حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس اول: رادیان

جلسه اول: صفحات ۹۲ تا ۹۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

زاویه و موقعیت استاندارد :

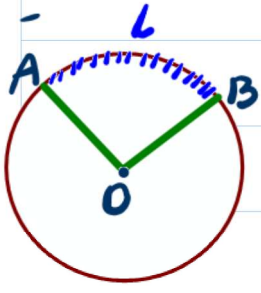
زاویه از یک رأس و دو ضلع تشکیل شده است. اگر رأس زاویه روی مبدأ مختصات و ضلع ابتدایی آن روی قسمت مثبت محور ها باشد می گوئیم زاویه در موقعیت استاندارد مشخص شده است. اگر زاویه مثبت باشه پاد ساعتگرد و اگر منفی باشه ساعتگرد می چرخیم.



چند تعریف در دایره :

۱) زاویه مرکزی : زاویه ای است که رأس آن روی مرکز دایره است و اضلاع آن شعاع دایره اند.

۲) کمان : هر دو نقطه روی دایره آن را به دو قسمت تقسیم می کند که به آن ها کمان می گوئیم.



و به اندازه ای از محیط دایره که جدا کرده اند، طول کمان می گوئیم.

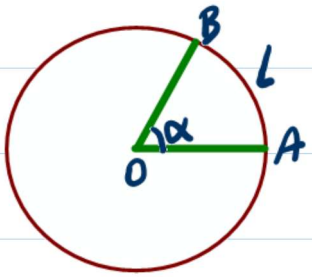
$\overset{\frown}{AB} = L$

۳) اندازه کمان : اندازه کمان هر زاویه مرکزی مقابل به آن است : $\hat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$

واحدهای اندازه گیری زاویه :

الف) درجه : اگر محیط دایره را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، زاویه مرکزی مقابل به هر کمان ۱° است.

اگر در دایره $C(O,r)$ داشته باشیم $\hat{AOB} = \alpha$ و طول کمان AB را L بگیریم آنگاه :

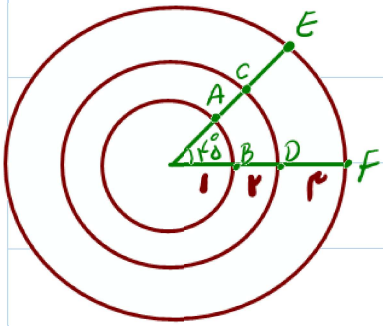


$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{۳۶۰^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

$$\frac{\alpha}{۳۶۰} = \frac{L}{۲\pi r}$$

$$L = \frac{\alpha}{۳۶۰}(۲\pi r) = \frac{\alpha}{۱۸۰}\pi r$$

مثال : طول کمان مقابل به زاویه ۴۵° در دایره‌هایی به شعاع ۱، ۲ و ۳ را حساب کنید.



$$\overset{\frown}{AB} = \frac{۴۵}{۱۸۰}\pi \times ۱ = \frac{\pi}{۴}$$

$$\overset{\frown}{CD} = \frac{۴۵}{۱۸۰}\pi \times ۲ = \frac{\pi}{۲}$$

$$\overset{\frown}{EF} = \frac{۴۵}{۱۸۰}\pi \times ۴ = \frac{۳\pi}{۴}$$

مثال: در مثال قبل نسبت طول کمان به شعاع را در هر حالت بیابید.

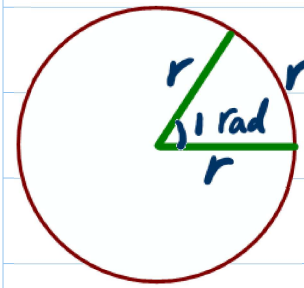
$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\frac{\pi}{۴}}{۱} = \frac{\pi}{۴}$$

$$\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\frac{\pi}{۲}}{۲} = \frac{\pi}{۴}$$

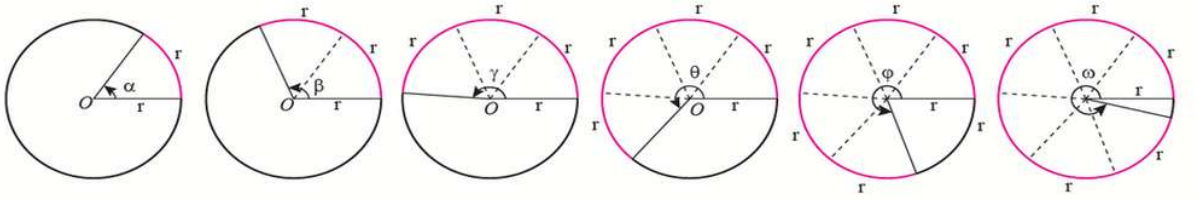
$$\frac{\overset{\frown}{EF}}{۲} = \frac{\frac{۳\pi}{۴}}{۳} = \frac{\pi}{۴}$$

نتیجه: نسبت طول کمان روبه‌رو به یک زاویه خاص به شعاع دایره در هر دایره‌ای همواره مقدار ثابتی است. از این مقدار ثابت برای بیان زاویه به واحدی خیلی دقیق استفاده می‌کنیم.

ب) رادیان: یک رادیان، اندازه زاویه مرکزی مقابل کمانی است که طول آن برابر



شعاع دایره است. یک رادیان تقریباً ۵۷٫۲۹° است.



$\alpha = \frac{r}{r} = 1\ rad$ $\quad \beta = \frac{2r}{r} = 2\ rad$ $\quad \gamma = \frac{3r}{r} = 3\ rad$ $\quad \theta = \frac{4r}{r} = 4\ rad$ $\quad \varphi = \frac{5r}{r} = 5\ rad$ $\quad \omega = \frac{6r}{r} = 6\ rad$

تبدیل واحدهای زاویه:

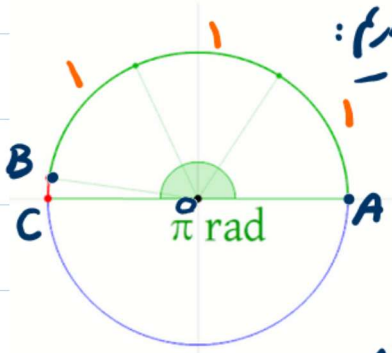
طول کمان روبه‌رو به زاویه ۱۸۰°، نصف محیط دایره است پس:

محیط دایره

$$\alpha = \frac{2\pi r}{2} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

پس ۱۸۰°، π رادیان است.

به صورت ریگی نیز می‌توانیم به این نتیجه برسیم. دایره‌ای به شعاع واحد داریم:



با توجه به شکل: $A\hat{O}B = 3\ rad$

زاویه $A\hat{O}C$ یک زاویه نیم‌صفحه است پس $A\hat{O}C = 180°$.

جالب است بدانید از B تا C، قدر دایره‌ای عدد تقریبی π است پس:

$\hat{AOC} = \pi \text{ rad}$

پس نتیجه می‌گیریم π رادیان 180° است.

نتیجه: اگر D اندازه زاویه برحسب درجه و R اندازه زاویه برحسب رادیان باشد داریم:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

با استفاده از تناسب بالا:

الف) تبدیل رادیان به درجه:

$$D = R \times \frac{180}{\pi}$$

ب) تبدیل درجه به رادیان

$$R = D \times \frac{\pi}{180}$$

مثال: زاویه‌های زیر را به رادیان تبدیل کنید.

۱) 30° $\quad R = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$

۲) 45° $\quad R = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$

۳) 60° $\quad R = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

۴) ۲۷۰° $\quad R = ۲۷۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۳\pi}{۲}$

۵) ۴۶۰° $\quad R = ۶۴۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۲\pi$

۶) ۱۲۵° $\quad R = ۱۲۵ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۳\pi}{۴}$ ← ۴۵

۷) ۲۱۰° $\quad R = ۲۱۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۷\pi}{۶}$ ← ۳۰

۸) ۳۴۰° $\quad R = ۳۴۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۱۱\pi}{۶}$ ← ۶۰

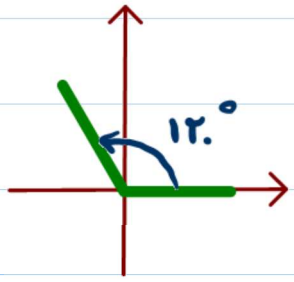
۹) ۷۲° $\quad R = ۷۲ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۵}$

۱۰) ۹۰° $\quad R = ۹۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۲}$

مثال: زوایای زیر را به درجه تبدیل کنید و مشخص کنید انتهای کمان در کدام ناحیه قرار می‌گیرد.

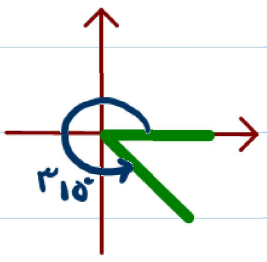
۱۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ $\quad D = \frac{۲\pi}{۳} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۱۲۰^\circ$

ناحیه دوم



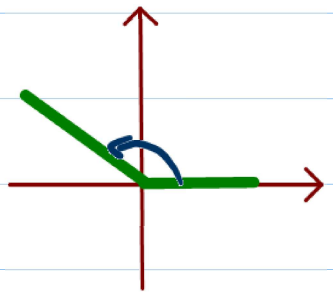
۱۲) $\frac{۷\pi}{۴}$ $\quad D = \frac{۷\pi}{۴} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۳۱۵^\circ$

ناحیه چهارم



۳) $\frac{۴\pi}{۵}$ $\quad D = \frac{۴\pi}{۵} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۱۴۴^\circ$

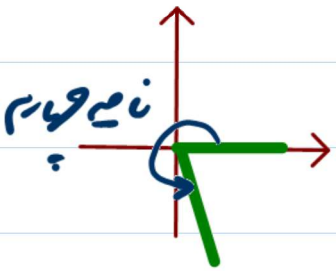
ناحیه دوم



۴) $۵\ rad$ $\quad D = ۵ \times \frac{۱۸۰}{\pi} = \frac{۹۰۰}{\pi}$

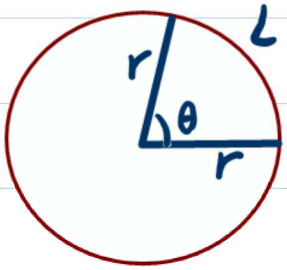
$D = \frac{۹۰۰}{\pi} \simeq ۲۸۶,۴۷^\circ$

ناحیه چهارم

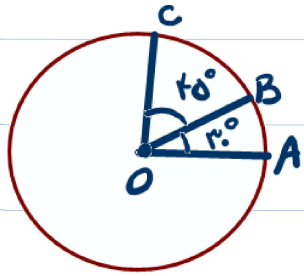


نکته: اگر در دایره‌ای به شعاع r اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی برحسب رادیان θ باشد طول کمان روبه‌رو به آن زاویه‌ی طول l از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow l = r\theta$$ (θ: رادیان)



مثال: در شکل زیر طول کمان AB برابر ۴π است. طول کمان BC را بیابید.



