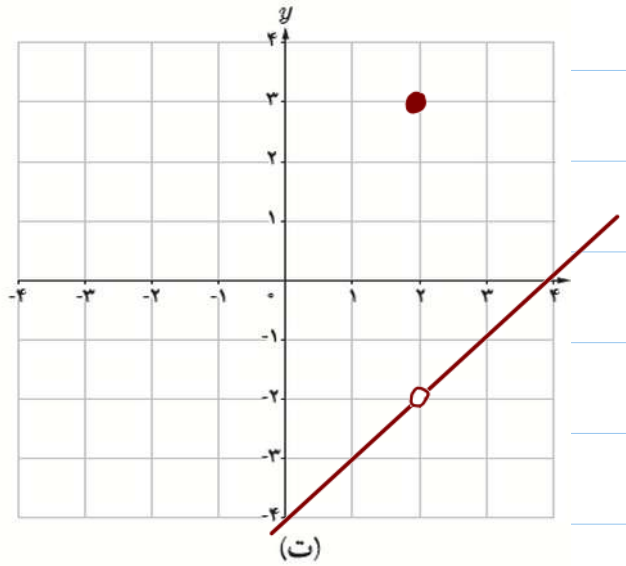
(پ)

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$$

در $x=2$ حد ندارد.

ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



$\lim_{x\to 2} f(x) = -2$

$f(2) = 4$

مثال: حدهای زیر را با استفاده از رسم نمودار محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

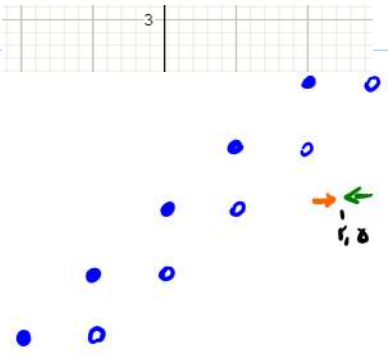
$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\frac{x}{x} & x>0\\ \frac{-x}{x} & x<0\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

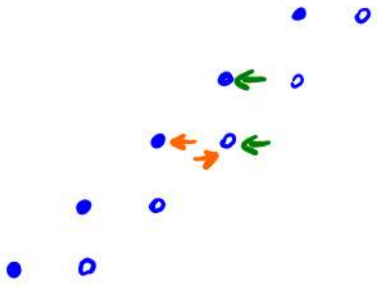
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

تابع در $x=0$ حد ندارد.

ب) $\lim_{x \to \frac{3}{2}} [x] = 2$



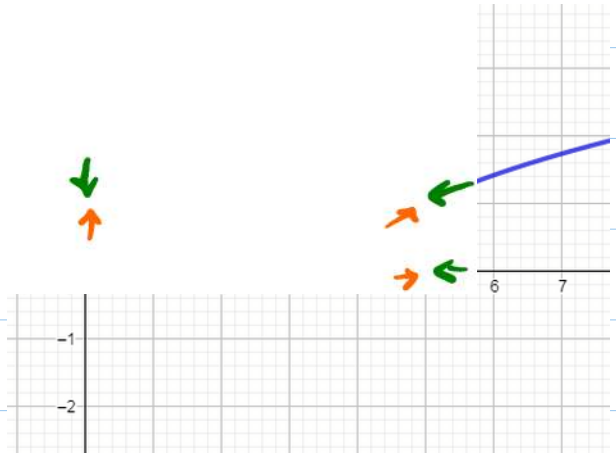
پ) $\lim_{x \to 1} [x]$ = حد ندارد



$\lim_{x \to 1^+} [x] = 1$

$\lim_{x \to 1^-} [x] = 0$

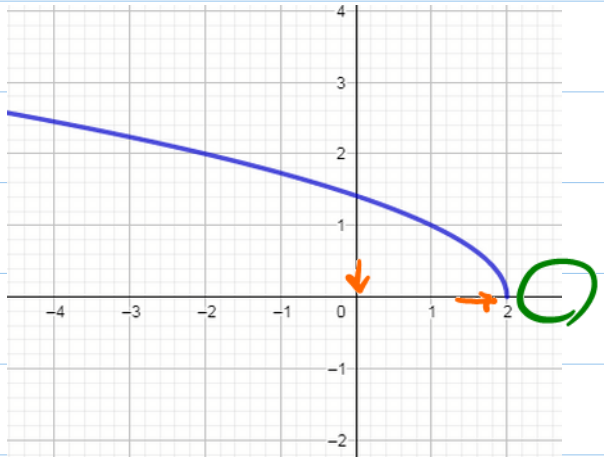
ت) $\lim_{x \to 5} \sqrt{x-4} = 1$



ث) $\lim_{x \to 2} \sqrt{2-x}$ = حد ندارد

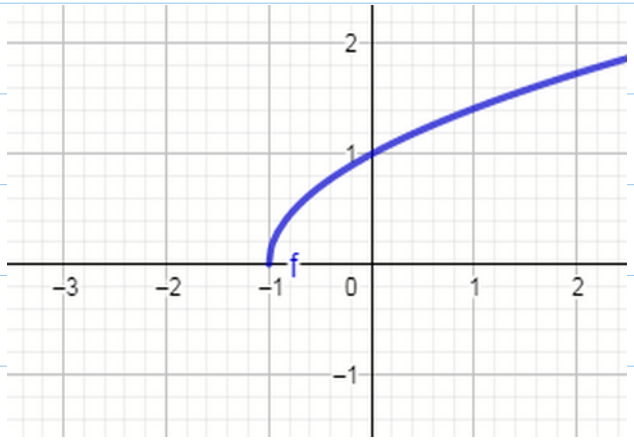
تابع در همسایگی راست ۲ تعریف نشده است پس:

$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{2-x}$ = موجود نیست



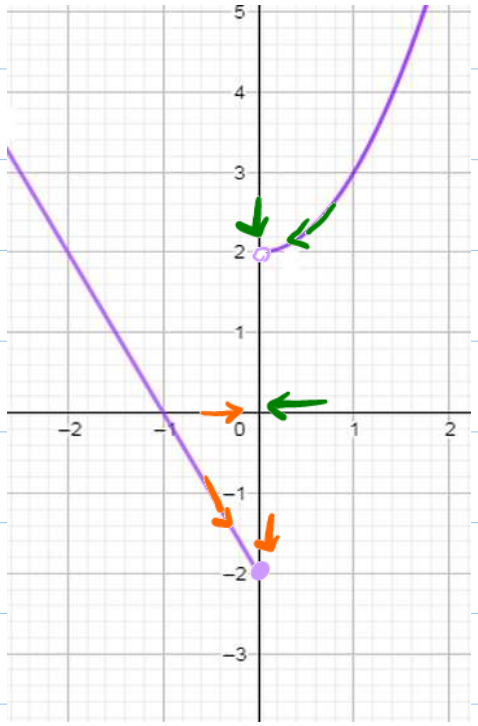
$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{2-x} = 0$

ج) $\lim_{x \to -3} \sqrt{x+1}$ = حد ندارد



زیرا تابع در همسایگی ۲ـ تعریف نشده است.

مثال: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ -2x-2 & x\le 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را ــ در صورت وجود ــ بیابید.



$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$

تابع در $x=0$ حد ندارد.

