حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس اول و دوم: مفهوم حد و فرایندهای حدی-حدهای یک طرفه

جلسه اول: صفحات ۱۱۴ تا ۱۲۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

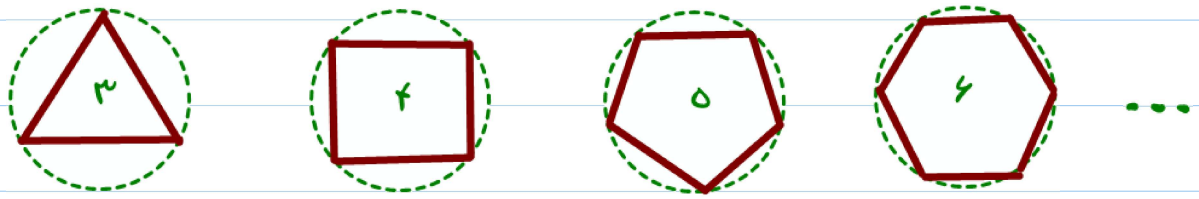
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

قبل از اینکه تعریف دقیق حد یک تابع را بگوئیم، لازم است با مفاهیم زیر آشنا شویم.

۱) فرایند حدی:

- در شکل‌های زیر در هر مرحله یک n ضلعی منتظم درون دایره قرار داریم. اگر n را زیاد کنیم مساحت n ضلعی به مساحت دایره نزدیک می‌شود.



پس می‌توانیم بگوئیم مساحت چند ضلعی‌های محاطی را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

- دنباله $\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ را در نظر بگیرید. اگر n عضو طبیعی را بزرگ و بزرگتر کنیم، مجدات دنباله کوچکتر شده و به صفر نزدیک می‌شود.

مثال‌های بالا نمونه‌ای از فرایندهای حدی هستند.

۲) میل کردن :

وقتی می گوییم x به a میل می کند یعنی x بسیار به عدد a نزدیک می شود ولی هرگز برابر خود a نمی شود و می نویسیم $x \to a$.



$x \to 3$: x ها از هر دو طرف به ۳ نزدیک شوند

وقتی می نویسیم $x \to a^+$ یعنی x از مقادیر بزرگتر از a، به a بسیار نزدیک می شود. در این حالت می گوییم x از سمت راست به a میل می کند.



$x \to 5^+$: x از مقادیر بزرگتر از ۵ به ۵ نزدیک شود

وقتی می نویسیم $x \to a^-$ یعنی x از مقادیر کوچکتر از a، به a بسیار نزدیک می شود. در این حالت می گوییم x از سمت چپ به a میل می کند.

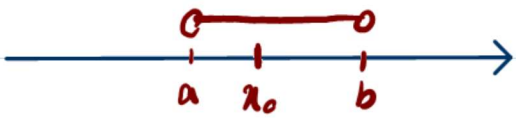


$x \to 4^-$: x از مقادیر کوچکتر از ۴ به ۴ نزدیک می شود

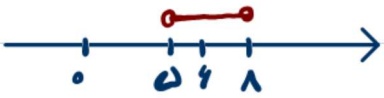
۳) همسایگی :

فرض کنید x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می گوییم.

(a,b) یک همسایگی x_0

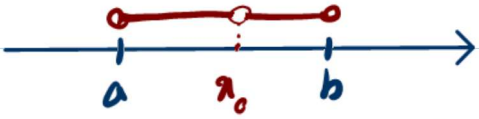


مثال: بازه $(5,8)$ یک همسایگی عدد ۶ است.



اگر عدد x_0 را از همسایگی (a,b) حذف کنیم یعنی $(a,b)-\{x_0\}$، به مجموعه بدست آمده

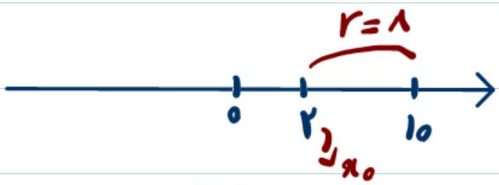
یک همسایگی محذوف x_0 می‌گوییم.



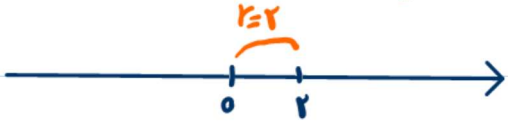
اگر $r>0$ باشد بازه باز (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست عدد x_0 و بازه باز

(x_0-r, x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌گوییم.

مثال: $(1, 10)$ یک همسایگی راست ۲



$(0,2)$ یک همسایگی چپ ۲



حال می‌توانیم تعریف حد را بیان کنیم.

تعریف حد تابع:

فرض کنید تابع $y=f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد (یعنی در حوزه a تعریف شود

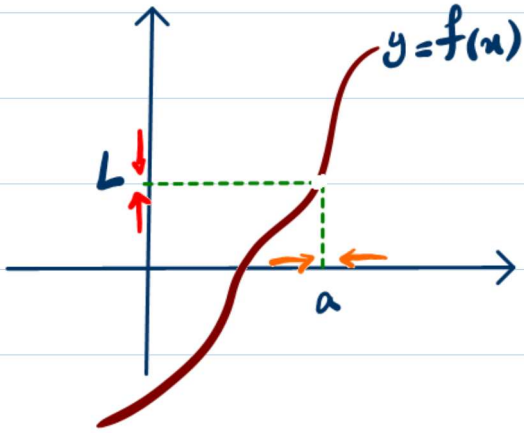
یا نشود فرقی ندارد.) می‌گوییم حد تابع f وقتی $x \to a$ برابر عدد L است هرگاه

با نزدیک شدن x به a مقادیر تابع f (همان yها) به L نزدیک شوند و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

تعریف بالا را به این صورت هم می‌توان گفت:

حد تابع f وقتی $x \to a$ برابر L است هرگاه مقادیر تابع f (همان yها) را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود.

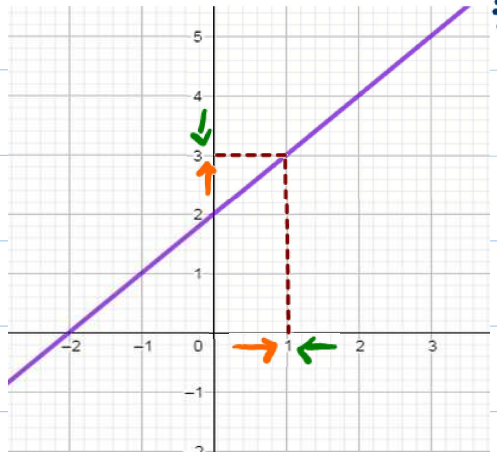


$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

مثال: تابع $f(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول و نمودار، حد تابع را وقتی $x \to 1$ بدست آورید.

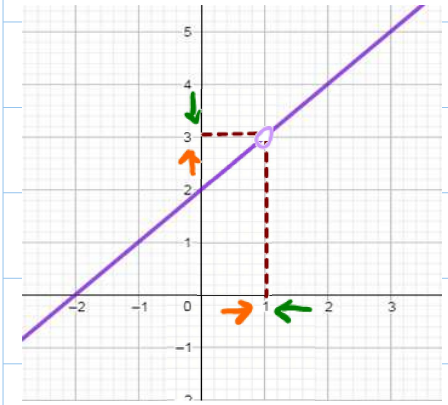
x	0	$0/5$	$0/9$	$0/99$	$\rightarrow 1 \leftarrow$	$1/01$	$1/1$	$1/5$	2
$y=x+2$	2	$2/5$	$2/9$	$2/99$	$\rightarrow 3 \leftarrow$	$3/01$	$3/1$	$3/5$	4

$$\lim_{x \to 1} (x+2) = 3$$

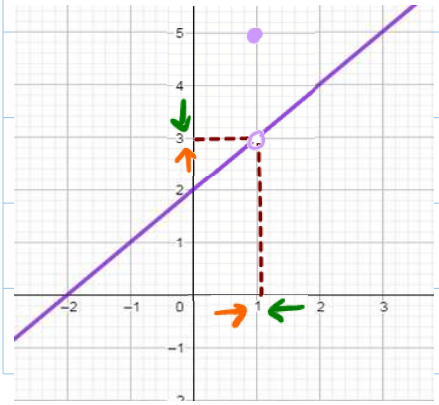


$f(x) = x+2$

در دو حالت زیر هم حد تابع در $x=1$ برابر 3 است.



$$g(x) = x+2 \quad , \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$



$$h(x) = \begin{cases} x+2 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

تعریف حد راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد می‌گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر L_1 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_1 نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به a نزدیک شود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$

تعریف حد چپ :

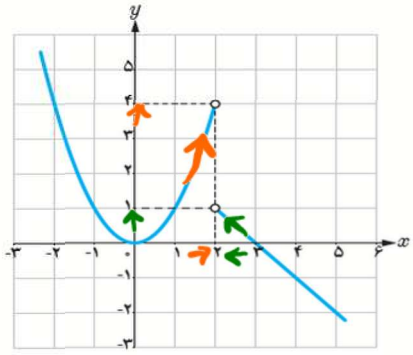
اگر تابع f در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر L_2 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_2 نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به a نزدیک شود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

نکته: حد تابع f در $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد راست و چپ تابع در $x=a$ موجود و برابر باشند یعنی:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -x+3 & x>2 \\ x^2 & x<2 \end{cases}$ به صورت روبه‌رو است:

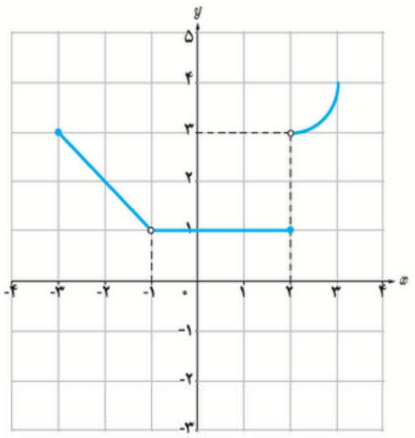


آیا تابع f در نقطهٔ $x=2$ حد دارد؟

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$

تابع در $x=2$ حد ندارد زیرا $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$

مثال: با توجه به نمودار f، حدهای خواسته‌شده را، در صورت وجود، به‌دست آورید.



