به خاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتاب ها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو به نشانی @Kotob_Konkor عضو شوید.

کار در کلاس

۳۹

صعودی یا نزولی‌بودن تابع $y = \tan x$ را در مجموعهٔ $[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ بررسی کنید.

پاسخ تابع $y = \tan x$ در ربع اول یعنی بازهٔ $[0, \frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است: $x_1 < x_2 \Rightarrow \tan x_1 < \tan x_2$

همین‌طور، این تابع در ربع دوم یعنی بازهٔ $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ اکیداً صعودی است: $x_1 < x_2 \Rightarrow \tan x_1 < \tan x_2$

اما اگر زاویهٔ x_1 را متعلق به ربع اول و زاویهٔ x_2 را متعلق به ربع دوم در نظر بگیریم و $x_1 < x_2$ باشد، با توجه به این‌که tan در ربع دوم مقداری منفی و در ربع اول مقداری مثبت دارد، خواهیم داشت:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \tan x_1 > \tan x_2$$

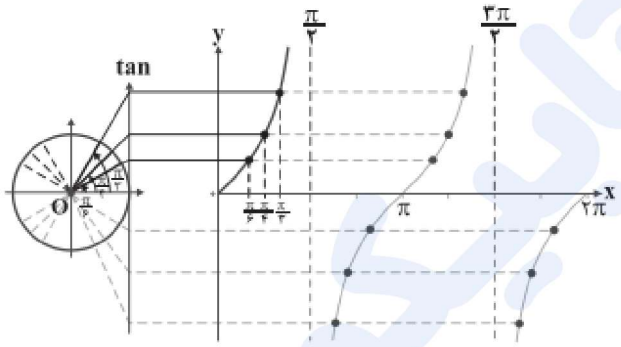
پس برای هر x_1 و x_2 از مجموعهٔ $[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ اگر $x_1 < x_2$ باشد، نمی‌توان به‌طور قطعی گفت کدام‌یک ازمقادیر $\tan x_1$ یا $\tan x_2$ بزرگ‌تراست. ولی درمورد مقادیر تانژانتی که x_1 و x_2 هردو در یک ناحیه باشند، می‌توان گفت که $x_1 < x_2 \Rightarrow \tan x_1 < \tan x_2$ ،

یعنی تابع $y = \tan x$ در هرکدام ازبازه‌های $[0, \frac{\pi}{2})$ ، $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ ، $[\pi, \frac{3\pi}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ اکیداً صعودی است.

فعالیت

۳۹

در شکل زیر، نمودار تابع $y = \tan x$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع‌های دیگر رسم کنید.



تمرین

۴۰

۱. دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

نکته اگر $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ باشد، برای به‌دست آوردن ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب تابع از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\max = |a| + c \ , \ \min = -|a| + c$$

دورهٔ تناوب: $T = \frac{2\pi}{|b|}$

الف) $y = 1 + 2\sin 7x$

پاسخ

$$\max = |2| + 1 = 3 \ , \ \min = -|2| + 1 = -1$$

$$T = \frac{2\pi}{|7|} = \frac{2\pi}{7}$$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos\frac{\pi}{2}x$

پاسخ

$$\max = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \ , \ \min = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$$

$$T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = 4$$

به خاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتاب ها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو به نشانی @Kotob_Konkor عضو شوید.