$\overset{\frown}{AB} = ۴\pi$

$\theta_۱ = AB$ اندازه کمان $= ۳۰^\circ \xrightarrow{\text{رادیان}} \frac{\pi}{۶}$

$\theta_۲ = BC$ اندازه کمان $= ۴۵^\circ \xrightarrow{\text{رادیان}} \frac{\pi}{۴}$

$\overset{\frown}{BC} = ?$

$\overset{\frown}{AB} = r\theta_1 \rightarrow 4\pi = r \times \frac{\pi}{9} \xrightarrow{\times \frac{9}{\pi}} r = 36\pi \times \frac{9}{\pi} = 324$

$\overset{\frown}{BC} = r\theta_2 \rightarrow \overset{\frown}{BC} = 324 \times \frac{\pi}{324} = 9\pi$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس اول: رادیان

حل تمرین: صفحات ۹۶و۹۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

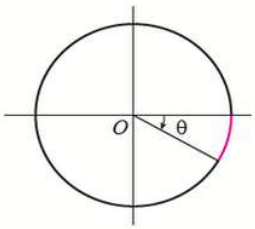
اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

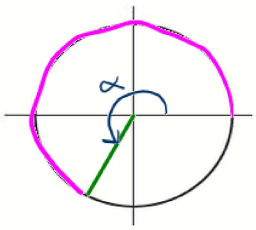
گروه ریاضی استان همدان

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



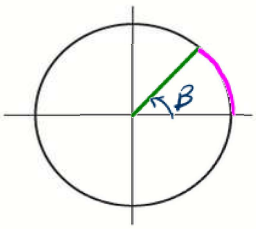
$\theta = -\frac{\pi}{6}$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



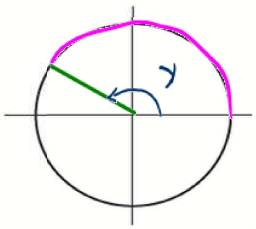
$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

انتهای کمان در ربع سوم است.



$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

انتهای کمان در ربع اول است.



$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

انتهای کمان در ربع دوم است.



۲ طول برف پاک‌کن عقب خودرویی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف‌پاک‌کن، کمانی به اندازه ۱۲۰° طی می‌کند. ($\pi \simeq 3/14$)

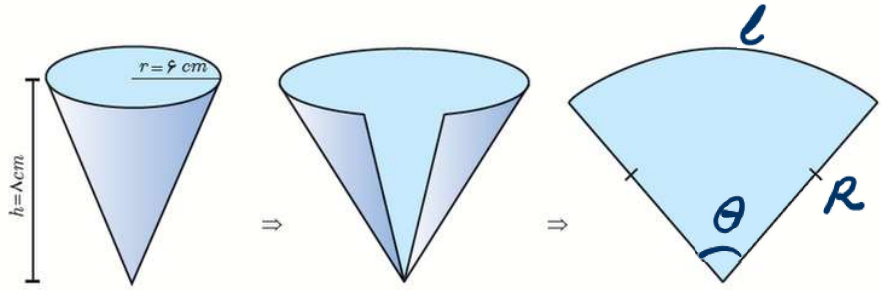
الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به‌دست آورید.

ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

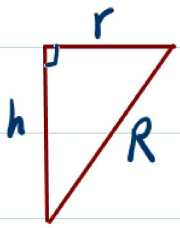
الف) $\theta = 120^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$

ب) $l = r\theta \rightarrow l = 24 \times \frac{2\pi}{3} = 16\pi \simeq 16 \times 3/14 = 50/24\ cm$

۳ شکل فضایی و نیز شکل گستردهٔ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r=6\ cm$ و ارتفاع آن $h=8cm$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع[1] حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



۱ــ به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع گفته می‌شود.



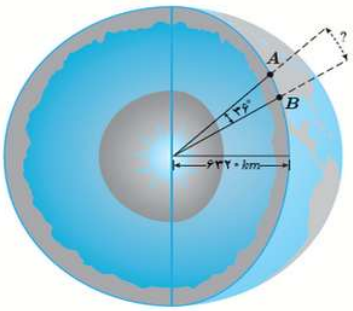
$$R^2 = h^2 + r^2$$

$$R^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$R = 10$$

$$l = \text{طول کمان} = 2\pi r = 2\pi \times 6 = 12\pi$$

$$\theta = \frac{l}{R} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5} \ Rad$$



۴ فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از کرهٔ زمین، که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازهٔ شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطهٔ داده شده را بیابید.

$$\theta = 45^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \ Rad$$

$$\overline{AB} = r\theta = 6370 \times \frac{\pi}{4} \approx 4998.94 \ km$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

قسمت اول

جلسه دوم: صفحات ۹۸ تا ۱۰۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

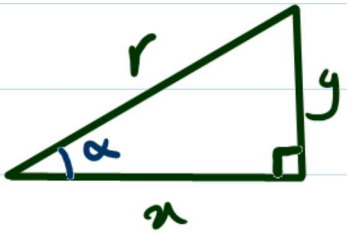
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری :

نسبت های مثلثاتی :



۱) $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}}$

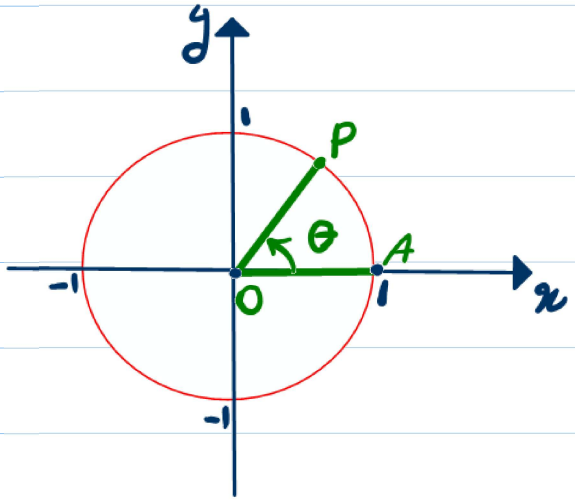
۲) $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$

۳) $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha}$

۴) $\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha}$

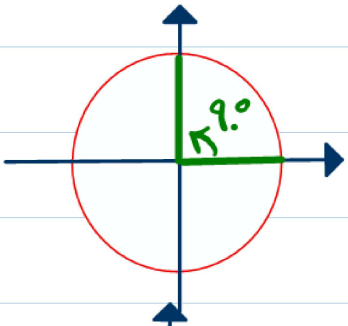
تعریف دایره مثلثاتی : دایره‌ای به شعاع یک واحد که مرکز آن مبدأ مختصات است.

زاویه در دایره مثلثاتی : ضلع ابتدای هر زاویه روی قسمت مثبت محور x ها واقع است و ضلع دوم حرکت می‌کند (این ضلع محیط دایره را قطع می‌کند) اگر ضلع دوم در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کند زاویه مثبت می سازد و اگر در جهت عقربه های ساعت حرکت کند زاویه منفی می سازد.

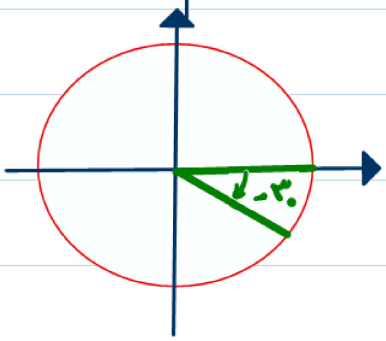


مثال: زوایای زیر را در دایره مثلثاتی مشخص کنید.

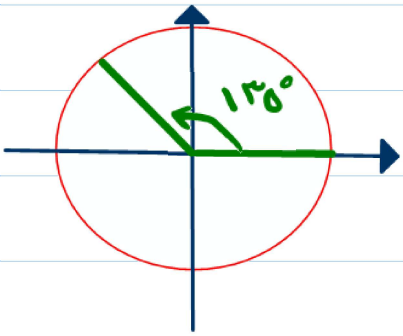
الف) 90°



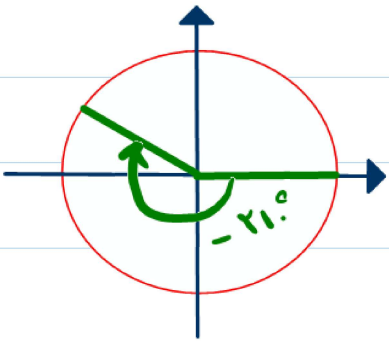
ب) -30°



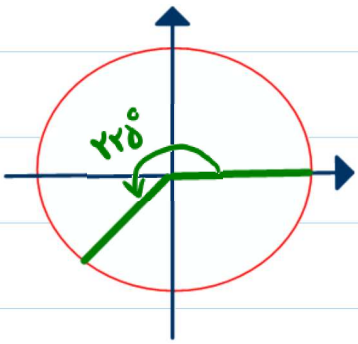
پ) 135°



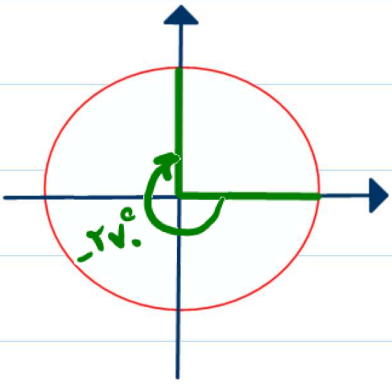
ت) -210°



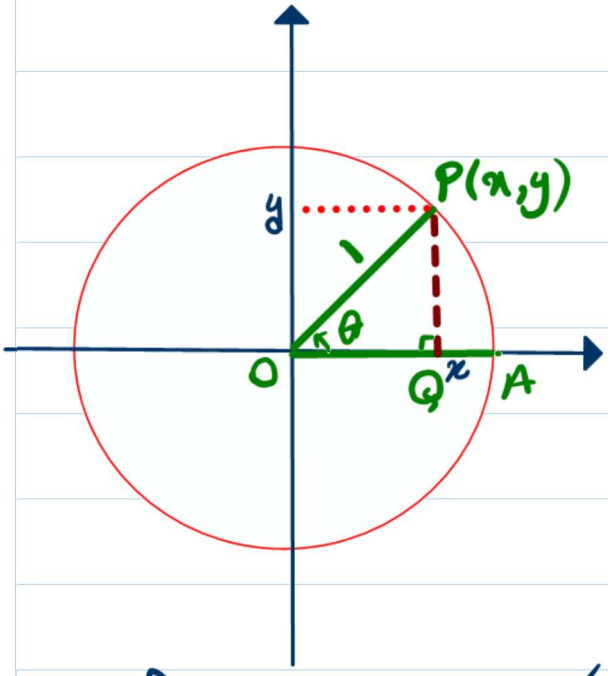
ث) 225°



ج) -270°



نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی :



زاویه θ را در دایره مثلثاتی در نظر بگیرید.