$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ $\quad$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to 2} f(x)$ = وجود ندارد

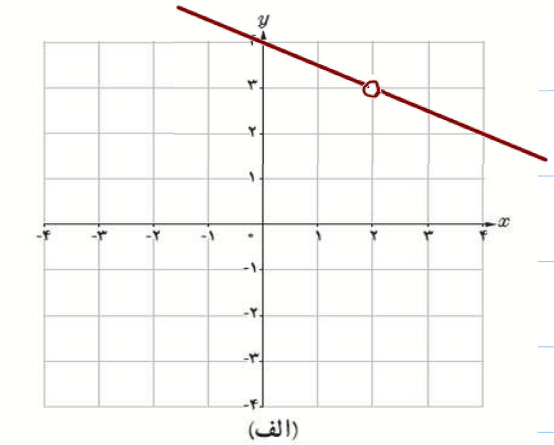
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to -1} f(x) = 1$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = 3$ $\quad$ $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ = وجود ندارد $\quad$ $\lim_{x\to -3} f(x)$ = وجود ندارد

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

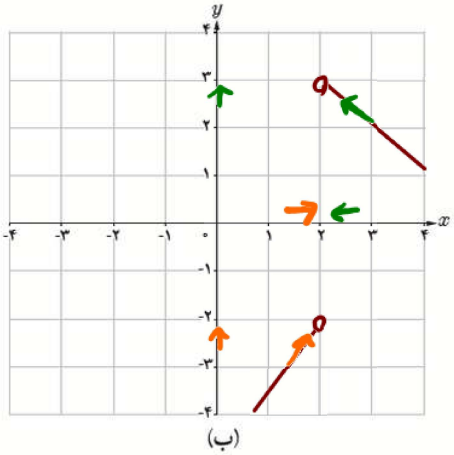
مثال: نموداری از یک تابع رسم کنید که :

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.


(الف)

$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

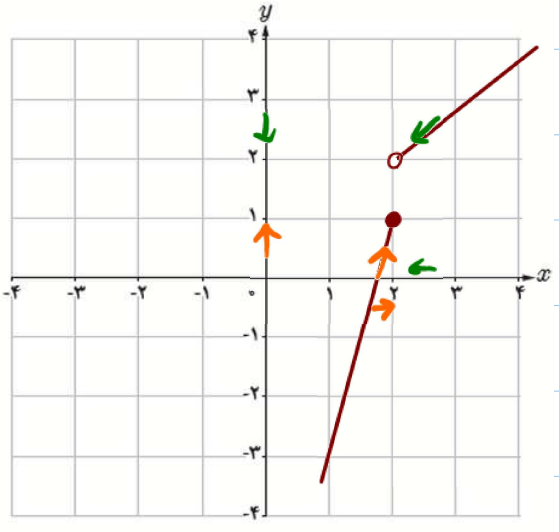

(ب)

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -2$

در $x=2$ حد ندارد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.

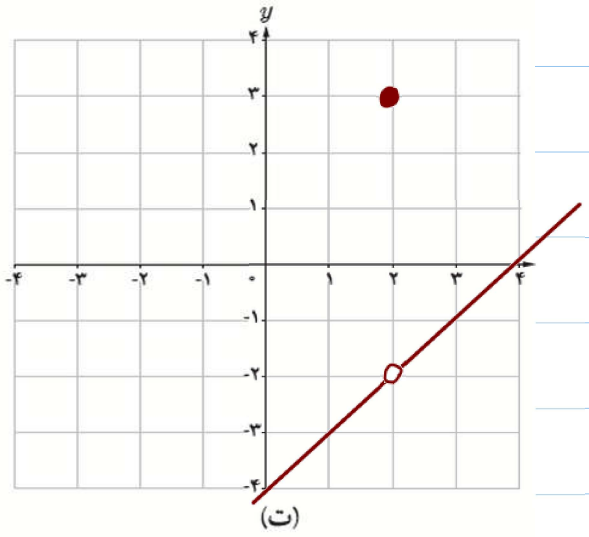

(پ)

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$

در $x=2$ حد ندارد.

ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



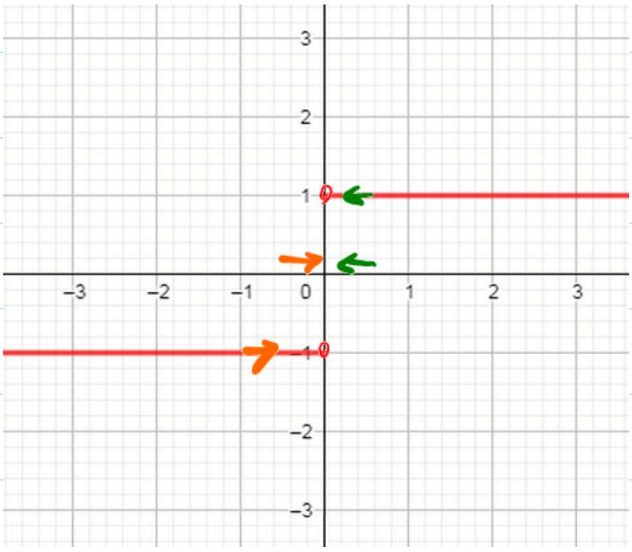
$$\lim_{x \to 2} f(x) = -2$$

$$f(2) = 4$$

مثال: حدهای زیر را با استفاده از رسم نمودار محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ \frac{-x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

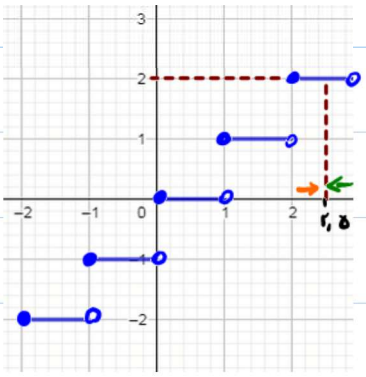


$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

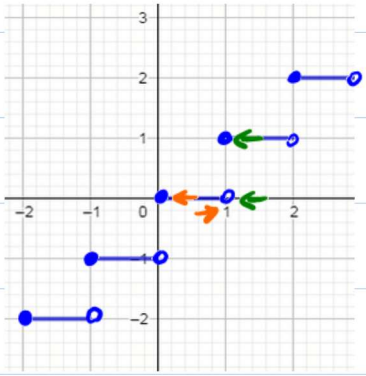
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

تابع در $x=0$ حد ندارد.

ب) $\lim_{x \to \frac{3}{2}} [x] = 2$



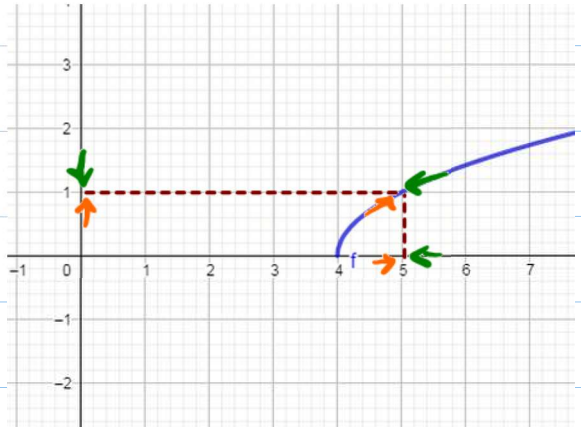
پ) $\lim_{x \to 1} [x]$ = حد ندارد



$\lim_{x \to 1^+} [x] = 1$

$\lim_{x \to 1^-} [x] = 0$

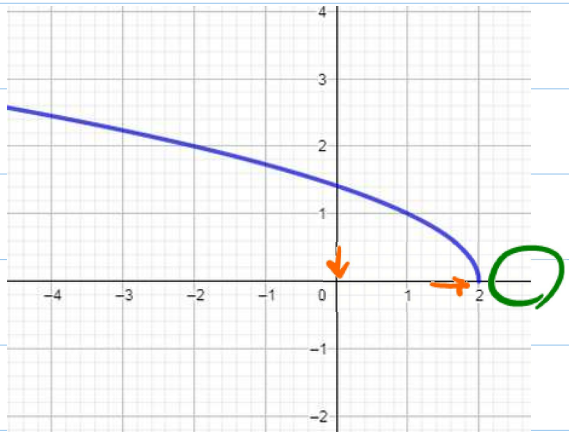
ت) $\lim_{x \to 5} \sqrt{x-4} = 1$



ث) $\lim_{x \to 2} \sqrt{2-x}$ = حد ندارد

تابع در همسایگی راست ۲ تعریف نشده است پس:

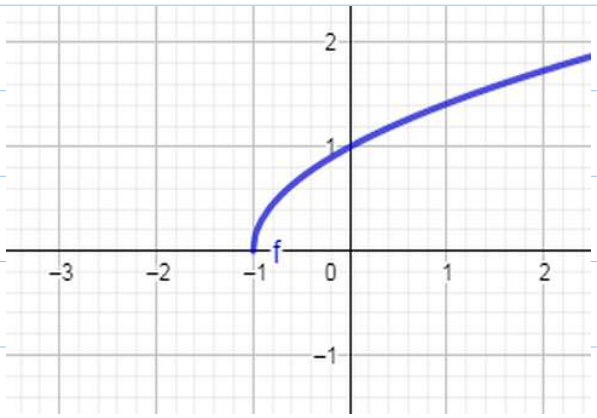
$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{2-x}$ = موجود نیست



$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{2-x} = 0$

ج) $\lim_{x \to -3} \sqrt{x+1}$ = حد ندارد

زیرا تابع در همسایگی ۳- تعریف نشده است.

