حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی قسمت اول

جلسه اول: صفحات ۷۲ تا ۷۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تابع نمایی :

تعریف : اگر a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد، تابع $f(x)=a^x$ را تابع نمایی می‌نامیم.

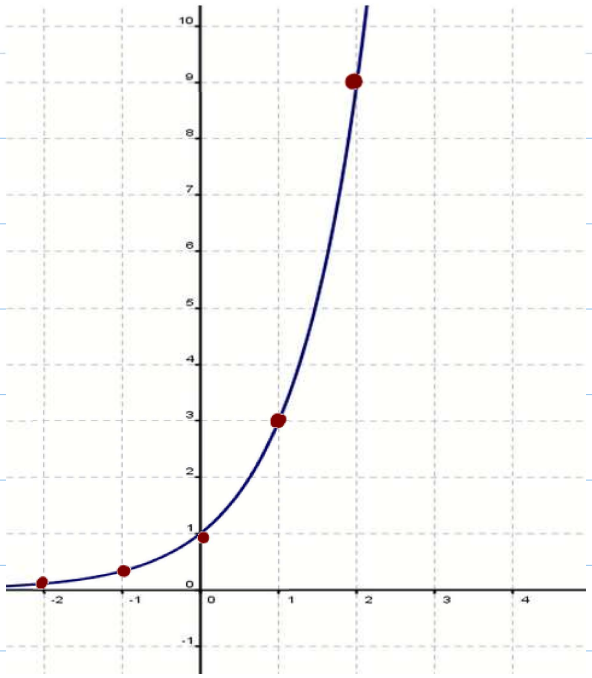
$y=4^x$ و $y=(\frac{2}{5})^x$ و $y=(\sqrt{3})^x$ تابع نمایی و $y=1^x$ و $y=(-4)^x$ نمایی نیستند.

برای اینکه اطلاعات بیشتری از تابع نمایی بدست آوریم نیاز به رسم آن را داریم.

برای نمونه دو تابع $y=3^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ را رسم می‌کنیم و نتیجه را تعمیم می‌دهیم.

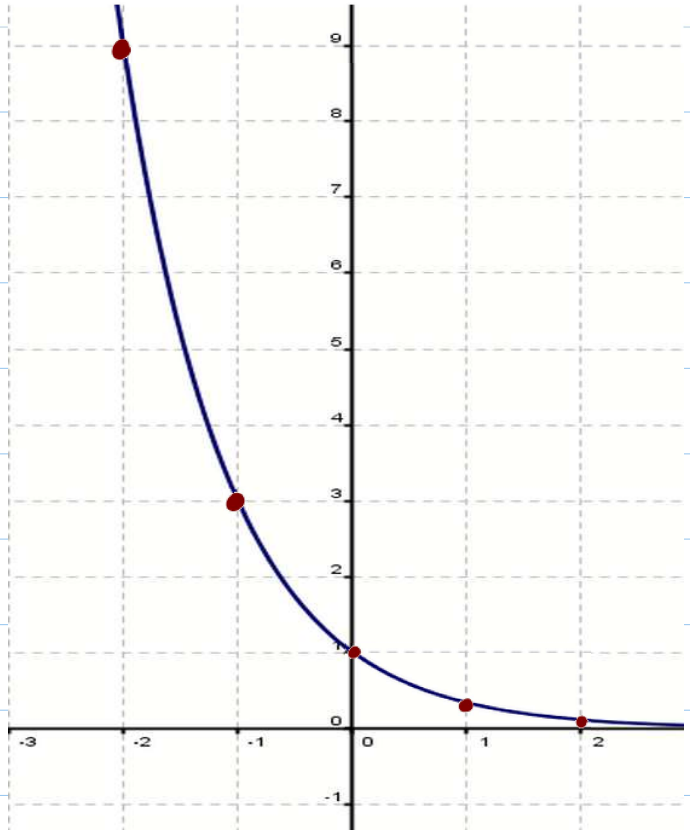
الف) $y=3^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$3^{-2}=\frac{1}{9}$	$3^{-1}=\frac{1}{3}$	1	3	9

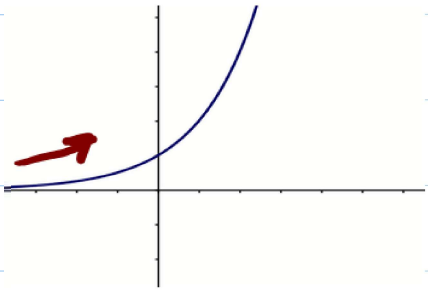


ب) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$



نتیجه: الف) اگر $a>1$ باشد نمودار تابع نمایی $f(x)=a^x$ به صورت زیر است:

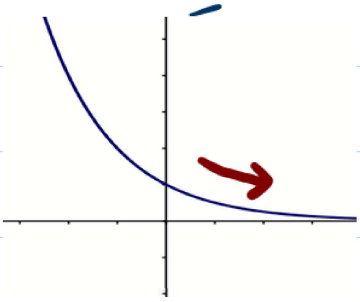


$D=\mathbb{R}$ ، $R=(0,+\infty)$

تابع یک به یک است

با افزایش مقادیر x، yها هم افزایش می‌یابند.