پ) $y = -\pi \sin(\frac{x}{2}) - 2$

پاسخ

$\max = |-\pi| - 2 = \pi - 2$, $\min = -|-\pi| - 2 = -\pi - 2$

$$T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi$$

ت) $y = -\frac{3}{4}\cos 3x$

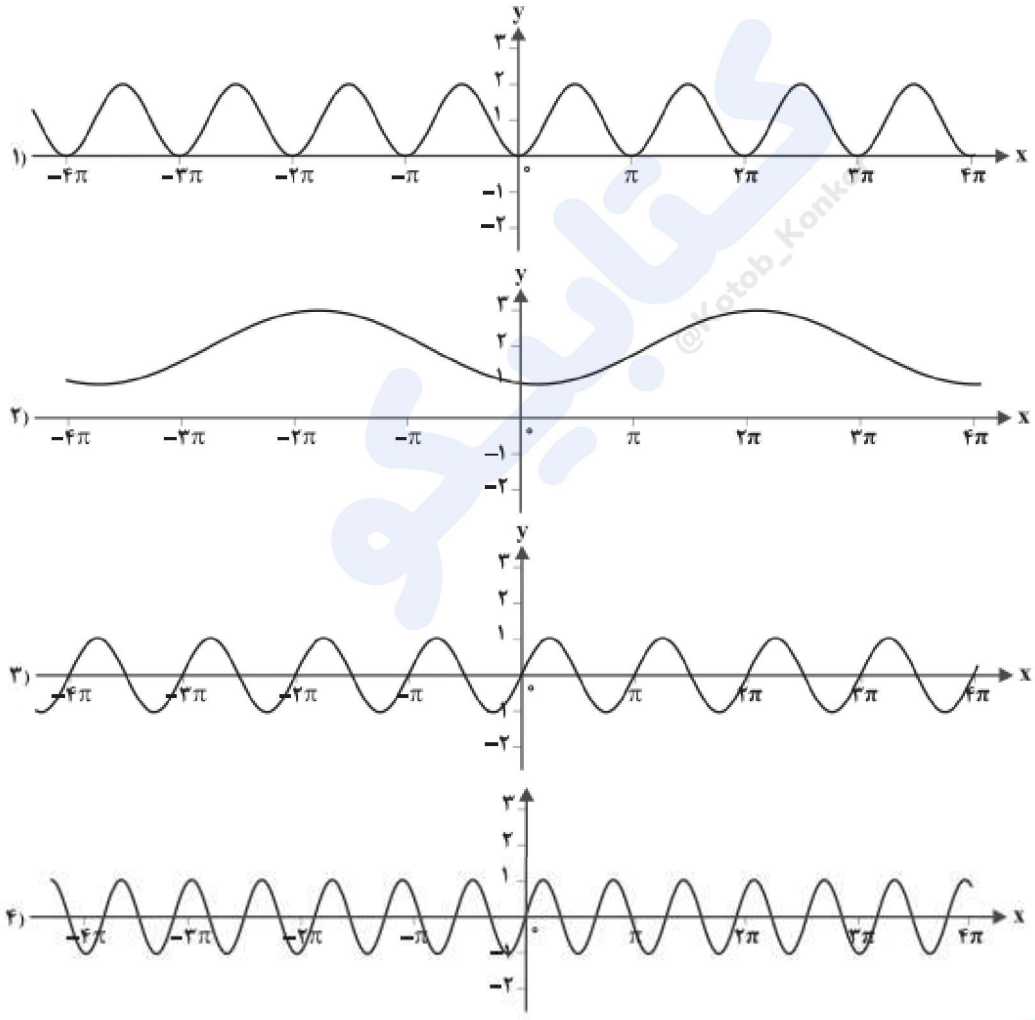
پاسخ

$\max = |-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$ $\quad \min = -|-\frac{3}{4}| = -\frac{3}{4}$

$$T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

۲. هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$ $\quad$ ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2} x$ $\quad$ پ) $y = \sin 2x$ $\quad$ ت) $y = 1 - \cos 2x$



پاسخ

تابع	الف	ب	پ	ت
نمودار	۴	۲	۳	۱

به خاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتاب ها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو به نشانی @Kotob_Konkor عضو شوید.

۳. در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده‌شده بنویسید.

الف) $T=\pi \quad , \quad max=3 \quad , \quad min=-3$

پاسخ

$$\begin{cases}|a|+c=3\\-|a|+c=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a|=3\\c=0\end{cases},\ T=\frac{2\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow|b|=2$$

$$\Rightarrow y=\pm3\sin(\pm2x)\Rightarrow\begin{cases}y=3\sin(2x) & , \quad y=3\sin(-2x)\\y=-3\sin(2x) & , \quad y=-3\sin(-2x)\end{cases}$$

ب) $T=3 \quad , \quad max=9 \quad , \quad min=3$

پاسخ

$$\begin{cases}|a|+c=9\\-|a|+c=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a|=3\\c=6\end{cases},\ T=\frac{2\pi}{|b|}=3\Rightarrow|b|=\frac{2\pi}{3}$$

$$y=\pm3\sin(\pm\frac{2\pi}{3}x)+6\Rightarrow\begin{cases}y=3\sin(\frac{2\pi}{3}x)+6 & ; \quad y=3\sin(-\frac{2\pi}{3}x)+6\\y=-3\sin(\frac{2\pi}{3}x)+6 & ; \quad y=-3\sin(-\frac{2\pi}{3}x)+6\end{cases}$$

پ) $T=4\pi \quad , \quad max=-1 \quad , \quad min=-7$

پاسخ

$$\begin{cases}|a|+c=-1\\-|a|+c=-7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a|=3\\c=-4\end{cases},\ T=\frac{2\pi}{|b|}\Rightarrow4\pi=\frac{2\pi}{|b|}\Rightarrow|b|=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y=\pm3\sin(\pm\frac{x}{2})-4\Rightarrow\begin{cases}y=3\sin(\frac{x}{2})-4 & ; \quad y=3\sin(-\frac{x}{2})-4\\y=-3\sin(\frac{x}{2})-4 & ; \quad y=-3\sin(-\frac{x}{2})-4\end{cases}$$

ت) $T=\frac{\pi}{2} \quad , \quad max=1 \quad , \quad min=-1$

پاسخ

$$\begin{cases}|a|+c=1\\-|a|+c=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a|=1\\c=0\end{cases},\ T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow|b|=4$$

$$y=\pm\sin(\pm4x)\Rightarrow\begin{cases}y=\sin(4x) & ; \quad y=\sin(-4x)\\y=-\sin(4x) & ; \quad y=-\sin(-4x)\end{cases}$$