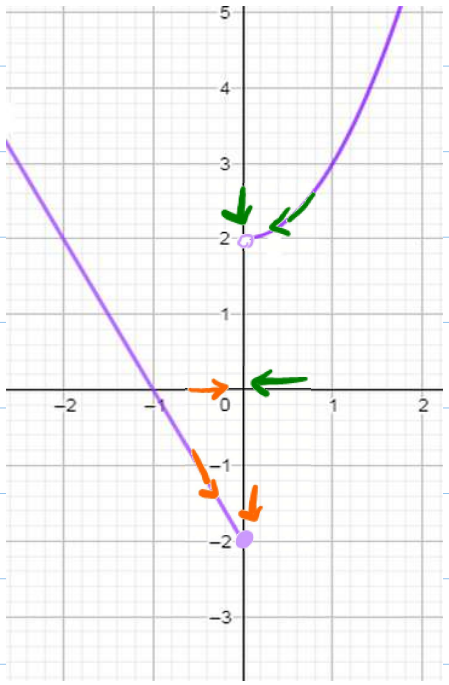


مثال: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ -2x-2 & x\le 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را ــ در صورت وجود ــ بیابید.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$

تابع در $x=0$ حد ندارد.



حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس سوم: قضایای حد

جلسه دوم: صفحات ۱۳۰ تا ۱۳۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

برای محاسبه حد توابع از قضیه‌های زیر کمک می‌گیریم :

قضیه ۱) حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a، همان مقدار ثابت c است یعنی :

$$\lim_{x\to a} c = c$$

مثال $\lim_{x\to 2} 3 = 3$

قضیه ۲) حد تابع همانی $f(x)=x$ در هر عدد دلخواه a، برابر a می‌شود یعنی :

$$\lim_{x\to a} x = a$$

مثال $\lim_{x\to 10} x = 10$

قضیه ۳) فرض کنید توابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

آنگاه

الف) مجموع و تفاضل و حاصل ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارند و

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = L_1 \pm L_2$$

ب) اگر $L_2 \neq 0$ باشد، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۴) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $c\in\mathbb{R}$ باشد آنگاه

الف) $\lim_{x\to a}(cf(x)) = cL$

مثال $\lim_{x\to 4} 3x = 3\times 4 = 12$

ب) $\lim_{x\to a}(f(x))^n = L^n$

مثال $\lim_{x\to 2}(x)^3 = 2^3 = 8$

قضیه ۵) اگر $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد حد تابع در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر است:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

قضیه ۶) اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to a} f(x)=L$:

الف) اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

ب) $\lim_{x\to a}|f(x)| = |L|$

پ) $\lim_{x\to a}\sin(f(x)) = \sin L$ ، $\lim_{x\to a}\cos(f(x)) = \cos L$

نتیجه: اگر تابع f در همسایگی a تعریف شده باشد و با جایگذاری a به جای x در تابع به یک عدد مشخص برسیم، مقدار حد همین عدد خواهد شد، جز موارد خاصی که به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

مثال: اگر $\lim_{x\to ۲} f(x) = ۲$ و $\lim_{x\to ۲} g(x) = ۱$ ، آنگاه حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید :

۱) $\lim_{x\to ۲}(۷g(x) - \frac{۱}{۲}f(x))$ $= ۷\times ۱ - \frac{۱}{۲}\times ۲ = ۷ - ۱ = ۶$

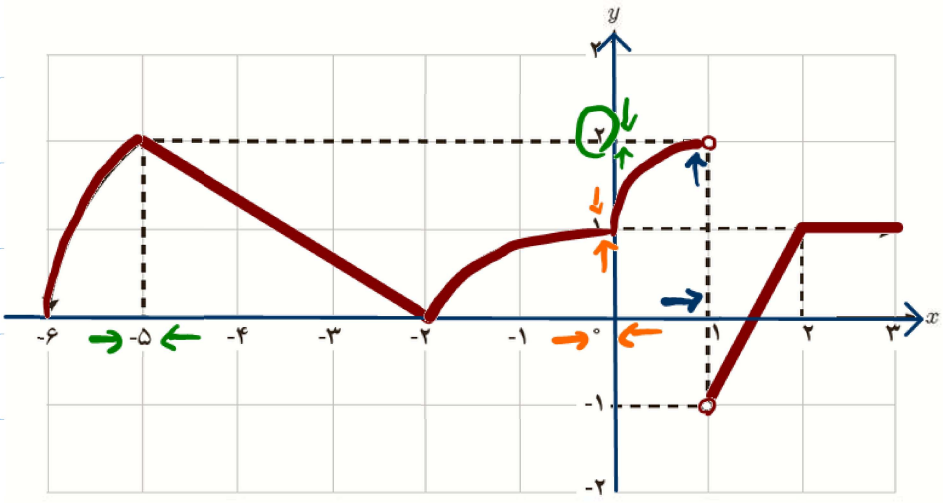
۲) $\lim_{x\to ۲}\frac{(۱+f(x))g(x)}{g(x)+۲}$ $= \frac{(\lim_{x\to ۲} ۱ + \lim_{x\to ۲} f(x))\lim_{x\to ۲} g(x)}{\lim_{x\to ۲} g(x) + \lim_{x\to ۲} ۲}$

$= \frac{(۱+۲)\times ۱}{۱+۲} = \frac{۳}{۳} = ۱$

۳) $\lim_{x\to ۲}(g(x) + \frac{۲}{f(x)})^{۳}$ $= (۱ + \frac{۲}{۲})^{۳} = (۱+۱)^{۳} = ۲^{۳} = ۸$

۴) $\lim_{x\to ۲}(\sqrt{۵x-۱} + \frac{f(x)}{g(x)})$ $= \sqrt{۵\times ۲ - ۱} + \frac{۲}{۱} = \sqrt{۹} + ۲ = ۳ + ۲ = ۵$

مثال: نمودار تابع f داده شده است. حاصل حدهای زیر را درصورت وجود بیابید :



۱) $\lim_{x\to -۵} (\frac{x}{۵}-۱)^۲ \times f(x)$ $= (-\frac{۵}{۵}-۱)^۲ \lim_{x\to -۵} f(x) = (-۲)^۲ \times ۲ = ۴\times ۲ = ۸$

۲) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۴-x}}{x^۲+f(x)}$ $= \frac{\sqrt{۴-۰}}{۰^۲+\lim_{x\to ۰} f(x)} = \frac{۲}{۰+۱} = \frac{۲}{۱} = ۲$

۳) $\lim_{x\to ۱^-} (x^۲+x-(f(x))^۲)$ $= ۱^۲+۱-(\lim_{x\to ۱^-} f(x))^۲ = ۱+۱-(۲)^۲$

$= ۲-۴ = -۲$

مثال: حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

۱) $\lim_{x\to -۱} (۲x^۴-x^۳-۵x^۲+۴)$ $= ۲(-۱)^۴-(-۱)^۳-۵(-۱)^۲+۴$

$= ۲-(-۱)-۵+۴ = ۲+۱-۵+۴ = ۲$

۲) $\lim_{x\to ۴} (۱+\frac{x}{۲})^۲ (x^۲-۶x)$ $= (۱+\frac{۴}{۲})^۲ (۴^۲-۶\times ۴) = ۳^۲ (۱۶-۲۴)$

$= ۹(-۸) = -۷۲$

۳) $\lim_{x\to ۱۰} (۵x^۳-۶|x|+۱)$ $= ۵(۱۰)^۳-۶\times ۱۰+۱ = ۵۰۰۰-۶۰+۱ = ۴۹۴۱$

۴) $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۸x^{۳}+۴x^{۲}+۲x}{۴x+۱} = \frac{۸(\frac{۱}{۲})^{۳}+۴(\frac{۱}{۲})^{۲}+۲\times\frac{۱}{۲}}{۴\times\frac{۱}{۲}+۱} = \frac{۸\times\frac{۱}{۸}+۴\times\frac{۱}{۴}+۱}{۲+۱}$

$= \frac{۱+۱+۱}{۳} = \frac{۳}{۳} = ۱$

۵) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\sin x}{۱-\cos x} = \frac{۱+\sin\frac{\pi}{۲}}{۱-\cos\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱+۱}{۱-۰} = \frac{۲}{۱} = ۲$

۶) $\lim_{x\to\frac{-\pi}{۶}} (۴\sin x+\cos^{۲} x) = ۴\sin(-\frac{\pi}{۶})+\cos^{۲}(-\frac{\pi}{۶})$

$= -۴\sin\frac{\pi}{۶}+\cos^{۲}\frac{\pi}{۶} = -۴\times\frac{۱}{۲}+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}$

$= -۲+\frac{۳}{۴} = \frac{-۸+۳}{۴} = \frac{-۵}{۴}$

۷) $\lim_{x\to۵} \sqrt{۵x-۹} = \sqrt{۵\times۵-۹} = \sqrt{۲۵-۹} = \sqrt{۱۶} = ۴$

۸) $\lim_{x\to-\pi} \frac{\pi\cos x}{x} = \frac{\pi\cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{\pi\cos\pi}{-\pi} = \frac{\pi\times(-۱)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = ۱$

موارد خاص :

۱) توابع چندضابطه‌ای : اگر حد تابع در نقاطی که ضابطه تابع تغییر می‌کند (نقاط مرزی) خواسته شده باشد باید حد چپ و حد راست از ضابطه‌های مربوط به آن محاسبه شوند.