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس سوم: قضایای حد

جلسه دوم: صفحات ۱۳۰ تا ۱۳۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

برای محاسبه حد توابع از قضیه‌های زیر کمک می‌گیریم :

قضیه ۱) حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a، همان مقدار ثابت c است یعنی :

$$\lim_{x\to a} c = c$$

مثال $\lim_{x\to 2} 3 = 3$

قضیه ۲) حد تابع همانی $f(x)=x$ در هر عدد دلخواه a، برابر a می‌شود یعنی :

$$\lim_{x\to a} x = a$$

مثال $\lim_{x\to 10} x = 10$

قضیه ۳) فرض کنید توابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

آنگاه

الف) مجموع و تفاضل و حاصل ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارند و

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = L_1 \pm L_2$$

ب) اگر $L_2 \neq 0$ باشد، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۴) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$, $c\in\mathbb{R}$ باشد آنگاه

الف) $\lim_{x\to a}(cf(x)) = cL$, مثال $\lim_{x\to 4} 3x = 3\times 4 = 12$

ب) $\lim_{x\to a}(f(x))^n = L^n$, مثال $\lim_{x\to 2}(x)^3 = 2^3 = 8$

قضیه ۵) اگر $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد حد تابع در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر است:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

قضیه ۶) اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد , $\lim_{x\to a} f(x)=L$:

الف) اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

ب) $$\lim_{x\to a}|f(x)| = |L|$$

پ) $$\lim_{x\to a}\sin(f(x)) = \sin L \ , \ \lim_{x\to a}\cos(f(x)) = \cos L$$

نتیجه: اگر تابع f در همسایگی a تعریف شده باشد و با جای‌گذاری a به جای x در تابع به یک

عدد مشخص برسیم، مقدار حد همین عدد خواهد شد، جز موارد خاصی که به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

مثال: اگر $\lim_{x\to ۲} f(x) = ۲$ و $\lim_{x\to ۲} g(x) = ۱$ ، آنگاه حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید :

۱) $= ۷\times ۱ - \frac{۱}{۲}\times ۲ = ۷ - ۱ = ۶$

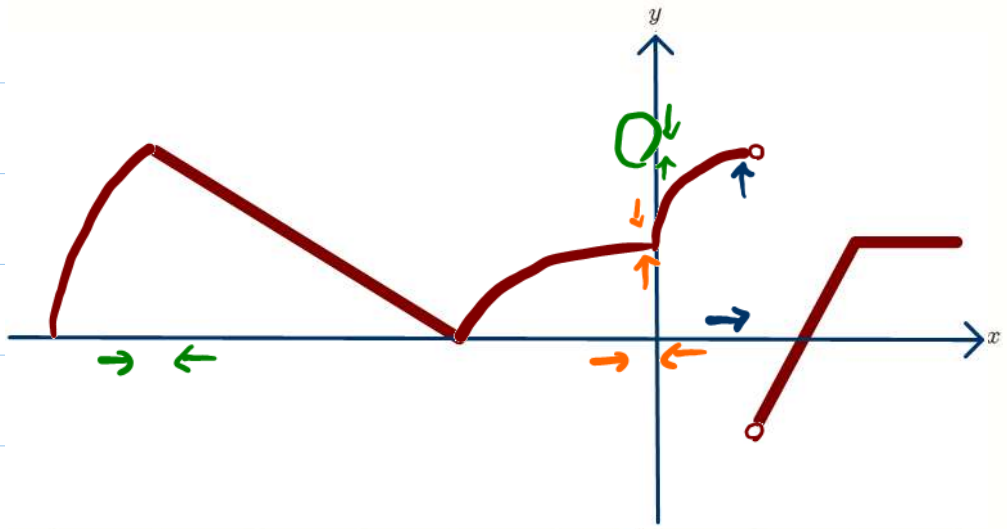
۲) $= \frac{(\lim_{x\to ۲} ۱ + \lim_{x\to ۲} f(x)) \lim_{x\to ۲} g(x)}{\lim_{x\to ۲} g(x) + \lim_{x\to ۲} ۲}$

$= \frac{(۱+۲)\times ۱}{۱+۲} = \frac{۳}{۳} = ۱$

۳) $\lim_{x\to ۲}(g(x) + \frac{۲}{f(x)})^{۳} = (۱ + \frac{۲}{۲})^{۳} = (۱+۱)^{۳} = ۲^{۳} = ۸$

۴) $\lim_{x\to ۲}(\sqrt{۵x-۱} + \frac{f(x)}{g(x)}) = \sqrt{۵\times ۲ - ۱} + \frac{۲}{۱} = \sqrt{۹} + ۲ = ۳ + ۲ = ۵$

مثال: صورت وجود بیابید :



۱) $\lim_{x\to -۵} (\frac{x}{۵}-۱)^۲ \times f(x)$ $= (-\frac{۵}{۵}-۱)^۲ \lim_{x\to -۵} f(x) = (-۲)^۲ \times ۲ = ۴\times ۲ = ۸$

۲) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۴-x}}{x^۲+f(x)}$ $= \frac{\sqrt{۴-۰}}{۰^۲+\lim_{x\to ۰} f(x)} = \frac{۲}{۰+۱} = \frac{۲}{۱} = ۲$

۳) $\lim_{x\to ۱^-} (x^۲+x-$ $= ۱^۲+۱-(\lim_{x\to ۱^-} f(x))^۲ = ۱+۱-(۲)^۲$

$= ۲-۴ = -۲$

مثال:

۱) $\lim_{x\to -۱} (۲x^۴-x^۳$ $= ۲(-۱)^۴-(-۱)^۳-۵(-۱)^۲+۴$

$= ۲-(-۱)-۵+۴ = ۲+۱-۵+۴ = ۲$

۲) $\lim_{x\to ۴} (۱+\frac{x}{۲})^۲ (a$ $= (۱+\frac{۴}{۲})^۲ (۴^۲-۶\times ۴) = ۳^۲ (۱۶-۲۴)$

$= ۹(-۸) = -۷۲$

۳) $\lim_{x\to ۱۰} (۵x^۳-۶$ $= ۵(۱۰)^۳-۶\times ۱۰+۱ = ۵۰۰۰-۶۰+۱ = ۴۹۴۱$

۴) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8x^3+4x^2+2x}{4x+1} = \frac{8(\frac{1}{2})^3+4(\frac{1}{2})^2+2\times\frac{1}{2}}{4\times\frac{1}{2}+1} = \frac{8\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{4}+1}{2+1}$

$= \frac{1+1+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

۵) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1+1}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$

۶) $= 4\sin(-\frac{\pi}{6}) + \cos^2(-\frac{\pi}{6})$

$= -4\sin\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = -4\times\frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

$= -2 + \frac{3}{4} = \frac{-8+3}{4} = \frac{-5}{4}$

۷) $\lim_{x\to 5}$ $= \sqrt{5\times5-9} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

۸) $\lim_{x\to-\pi} \frac{\pi\cos x}{x} = \frac{\pi\cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{\pi\cos\pi}{-\pi} = \frac{\pi\times(-1)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$

مدار خاص :

۱) توابع چندضابطه‌ای : اگر حد تابع در نقاطی که ضابطه تابع تغییر می‌کند (نقاط مرزی) خواسته شده باشد باید حد چپ و حد راست از ضابطه‌های مربوط به آن محاسبه شوند.

