به خاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتاب ها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو به نشانی @Kotob_Konkor عضو شوید.

فعالیت

۵۴

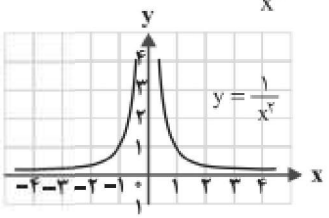
می‌خواهیم مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ را در صورت وجود به‌دست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ در هر نقطهٔ غیرصفر تعریف‌شده است؛ یعنی $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع f در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید.

x	$-0/2$	$-0/1$	$-0/01$	$-0/0001$	$\to 0 \leftarrow$	$0/0001$	$0/001$	$0/01$	$0/1$	$0/2$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	۲۵	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰	$\to ? \leftarrow$	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰	۲۵

پاسخ برای به‌دست آوردن مقادیر خواسته‌شده در جدول، کافی است مقدار x را در هر مورد در $f(x)=\frac{1}{x^2}$ قرار دهیم.

به عنوان مثال:

$$x=0/1\Rightarrow f(0/1)=\frac{1}{(0/1)^2}=\frac{1}{\frac{1}{100}}=100$$



تعریف ۲ صفحهٔ ۵۵

فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدرکافی به a نزدیک اختیار شود.

کار در کلاس

۵۷

۱. حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{x-5}$

پاسخ

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{x-5}=\frac{2(5^-)}{(5^-)-5}=\frac{10}{0^-}=-\infty$$

با توجه به این‌که مخرج مقدار بسیار کوچک و منفی است، حد کسر برابر $-\infty$ می‌شود.

ب) $\lim_{x\to 5^+}\frac{2x}{x-5}$

پاسخ

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{2x}{x-5}=\frac{2(5^+)}{5^+-5}=\frac{10}{0^+}=+\infty$$

با توجه به این‌که مخرج مقدار بسیار کوچک و مثبت است، حد کسر برابر $+\infty$ می‌شود.

پ) $\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}$

پاسخ

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

صورت کسر یک عدد منفی و مخرج مقدار بسیار کوچک و مثبت است. بنابراین حد کسر $-\infty$ می‌شود.

ت) $\lim_{x\to 3}\frac{2}{|x-3|}$

پاسخ

$$\lim_{x\to 3}\frac{2}{|x-3|}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

جواب داخل قدرمطلق در هر صورت مثبت است و با توجه به این‌که صورت کسر عدد مثبت ۲ است، حد کسر $+\infty$ می‌شود.

به خاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتاب ها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو به نشانی @Kotob_Konkor عضو شوید.

ث) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$

پاسخ

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

جزءصحیح $-\frac{1}{3}$ برابر -1 است و مخرج هم با توجه به وجود قدرمطلق برابر 0^+ می‌شود، پس حد کسر $-\infty$ است.

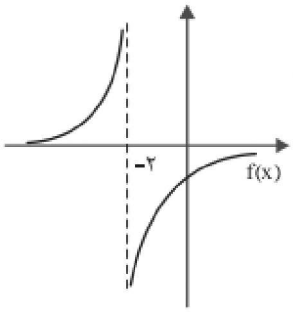
ج) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$

پاسخ

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

صورت کسر برابر یک است و مخرج کسر هم با توجه به زوج بودن توان sin، با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند، پس حد کسر $+\infty$ است.

۲. نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف -2 تعریف‌شده باشد، به‌طوری که $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty$. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.



پاسخ در مقایسه با جواب دوستان، در همهٔ نمودارها خط $x=-2$ وجود دارد و نمودار f در سمت راست $x=-2$ به $(-\infty)$ و در سمت چپ آن به $(+\infty)$ میل می‌کند، ولی نقاط آغازین و پایانی نمودارها با هم متفاوت است.

تمرین

۱. الف) نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=2x^3+x^2+1$ بر دو جمله‌ای $x+1$ بخش‌پذیر است.

پاسخ برای این‌که نشان دهیم $f(x)=2x^3+x^2+1$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است، کافی است ریشهٔ عبارت $x+1$ را به‌دست آورده $(x=-1)$ و سپس $f(-1)$ را محاسبه کنیم. اگر حاصل برابر صفر شود، $f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است.

$$f(-1)=2(-1)^3+(-1)^2+1=-2+1+1=0$$

پس $f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم $f(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

پاسخ

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \hline -(2x^3+2x^2) & 2x^2-x+1 \\ \hline -x^2+1 & \\ -(-x^2-x) & \\ \hline x+1 & \\ -(x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$