مثال: حد تابع f را در نقطهٔ a (درصورت وجود) بیابید

۱) $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x>۰ \\ x-۲ & x<۰ \end{cases}$, $a=۰$

$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} x^{۲} = ۰^{۲} = ۰$

$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (x-۲) = ۰-۲=-۲$

$-۲\neq ۰$ پس تابع در $x=۰$ حد ندارد

۲) $f(x)=\begin{cases} ۵ & x<۳ \\ x+۲ & x>۳ \end{cases}$, $a=۳$

$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} (x+۲) = ۳+۲=۵$

$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim ۵ = ۵$

$۵=۵$ پس تابع در $x=۳$ حد دارد و

$\lim_{x\to ۳} f(x) = ۵$

۳) $f(x)=\begin{cases}۳-x & x<۲\\ -۱ & x=۲\\ x^۲-۴ & x>۲\end{cases}$, $a=۲$

$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+}(x^۲-۴) = ۲^۲-۴ = ۴-۴=۰$

$۰\neq ۱$ پس تابع در $x=۲$ حد ندارد.

$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-}(۳-x) = ۳-۲=۱$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}(a+۱)x+۳ & x>-۲\\ -۲x^۲+۱ & x<-۲\end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ حد داشته باشد.

$\lim_{x\to -۲^+} f(x) = \lim_{x\to -۲^+}(a+۱)x+۳ = (a+۱)(-۲)+۳ = -۲a-۲+۳ = -۲a+۱$

$\lim_{x\to -۲^-} f(x) = \lim_{x\to -۲^-} -۲x^۲+۱ = (-۲)(-۲)^۲+۱ = -۸+۱ = -۷$

$\lim_{x\to -۲^+} f(x) = \lim_{x\to -۲^-} f(x) \Rightarrow -۲a+۱=-۷ \to -۲a=-۸ \Rightarrow a=۴$

۲) حد توابع شامل رادیکال با فرجه زوج :

در این توابع باید بررسی شود عبارت رادیکالی در همسایگی نقطه a تعریف شده است یا خیر.

اگر تعریف نشود مقدار تابع حد تابع خواهد بود اگر نه حد موجود نیست.

در این توابع هم برای نقاطی که ریشه داخل رادیکال هستند حد چپ و راست را می یابیم.

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x \to -۲} \sqrt{۲x+۴}$

x	$\to -۲ \leftarrow$
$۲x+۴$	$- \quad 0 \quad +$

تابع در همسایگی چپ ۲- تعریف نمی شود

$\lim_{x \to -۲^+} \sqrt{۲x+۴} = \sqrt{۲(-۲)+۴} = \sqrt{۰} = ۰$

$\lim_{x \to -۲^-} \sqrt{۲x+۴}$ = حد ندارد

پس این حد موجود نیست.

۲) $\lim_{x \to ۰} \sqrt{x^۲+۳x}$

x	$-۳ \to ۰ \leftarrow$
$x^۲+۳x$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

$\lim_{x \to ۰^+} \sqrt{x^۲+۳x} = ۰$

$\lim_{x \to ۰^-} \sqrt{x^۲+۳x}$ = حد ندارد

پس این حد موجود نیست.

۳) $\lim_{x \to 5} \sqrt{۳-x}$

$D: ۳-x \geq ۰ \Rightarrow -x \geq -۳ \Rightarrow x \leq ۳$

$D = (-\infty, ۳]$

تابع در همسایگی کرد ۵ تعریف نمی‌شود پس در این نقطه حد ندارد.

۳) حد توابع شامل جزء صحیح :

می‌دانیم اگر $x \to a^+$ یعنی $x > a$ و اگر $x \to a^-$ یعنی $x < a$ است. در محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح از این نکته استفاده کرده عبارت داخل جزء صحیح را می‌سازیم و مقدار عبارت جزء صحیح را در همسایگی a محاسبه می‌کنیم تا ببینیم با کدام تابع ثابت برابر می‌شود. پس با جای‌گذاری این مقدار در تابع، حد را بدست می‌آوریم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \to ۰} (x+۳)[x]$

$\lim_{x \to ۰^+} (x+۳)[x] = (۰+۳) \times ۰ = ۰$

$\lim_{x \to 0^-} (x+3)[x] = (0+3) \times (-1) = -3$

$-3 \neq 0$ این حد موجود نیست

۲) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + 3x}{[x]+1} = \frac{2^2 + 3 \times 2}{[2^-]+1} = \frac{10}{1+1} = \frac{10}{2} = 5$

$1 < x < 2 \leftarrow$

۳) $\lim_{x \to 1^-} [-2x]$: $x < 1 \xrightarrow{\times(-2)} -2x > -2$

در نتیجه عبارت $-2x$ بزرگتر از -2 و نزدیک آن است پس $-2 < -2x < -2$

$\lim_{x \to 1^-} [-2x] = -2$

با جدولگذاری هم به همین نتیجه می‌رسیم.

۴) $\lim_{x \to 3} x + [\frac{x}{3}]$

$x \to 3^+ : x > 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{x}{3} > 1$ پس $\frac{x}{3}$ بزرگتر از یک و نزدیک آن است.

$1 < \frac{x}{3} < 2 \rightarrow \lim_{x \to 3^+} x + [\frac{x}{3}] = 3 + 1 = 4$

پس x کوچکتر از ۳ و نزدیک آن است: $x \to 3^- : x < 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{x}{3} < 1$

$0 < \frac{x}{3} < 1 \to \lim_{x \to 3^-} x + [\frac{x}{3}] = 3 + 0 = 3$

$3 \neq 3$ پس این حد موجود نیست.

۵) $\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \frac{\sqrt{2-2}}{[2^+]+2} = \frac{0}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$

۶) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} x[x] = \frac{1}{2} \times 0 = 0$

$0 < x < 1$

۷) $\lim_{x \to \frac{5}{2}} 2[x] = 2 \times 2 = 4$

$2 < x < 3$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری(حالت صفرصفرم)

قسمت اول

جلسه سوم: صفحات ۱۴۱ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

اگر محاسبه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ خواسته شده باشد و بعد از قرار دادن a به جای x، صورت و مخرج هر دو صفر شوند با توجه به نوع صفر ۲ حالت خواهیم داشت.

صفرها دو دسته اند: ۱ـ صفر مطلق (خود صفر) ۲ـ صفر نسبی یا حدی ($0^{\pm}$)

(نزدیک صفر)

نوع اول: $\frac{0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

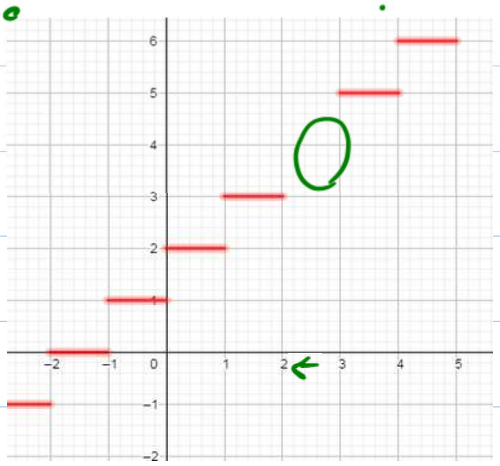
نوع دوم: $\frac{0^{\pm}}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

نوع سوم: $\frac{0}{0^{\pm}}$ صورت صفر مطلق و مخرج غیر صفر (صفر حدی) پس حد کسر صفر می‌شود.

نوع چهارم: $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$ به این حالت، حالت مبهم می‌گوییم و باید رفع ابهام شود.