اگر ضلع دوم این زاویه محیط دایره را

در نقطه $P(x,y)$ قطع کند و از این نقطه

بر محور xها عمود کنیم تا این محور را در Q قطع کند، مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OPQ}$ بدست

می‌آید. حال داریم :

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin\theta$$

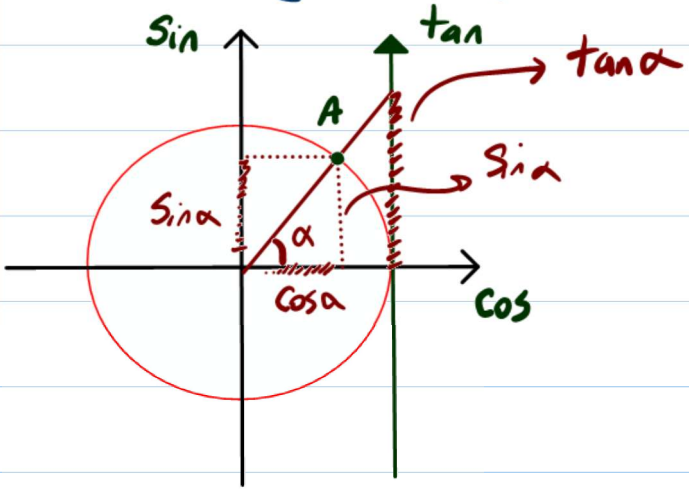
$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos\theta$$

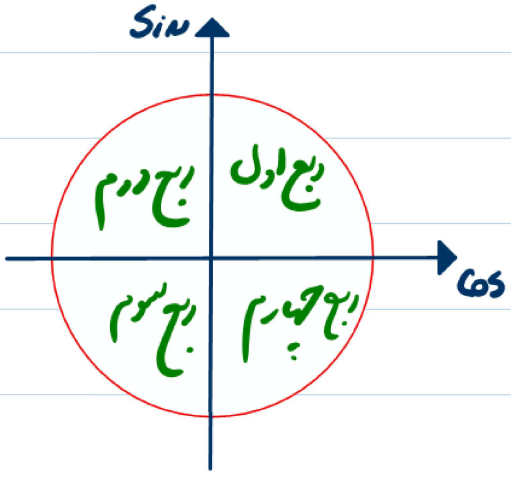
$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\theta$$

$$\cot\theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \cot\theta$$

قرارداد : در دایره مثلثاتی محور xها را محور $\cos$ها و محور yها را محور $\sin$ها می‌نامیم.

این دو محور مختصات، دایره مثلثاتی را به چهار ناحیه یا ربع مثلثاتی تقسیم می‌کنند.



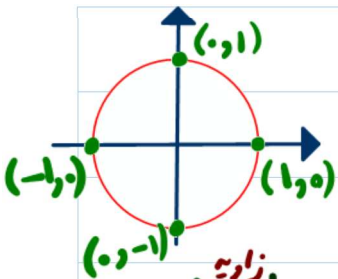


θ در ربع اول : $0^\circ < \theta < 90^\circ$

θ در ربع دوم : $90^\circ < \theta < 180^\circ$

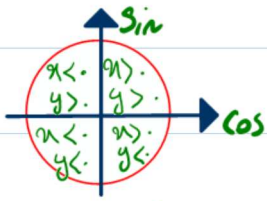
θ در ربع سوم : $180^\circ < \theta < 270^\circ$

θ در ربع چهارم : $270^\circ < \theta < 360^\circ$



جدول نسبت های مثلثاتی زوایای مرزی ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰°، ۳۶۰°

نسبت \ زاویه θ	۰	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos\theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده



* جدول علامت های نسبت های مثلثاتی در نواحی چهارگانه

نسبت \ ناحیه	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
Sin	+	+	−	−
Cos	+	−	−	+
Tan	+	−	+	−
Cot	+	−	+	−

نکته: Sin و Cos برای هر زاویه دلخواه همواره عددی بین ۱ و ۱- هستند یعنی:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-1 \le \cos\theta \le 1$$

* جدول نسبت های مثلثاتی زوایای ۳۰، ۴۵ و ۶۰

زاویه / نسبت	30 ($\frac{\pi}{6}$)	45 ($\frac{\pi}{4}$)	60 ($\frac{\pi}{3}$)
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

کمان های هم خانواده :

زاویه حاده $0 < \alpha < 90^\circ$

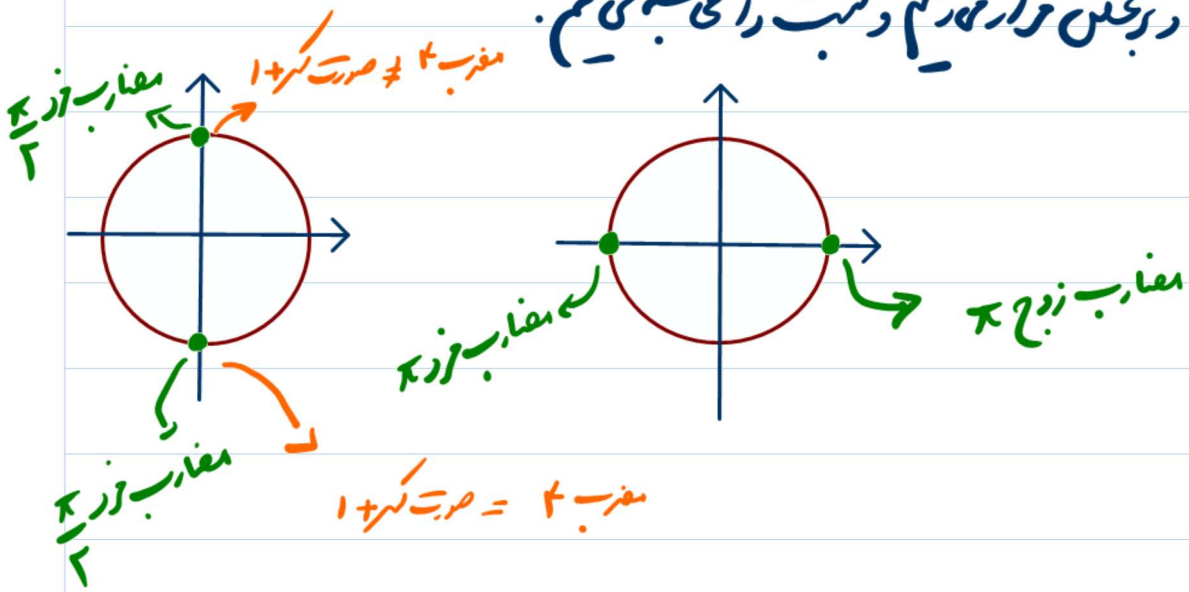
نوع اول : برای بدست آوردن نسبت های مثلثاتی زوایایی به صورت $k\pi \pm \alpha$

اگر k زوج باشد کل $k\pi$ را حذف می کنیم و اگر k فرد باشد، k را حذف می کنیم (یعنی $\pi \pm \alpha$). حال ناحیه مربوط به زاویه را یافته و نسبت را می یابیم.

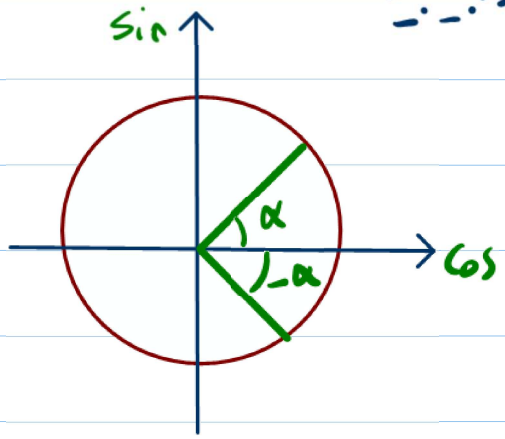
نوع دوم : برای بدست آوردن نسبت های مثلثاتی زوایایی به صورت $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$

یعنی مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$، ابتدا ناحیه و علامت نسبت را مشخص می کنیم. در آخر اسم نسبت را عوض می کنیم یعنی به جای $\sin$، $\cos$ و برعکس و به جای $\tan$،

+ و − در یک قرار می‌دهیم و نسبت را بررسی می‌کنیم.



مثال: نسبت مثلثاتی زاویه $-\alpha$ (قرینه زاویه) را بیابید.



$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

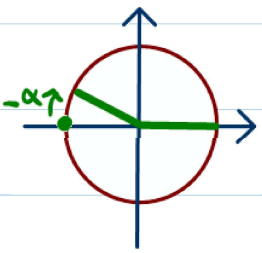
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

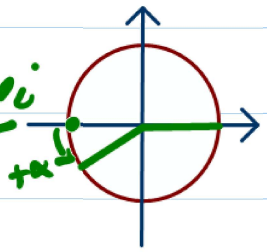
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زیر را برحسب α بنویسید.

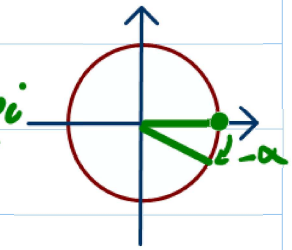
1) $\sin(2805\pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ (از 2805π) — ناحیه ۱



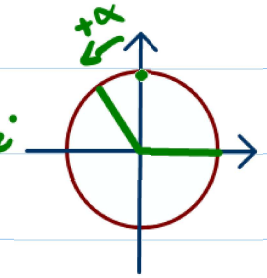
2) $\cos(3333\pi + \alpha) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ (از 3333π) — ناحیه ۳



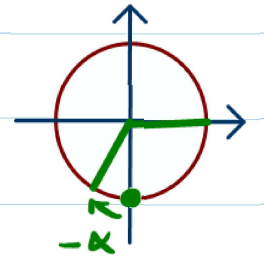
3) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (از 2π) — ناحیه ۴



4) $\sin\left(\frac{25\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ ($25+1=26 \neq 4k$) — ناحیه ۱



5) $\tan\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$ ($11+1=12=4k$) — ناحیه ۳

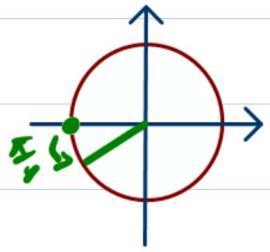


نکته: اگر زوایا به صورت مضرب یا تفاضل با $k\pi$ یا $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ داده نشوند باید با شکستن زاویه آن‌ها را به یکی از دو نوع گفته شده در آوردیم.

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را بیابید.