مثال:

۱)

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x>0 \\ x-2 & x\le 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-2) = 0-2 = -2$$

$-2 \neq 0$ پس تابع در $x=0$ حد ندارد

۲)

$$f(x)=\begin{cases} 5 & x<3 \\ x+2 & x\ge 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x+2) = 3+2 = 5$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} 5 = 5$$

$5=5$ پس تابع در $x=3$ حد دارد و

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 5$$

۳) $f(x)=\begin{cases}۳-x & x<۲\\ -۱ & x=۲\\ x^۲-۴ & x>۲\end{cases}$, $a=۲$

$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+}(x^۲-۴) = ۲^۲-۴ = ۴-۴=۰$

$۰\neq ۱$ پس تابع در $x=۲$ حد ندارد.

$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-}(۳-x) = ۳-۲=۱$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}(a+۱)x+۳ & x>-۲\\ -۲x^۲+۱ & x<-۲\end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ حد داشته باشد.

$\lim_{x\to -۲^+} f(x) = \lim_{x\to -۲^+}(a+۱)x+۳ = (a+۱)(-۲)+۳ = -۲a-۲+۳=-۲a+۱$

$\lim_{x\to -۲^-} f(x) = \lim_{x\to -۲^-} -۲x^۲+۱ = (-۲)(-۲)^۲+۱ = -۸+۱=-۷$

$\lim_{x\to -۲^+} f(x) = \lim_{x\to -۲^-} f(x) \Rightarrow -۲a+۱=-۷ \to -۲a=-۸ \Rightarrow a=۴$

۲) حد توابع شامل رادیکال با فرجه زوج :

در این توابع باید بررسی شود عبارت رادیکالی در همسایگی نقطه a تعریف شده است یا خیر.

اگر تعریف شود مقدار تابع حد تابع خواهد بود اگر نه حد موجود نیست.

در این توابع هم برای نقاطی که ریشه داخل رادیکال هستند حد چپ و راست را می یابیم.

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

۱)

$$\lim_{x\to -2^+}\sqrt{2x+4} = \sqrt{-2(2)+4} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x\to -2^-}\sqrt{2x+4} = \text{حد ندارد}$$

پس این حد موجود نیست.

x	$\to -2 \leftarrow$
$2x+4$	$- \mid +$

تابع در همسایگی چپ ۲- تعریف نمی شود

۲) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+3x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+3x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x^2+3x} = \text{حد ندارد}$$

پس این حد موجود نیست.

x	$-3 \to 0 \leftarrow$
x^2+3x	$+ \mid - \mid +$

۳) $\lim_{x \to 5} \sqrt{۳-x}$

$D: ۳-x \geq ۰ \Rightarrow -x \geq -۳ \Rightarrow x \leq ۳$

$D = (-\infty, ۳]$

تابع در همسایگی کرد ۵ تعریف نمی‌شود پس در این نقطه حد ندارد.

۳) حد توابع شامل جزء صحیح :

می‌دانیم اگر $x \to a^+$ یعنی $x > a$ و اگر $x \to a^-$ یعنی $x < a$ است. در محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح از این نکته استفاده کرده عبارت داخل جزء صحیح را می‌سازیم و مقدار عبارت جزء صحیح را در همسایگی a محاسبه می‌کنیم تا ببینیم با کدام تابع ثابت برابر می‌شود. پس با جای‌گذاری این مقدار در تابع، حد را بدست می‌آوریم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱)

$\lim_{x \to ۰^+} (x+۳)[x] = (۰+۳) \times ۰ = ۰$

$\lim_{x \to 0^-} (x+2)[x] = (0+2) \times (-1) = -2$

$-2 \neq 0$ این حد موجود نیست

۲) $= \frac{2^2 + 2 \times 2}{[2^2]+1} = \frac{10}{1+1} = \frac{10}{2} = 5$

$[2^2]$ ← $1 < x < 2$

۳) $\lim_{x \to 1^-} [-2x]$: $x < 1 \xrightarrow{\times(-2)} -2x > -2$

در نتیجه عبارت $-2x$ بزرگتر از -2 و نزدیک آن است پس $-2 < -2x < -2$

$\lim_{x \to 1^-} [-2x] = -2$

با جدگذاری هم به همین نتیجه می‌رسیم.

۴) $\lim_{x \to 3} x + [\frac{x}{3}]$

$x \to 3^+ : x > 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{x}{3} > 1$ پس $\frac{x}{3}$ بزرگتر از یک و نزدیک آن است.

$1 < \frac{x}{3} < 2 \rightarrow \lim_{x \to 3^+} x + [\frac{x}{3}] = 3 + 1 = 4$

$x \to 3^-$: $x < 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{x}{3} < 1$ پس $\frac{x}{3}$ کوچکتر از یک و نزدیک آن است

$0 < \frac{x}{3} < 1 \to \lim_{x \to 3^-} x + [\frac{x}{3}] = 3 + 0 = 3$

$3 \neq 4$ پس این حد موجود نیست.

۵) $= \frac{\sqrt{2-2}}{(2^+)+1} = \frac{0}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$

۶) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} x[x] = \frac{1}{2} \times 0 = 0$

$0 < x < 1$

۷) $\lim_{x \to \frac{5}{2}} 2[x] = 2 \times 2 = 4$

$2 < x < 3$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری(حالت صفرصفرم)

قسمت اول

جلسه سوم: صفحات ۱۴۱ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

اگر محاسبه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ خواسته شده باشد و بعد از قرار دادن a به جای x، صورت و مخرج هر دو صفر شوند باتوجه به نوع صفر ۴ حالت خواهیم داشت.

صفرها دو دسته اند : ۱ـ صفر مطلق (خود صفر) ۲ـ صفر نسبی یا حدی ($0^{\pm}$)

نزدیک صفر

نوع اول : $\frac{0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد .

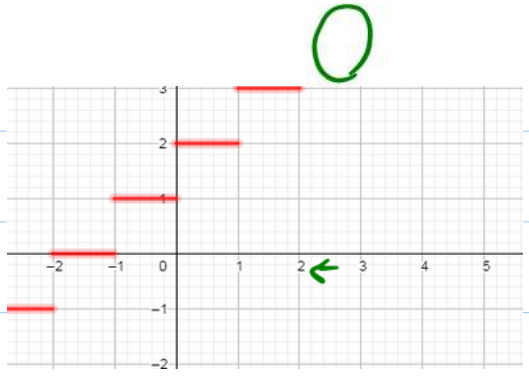
نوع دوم : $\frac{0}{0^{\pm}}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

نوع سوم : $\frac{0^{\pm}}{0}$ صورت صفر مطلق و مخرج غیر صفر (صفر حدی) پس حد کسر صفر می شود.

نوع چهارم : $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$ به این حالت ، حالت مبهم می گوییم و باید رفع ابهام شود .