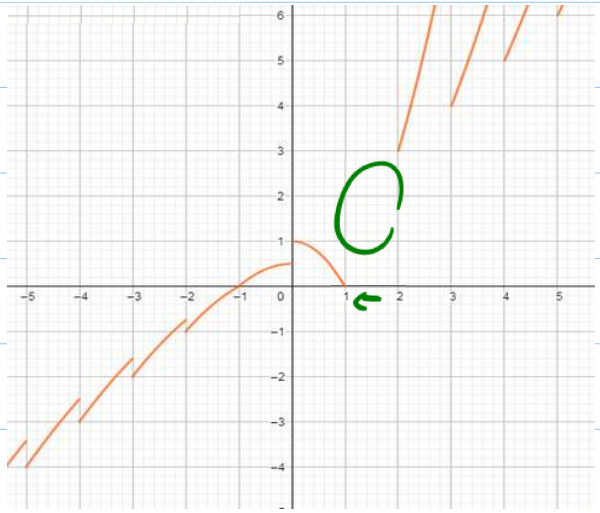
مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 2^+}\frac{[x]^2-4}{[x]-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$ حد وجود ندارد

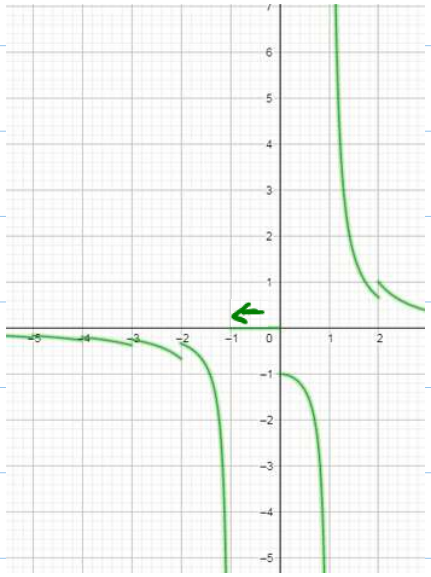


حد موجود نیست

ب) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{[x]-1} = \frac{1^+-1}{1-1} = \frac{0^+}{0}$ مطلق



ب) $\lim_{x \to -1^+} \frac{[x]+1}{x^2-1} = \frac{-1+1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$



مثال: کنکور تجربی ۹۹

حاصل $\lim_{x \to -2^-} \frac{[x]+3}{x+2}$، کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ✓ ۳) صفر ۴) ۱

گزینه ۲

$\frac{-2+3}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

چون $x \to a$ صورت و مخرج هردو صفر شده اند پس هم صورت و هم مخرج عامل $(x-a)$ را دارا هستند. به $(x-a)$ عامل ابهام یا صفرکننده می‌گوییم.

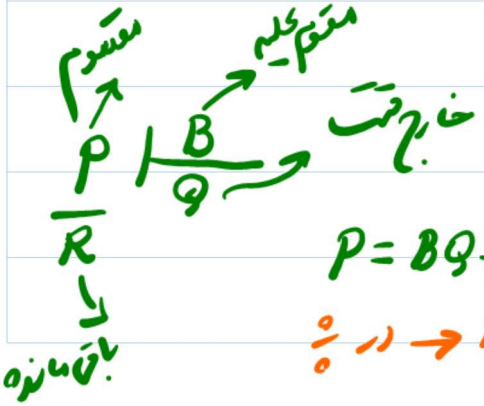
الف) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ وقتی صورت و مخرج هردو چندجمله‌ای باشند.

با استفاده از روش های تجزیه (فاکتورگیری و ریشه‌ها) عامل ابهام را در صورت و مخرج ایجاد و با یکدیگر حذف می‌کنیم تا حد قابل محاسبه باشد.

تبصره: هرگاه نتوانیم با ریشه‌ها یا فاکتورگیری عامل ابهام را ایجاد کنیم، چاره‌ای جز تقسیم آن عبارت بر عامل ابهام نداریم. در این صورت به جای آن عبارت حاصل ضرب $(x-a)$ (در خارج قسمت) در مقسوم‌علیه را می‌نویسیم.

یادآوری

۱) رابطه تقسیم:



$$P = BQ + R$$

عامل ابهام

در $\frac{0}{0}$ $\to$ $R=0$ $\to$ $P=BQ$

۲) تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای :

روش اول :

$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2 \qquad \frac{-x^2}{x} = -x \qquad \frac{x}{x} = 1$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 + 1 & x+1 \\ \hline -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 + 1 & \\ -(-x^2 - x) & \\ \hline x + 1 & \\ -(x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

روش دوم (روش هورنر) : برای تقسیم درجه n بر درجه یک

ریشه مقسوم علیه $\rightarrow -1$

ضرائب مقسوم	۱	۰	۱	۲
	$1+1\times 1 = 0$	$-1(-1)+0 = 1$	$-1\times 2+1 = -1$	۲

باقی مانده ↑

خارج قسمت : $2x^2 - 1x + 1 \longrightarrow 2x^2 - x + 1$

مثال: حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to -۳} \frac{x^۲-۹}{x^۲+۳x} = \frac{۰}{۰}$ صورت را تجزیه می‌کنیم: $(x-(-۳))(x+۳)$

$$\lim_{x\to -۳} \frac{(x-۳)(x+۳)}{x(x+۳)} = \lim_{x\to -۳} \frac{x-۳}{x} = \frac{-۳-۳}{-۳} = \frac{-۶}{-۳} = ۲$$

۲) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{x^۲+۵x-۶} = \frac{۰}{۰}$ صورت را تجزیه می‌کنیم $(x-۱)$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x+۶)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x+۱}{x+۶} = \frac{۱+۱}{۱+۶} = \frac{۲}{۷}$$

۳) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۸x^۳-۱}{۶x^۲-۵x+۱} = \frac{۰}{۰}$ صورت را تجزیه می‌کنیم $(x-\frac{۱}{۲})$

$$۸x^۳-۱ = ۸(x^۳-\frac{۱}{۸}) = ۸(x-\frac{۱}{۲})(x^۲+\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴})$$

روش هورنر

	۶	۵-	۱
$\frac{۱}{۲}$	۶	$\frac{۱}{۲}\times ۶ - ۵ = -۲$	$\frac{۱}{۲}\times(-۲)+۱ = ۰$ ← باقی‌مانده

خارج قسمت: $۶x-۲$

$$۶x^۲-۵x+۱ = (x-\frac{۱}{۲})(۶x-۲)$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8(x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{(x-\frac{1}{2})(2x-2)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{2(2x-1)}$$

$$= 4\,\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{2-1} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

۴) $\lim_{x\to -4} \frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4} = \frac{0}{0}$ صورت کسر $(x+4)$ عامل

$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$

روش هورنر ۴-

	۱	۴	۱	۴
۱		$-4\times 1+4=0$	$-4\times 0+1=1$	$-4\times 1+4=0$

باقی مانده

صورت $x^2+1 = x^2+0x+1$

$x^3+4x^2+x+4 = (x+4)(x^2+1)$

$$\lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x^2+1)} = \lim_{x\to -4} \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{-4-1}{16+1} = \frac{-5}{17}$$

o) $\lim_{x \to -2} \frac{|x^2-4|}{x+2} = \frac{0}{0}$

x	$\to -2 \leftarrow$	2
x^2-4	$+ \quad 0 \quad -$	$0 \quad +$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{-(x^2-4)}{x+2} = \lim_{x \to -2^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = -(-2-2) = 4$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -2-2 = -4$$

چون حدهای یک‌طرفه برابر نیستند $x=-2$ حد ندارد.

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری(حالت صفرصفرم)

قسمت دوم

جلسه چهارم: صفحات ۱۴۱ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

ب) رفع ابهام: وقتی صورت یا مخرج و یا هر دو شامل عبارات رادیکالی هستند:

در این حالت از مفهوم گویا کردن و اتحادهای مزدوج یا چاق و لاغر استفاده می‌کنیم. به این صورت که با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارت رادیکالی (برای فرجه‌های ۲) یا عبارت چاق عبارت رادیکالی (برای فرجه‌های ۳)، عامل ابهام را ایجاد می‌کنیم.

مثال: حدود زیر را بیابید

۱) $\lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{x^۲-۴} = \frac{۰}{۰}$ ابهام عامل $(x-۲)$

مزدوج

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{x^۲-۴} \times \frac{x+\sqrt{۳x-۲}}{x+\sqrt{۳x-۲}} = \lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-(۳x-۲)}{(x-۲)(x+۲)(x+\sqrt{۳x-۲})}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۳x+۲}{(x-۲)(x+۲)(x+\sqrt{۳x-۲})} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)(x+۲)(x+\sqrt{۳x-۲})}$$

$$= \frac{۲-۱}{(۲+۲)(۲+\sqrt{۶-۲})} = \frac{۱}{۴(۴)} = \frac{۱}{۱۶}$$

۲) $\lim_{x\to 4} \frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} = \frac{0}{0}$ عامل ابهام: $(x-4)$

روش هورنر برای صورت

	3	-10	-8
4	3	$4\times 3-10=2$	$8-8=0$

خارج قسمت: $3x+2$ — باقی‌مانده

$3x^2-10x-8=(x-4)(3x+2)$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} \times \frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{3-\sqrt{x}-1}$$

مزدوج

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{2-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{-(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{4}+2)(12+2)(\sqrt{3-\sqrt{4}}+1)}{-1} = -112$$

۳) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2} = \frac{0}{0}$ عامل ابهام : x

مزدوج صورت

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2} \times \frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}+1} \times \frac{\sqrt{3x+4}+2}{\sqrt{3x+4}+2}$$

مزدوج مخرج

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(2x+1-1)(\sqrt{3x+4}+2)}{(3x+4-4)(\sqrt{2x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(\sqrt{3x+4}+2)}{3x(\sqrt{2x+1}+1)}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2+2}{1+1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