۱) $\sin 210^\circ = \sin(180+30) = \sin(\pi+\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6}$

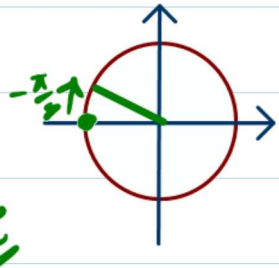
$= -\frac{1}{2}$



۲) $\tan(-10^\circ) = -\tan 10^\circ = -\tan(180-30)$

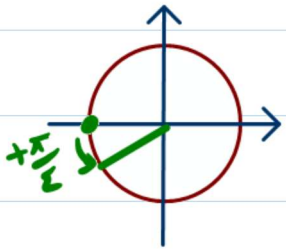
$= -\tan(\pi-\frac{\pi}{6})$

$= -(-\tan\frac{\pi}{6}) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



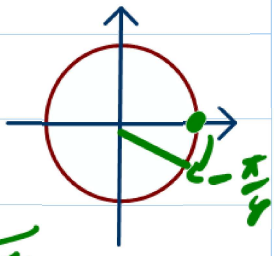
۳) $\cos 225^\circ = \cos(180+45) = \cos(\pi+\frac{\pi}{4})$

$= -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

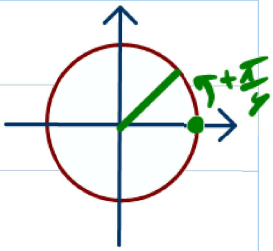


۴) $\cot 330^\circ = \cot(360-30) = \cot(2\pi-\frac{\pi}{6})$

$= \cot(-\frac{\pi}{6}) = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

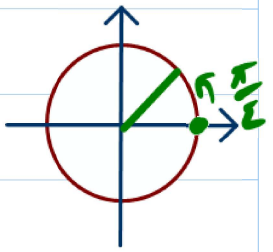


۵) $\sin \frac{۱۲\pi}{۴} = \sin\left(\frac{۱۲\pi+\pi}{۴}\right) = \sin\left(۳\pi+\frac{\pi}{۴}\right)$



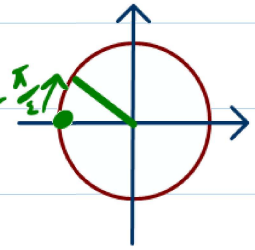
$= \sin \frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{۲}$

۶) $\cos\left(-\frac{۱۷\pi}{۴}\right) = \cos \frac{۱۷\pi}{۴} = \cos \frac{۱۶\pi+\pi}{۴}$



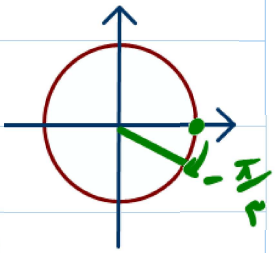
$= \cos\left(۴\pi+\frac{\pi}{۴}\right) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۷) $\tan \frac{۳\pi}{۴} = \tan \frac{۴\pi-\pi}{۴} = \tan\left(\pi-\frac{\pi}{۴}\right)$



$= -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$

۸) $\sin \frac{۲۳\pi}{۳} = \sin \frac{۲۴\pi-\pi}{۳} = \sin\left(۸\pi-\frac{\pi}{۳}\right)$

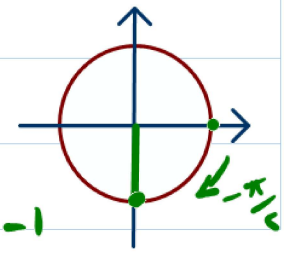


$= \sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

مثال: حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید :

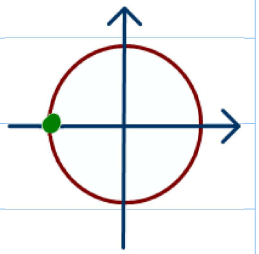
۱) $\sin ۶۳^\circ + \tan(-۵۴^\circ) =$

$\sin ۶۳^\circ = \sin(۷۲۰ - ۹۰) = \sin\left(۴\pi-\frac{\pi}{۲}\right)$ (۲×۳۶۰)



$= \sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = -\sin\frac{\pi}{۲} = -۱$

$\tan(-540^\circ) = -\tan(540^\circ) = -\tan(3\times180^\circ) = -\tan(3\pi) = 0$



عبارت $= -1 + 0 = -1$

۲) $\cos(-720^\circ) + \cot(-600^\circ) + \tan 720^\circ - \tan(-600^\circ) =$

$\cos(-720^\circ) = \cos 720^\circ = \cos(2\times360^\circ) = \cos 4\pi = 1$ (۲×۲π)

$\cot(-600^\circ) = -\cot 600^\circ = -\cot(3\times180^\circ + 60^\circ) = -\cot(3\pi + \frac{\pi}{3})$ (۳×۱۸۰)

$= -\cot(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan 720^\circ = \tan 4\pi = 0$

$\tan(-600^\circ) = -\tan 600^\circ = -\tan(3\pi + \frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

عبارت $= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + \sqrt{3} = \frac{3 - \sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$

۳) $\sin(\frac{25\pi}{3}) - \cos(\frac{23\pi}{4}) =$

$\sin(\frac{25\pi}{3}) = \sin\frac{24\pi + \pi}{3} = \sin(8\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{۲۲\pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۲۴\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(۶\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{۴}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

عبارت $= \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۲}$

۴) $\dfrac{\sin\frac{۳\pi}{۴} - \cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin\left(\frac{-۳\pi}{۴}\right) + \tan\left(\frac{-۴\pi}{۳}\right)} =$

$\sin\frac{۳\pi}{۴} = \sin\frac{۴\pi - \pi}{۴} = \sin\pi - \frac{\pi}{۴} = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\cos\frac{۵\pi}{۶} = \cos\frac{۶\pi - \pi}{۶} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\sin\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right) = -\sin\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\tan\left(-\frac{۴\pi}{۳}\right) = -\tan\frac{۴\pi}{۳} = -\tan\frac{۳\pi + \pi}{۳} = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{۳}\right)$

$= -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$

عبارت $= \dfrac{\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۳}} = \dfrac{\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}}{۲}} = \dfrac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{-\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}}$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

قسمت دوم

جلسه سوم: صفحات ۹۸ تا ۱۰۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

با توجه به آنچه جلسه قبل درباره کمان های هم خانواده گفتیم، نتایج زیر را برای زوایای متمم و مکمل داریم :

(الف) دو زاویه متمم :

می دانیم هرگاه مجموع دو زاویه $90°$ یا $\frac{\pi}{2}$ شود می گوییم آن دو متمم یکدیگرند.

پس α و $\frac{\pi}{2} - \alpha$ متمم اند زیرا : $\frac{\pi}{2} - \alpha + \alpha = \frac{\pi}{2}$

حال با توجه به زوایای نوع دوم خود هم داشت:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$$

ب) دو زاویه مکمل :

می دانیم هرگاه جمع دو زاویه 180° یا π رادیان باشد، مکمل یکدیگر خواهند بود.

پس α و $\pi-\alpha$ مکمل هم اند زیرا : $(\pi-\alpha)+\alpha=\pi$

حال با توجه به زوایای نوع اول داریم :

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

مثال : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 20^\circ=\cos 70^\circ$ ✓ $\quad 20^\circ+70^\circ=90^\circ$ متمم

ب) $\tan 40^\circ=\cot 50^\circ$ ✗ $\quad 40^\circ+50^\circ=80^\circ\neq 90^\circ$

ب) $\sin 140^\circ = \sin 40^\circ$ ✓ — $140^\circ + 40^\circ = 180^\circ$ مکمل

ت) $\cos 125^\circ = -\cos 55^\circ$ ✗ — $125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ مکمل

ث) $\tan 140^\circ = -\tan 50^\circ$ ✓ — $140^\circ + 50^\circ = 180^\circ$ مکمل

ج) $\cot 110^\circ = -\cot 80^\circ$ ✗ — $110^\circ + 80^\circ = 190^\circ \neq 180^\circ$

مثال: کدام دو زاویه مکمل هم هستند؟

۱) $\frac{4\pi}{3}$ ، -30° — ۲) 144° ، $\frac{\pi}{5}$ ✓ — ۳) 225° ، $\frac{-3\pi}{8}$ — ۴) 15° ، $\frac{7\pi}{12}$

۱) $\frac{4\pi}{3} = 4 \times 60^\circ = 240^\circ \rightarrow 240^\circ + (-30^\circ) = 210^\circ \neq 180^\circ$ ✗

۲) $\frac{\pi}{5} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 36^\circ \rightarrow 144^\circ + 36^\circ = 180^\circ$ ✓

۳) $-\frac{3\pi}{8} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -67.5^\circ \rightarrow 225^\circ - 67.5^\circ = 157.5^\circ \neq 180^\circ$ ✗

۴) $\frac{7\pi}{12} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 105^\circ \rightarrow 105^\circ + 15^\circ = 120^\circ \neq 180^\circ$ ✗

مثال: اگر $\sin\theta = 0/6$ ، θ زاویه‌ای حاده باشد، حاصل $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ را بیابید.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

یادآوری: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - (0/6)^2 = 1 - 0/36 = 0/64$

$$\rightarrow \cos^2\theta = 0/64 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \cos\theta = \pm 0/8 \xrightarrow{0<\theta<90^\circ} \cos\theta = 0/8$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = 0/8$$

مثال: حاصل عبارت $A = \sin 140^\circ + \sin 160^\circ + \sin 170^\circ + \cos 100^\circ + \cos 110^\circ + \cos 120^\circ$ را بدست آورید.

$\sin 140^\circ = \sin 40^\circ$ ، $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ$ ، $\sin 170^\circ = \sin 10^\circ$

$\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ$ ، $\cos 110^\circ = -\cos 70^\circ$ ، $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$

$$A = \sin 40^\circ + \sin 20^\circ + \sin 10^\circ - \cos 80^\circ - \cos 70^\circ - \cos 60^\circ$$

$\cos 80^\circ = \sin 10^\circ$ ، $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$ ، $\cos 60^\circ = \sin 40^\circ$

$$A = \sin 40^\circ + \sin 20^\circ + \sin 10^\circ - \sin 10^\circ - \sin 20^\circ - \sin 40^\circ = 0$$

مثال: مقدار عبارت $A=\dfrac{-\sin^2 40^\circ-\sin^2 50^\circ+1-\sin 70^\circ}{\tan 40^\circ\tan 50^\circ-1-2\cos 20^\circ}$ را بدست آورید.

$-\sin^2 40^\circ-\sin^2 50^\circ=-(\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ)=-(\cos^2 50^\circ+\sin^2 50^\circ)=-1$

(متمم)

$\tan 40^\circ\times\tan 50^\circ=\cot 50^\circ\times\tan 50^\circ=1$

(متمم)

یادآوری: $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}\rightarrow\tan\theta\times\cot\theta=1$

$A=\dfrac{-1+1-\sin 70^\circ}{1-1-2\cos 20^\circ}=\dfrac{-\sin 70^\circ}{-2\cos 20^\circ}=\dfrac{\sin 70^\circ}{2\sin 70^\circ}=\dfrac{1}{2}$

(متمم)

مثال: اگر $\tan 10^\circ=a$ حاصل عبارت $B=\dfrac{\sin 70^\circ+2\sin 100^\circ}{2\sin 140^\circ-\sin 190^\circ}$ را بدست آورید.