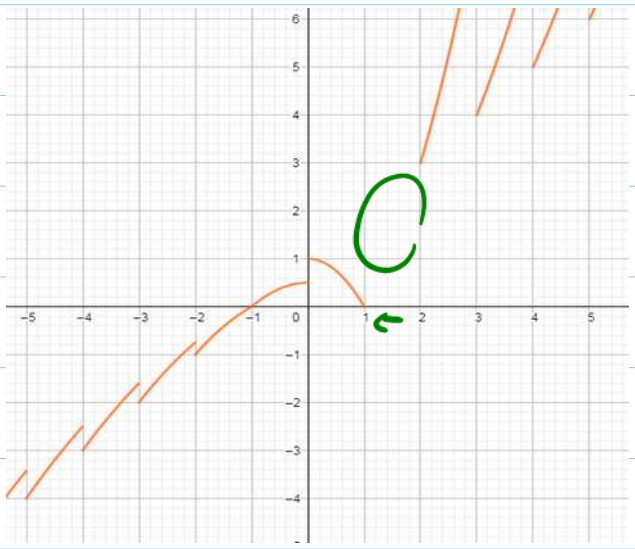
مثال : حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 2^+}\frac{[x]^2-4}{[x]-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$ حد وجود ندارد

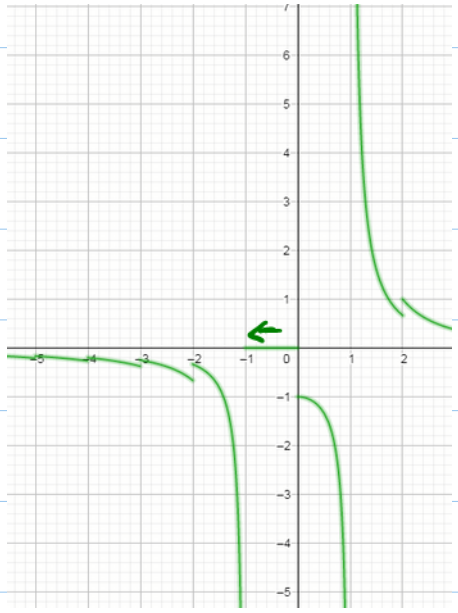


حد موجود نیست

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{[x]-1} = \frac{1^+-1}{1-1} = \frac{0^+}{\text{مثبت } 0}$



ب) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{[x]+1}{x^2-1} = \frac{-1+1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$



مثال: کنکور تجربی ۹۹

حاصل $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{[x]+3}{x+2}$، کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ✓ ۳) صفر ۴) ۱

گزینه ۳

$\frac{-2+3}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

چون $x \to a$ صورت و مخرج هردو صفر شده‌اند پس هم صورت و هم مخرج

عامل $(x-a)$ را دارا هستند. به $(x-a)$ عامل ابهام یا صفرکننده می‌گوییم.

الف) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ وقتی صورت و مخرج هردو چندجمله‌ای باشند.

با استفاده از روش‌های تجزیه (فاکتورگیری و ریشه‌ها) عامل ابهام را از صورت و مخرج

ایجاد و با یکدیگر حذف می‌کنیم تا حد قابل محاسبه باشد.

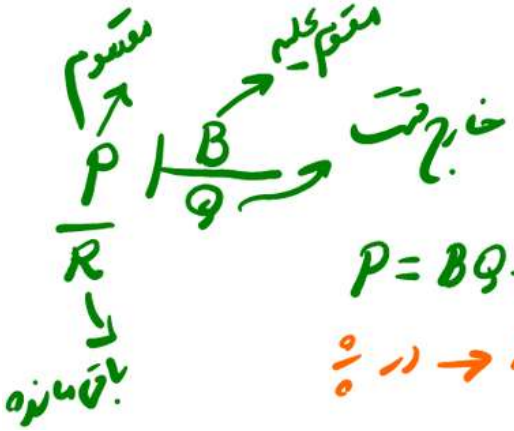
تبصره: هرگاه نتوانیم با ریشه‌ها یا فاکتورگیری عامل ابهام را ایجاد کنیم، چاره‌ای

جز تقسیم آن عبارت بر عامل ابهام نداریم. در این صورت به جای آن عبارت

حاصل ضرب $(x-a)$ (در خارج قسمت کلیه) در خارج قسمت را می‌نویسیم.

یادآوری

۱) رابطه تقسیم:



۲) تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای :

روش اول :

$$2x^3+x^2+1 \;\big|\; x+1 \qquad 2x^2-x+1$$

$$-(2x^3+2x^2)$$

$$-x^2+1$$

$$-(-x^2-x)$$

$$x+1$$

$$-(x+1)$$

$$0$$

$$\frac{2x^3}{x}=2x^2$$

$$\frac{-x^2}{x}=-x$$

$$\frac{x}{x}=1$$

روش دوم (روش هورنر) : برای تقسیم درجه n بر درجه یک

ضرائب مقسوم: $2 \quad 1 \quad 0 \quad 1$

ریشه مقسوم علیه: -1

$2 \quad \xrightarrow{+} \quad -1\times 2+1=-1 \quad \xrightarrow{+} \quad -1+0=-1 \quad \xrightarrow{+} \quad -1(-1)+1=2$

باقی مانده $\hookleftarrow \; 0=-1\times 1+1$

خارج قسمت : $2x^2-1x+1 \longrightarrow 2x^2-x+1$

مثال:

۱) $=\frac{0}{0}$ عامل مشترک $(x-(-3))$: $(x+3)$

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x}=\frac{-3-3}{-3}=\frac{-6}{-3}=2$$

۲) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}=\frac{0}{0}$ عامل مشترک $(x-1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+6}=\frac{1+1}{1+6}=\frac{2}{7}$$

۳) $=\frac{0}{0}$ عامل مشترک $(x-\frac{1}{2})$

$$8x^3-1=8(x^3-\frac{1}{8})=8(x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$$

روش هورنر

	8	0	-1
$\frac{1}{2}$	8	$\frac{1}{2}\times 8-0=4$	$\frac{1}{2}\times(-2)+1=0$ ← باقی‌مانده

خارج قسمت: $4x-2$

$$2x^3-5x+1=(x-\frac{1}{2})(4x-2)$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8(x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{(x-\frac{1}{2})(4x-2)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{2(4x-1)}$$

$$= 4\,\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{4}{2}-1} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

۴) $\lim_{x\to-4} \frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4} = \frac{0}{0}$ صورت کسر $(x+4)$

$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$

روش هورنر ۴

	۱	۴
۱	$-4\times1+4=0$	$-4\times0+1=1$

	۴
	$-4\times1+4=0$

باقی مانده

خارج قسمت $1x^2+0x+1 = x^2+1$

$x^3+4x^2+x+4 = (x+4)(x^2+1)$

$$\lim_{x\to-4} \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x^2+1)} = \lim_{x\to-4} \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{-4-1}{16+1} = \frac{-5}{17}$$

o) $\lim_{x \to -2} \frac{|x^2-4|}{x+2} = \frac{0}{0}$

x	$\to -2 \leftarrow$	2
x^2-4	$+ \mid 0 - \mid 0 +$	

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{-(x^2-4)}{x+2} = \lim_{x \to -2^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = -(-2-2) = 4$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -2-2 = -4$$

چون $4 \neq -4$ پس تابع در $x=-2$ حد ندارد.

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری(حالت صفرصفرم)

قسمت دوم

جلسه چهارم: صفحات ۱۴۱ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

ب) رفع ابهام $\frac{0}{0}$: وقتی صورت یا مخرج و یا هر دو شامل عبارات رادیکالی هستند:

در این حالت از مفهوم گویا کردن و اتحادهای مزدوج یا چاق و لاغر استفاده می‌کنیم. به این صورت که با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارت رادیکالی (برای فرجه‌های $\frac{1}{2}$) یا عبارت چاق عبارت رادیکالی (برای فرجه‌های $\frac{1}{3}$)، عامل ابهام را ایجاد می‌کنیم.