۴) $\lim_{x\to 2^-} \frac{|2x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ عامل ابهام $(x-2)$

x	-1		2
$2x^2-x-2$	$+$	0 $-$	0 $+$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x^2-x-2)}{2x-\sqrt{x^2+12}} \times \frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{2x+\sqrt{x^2+12}}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{4x^2-(x^2+12)}$$

$-x^2-12$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{\underbrace{3x^2-12}_{3(x^2-4)}}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x-2)(x+2)} = \frac{-(2+1)(4+4)}{3(2+2)} = \frac{-3\times 8}{3\times 4}$$

$$= -2$$

یادآوری اتحاد چاق و لاغر :

چاق — لاغر

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

نحوه ساختن عبارت چاق از روی عبارت لاغر :

۱ـ جمله اول چاق : برابر (توان دوم) جمله اول لاغر

۲ـ جمله دوم چاق : حاصل ضرب جمله اول در دوم لاغر با علامت قرینه

۳ـ جمله سوم چاق : برابر جمله دوم لاغر

مثال: کنکور تجربی ۹۸

- حدّ عبارت $\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x \to -8$، کدام است؟

۱) -24 ۲) -18 ۳) -12 ۴) -6

عامل اول $(x+8)$

$$\lim_{x\to -8} \frac{(x+8)(x+2)}{6(2+\sqrt[3]{x})} \times \frac{(4-2\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(4-2\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

6 ← $\sqrt[3]{x}+2$ ، $(x+8)$ ← $x+8$

$$= \lim_{x\to -8} \frac{(x+8)(x+2)(4-2\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{6(8+x)}$$

2^3 ، $(\sqrt[4]{x})^4$

$$= \frac{(-8+2)(4-2\sqrt[4]{-8}+\sqrt[3]{64})}{6} = \frac{-6(4-2(-2)+4)}{6}$$

$$= -1 \times 12 = -12$$

گزینه ۳

مثال: کنکور ریاضی ۹۹

حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$ ، کدام است؟

۱) $-1/5$ ۲) $-1/2$ ۳) $-0/8$ ۴) $-0/6$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}=\frac{0}{0}$$ حالت ابهام $(x-1)$

مزدوج صورت

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}\times\frac{2x+5+7\sqrt{x}}{2x+5+7\sqrt{x}}\times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{2x+\sqrt{3x+1}}$$

مزدوج مخرج

$$=\lim_{x\to 1}\frac{((2x+5)^2-49x)(2x+\sqrt{3x+1})}{(4x^2-(3x+1))(2x+5+7\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(4x^2+20x+25-49x)(2x+\sqrt{3x+1})}{(4x^2-3x-1)(2x+5+7\sqrt{x})}$$

$x=1$ و $\frac{25}{4}$ ریشه

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(4x^2-29x+25)(2x+\sqrt{3x+1})}{(4x^2-3x-1)(2x+5+7\sqrt{x})}$$

$x=1$ و $-\frac{1}{4}$ ریشه

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(4x-25)(12x+\sqrt{x^3+1})}{(x-1)(4x+1)(12x+5+7\sqrt{x})}$$

$$= \frac{(4-25)(12+2)}{(4+1)(12+5+7)} = \frac{-21\times 4}{5\times 14} = \frac{-3\times 2}{5} = -\frac{6}{5} = -1,2$$

گزینه ۲

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری(حالت صفرصفرم)

قسمت سوم

جلسه پنجم: صفحات ۱۴۱ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

گاهی اوقات حد به صورت $\frac{0}{0}$ یا مبهم یا هر دو توابع مثلثاتی باشند:

با استفاده از روابط مثلثاتی حل ابهام را ایجاد می‌کنیم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} = \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

۲) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = 2\cos 0 = 2 \times 1 = 2$

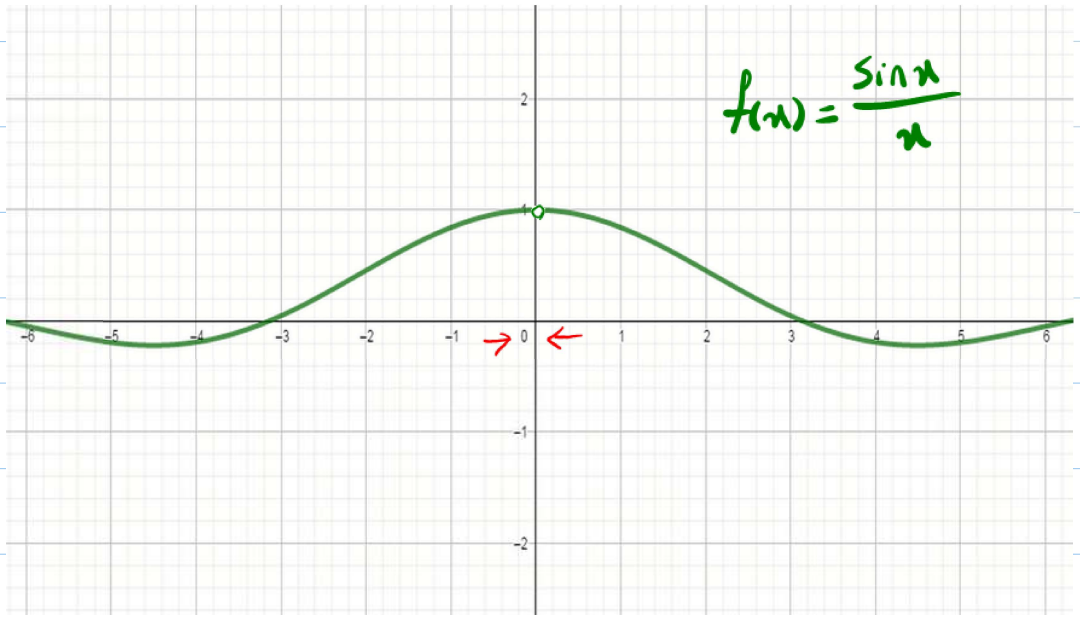
۳) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$

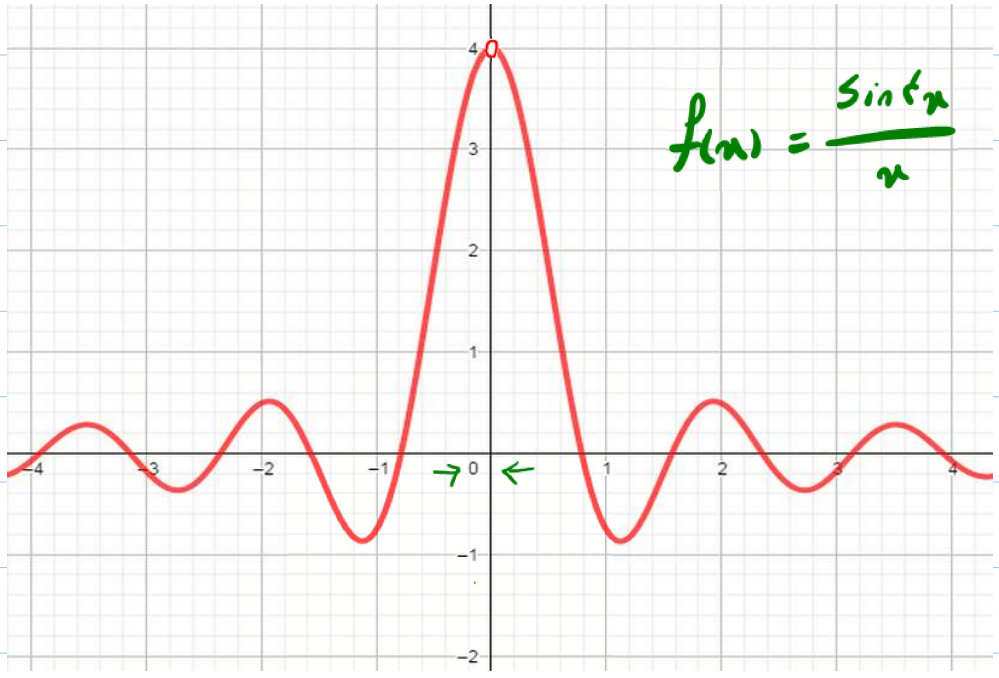
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow$ بنابراین $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \lim_{x \to \pi} \frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = 2\sin^2\frac{\pi}{2} = 2 \times 1 = 2$$

نکته: با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ در ۰ : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

و در حالت کلی $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m$.





