به خاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتاب ها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو به نشانی Kotob_Konkor@ عضو شوید.

پاسخ با توجه به نقاط داده‌شده از هر خط، می‌توان شیب را به‌دست آورد.

$$(-۲,۰),(۳,۲) \Rightarrow m_{d_۱} = \frac{۲-۰}{۳-(-۲)} = \frac{۲}{۵}$$

$$(۱,۰),(۰,۳) \Rightarrow m_{d_۲} = \frac{۳-۰}{۰-۱} = -۳$$

$$(۰,۰),(۲,۴) \Rightarrow m_{d_۳} = \frac{۴-۰}{۲-۰} = ۲$$

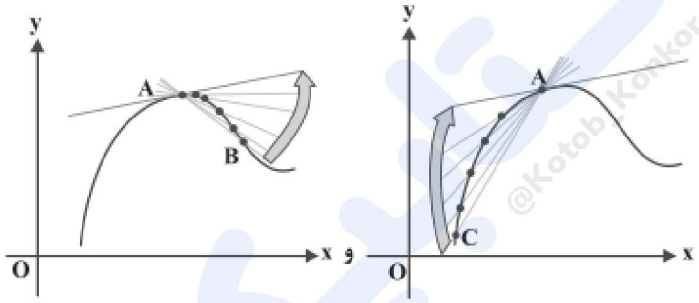
$$(-۳,۰),(۰,-۲) \Rightarrow m_{d_۴} = \frac{-۲-۰}{۰-(-۳)} = \frac{-۲}{۳}$$

پرسش متن

۶۸

اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطهٔ ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌عبارت دیگر، خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟

اکنون نقطهٔ C را سمت چپ نقطهٔ A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل، نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطهٔ A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟



پاسخ طول خط‌های قاطع کوچک و کوچک‌تر شده و این خط‌ها کم‌کم به خط مماس در نقطهٔ A نزدیک می‌شوند.

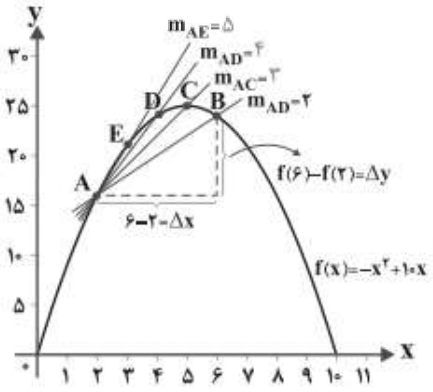
- به خطی که در نقطهٔ A بر منحنی مماس است نزدیک می‌شوند.
- خط‌های قاطع در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌کنند و به خط مماس در نقطهٔ A کم‌کم نزدیک می‌شوند.

فعالیت

۶۸

الف) تابع $f(x) = -x^۲ + ۱۰x$ داده شده است، اگر $۰ \le x \le ۱۰$، نقاط $A(۲,f(۲))$، $B(۶,f(۶))$، $C(۵,f(۵))$، $D(۴,f(۴))$ و $E(۳,f(۳))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد، یعنی m_{AB}، از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(۶)-f(۲)}{۶-۲} = \frac{۲۴-۱۶}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲$$



به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به‌دست آورید.

همان‌طور که می‌دانید برای محاسبهٔ شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به‌دست می‌آوریم. اگر این تغییرات را به‌ترتیب با Δ_y و Δ_x نمایش دهیم، داریم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبهٔ شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δx چگونه تغییر می‌کنند؟

به خاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتاب ها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو به نشانی @Kotob_Konkor عضو شوید.

پاسخ

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{25-16}{5-2}=\frac{9}{3}=3$$

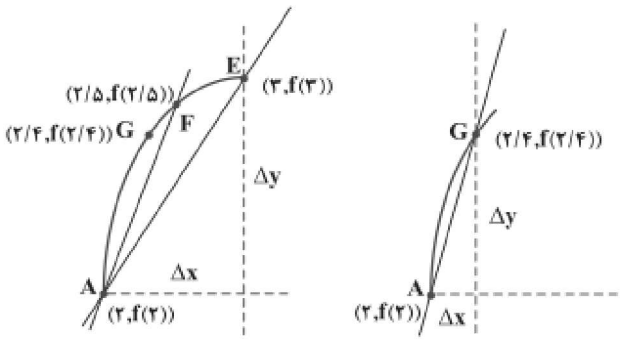
$$f(5)=-5^2+(10\times5)=25 \qquad f(2)=-2^2+(10\times2)=16$$

$$m_{AD}=\frac{y_D-y_A}{x_D-x_A}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{24-16}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$m_{AE}=\frac{y_E-y_A}{x_E-x_A}=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{21-16}{1}=5$$

مقدار Δx ها روند نزولی دارد و در حال کاهش هستند.

ب) حال فرض کنید که با ادامهٔ روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x)=-x^2+10x$ در فاصلهٔ $[2,3]$ رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازهٔ $[2,2/4]$ رسم شده است.



$$m_{AF}=\frac{f(2/5)-f(2)}{2/5-2}=\frac{18/75-16}{0/5}=\frac{2/75}{0/5}=5/5$$

$$m_{AG}=\frac{f(2/4)-f(2)}{2/4-2}=\frac{18/24-16}{0/4}=\frac{2/24}{0/4}=5/6$$

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری درنظر بگیریم، شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسهٔ شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

شیب خطی که از نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ می‌گذرد. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	بازه $[a,b]$
$\frac{f(2/4)-f(2)}{2/4-2}=\frac{18/24-16}{0/4}=\frac{2/24}{0/4}=5/6$	$[2,2/4]$
$\frac{f(2/3)-f(2)}{2/3-2}=\frac{17/71-16}{0/3}=\frac{1/71}{0/3}=5/7$	$[2,2/3]$
$\frac{f(2/2)-f(2)}{2/2-2}=\frac{17/16-16}{0/2}=\frac{1/16}{0/2}=5/8$	$[2,2/2]$
$\frac{f(2/1)-f(2)}{2/1-2}=\frac{16/59-16}{0/1}=\frac{0/59}{0/1}=5/9$	$[2,2/1]$
$\frac{f(2/01)-f(2)}{2/01-2}=\frac{16/05999-16}{0/01}=\frac{0/00599}{0/01}=5/99$	$[2,2/01]$
$\frac{f(2/001)-f(2)}{2/001-2}=\frac{16/005999-16}{0/001}=5/999$	$[2,2/001]$
⋮	⋮
$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\longrightarrow ?=5/999\ldots9$	$[2,2+h]$ (h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است)

پاسخ شیب خطوط قاطع همان‌طور که مشخص است روند افزایشی داشته و به عدد شش نزدیک و نزدیک‌تر شده، بنابراین حدس می‌زنیم که شیب خط مماس ۶ باشد.