مثال:

۱) $\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$ $= \frac{0}{0}$ عامل ابهام $(x-2)$

مزدوج

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} \times \frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-(3x-2)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \frac{2-1}{(2+2)(2+\sqrt{6-2})} = \frac{1}{4(4)} = \frac{1}{16}$$

۲) $\lim_{x\to 4} \frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} = \frac{0}{0}$ عامل ابهام : $(x-4)$

روش هورنر برای صورت

	۳	−۱۰	−۸
۴	۳	$4\times 3-10=2$	$8-8=0$

خارج قسمت : $3x+2$ باقی مانده

$$3x^2-10x-8=(x-4)(3x+2)$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} \times \frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{3-\sqrt{x}-1}$$

مزدوج

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{2-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{-(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{\overbrace{(\sqrt{4}+2)}^{4}\overbrace{(12+2)}^{14}\overbrace{(\sqrt{3-\sqrt{4}}+1)}^{2}}{-1} = -112$$

۳) $\frac{0}{0}=$ ، x : حاصل ابهام

مزدوج صورت

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+4}-2}\times\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}+1}\times\frac{\sqrt{2x+4}+2}{\sqrt{2x+4}+2}$$

مزدوج مخرج

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1-1)(\sqrt{2x+4}+2)}{(2x+4-4)(\sqrt{2x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{2x+4}+2)}{2x(\sqrt{2x+1}+1)}$$

$$=\frac{2}{2}\times\frac{2+2}{1+1}=\frac{4}{2}=2$$

۴) $\lim_{x\to -2^-}\frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ حاصل ابهام $(\frac{0}{0})$

x^2-x-2 : $-1 \to 2$ ، $+\ 0\ -\ 0\ +$

$$=\lim_{x\to -2^-}\frac{-(x^2-x-2)}{2x-\sqrt{x^2+12}}\times\frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{2x+\sqrt{x^2+12}}$$

$$=\lim_{x\to -2^-}\frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{4x^2-(x^2+12)}$$

$4x^2-(x^2+12)=3x^2-12$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{\underbrace{3x^2-12}_{3(x^2-4)}}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x-2)(x+2)} = \frac{-(2+1)(4+4)}{3(2+2)} = \frac{-3\times 8}{3\times 4}$$

$$= -2$$

یادآوری اتحاد چاق لاغر :

چاق — لاغر

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

نحوه ساختن عبارت چاق از روی عبارت لاغر :

۱ـ جمله اول چاق : مربع (توان دوم) جمله اول لاغر

۲ـ جمله دوم چاق : حاصل ضرب جمله اول در دوم لاغر با علامت قرینه

۳ـ جمله سوم چاق : مربع جمله دوم لاغر

مثال: کنکور تجربی ۹۸

- حدّ عبارت $\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x \to -8$، کدام است؟

۱) -24 ۲) -18 ۳) -12 ۴) -6

حاصل ضرب $(x+8)$

$$\lim_{x\to -8} \frac{(x+8)(x+2)}{6(2+\sqrt[4]{x})} \times \frac{(4-2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2})}{(4-2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2})}$$

کاری ← حالی

$$= \lim_{x\to -8} \frac{(x+8)(x+2)(4-2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2})}{6(8+x)}$$

$8 = 2^3$ ، $x = (\sqrt[4]{x})^4$

$$= \frac{(-8+2)(4-2\sqrt[4]{-8}+\sqrt[4]{16})}{6} = \frac{-6(4-2(-2)+4)}{6}$$

$$= -1 \times 12 = -12$$

گزینه ۳

مثال: کنکور ریاضی ۹۹

حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$ کدام است؟

۱) $-1/5$ ۲) $-1/2$ ۳) $-0/8$ ۴) $-0/6$

$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}} = \frac{0}{0}$ حالت ابهام $(x-1)$

مزدوج صورت

$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}} \times \frac{2x+5+7\sqrt{x}}{2x+5+7\sqrt{x}} \times \frac{2x+\sqrt{3x+1}}{2x+\sqrt{3x+1}}$

مزدوج مخرج

$= \lim_{x\to 1}\frac{((2x+5)^2-49x)(2x+\sqrt{3x+1})}{(4x^2-(3x+1))(2x+5+7\sqrt{x})}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{(4x^2+20x+25-49x)(2x+\sqrt{3x+1})}{(4x^2-3x-1)(2x+5+7\sqrt{x})}$

$x=1$ و $25/4$ ریشه‌های

$= \lim_{x\to 1}\frac{(4x^2-29x+25)(2x+\sqrt{3x+1})}{(4x^2-3x-1)(2x+5+7\sqrt{x})}$

$x=1$ و $-1/4$ ریشه‌های

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(4x-25)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}{(x-1)(4x+1)(2x+5+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{(4-25)(2+2)}{(4+1)(2+5+2)} = \frac{-21\times 4}{5\times 14} = \frac{-3\times 2}{5} = -\frac{6}{5} = -1,2$$

گزینه ۱

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری(حالت صفرصفرم)

قسمت سوم

جلسه پنجم: صفحات ۱۴۱ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

پس از رفع ابهام $\frac{0}{0}$ وقتی صورت یا مخرج یا هردو توابع مثلثاتی باشند:

با استفاده از روابط مثلثاتی حاصل ابهام را بدست می‌آوریم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} = \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$= \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

($\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$)

۲) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 2\cos 0 = 2 \times 1 = 2$

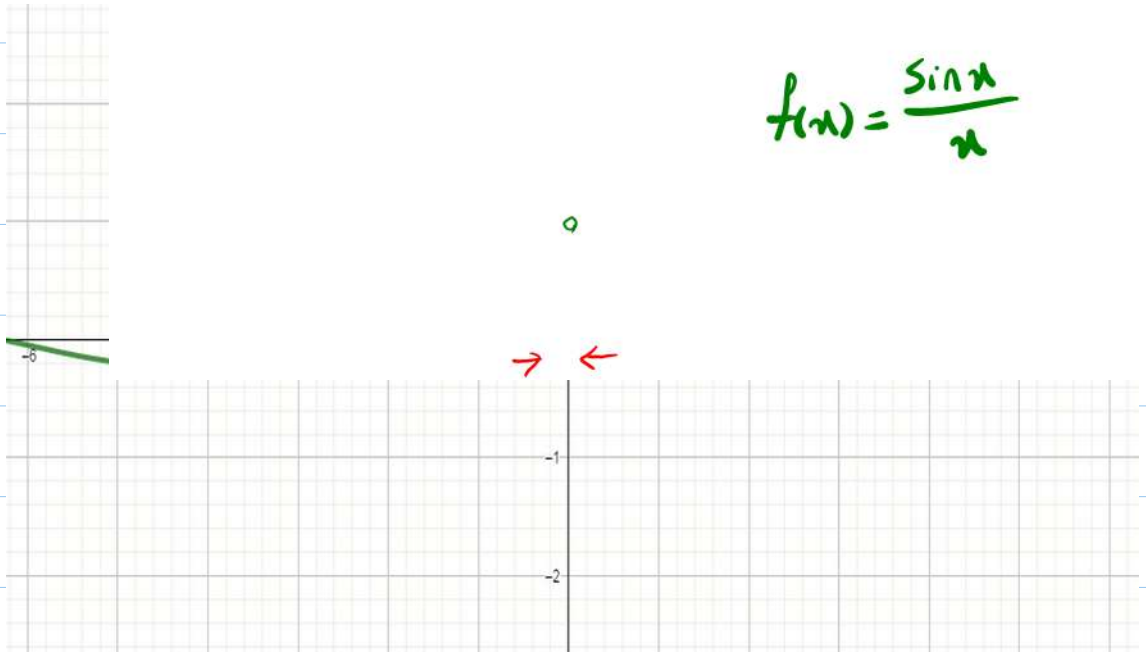
۳) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$