متمم: $\sin 70^\circ=\cos 10^\circ$, $\sin 100^\circ=\cos(-10^\circ)=\cos 10^\circ$ مکمل

$90+10$ ربع دوم $\quad$ $90+10$ ربع دوم

مکمل: $\sin 140^\circ=\sin 10^\circ$, $\sin 190^\circ=\sin(-10^\circ)=-\sin 10^\circ$ مکمل

$180+10$ ربع سوم $\quad$ $180+10$ ربع سوم

$B=\dfrac{\cos 10^\circ+2\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ+\sin 10^\circ}=\dfrac{3\cos 10^\circ}{3\sin 10^\circ}=\cot 10^\circ=\dfrac{1}{\tan 10^\circ}=\dfrac{1}{a}$

یادآوری: $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

مثال: کنکور ۹۹ (تجربی)

حاصل عبارت $\sin(840)+\tan(480)\cos(210)+\tan(300)$، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

$\tan 300 = \tan(360-60) = \tan(2\pi-\frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\tan 60^\circ$

$\cos 210 = \cos(180+30) = -\cos 30^\circ$

$\tan 840 = \tan(720-60) = \tan(180-60) = -\tan 60^\circ$ (720 = 4π)

$\sin 840 = \sin(900-60) = \sin(180-60) = \sin 60^\circ$ (900 = 5π)

عبارت $= (-\tan 60)(-\cos 30)+(-\tan 60)(\sin 60)$

$= -\tan 60\,(-\cos 60+\sin 60) = -\tan 60\,(-\sin 30+\sin 60)$ (متمم)

$= -\tan 60 \times 0 = 0$ گزینه ۲

مثال: کنکور ۹۹ (تجربی خارج)

حاصل عبارت $\sin(1095)\cos(255)-\tan(285)\tan(-165)$، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

۱) $\sin^2(15)$ ۲) $\cos^2(15)$ ۳) $-\sin^2(15)$ ۴) $-\cos^2(15)$

$\tan 215 = \tan(270 + 10) = -\cot 10$

$\tan(-148) = -\tan 148 = -\tan(180 - 10) = -(-\tan 10) = \tan 10$

$\sin(1090) = \sin(1080 + 10) = \sin 10$

$\cos(260) = \cos(270 - 10) = -\sin 10$

عبارت $= (-\cot 10)(\tan 10) - \sin 10(-\sin 10)$

$= -1 + \sin^2 10 = -(1 - \sin^2 10) = -\cos^2 10$: گزینه ۴

مثال: کنکور ۹۸ (ریاضی)

حاصل عبارت $\tan\frac{11\pi}{4} + \sin\frac{15\pi}{4}\cos\frac{13\pi}{4}$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$\tan\frac{11\pi}{4} = \tan\frac{12\pi - \pi}{4} = \tan(3\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

$\sin\frac{10\pi}{4} = \sin\frac{14\pi - \pi}{4} = \sin(4\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{12\pi}{4} = \cos\frac{12\pi + \pi}{4} = \cos(3\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

عبارت $= -1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + \frac{2}{4} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ گزینه ۲

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: نسبت های مثلثاتی برخی زوایا

حل تمرین: صفحه ۱۰۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin(300^\circ) = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) $\cot(750^\circ) = \cot(720^\circ + 30^\circ) = \cot(4\pi + \frac{\pi}{6}) = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

پ) $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ت) $\cos(-\frac{23\pi}{4}) = \cos\frac{23\pi}{4} = \cos\frac{24\pi - \pi}{4} = \cos(6\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4})$

$= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ث) $\sin(\frac{5\pi}{4}) = \sin(\frac{4\pi + \pi}{4}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ناحیه سوم)

ج) $\tan(-840^\circ) = -\tan(840^\circ) = -\tan(960^\circ - 120^\circ) = -\tan(6\pi - \frac{\pi}{3})$

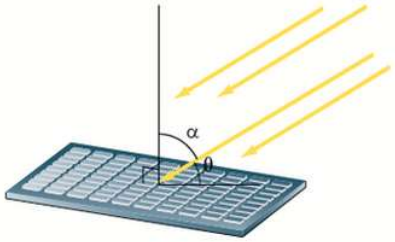
$= -\tan(\pi - \frac{\pi}{3}) = -(-\tan\frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ (ناحیه دوم)

چ) $\tan(-150^\circ) = -\tan(150^\circ) = -\tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -(-\tan\frac{\pi}{6}) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ناحیه دوم)

ح) $\cos(\frac{9\pi}{4}) = \cos(\frac{8\pi + \pi}{4}) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

خ) $\tan\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{9\pi+\pi}{3}\right) = \tan\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ (تانژانت)

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم، رابطهٔ $I = k\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به‌دست می‌دهد.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب کسینوس زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

$\alpha+\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}-\alpha \rightarrow I=k\sin\theta \Rightarrow I=k\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$

ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta=0$ ، $\theta=\frac{\pi}{6}$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$ بر حسب k به‌دست آورید.

$I=k\sin\theta \xrightarrow{\theta=0} I=k\sin 0 = k\times 0 = 0$

$\xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{6}} I=k\sin\frac{\pi}{6} = k\times\frac{1}{2} = \frac{k}{2}$

$\xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{3}} I=k\sin\frac{\pi}{3} = k\frac{\sqrt{3}}{2}$

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به‌دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی : از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

$-1 \le \sin\theta \le 1 \xrightarrow{\max}$ $I_{max} = k\sin\theta = k\sin 90^\circ = k \times 1 = k$

$\theta_{max} = 90^\circ$

۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا برحسب رادیان است).

الف) $\cos\theta + \cos(\pi - \theta) = 0$

$\cos\theta - \cos\theta = 0$ درست

ب) $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) + \cos\theta = 1$

$\cos\theta + \cos\theta = 2\cos\theta \neq 1$ نادرست

ج) $\cos(7) = \cos(-7)$ درست ($\cos(-\theta) = \cos\theta$)

د) $\tan(\pi - \theta) = \tan\pi - \tan\theta$

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ نسبت چپ

درست

$\tan\pi - \tan\theta = 0 - \tan\theta = -\tan\theta$ نسبت راست

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس سوم: توابع مثلثاتی

جلسه چهارم: صفحات ۱۰۵تا ۱۰۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

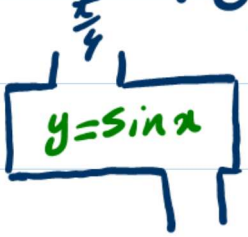
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

نسبت های مثلثاتی را می توان بعنوان تابع نیز در نظر گرفت زیرا برای هر زاویه بعنوان ورودی

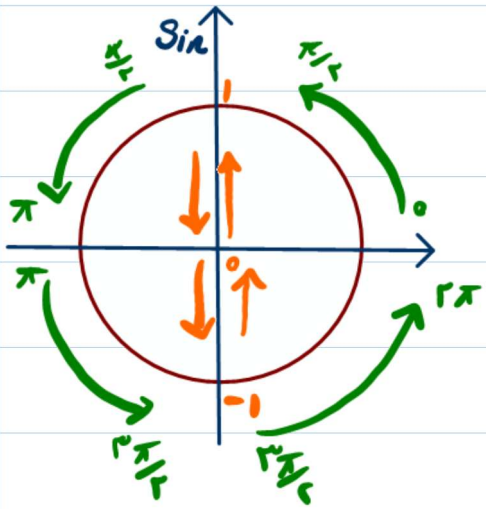
فقط یک مقدار نسبت مثلثاتی بعنوان خروجی داده می شود مثلاً برای سینوس :

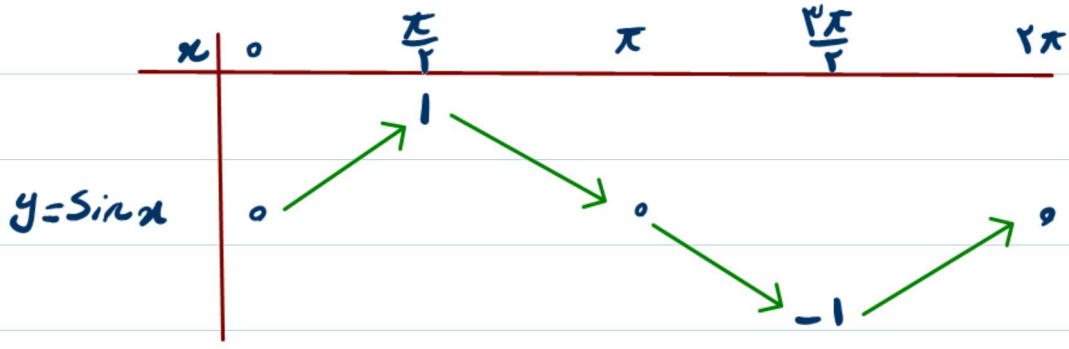


$y=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

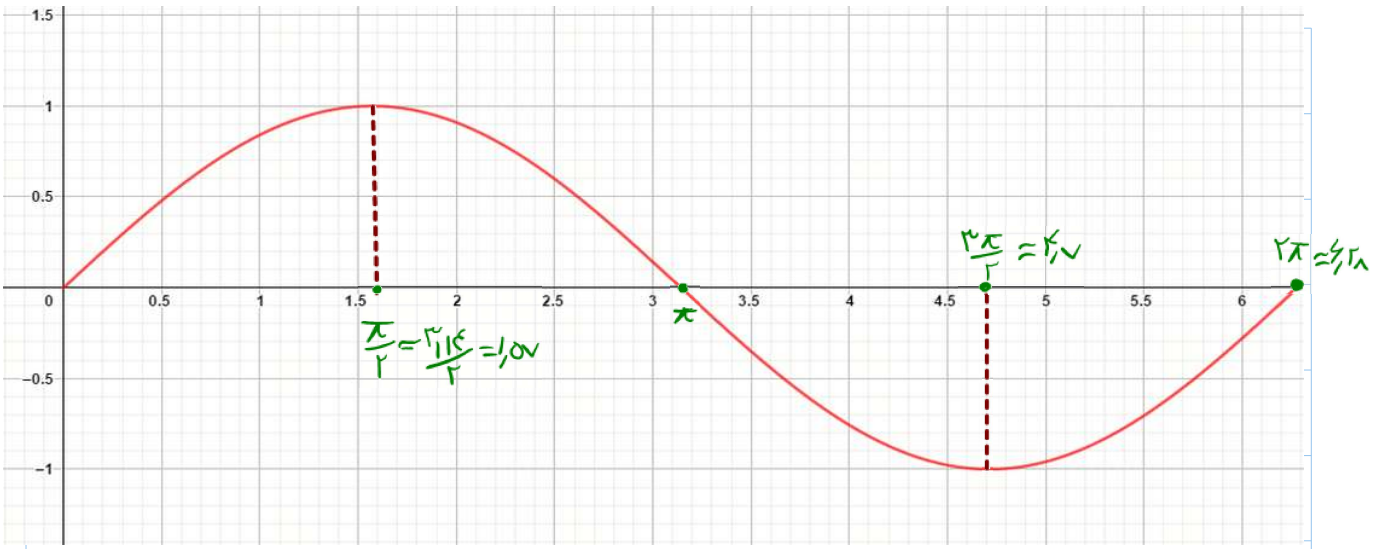
(الف) رسم نمودار تابع $y=\sin x$

اگر x برحسب رادیان باشد با استفاده از دایره مثلثاتی جدول زیر را تشکیل می دهیم :



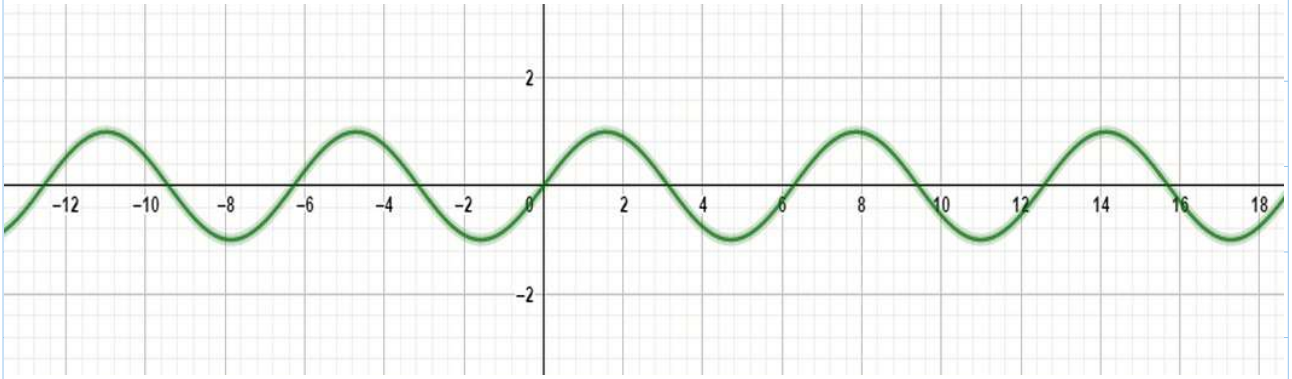


حال با داشتن چند زاویه دیگر به تقریب نمودار زیر را می توانیم رسم کنیم :



