به خاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتاب ها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو به نشانی @Kotob_Konkor عضو شوید.

کار در کلاس

۷۲

معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

پاسخ

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7 \Rightarrow A(-2, 7)$$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \Rightarrow f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2+3-7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4-4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-4+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (h-4) = -4 \quad : x = -2 \text{ شیب خط مماس در نقطهٔ}$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 7 = -4(x-(-2)) \Rightarrow y = -4x - 1 \quad : A \text{ معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ}$$

کار در کلاس

۷۴

الف) برای تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ ، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

پاسخ

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(5+h)^2+10(5+h)-25}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-25-10h-h^2+50+10h-25}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2}{h} = -\lim_{h\to 0} h = 0$$

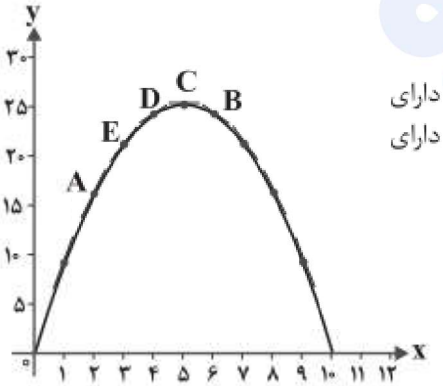
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow f'(8) = \lim_{x\to 8} \frac{f(x)-f(8)}{x-8} \Rightarrow f'(8) = \lim_{x\to 8} \frac{(-x^2+10x)-(16)}{x-8}$$

$$= \lim_{x\to 8} \frac{-x^2+10x-16}{x-8} = \lim_{x\to 8} \frac{-(x-8)(x-2)}{(x-8)} = \lim_{x\to 8} (-x+2) = -8+2 = -6$$

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینهٔ یکدیگر باشد.

پاسخ در نقاط B و D شیب خط مماس قرینهٔ یکدیگر است، بنابراین در این دو نقطه مقدار مشتق قرینهٔ یک‌دیگر است.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.



پاسخ تابع سهمی فوق در بازهٔ $(0, 5]$ که شیب خطوط مماس مثبت است، دارای مشتق مثبت و در بازهٔ $[5, 10)$ که شیب خطوط مماس بر سهمی منفی است، دارای مشتق منفی است (طول رأس سهمی برابر ۵ است.)

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.

پاسخ در هر دو نقطهٔ ۳ و ۴ ،خط مماس بر منحنی دارای شیب مثبت است ولی شیب در نقطهٔ $x = 3$ بیشتر از شیب در نقطهٔ $x = 4$ است. $f'(3) > f'(4)$

ث) با محاسبهٔ $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

پاسخ

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-x^2+10x-21}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)(x-7)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (-x+7) = 4$$

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{-x^2+10x-24}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{-(x-4)(x-6)}{(x-4)} = \lim_{x\to 4} (-x+6) = -4+6 = 2$$

بنابراین $f'(3) > f'(4)$.