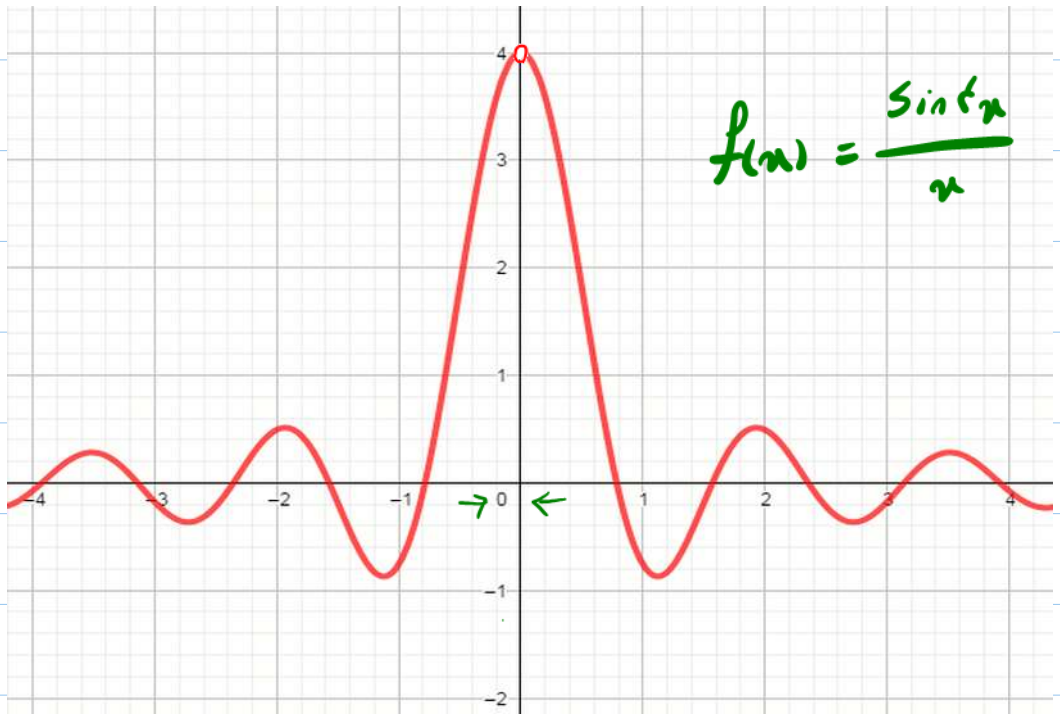
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow$ بنابراین $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \to \pi} \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2} = 2 \times 1 = 2$$

نکته: با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ داریم: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

و در حالت کلی $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m$.





$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4$

مثال: حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

یعنی هم $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2 = 2\times 2^2 = 2\times 4 = 8$$

ب) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)(3+\cos x)}{x\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x(3+\cos x)}{x\sin 4x}$

صورت و مخرج تقسیم بر x^2 $\Longrightarrow$ $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\sin^2 x}{x^2}(3+\cos x)}{\frac{x\sin 4x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2(3+\cos x)}{\frac{\sin 4x}{x}}$

$$= \frac{2\times 1\times(3+1)}{4} = 2$$

ج) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ $\times \sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos x}$ $\times \sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2\left(\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos x}\right)}$$

$\sqrt{\cos 0}+\sqrt{\cos 0} = 1+1 = 2$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-2\sin^2\frac{3x}{2}\right)-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}-\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2-\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{x}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}-\frac{9}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

ب) $\lim_{x\to 0}\left(([2x]+[-2x])\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\lim_{x\to 0^+}[2x]+[-2x] = 0-1=-1$

$\lim_{x\to 0^-}[2x]+[-2x] = -1+0=-1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}[2x]+[-2x] = -1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)(1+\sqrt{1+x^2})}{1-(1+x^2)}$$

(حذف و گویا کردن)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2\sin^2 \frac{x}{2})(1+\cos x+\cos^2 x)(1+\sqrt{1+x^2})}{-x^2}$$

$$= -2 \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 \times (1+1+1)(1+1) = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 6 = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(([2x]+[-2x]) \frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} \right) = -1 \times (-3) = 3$$

ب) $$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-|x|\sin 4x}{4x^2-|x|\sin 6x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-(-x)\sin 4x}{4x^2-(-x)\sin 6x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+x\sin 4x}{4x^2+x\sin 6x} \xrightarrow{\div x^2} \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x\sin 4x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x\sin 6x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{1+\frac{\sin 4x}{x}}{4+\frac{\sin 6x}{x}} = \frac{1+4}{4+6} = \frac{5}{10}$$

مثال: کنکور ریاضی ۹۹ (خارج)

حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 2

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}} \times \frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2+3x-(2-x)}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|\left(\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x}{\sqrt{2}\left(-\sin\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

($x\to 0^-$: $\frac{x}{2}$ ناحیه سوم $\to \sin\frac{x}{2}<0$)

$$= -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sin\frac{x}{2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

گزینه ۱

روش تغییر متغیر برای رفع ابهام ÷

در این روش حاصل عبارت را برابر متغیر جدیدی مانند t می‌گیریم و با توجه به متغیر جدید x را بر حسب t به دست می‌آوریم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) حاصل $x - \frac{\pi}{4} = t$ عامل ابهام

$$\begin{cases} x = t + \frac{\pi}{4} \\ 4x = 4t + \pi \\ 2x = 2t + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\left(x \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \to 0 \right)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(2t + \frac{\pi}{2}) - 1}{2t + \pi - \pi} = \lim_{t \to 0} \frac{\cos 2t - 1}{2t} = \lim_{t \to 0} -\frac{(1 - \cos 2t)}{2t}$$

$$= -\frac{1}{4} \lim_{t \to 0} \frac{2\sin^2 t}{t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \times \sin t$$

$$= -\frac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0$$

۲) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}$

قرار می‌دهیم $x - \frac{\pi}{۲} = t$

$(x \to \frac{\pi}{۲} \Rightarrow t \to ۰)$

$$\begin{cases} x = t + \frac{\pi}{۲} \\ ۲x = ۲t + \pi \\ ۴x = ۴t + ۲\pi \end{cases}$$

$$\lim_{t \to ۰} \frac{\sin(۲t + \pi)}{\cos(۴t + ۲\frac{\pi}{۲})} = \lim_{t \to ۰} \frac{-\sin ۲t}{\sin ۴t} = \lim_{t \to ۰} \frac{\frac{-\sin ۲t}{t}}{\frac{\sin ۴t}{t}} = \frac{-۲}{۴}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس پنجم: پیوستگی

جلسه ششم: صفحات ۱۴۵ تا ۱۵۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تعریف پیوستگی

تابع f در $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

پس برای اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد باید سه شرط زیر را داشته باشد:

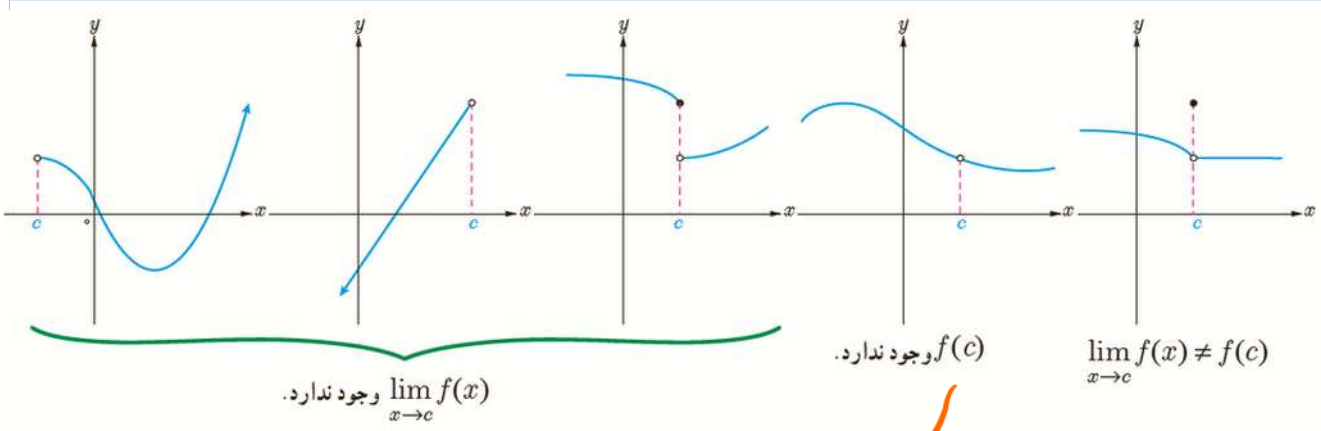
۱) تابع f در a تعریف شده باشد یعنی $a \in D_f$.

۲) حد تابع f در $x=a$ موجود باشد یعنی تابع در همسایگی a تعریف شده باشد و

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

۳) حد تابع f در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر باشد یعنی: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

تذکر: وقتی f در $x=c$ پیوسته نباشد می‌گوییم در این نقطه ناپیوسته است.



مثال: پیوستگی هر تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^2(x-2) & x\le 2 \\ 4-2x & x>2 \end{cases}$ $\qquad x=2$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} 4-2x = 4-4=0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2(x-2) = 4(2-2)=0$$

$$f(2)= 2^2(2-2)=0$$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)=0$. تابع در $x=2$ پیوسته است

ب) $f(x)=\begin{cases} [x] & x<-1 \\ -4 & x=-1 \\ \frac{x^2-1}{x+1} & x>-1 \end{cases}$ $\qquad x=-1$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-1) = -1-1=-2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} [x] = [-1^-] = -2$$

$$f(-1)=-4$$

تابع در $x=-1$ پیوسته نیست زیرا: $\lim_{x\to -1} f(x) = -2 \neq f(-1)=-4$.

ب) $$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|} & x\neq 0\\ -1 & x=0\end{cases}$$ $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-x}=\lim_{x\to 0}-1=-1$$

$$f(0)=-1$$

تابع در $x=0$ پیوسته نیست زیرا در این نقطه حد ندارد ولی در ادامه خواهیم دید

چون $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1=f(0)$ یعنی در نتیجه تابع در $x=0$ پیوستگی چپ دارد.

پیوستگی راست و پیوستگی چپ :

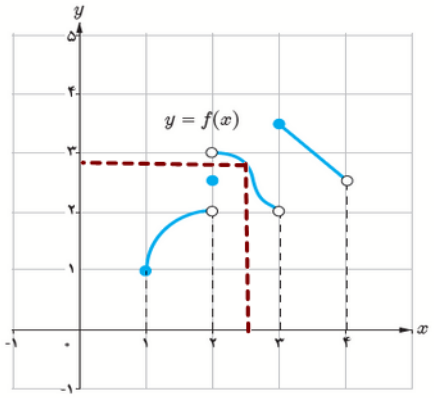
تابع f در $x=a$ پیوستگی راست دارد هرگاه $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

تابع f در $x=a$ پیوستگی چپ دارد هرگاه $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

پس می‌توان گفت هرگاه f در یک همسایگی a تعریف شده باشد:

f در $x=a$ پیوسته است اگر و تنها اگر f در a پیوستگی راست و چپ داشته باشد.

مثال: نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو رسم شده است.



الف)

در $x=1$ ناپیوسته است زیرا حد چپ ندارد.

در $x=2$ ناپیوسته است زیرا: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=3$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)=2$, $f(2)=2.5$

در $x=2.5$ پیوسته است.

در $x=3$ پیوسته نیست زیرا: $\lim_{x\to 3^+} f(x)=3.5$, $\lim_{x\to 3^-} f(x)=2$, $f(3)=3.5$

در $x=4$ پیوسته نیست زیرا حد راست ندارد.

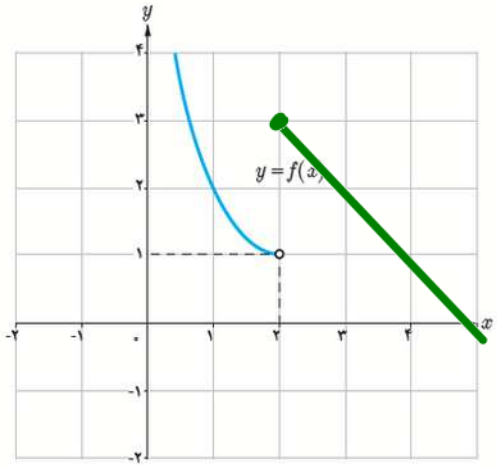
۲) در کدام نقطه a از مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ تساوی $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ برقرار است؟

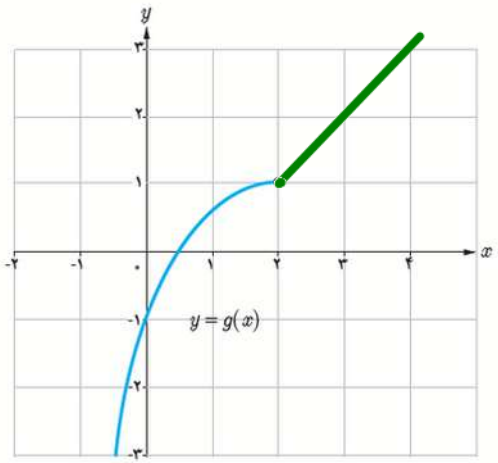
در $a=۴$ پیوستگی راست دارد.

مثال: در شکل‌های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده‌اند. در نقطه $x=۲$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که :

۱ تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲ تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.





مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>1 \\ 2 & x=1 \\ x+1 & x<1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2-1 = 1-1=0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1=2$

$f(1)=2$

تابع در $x=1$ پیوسته نیست و پیوستگی چپ دارد.

پیوستگی توابع معروف :

۱) توابع چندجمله‌ای در تمام $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

۲) توابع گویا فقط در ریشه‌های مخرج شان ناپیوسته‌اند.

۳) توابع رادیکالی با فرجه فرد یعنی $\sqrt[2n+1]{f(x)}$ در تمام نقاطی که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند

۴) تابع $|f(x)|$ در تمام نقاطی که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند.