از نمودار $y=\sin x$ به نتایج زیر می‌رسیم:

۱) نمودار تابع سینوس در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود زیرا داریم: $\sin(x+2\pi)=\sin x$



۲) $D_f = \mathbb{R}$ ، $R_f = [-1,1]$

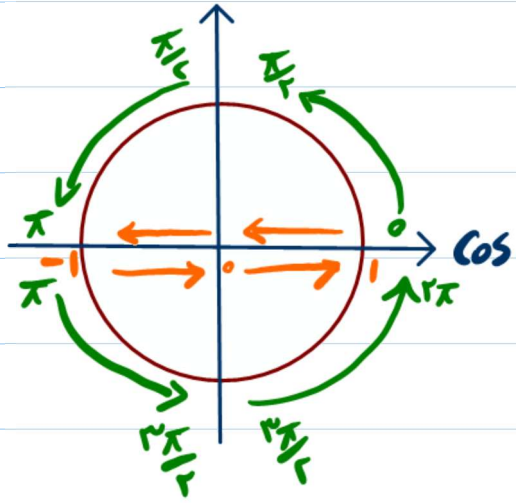
۳) نمودار این تابع در $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) محور xها را قطع می‌کند.

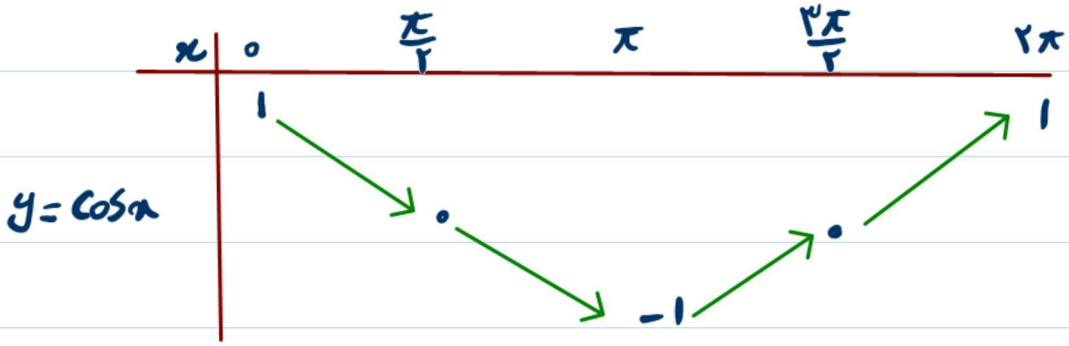
۴) بیشترین مقدار تابع $y=\sin x$ برابر یک است که در $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد.

۵) کمترین مقدار تابع $y=\sin x$ برابر -1 است که در $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد.

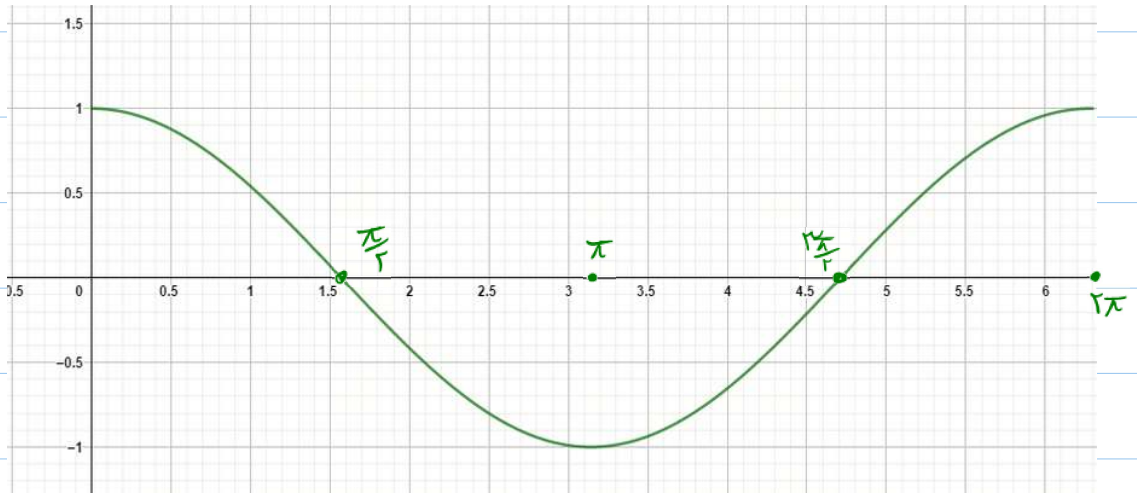
ب) رسم نمودار تابع $y=\cos x$

اگر x برحسب رادیان باشد از دایره مثلثاتی جدول زیر را نتیجه می‌گیریم :



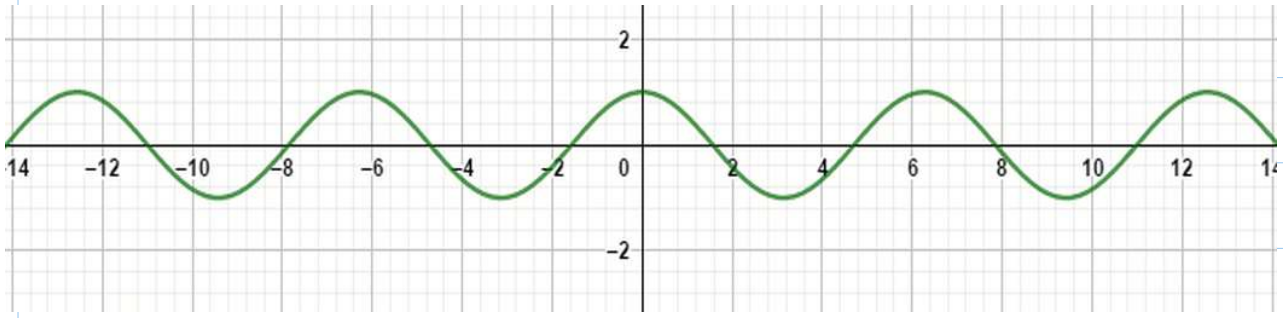


حال با داشتن چند زاویه دیگر به کشیدن نمودار زیر را می‌توانیم رسم کنیم :



از نمودار $y=\cos x$ به نتایج زیر می‌رسیم:

۱) نمودار تابع کسینوس در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود زیرا دیدیم: $\cos(x+2\pi)=\cos x$



۲) $D_f=\mathbb{R}$ ، $R_f=[-1,1]$

۳) نمودار این تابع در $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ محور x را قطع می‌کند.

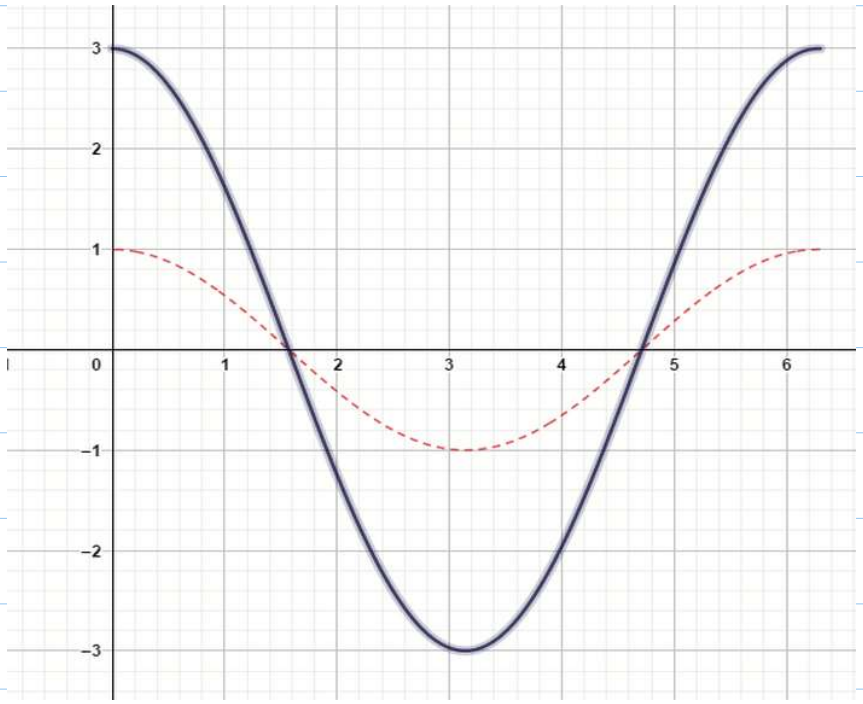
۴) بیشترین مقدار تابع $y=\cos x$ برابر یک است که در $x=2k\pi$ رخ می‌دهد. (مضارب زوج π)

۵) کمترین مقدار تابع $y=\cos x$ برابر -1 است که در $x=(2k+1)\pi$ رخ می‌دهد. (مضارب فرد π)

نکته: از قوانین انتقال برای رسم نمودار توابع مثلثاتی کمک می‌گیریم.