$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4$

مثال: حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

حتی بهتر $\boxed{2\sin^2 x = 1 - \cos 2x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2 = 2\times 2^2 = 2\times 4 = 8$$

ب) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)(3+\cos x)}{x\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x(3+\cos x)}{x\sin 4x}$

صورت و مخرج تقسیم بر x^2 $\Longrightarrow$ $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\sin^2 x}{x^2}(3+\cos x)}{\frac{x\sin 4x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2(3+\cos x)}{\frac{\sin 4x}{x}}$

$$= \frac{2\times 1\times(3+1)}{4} = 2$$

ج) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ $\times \frac{\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2\left(\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x}\right)}$$

$\sqrt{\cos 0} + \sqrt{\cos 0} = 1+1 = 2$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-2\sin^2\frac{3x}{2}\right)-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}-\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2-\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{x}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}-\frac{9}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

ب) $\lim_{x\to 0}\left(\left([2x]+[-2x]\right)\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\lim_{x\to 0^+}[2x]+[-2x] = 0-1=-1$

$\lim_{x\to 0^-}[2x]+[-2x] = -1+0=-1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}[2x]+[-2x] = -1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{1-(1+x^2)}$$

(اتحاد مزدوج)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2\sin^2 \frac{x}{2})(1+\cos x+\cos^2 x)(1+\sqrt{1+x^2})}{-x^2}$$

$$= -2 \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 \times (1+1+1)(1+1) = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 6 = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(([2x]+[-2x]) \frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} \right) = -1 \times (-3) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-|x|\sin 2x}{4x^2-|x|\sin 4x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-(-x)\sin 2x}{4x^2-(-x)\sin 4x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+x\sin 2x}{4x^2+x\sin 4x} \xrightarrow{\div x^2} \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x\sin 2x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x\sin 4x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{1+\frac{\sin 2x}{x}}{4+\frac{\sin 4x}{x}} = \frac{1+2}{4+4} = \frac{3}{8}$$

مثال: کنکور ریاضی ۹۹ (خارج)

حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 2

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}} \times \frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2+3x-(2-x)}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|\left(\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x}{\sqrt{2}\left(-\sin\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

($-2+x$)

($x\to 0^-$: $\frac{x}{2}$ ناحیه سوم $\to \sin\frac{x}{2}<0$)

$$= \frac{-4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sin\frac{x}{2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

گزینه ۱

روش تغییر متغیر برای رفع ابهام ÷

در این روش حاصل عبارت کسری را برابر متغیر جدیدی مانند t می‌گیریم و با توجه به متغیر جدید حد را ساده و محاسبه می‌کنیم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \dfrac{\sin ۲x - ۱}{۴x - \pi}$

حاصل ابهام $x - \frac{\pi}{۴} = t$

$\begin{cases} x = t + \frac{\pi}{۴} \\ ۴x = ۴t + \pi \\ ۲x = ۲t + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$

$(x \to \frac{\pi}{۴} \Rightarrow t \to ۰)$

$$\lim_{t\to ۰} \frac{\sin(۲t+\frac{\pi}{۲}) - ۱}{۴t+\pi-\pi} = \lim_{t\to ۰} \frac{\cos ۲t - ۱}{۴t} = \lim_{t\to ۰} \frac{-(۱-\cos ۲t)}{۴t}$$

$$= -\frac{۱}{۴}\lim_{t\to ۰} \frac{۲\sin^{۲} t}{t} = -\frac{۱}{۲}\lim_{t\to ۰} \frac{\sin t}{t} \times \sin t$$

$$= -\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۰ = ۰$$

۲) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$

قرار می‌دهیم $x - \frac{\pi}{2} = t$

$(x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \to 0)$

$$\begin{cases} x = t + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2t + \pi \\ 2x = 2t + 2\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(2t+\pi)}{\cos(2t+2\frac{\pi}{2})} = \lim_{t \to 0} \frac{-\sin 2t}{\sin 2t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{-\sin 2t}{t}}{\frac{\sin 2t}{t}} = \frac{-2}{2}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس پنجم: پیوستگی

جلسه ششم: صفحات ۱۴۵ تا ۱۵۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تعریف پیوستگی

تابع f در $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

پس برای اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد باید سه شرط زیر را داشته باشد:

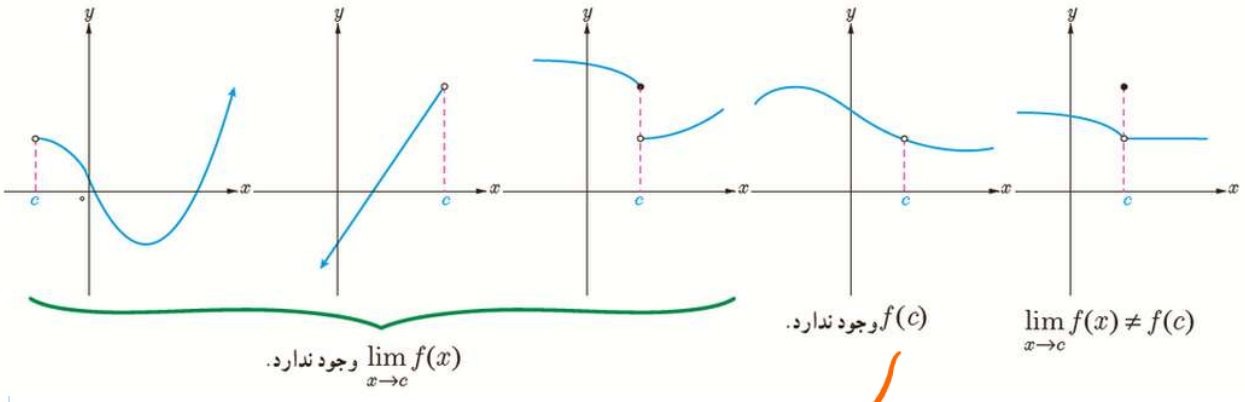
۱) تابع f در a تعریف شده باشد یعنی $a \in D_f$.

۲) حد تابع f در $x=a$ موجود باشد یعنی تابع در همسایگی a تعریف شده باشد و

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

۳) حد تابع f در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر باشد یعنی: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

تذکر: وقتی f در $x=c$ پیوسته نباشد می‌گوییم در این نقطه ناپیوسته است.



مثال: پیوستگی هر تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^2(x-2) & x\le 2 \\ 4-2x & x>2 \end{cases}$ $\quad x=2$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} 4-2x = 4-4=0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2} x^2(x-2)=4(2-2)=0$$

$$f(2)=2^2(2-2)=0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=0$$ تابع در $x=2$ پیوسته است.

ب) $f(x)=\begin{cases} [x] & x<-1 \\ -4 & x=-1 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} & x>-1 \end{cases}$ $\quad x=-1$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-1)=-1-1=-2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}[x]=[-1^-]=-2$$

$$f(-1)=-4$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=-2\neq f(-1)=-4$$ تابع در $x=-1$ پیوسته نیست زیرا:

ب) $$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|} & x\neq 0\\ -1 & x=0\end{cases}$$ $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0} 1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-x}=\lim_{x\to 0}-1=-1$$

$f(0)=-1$

تابع در $x=0$ پیوسته نیست زیرا در این نقطه حد ندارد ولی در ادامه خواهیم دید

چون $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1=f(0)$ ی در نتیجه تابع در $x=0$ پیوستگی چپ دارد.

پیوستگی راست و پیوستگی چپ :

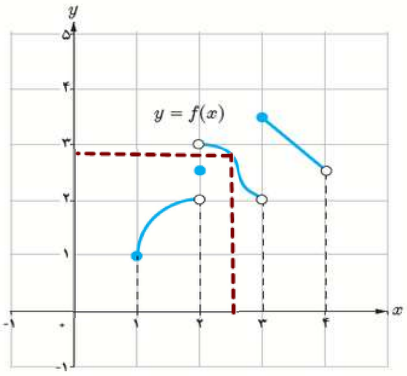
تابع f در $x=a$ پیوستگی راست دارد هرگاه $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

تابع f در $x=a$ پیوستگی چپ دارد هرگاه $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

پس می‌توان گفت هرگاه f در یک همسایگی a تعریف شده باشد:

f در $x=a$ پیوسته است اگر و تنها اگر f در a پیوستگی راست و چپ داشته باشد.

مثال: نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو رسم شده است.



۱) تابع f در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{1,2,2/5,3,4\}$ ناپیوسته است.

در $x=1$ ناپیوسته است زیرا حد چپ ندارد.

در $x=2$ ناپیوسته است زیرا: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=3$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)=2$, $f(2)=2,5$

در $x=2,5$ پیوسته است.

در $x=3$ پیوسته نیست زیرا: $\lim_{x\to 3^+} f(x)=3,5$, $\lim_{x\to 3^-} f(x)=2$, $f(3)=3,5$

در $x=4$ پیوسته نیست زیرا حد راست ندارد.

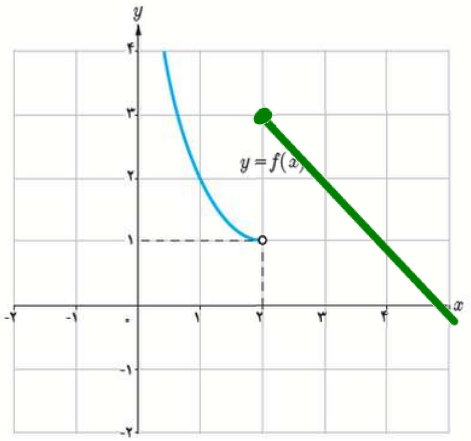
۲) در کدام نقطه a از مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ تساوی $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ برقرار است؟

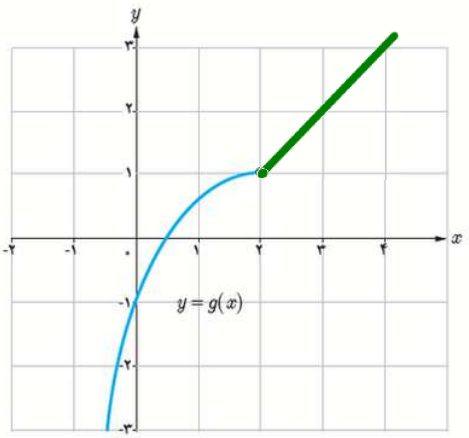
در $x=۳$ پیوستگی راست دارد.