۵) تابع رادیکالی با فرجه زوج یعنی $\sqrt[2n]{f(x)}$ (f پیوسته) در هر نقطه از دامنه‌اش نیز از نقطه انتهای دامنه پیوسته است. مثلاً تابع $y=\sqrt{x-2}$ در تمام نقاط $x>2$ پیوسته است ولی در ۲ پیوسته نیست زیرا در همسایگی چپ ۲ تعریف نمی‌شود.

۶) توابع $\sin f$ ، $\cos f$ در هر نقطه‌ای که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند.

۷) تابع $y=[x]$ در نقاط صحیح کننده x ناپیوسته‌اند.

۸) تابع $f(x)=g(x)[x]$ (و تابعی پیوسته) در $x=a\in\mathbb{Z}$ پیوسته است هرگاه تابع $g(a)=0$.

مثال: تابع $y=[2x]$ روی بازه $(1,3)$ در چند نقطه ناپیوسته است.

$2x$ روی بازه $(1,3)$ برای نقاط زیر صحیح می‌شود:

$x=\frac{3}{2}$: $2x=2\times\frac{3}{2}=3\in Z$

$x=2$: $2x=2\times 2=4\in Z$

$x=\frac{5}{2}$: $2x=2\times\frac{5}{2}=5\in Z$

در سه نقطه ناپیوسته است.

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi x}{2}$ در نقاط $x\in Z$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

تابع $y=(-1)^{[x]}$ در اعداد صحیح ناپیوسته است مثلاً:

$\lim_{x\to 3^-}(-1)^{[x]}=(-1)^2=1$ ، $\lim_{x\to 3^+}(-1)^{[x]}=(-1)^3=-1$

ولی $\sin\frac{\pi x}{2}$ در xهای زوج برابر صفر می‌شود ($\sin 0,\sin\pi,\sin 2\pi,\dots$)

و در xهای فرد برابر یک یا منفی یک است ($\sin\frac{\pi}{2}=1,\sin\frac{3\pi}{2}=-1,\dots$)

پس $\sin\frac{\pi x}{2}$ در xهای زوج صفر شونده است در نتیجه تابع f در اعداد زوج صحیح پیوسته است.

مثال: کنکور تجربی ۹۹ (خارج)

به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{2\sin^2 x-\sin x-1}{\cos^2 x} & ; \ x\neq\frac{\pi}{2}\\ a & ; \ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ در $x=\frac{\pi}{2}$، پیوسته است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱ ۳) −۱ ۴) −۱/۵

درجه ۲ که بصورت ضرب: $2-1-1=0$

$\sin x=1,\ \sin x=-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2 x-\sin x-1}{\cos^2 x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)(2\sin x+1)}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)(2\sin x+1)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-(1-\sin x)(2\sin x+1)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{-(2\sin\frac{\pi}{2}+1)}{1+\sin\frac{\pi}{2}}=-\frac{(2\times1+1)}{1+1}=-\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow -\frac{3}{2}=a$$

گزینه ۴

مثال: کنکور ریاضی ۹۹

فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & ;\ |x-1|<1\\ x^2+ax+b & ;\ |x-1|\geq 1\end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -1 ۳) 1 ۴) $\frac{5}{2}$

$|x-1|<1 \rightarrow -1<x-1<1 \xrightarrow{+1} 0<x<2$

$|x-1|\geq 1 \rightarrow x-1\geq 1$ یا $x-1\leq -1 \rightarrow x\geq 2$ یا $x\leq 0$

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & 0<x<2\\ x^2+ax+b & x\geq 2 \text{ یا } x\leq 0\end{cases}$$

در ضابطه اول با توجه به رابطه $[x]$ در $x=1$ ناپیوستگی وجود دارد پس $(x-1)$ در $x=1$ صفر می‌شود پس $(x-1)[x]$ در $x=1$ پیوسته است.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} x^2+ax+b=4+2a+b=f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-1)[x]=(2-1)\times 1=1$$

شرط پیوستگی در $x=2$: $4+2a+b=1 \rightarrow 2a+b=-4$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1)[x] = (0-1)\times 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2+ax+b = b = f(0)$$

شرط پیوستگی در $x=0$: $b=0$

گزینه ۲ :

$$\begin{cases} 2a+b=-4 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow 2a+0=-4 \rightarrow a=-\frac{4}{2}$$

مثال: کنکور تجربی ۹۹ :

به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{8+x^3}{|x+2|} & ; \quad x\neq -2 \\ a & ; \quad x=-2 \end{cases}$، در نقطهٔ $x=-2$، فقط از چپ پیوسته است؟

۱) -12 ۲) -6 ۳) 6 ۴) 12

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{8+x^3}{|x+2|} = \lim_{x\to -2} \frac{8+x^3}{-(x+2)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(2+x)(4-2x+x^2)}{-(x+2)} = \frac{4-2(-2)+(-2)^2}{-1} = \frac{12}{-1} = -12$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow -12 = a$$

گزینه ۱

مثال کنکور ریاضی ۹۸ :

به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ; \quad x>2\\ ax-1 & ; \quad x\le 2\end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x-\sqrt{x+2}}\times\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2-x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)}=\frac{3(2+\sqrt{4})}{2+1}=\frac{12}{3}=4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} ax-1=2a-1=f(2)$$

شرط پیوستگی در $x=2$: $2a-1=4\to 2a=5\to a=\frac{5}{2}=2.5$ گزینه ۳

پیوستگی روی بازه :

- می‌گوئیم تابع f روی بازه (a,b) پیوسته است هرگاه f در هر نقطه بازه پیوسته باشد.

- می‌گوئیم تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته است هرگاه f روی بازه (a,b) پیوسته باشد

و در a از راست و در b از چپ پیوسته باشد.

برای بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ هم تعریف‌های مشابهی ارائه می‌دهیم.

مثال: تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم :

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x<-1 \\ x^2-1 & -1\le x<2 \\ -x+5 & 2<x<5 \end{cases}$$

(1)

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} x^2-1 = 1-1=0 = f(-1)$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} 2x+4 = -2+4 = 2$ $\Rightarrow 0\neq 2$ تابع در $x=-1$ پیوسته نیست و پیوستگی راست دارد

چون $f(2)$ تعریف شده پس تابع در $x=2$ پیوسته نیست.

ناپیوسته : $[-2,0)$ (شامل -1) پیوسته : $(2,5)$ پیوسته : $[-1,1]$

۲) دربارهٔ تابع f کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) f روی بازهٔ $[-\infty,-1)$ پیوسته است.

ب) f روی بازهٔ $(-\infty,-1)$ پیوسته است.

پ) f روی بازهٔ $[2,5]$ پیوسته است.

ت) $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$

ث) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 0$

ج) f روی بازهٔ $(-2,0)$ پیوسته است.

الف) نادرست زیرا تابع در $x=-1$ پیوستگی چپ ندارد.

ب) درست

پ) نادرست $2 \notin D_f$

ت) نادرست زیرا $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ = تعریف نشده

ث) درست زیرا $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} -x+0 = -0+0 = 0$

ج) نادرست زیرا تابع در $x=-1$ پیوسته نیست.

مثال:

✓

$3 \notin D_f$: ✗

✗

پس تابع در $x=1$ پیوسته نیست