مثال: با توجه به نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

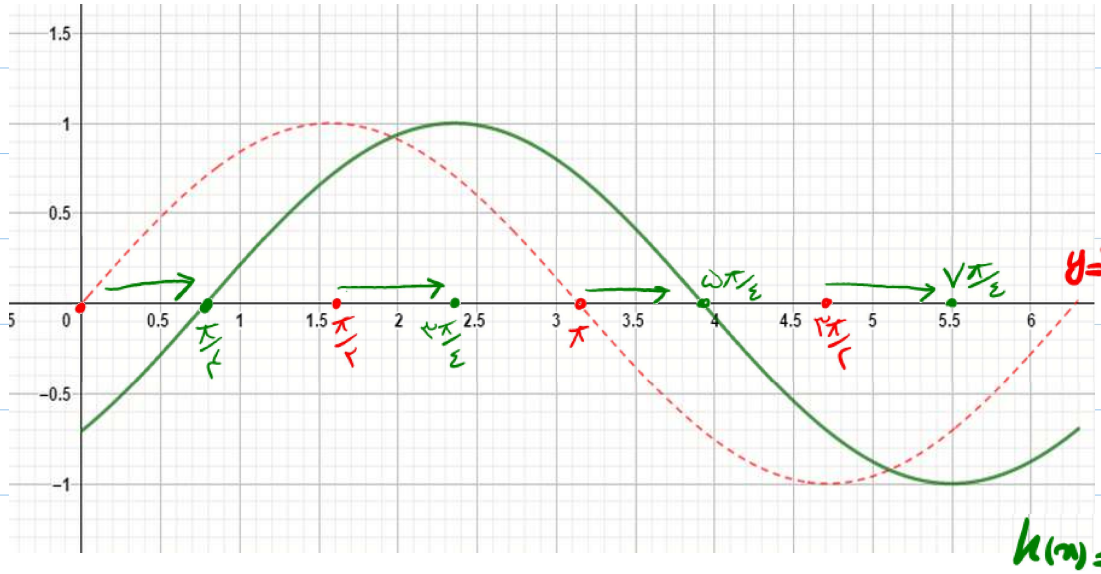
الف) $f(x)=3\cos x$



$f(x) = 2\cos x$

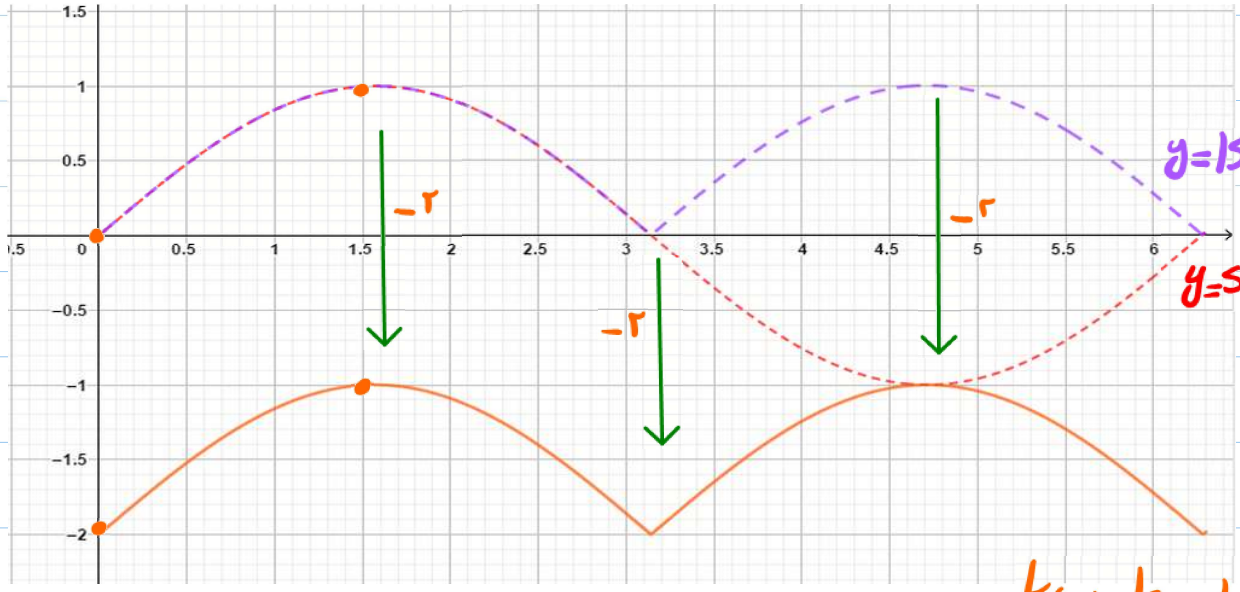
$y = \cos x$

ب) $h(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$



$h(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

ب) $k(x) = |\sin x| - 2$



مثال:

آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y = \sin x \ , \quad y = \cos(x - \frac{\pi}{۲})$

۲) $y = \cos x \ , \quad y = \sin(\frac{\pi}{۲} + x)$

۳) $y = \cos x \ , \quad y = \cos(۲\pi - x)$

۴) $y = \sin x \ , \quad y = \sin(۵\pi - x)$

۱) $y = \cos(x - \frac{\pi}{۲}) = \cos(-(\frac{\pi}{۲} - x)) = \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = \sin x$ بله

۲) $y = \sin(\frac{\pi}{۲} + x) = \cos x$ (تبدیل ۳) بله

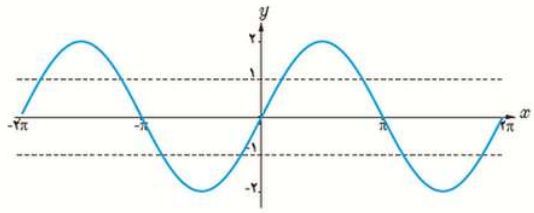
۳) $y = \cos(۲\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$ بله

۴) $y = \sin(۵\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$ بله

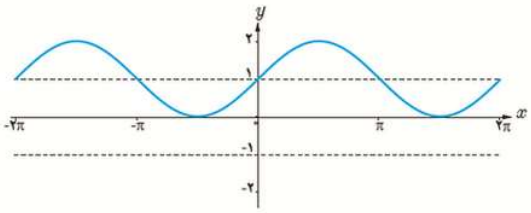
مثال:

هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

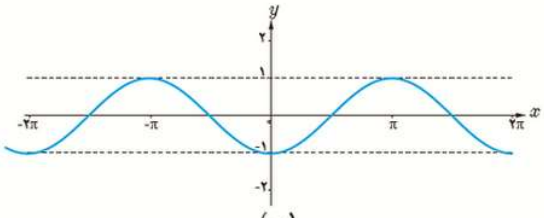
۱) $y=۲\sin x$ ۲) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ ۳) $y=\sin x+۱$ ۴) $y=-\sin x+۱$



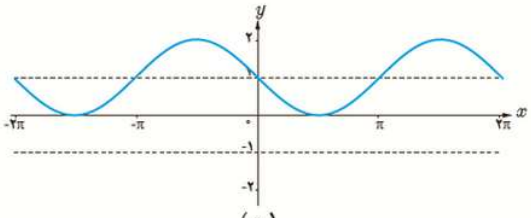
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

۱) $y=۲\sin x$ نمودار (الف)

۲) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})=\sin(-(\frac{\pi}{۲}-x))=-\sin(\frac{\pi}{۲}-x)=-\cos x$ نمودار (پ)

۳) $y=\sin x+۱$ نمودار (ب)

۴) $y=-\sin x+۱$ نمودار (ت)

مثال:

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد. نادرست $x\in\mathbb{R}$

ب) $\sin\sqrt{۵}$ یک عدد حقیقی است. درست

پ) $\cos ۳^\circ=\cos ۳$. نادرست

ت) اگر $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ آنگاه $-۱<\cos x<۰$ است. نادرست

ث) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر ۲- باشد نادرست

ج) $x=\pi$ صفر تابع $f(x)=\cos x$ است. نادرست

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس سوم: توابع مثلثاتی

حل تمرین: صفحه ۱۰۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

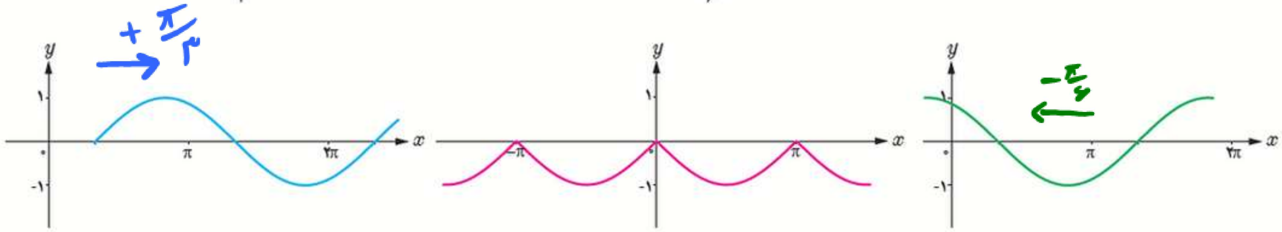
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

الف) $y=-|\sin x|$ ب) $y=\cos(x+\frac{\pi}{6})$ پ) $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$



پ) $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$

سینوس را به اندازه $\frac{\pi}{3}$ سمت راست منتقل شده است.

الف) $y=-|\sin x|$

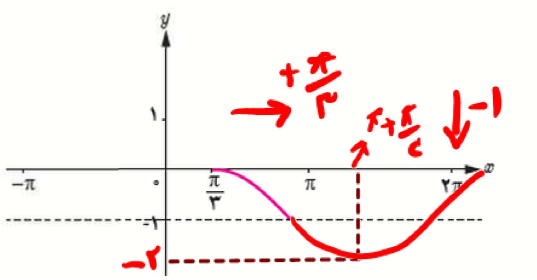
قسمت زیر محور x ها به بالا منتقل می‌شود پس نسبت به محور x ها قرینه می‌شود و همه قسمت‌ها زیر محور x ها می‌افتند.

ب) $y=\cos(x+\frac{\pi}{6})$

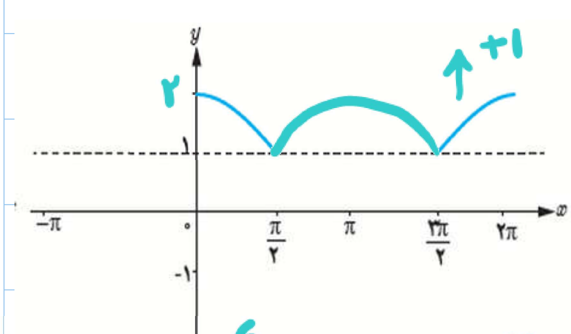
کسینوس را به اندازه $\frac{\pi}{6}$ سمت چپ منتقل می‌شود

۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

الف) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{6})$ ب) $y=\cos(x-\frac{\pi}{3})-1$ پ) $y=1+|\cos x|$

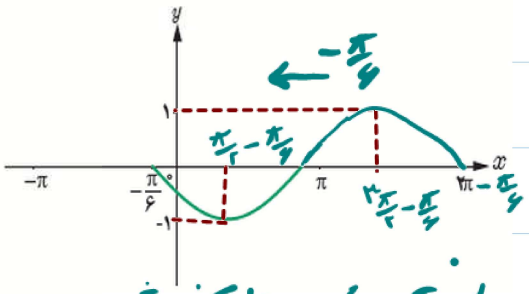


ب) $y=\cos(x-\frac{\pi}{3})-1$



پ) $y=1+|\cos x|$

قسمت‌های زیر محور x قرینه شده به سمت بالا می‌روند



نسبت به کمترین x ها مرتب شده

الف) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{6})$

۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

الف) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{6})$ $\quad y_{max}=1 : x=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$

$y_{min}=-1 : x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$

ب) $y=\cos(x-\frac{\pi}{6})-1$ $\quad y_{max}=0 : x=\frac{\pi}{6}, 2\pi+\frac{\pi}{6}$

$y_{min}=-2 : x=\pi+\frac{\pi}{6}$

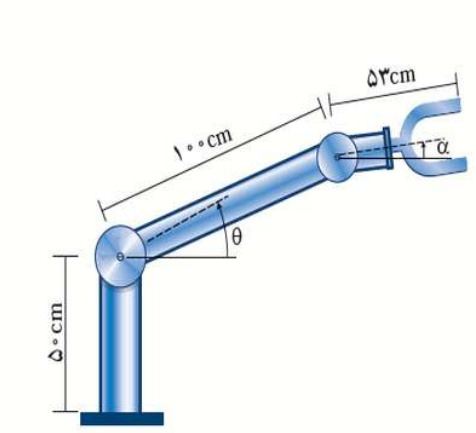
پ) $y=|\cos x|+1$ $\quad y_{max}=2 : x=0, \pi, 2\pi$

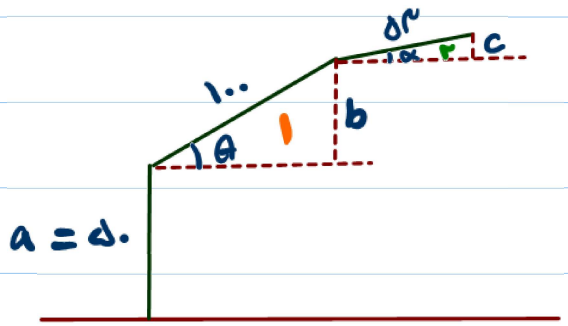
$y_{min}=1 : x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام‌یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازهٔ $(0, \pi)$ یک به یک است؟

هیچکدام یک به یک نیستند.

۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.





الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید. $(-\frac{\pi}{۲} \le \alpha \le \frac{\pi}{۲} , ۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲})$

$$h = a + b + c = ۵۰ + b + c$$

مثلث ۱ : $\sin\theta = \frac{b}{۱۰۰} \rightarrow b = ۱۰۰ \sin\theta$

مثلث ۲ : $\sin\alpha = \frac{c}{۵۳} \rightarrow c = ۵۳ \sin\alpha$

$$h = ۵۰ + ۱۰۰ \sin\theta + ۵۳ \sin\alpha$$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $۲۳/۵\,cm$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -۳۰^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟

$\alpha = -30^\circ \rightarrow h = 23.5 = 50 + 100\sin\theta + 50\sin(-30^\circ)$

$\rightarrow \quad 23.5 - 50 = 100\sin\theta - 50\sin 30^\circ$ ($\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$)

$\rightarrow \quad 23.5 - 50 + \frac{50}{2} = 100\sin\theta$

$\rightarrow \quad 25.5 - 50 + 25 = 100\sin\theta$

$\rightarrow \quad 50 - 50 = 100\sin\theta \rightarrow 100\sin\theta = 0 \rightarrow \sin\theta = 0$

$\rightarrow \theta = 0$

پس بازوی نیرو باید افقی باشد.

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

قسمت اول

جلسه پنجم: صفحات ۱۱۰و۱۱۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری:

در سال گذشته با روابط زیر که به آن‌ها اتحادهای مثلثاتی می‌گفتیم آشنا شدید:

۱) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\Leftarrow \begin{cases} \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \end{cases}$

۲) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\Rightarrow (\tan\alpha)(\cot\alpha) = 1$

۳) $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

۴) $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

مثال: کنکور ۹۸

اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{1+\tan^2 x}\left(2\sin^2\frac{\pi}{4} - \sin^2 x\right)$، کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$ ✓

عبارت $= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sin^2 x\right) = \frac{1}{|\cos x|}\left(2\times\frac{2}{4} - \sin^2 x\right)$

$\xrightarrow[\cos x<0]{\text{زاویه ربع سوم}}$ عبارت $= \frac{1}{-\cos x}(1-\sin^2 x) = \frac{1}{-\cos x}\times\cos^2 x = -\cos x$

گزینه ۴

سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان :

۱) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

۲) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

مثال : مقادیر زیر را بیابید .

الف) $\sin 100^\circ = \sin(60^\circ + 40^\circ) = \sin 60^\circ \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cos 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

ب) $\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

پ) $\cos 255^\circ = \cos(180^\circ + 75^\circ) = -\cos 75^\circ$

$$= -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

مثال: اگر $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ ، $\cos\beta = \frac{12}{13}$ و α و β به ترتیب در ربع سوم و چهارم باشند، $\cos(\alpha+\beta)$ را بیابید.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\checkmark} \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه سوم}} \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1-\frac{144}{169} = \frac{25}{169} \xrightarrow{\checkmark} \sin\beta = \pm\frac{5}{13}$$

$$\xrightarrow{\beta \text{ در ناحیه چهارم}} \sin\beta = -\frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{4}{5}\times\frac{12}{13} - \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{-48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{-63}{65}$$

مثال: اگر $\sin 28^\circ + \cos 28^\circ = a$ ، مقدار $\cos 17^\circ$ را برحسب a بدست آورید.

$$\cos 17^\circ = \cos(45^\circ - 28^\circ) = \cos 45^\circ \cos 28^\circ + \sin 45^\circ \sin 28^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 28^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 28^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 28^\circ + \cos 28^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

مثال: مقدار $\frac{\sin 61^\circ \sin 41^\circ + \sin 59^\circ \sin 29^\circ}{\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ}$ را محاسبه کنید.

$61^\circ + 29^\circ = 90^\circ \rightarrow \sin 29^\circ = \cos 61^\circ$

$41^\circ + 59^\circ = 90^\circ \rightarrow \sin 59^\circ = \cos 41^\circ$

$$\frac{\sin 61^\circ \sin 41^\circ + \cos 41^\circ \cos 61^\circ}{\sin(12^\circ + 18^\circ)} = \frac{\cos(61^\circ - 41^\circ)}{\sin(12^\circ + 18^\circ)} = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$= \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

مثال کنکور ۹۹:

- اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی و $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $-\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ✓ ۴) $\frac{4}{5}$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\frac{11\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{11\pi}{4}\sin\alpha$$

$$\cos\frac{11\pi}{4} = \cos\frac{12\pi - \pi}{4} = \cos(3\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{11\pi}{4} = \sin(3\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - (\frac{\sqrt{2}}{10})^2 = 1 - \frac{2}{100} = \frac{98}{100} \rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{98}}{10}$$

$$\cos(11\frac{\pi}{4}+\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{98}}{10}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \frac{\sqrt{196}}{20} - \frac{2}{20}$$

$$= \frac{14}{20} - \frac{2}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$ گزینه ۳

مثال کنکور ۹۹:

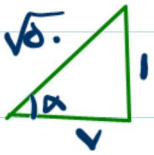
اگر انتهای کمان α در ربع اوّل دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha = \frac{1}{7}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{13\pi}{4}+\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{5}$ ✓ ۲) $-\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

$$\sin\left(\frac{13\pi}{4}+\alpha\right) = \sin\frac{12\pi}{4}\cos\alpha + \sin\alpha\cos\frac{13\pi}{4}$$

روش اول: برای α به $\cos\alpha, \sin\alpha$ رشته به از زکار مثلثاتی

روش دوم:



$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{50}}, \quad \cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{50}}$$

$$\sin\frac{13\pi}{4} = \sin\frac{12\pi+\pi}{4} = \sin(3\pi+\frac{\pi}{4}) = \sin(\pi+\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{12\pi}{4} = \cos(\pi+\frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{13\pi}{4}+\alpha\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{7}{\sqrt{50}} + \frac{1}{\sqrt{50}}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-7\sqrt{2}}{2\sqrt{50}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{50}}$$

$$= \frac{-8\sqrt{2}}{2\sqrt{50}} = \frac{-4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = -\frac{4}{5}$$ گزینه ۱

$\sqrt{50} = \sqrt{25\times2}$

مثال: ثابت کنید: $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$

سمت راست $= \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} \pm \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin\alpha \pm \cos\alpha\right) = \sin\alpha \pm \cos\alpha =$ سمت چپ

$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

مثال: حاصل $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$ را بدست آورید.

$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{2}\sin(15^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2}\sin(60^\circ) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{2}$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

قسمت دوم

جلسه ششم: صفحات ۱۱۰و۱۱۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان (2α)

الف) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

اثبات : $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha$ ☑

ب) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

اثبات : $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ☑

پ) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

اثبات : می‌دانیم : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

به جای قرار دادن $\sin^2\alpha$ در (ب) داریم :

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

☑

ت) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

اثبات: با جای‌گذاری $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ در رابطه ب داریم:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ ☑

مثال: اگر $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ باشد و α در ناحیه سوم واقع باشد مقدار $\sin 2\alpha$ را بیابید.

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25}$

$\rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ ناحیه سوم}} \cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{5}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$

مثال: حاصل $\cos 150^\circ \cos 10^\circ$ را بدست آورید.

$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ$

$\cos 10^\circ = \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$

عبارت $= (-\cos 30^\circ)(-\sin 10^\circ) = \sin 10^\circ \cos 30^\circ$

تذکر: $\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$

$\Rightarrow$ حاصل $= \frac{1}{2}\sin 2(15^\circ) = \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

مثال: اگر $\sin 40 = k$ باشد، حاصل $\sin 40^\circ$ را برحسب k بدست آورید.

$k = \sin 40^\circ = \cos 20^\circ \quad : \quad 40^\circ + 20^\circ = 90^\circ$

$\sin 40^\circ = \cos 50^\circ \quad : \quad 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$

از بالا

$\sin 40^\circ = \cos 50^\circ = \cos(2\times 25^\circ) = 2\cos^2 25 - 1 = 2k^2 - 1$

مثال: اگر $\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{4}$ باشد، مقدار $\cos 2x$ را بیابید.

$\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4} + \cos x\cos\frac{\pi}{4} + \sin x\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{4}$

$\rightarrow \quad 2\cos x\cos\frac{\pi}{4} = \frac{2}{4} \rightarrow 2\cos x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{4} \rightarrow \cos x = \frac{2}{4}$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{2}{4}\right)^2 - 1 = 2\times\frac{4}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = \frac{-1}{9}$

مثال: روابط زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

ب) $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

اثبات الف: $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \rightarrow 2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$

$\xrightarrow{\div 2} \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

اثبات ب: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \rightarrow \cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha$

$\xrightarrow{\div 2} \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

مثال: برای زاویه 15°، سینوس و کسینوس را حساب کنید.

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 2(15^\circ)}{2} = \frac{1-\cos 30^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 2(15^\circ)}{2} = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

حل تمرین: صفحه ۱۱۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ب) $\tan 105^\circ$

روش اول: به خوش‌ترین $\tan 105^\circ = \frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ}$

روش دوم: استفاده از رابطه: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$

$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \times \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$

پ) $\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ت) $\sin 120^\circ$

روش اول: $\sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

روش دوم: $\sin(120^\circ) = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

روش سوم :

$$\sin(120^\circ) = \sin(2\times 60^\circ) = 2\sin 60^\circ \cos 60^\circ$$

$$= 2\times \frac{\sqrt{3}}{2}\times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ث) $\cos 135^\circ$

روش اول :

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

روش دوم :

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

روش سوم :

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = \cos 90^\circ \cos 45^\circ - \sin 90^\circ \sin 45^\circ$$

$$= 0\times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha+\beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

الف)

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1-\frac{16}{25} = \frac{9}{25} \rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ربع اول}}$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1-\frac{144}{169} = \frac{169-144}{169} = \frac{25}{169}$$

$$\rightarrow \sin\beta = \pm\frac{5}{13} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \sin\beta = \frac{5}{13}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$=\frac{3}{5}\times\left(\frac{-12}{13}\right)+\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{-36}{65}+\frac{20}{65}=\frac{-16}{65}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{4}{5}\times\left(\frac{-12}{13}\right)+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{-48+15}{65}=\frac{-33}{65}$$

ب) α ربع اول و β ربع دوم و $\sin(\alpha+\beta)$ منفی شده است پس $\alpha+\beta$ در ناحیه سوم است.

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

الف) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

ب) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

پ) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ت) $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

در متن درس اثبات کردیم.

۴ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویهٔ $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 22{,}5^\circ=\frac{1-\cos 45^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sin 22{,}5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \rightarrow \cos^2 22{,}5^\circ = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \cos 22{,}5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$