مثال: در شکل‌های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده‌اند. در نقطه $x=۲$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که :

۱ تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲ تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.





مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>1 \\ 2 & x=1 \\ x+1 & x<1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2-1 = 1-1 = 0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2$

$f(1)=2$

تابع در $x=1$ پیوسته نیست و فقط پیوستگی چپ دارد.

پیوستگی توابع معروف :

۱) توابع چندجمله‌ای در تمام $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

۲) توابع گویا فقط در ریشه‌های مخرج شان ناپیوسته‌اند.

۳) توابع رادیکالی با فرجه فرد مثل $\sqrt[2n+1]{f(x)}$ در تمام نقاطی که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند

۴) تابع $|f(x)|$ در تمام نقاطی که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند.

۵) توابع رادیکالی با فرجه زوج مثل $\sqrt[2n]{f(x)}$ (f پیوسته) در هر نقطه از دامنه‌اش نیز از نقطه انتهای دامنه پیوسته است. مثلاً تابع $y=\sqrt{x-2}$ در تمام نقاط $x>2$ پیوسته است ولی در ۲ پیوسته نیست زیرا در همسایگی چپ ۲ تعریف نمی‌شود.

۶) توابع $\sin f$ ، $\cos f$ در هر نقطه‌ای که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند.

۷) تابع $y=[x]$ در نقاط صحیح کننده x ناپیوسته‌اند.

۸) تابع $h(x)=g(x)[x]$ (g تابعی پیوسته) در $x=a\in\mathbb{Z}$ پیوسته است هرگاه $g(a)=0$.

مثال: تابع $y=[2x]$ روی بازه $(1,3)$ در چند نقطه ناپیوسته است.

$2x$ روی بازه $(1,3)$ برای نقاط زیر صحیح می‌شود:

$x=\frac{3}{2}$: $2x=2\times\frac{3}{2}=3\in Z$

$x=2$: $2x=2\times 2=4\in Z$

$x=\frac{5}{2}$: $2x=2\times\frac{5}{2}=5\in Z$

در سه نقطه ناپیوسته است.

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi x}{2}$ در نقاط $x\in Z$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

تابع $y=(-1)^{[x]}$ در اعداد صحیح ناپیوسته است زیرا:

$\lim_{x\to 3^+}(-1)^{[x]}=(-1)^3=-1$ ، $\lim_{x\to 3^-}(-1)^{[x]}=(-1)^2=1$

ولی $\sin\frac{\pi x}{2}$ در xهای زوج برابر صفر می‌شود ($\sin 0, \sin\pi, \sin 2\pi, \dots$)

و در xهای فرد برابر یک یا منفی یک است ($\sin\frac{\pi}{2}=1, \sin\frac{3\pi}{2}=-1, \dots$)

پس $\sin\frac{\pi x}{2}$ در xهای زوج صفر شونده است در نتیجه تابع f در اعداد زوج صحیح پیوسته است.

مثال: کنکور تجربی ۹۹ (خارج)

به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{2\sin^2 x-\sin x-1}{\cos^2 x} & ; \ x\neq\frac{\pi}{2}\\ a & ; \ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$، در $x=\frac{\pi}{2}$، پیوسته است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱ ۳) −۱ ۴) −۱/۵

درجه ۲ که بصورع ضرب : $2-1-1=0$

$\sin x=1$, $\sin x=-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x-\sin x-1}{\cos^2 x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x-1)(2\sin x+1)}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x-1)(2\sin x+1)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-(1-\sin x)(2\sin x+1)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{-(2\sin\frac{\pi}{2}+1)}{1+\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{-(2\times 1+1)}{1+1}=-\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{3}{2}=a$$

گزینه ۴

مثال: کنکور ریاضی ۹۹

فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & ;\ |x-1|<1\\ x^2+ax+b & ;\ |x-1|\geq 1\end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -1 ۳) 1 ۴) $\frac{5}{2}$

$|x-1|<1 \rightarrow -1<x-1<1 \xrightarrow{+1} 0<x<2$

$|x-1|\geq 1 \rightarrow x-1\geq 1 \ \text{یا}\ x-1\leq -1 \rightarrow x\geq 2 \ \text{یا}\ x\leq 0$

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & 0<x<2\\ x^2+ax+b & x\geq 2 \ \text{یا}\ x\leq 0\end{cases}$$

در ضابطه‌ی اول با توجه به رابطه‌ی $[x]$ در $x=1$ ناپیوستگی وجود دارد پس $(x-1)[x]$ در $x=1$ ناپیوسته است.

$x=1$ صفر مخرج مشترک پس $(x-1)[x]$ در $x=1$ پیوسته است.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} x^2+ax+b=4+2a+b=f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-1)[x]=(2-1)\times 1=1$$

شرط پیوستگی در $x=2$: $4+2a+b=1 \rightarrow 2a+b=-4$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1)[x] = (0-1)\times 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2+ax+b = b = f(0)$$

شرط پیوستگی در $x=0$: $b=0$

گزینه ۲ :

$$\begin{cases} 2a+b=-4 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow 2a+0=-4 \rightarrow a=-\frac{4}{2}$$

مثال: کنکور تجربی ۹۹ :

به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{8+x^3}{|x+2|} & ; \quad x\neq -2 \\ a & ; \quad x=-2 \end{cases}$، در نقطهٔ $x=-2$، فقط از چپ پیوسته است؟

۱) -12 ۲) -6 ۳) 6 ۴) 12

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{8+x^3}{|x+2|} = \lim_{x\to -2} \frac{8+x^3}{-(x+2)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(2+x)(4-2x+x^2)}{-(x+2)} = \frac{4-2(-2)+(-2)^2}{-1} = \frac{12}{-1} = -12$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow -12 = a$$

گزینه ۱

تست کنکور ریاضی ۹۸ :

به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ; \quad x>2\\ ax-1 & ; \quad x\le 2\end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟

۱) ۱٫۵ ۲) ۲ ۳) ۲٫۵ ۴) ۳

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{x-\sqrt{x+2}} \times \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2-x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)} = \frac{3(2+\sqrt{4})}{2+1} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} ax-1 = 2a-1 = f(2)$$

شرط پیوستگی در $x=2$: $2a-1=4 \to 2a=5 \to a=\frac{5}{2}=2.5$ گزینه ۳

پیوستگی روی بازه :

- می‌گوییم تابع f روی بازه (a,b) پیوسته است هرگاه f در هر نقطه بازه پیوسته باشد.

- می‌گوییم تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته است هرگاه f روی بازه (a,b) پیوسته باشد

و در a از راست و در b از چپ پیوسته باشد.

برای بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ هم تعریف‌های مشابهی ارائه می‌دهیم.

مثال: تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم :

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x<-1 \\ x^2-1 & -1\le x<2 \\ -x+5 & 2<x<5 \end{cases}$$

۱) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-1,1]$ و $(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید.

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} x^2-1 = 1-1=0 = f(-1)$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} 2x+4 = -2+4 = 2$ $\Rightarrow 0\neq 2$ تابع در $x=-1$ پیوسته نیست و پیوستگی راست دارد

چون $f(1)\neq 2$ پس تابع در $x=2$ پیوسته نیست.

نا پیوسته : $[-2,0]$ (شامل -1) پیوسته : $(2,5)$ پیوسته : $[-1,1]$

۲) دربارهٔ تابع f کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) f روی بازهٔ $[-\infty,-1)$ پیوسته است.

ب) f روی بازهٔ $(-\infty,-1)$ پیوسته است.

پ) f روی بازهٔ $[2,5]$ پیوسته است.

ت) $\lim_{x\to 5} f(x)=0$

ث) $\lim_{x\to 5^-} f(x)=0$

ج) f روی بازهٔ $(-2,0)$ پیوسته است.

الف) نادرست زیرا تابع در $x=-1$ پیوستگی چپ ندارد.

ب) درست

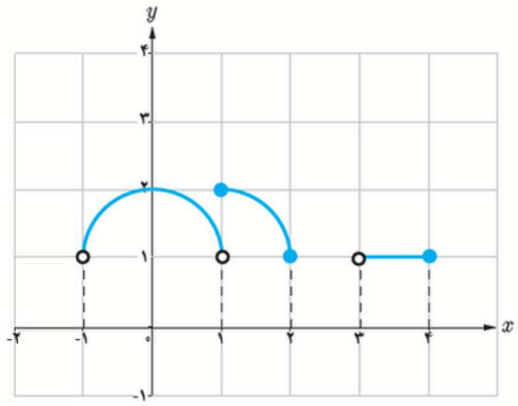
پ) نادرست $2\notin D_f$

ت) نادرست زیرا $\lim_{x\to 0^+} f(x)=$ تعریف نشده

ث) درست زیرا $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} -x+0=-0+0=0$

ج) نادرست زیرا تابع در $x=-1$ پیوسته نیست.

مثال: در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست هستند؟



الف) تابع f بر بازه $[1,2]$ پیوسته است. ✓

ب) تابع f بر بازه $[3,4]$ پیوسته است. ✗ $3\notin D_f$

پ) تابع f بر بازه $[0,2]$ پیوسته است. ✗

ت) تابع در $x=1$ پیوسته نیست