توجه کنید که با فرض $y=a\cos bx+c$ نیز می‌توانیم تمام موارد این سؤال را به‌صورت زیر حل کنیم:

الف) $y=\pm3\cos(2x)$

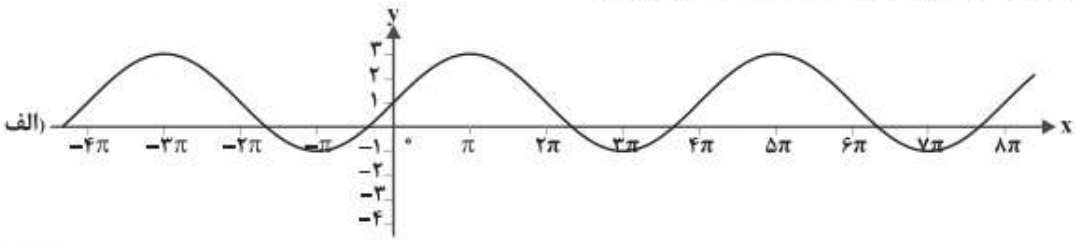
ب) $y=\pm3\cos(\frac{2\pi x}{3})+6$

پ) $y=\pm3\cos(\frac{1}{2}x)-4$

ت) $y=\pm\cos(4x)$

۴. ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده‌شده را بنویسید.

الف)



به خاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتاب ها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو به نشانی Kotob_Konkor@ عضو شوید.

پاسخ

$\max = ۳ \quad \min = -۱ \quad T = ۴\pi$

$T = ۷\pi - ۳\pi = ۴\pi$

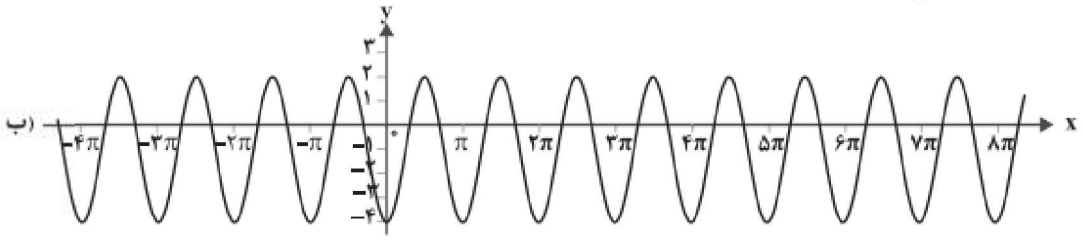
با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y = a\sin bx + c$ است و:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{b>۰} b = \frac{۱}{۲}$$

$$\left.\begin{matrix} |a| + c = ۳ \\ -|a| + c = -۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲c = ۲ \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow |a| = ۲ \xrightarrow{a>۰} a = ۲$$

ضابطهٔ تابع برابر $y = ۲\sin(\frac{۱}{۲}x) + ۱$ می‌شود.

ب)



پاسخ با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y = a\cos bx + c$ است.

$$T = \pi \ , \ T = \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲ \xrightarrow{b>۰} b = ۲$$

$$\left.\begin{matrix} |a| + c = ۲ \\ -|a| + c = -۴ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow |a| = ۳ \xrightarrow{a<۰} a = -۳$$

ضابطهٔ تابع برابر $y = -۳\cos(۲x) - ۱$ می‌شود.

۵. کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. **پاسخ** نادرست

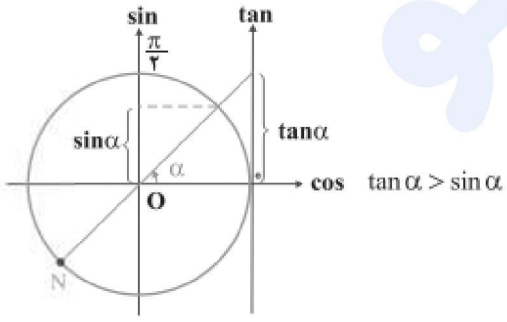
ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. **پاسخ** نادرست

پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف‌شده باشد، صعودی است. **پاسخ** درست

۶. با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

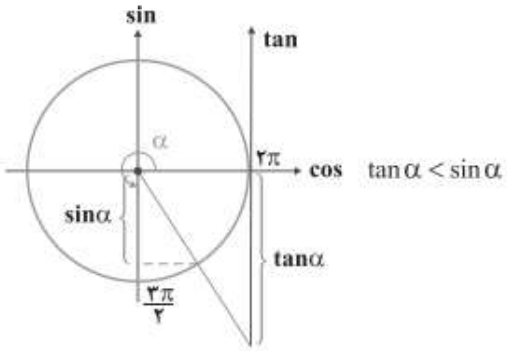
پاسخ در بازهٔ $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ همواره:



$\tan\alpha > \sin\alpha$

ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

پاسخ در بازهٔ $(\frac{۳\pi}{۲} , ۲\pi)$ همواره:



$\tan\alpha < \sin\alpha$