ب) اگر $0<a<1$ باشد نمودار تابع نمایی $f(x)=a^x$ به صورت زیر است:



$D=\mathbb{R}$ ، $R=(0,+\infty)$

تابع یک به یک است

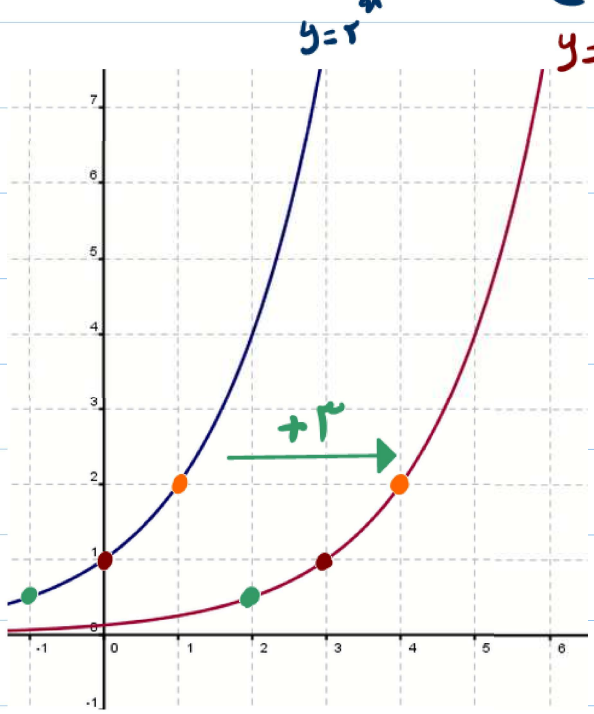
با افزایش مقادیر x، yها کاهش می‌یابند.

فرم کلی تابع نمایی: با شرط‌های گفته شده برای a به صورت کلی $y=ba^{cx+d}+f$ یک تابع نمایی است که b,c,d,f اعداد حقیقی و $b,c\neq 0$ هستند.

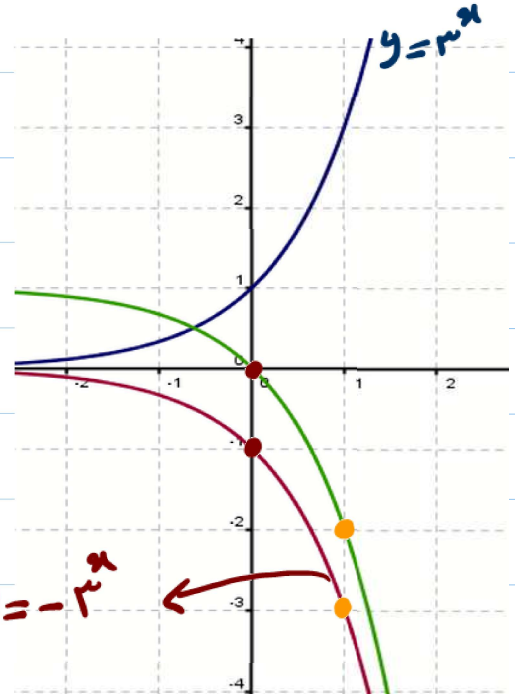
نکته: از نقطه‌یابی و جوانب انتقال برای رسم نمودار توابع نمایی کمک می‌گیریم.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

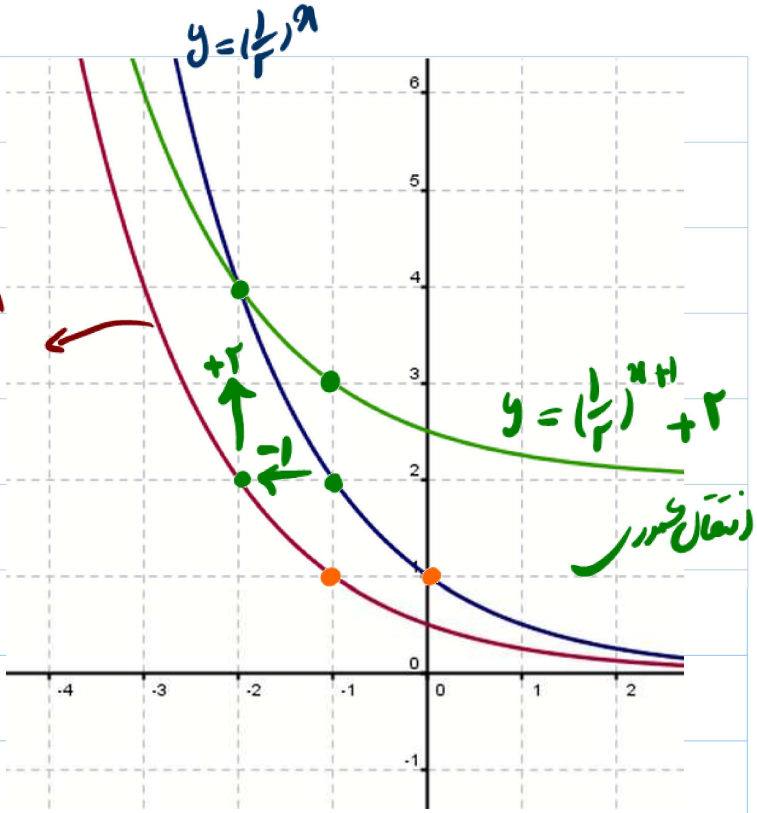
۱) $f(x)=2^{x-3}$



۲) $f(x)=1-3^x$



۳) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 2$



انتقال افقی $y=(\frac{1}{2})^{x+1}$

۴) $f(x) = 3^{-x+3} + 1$

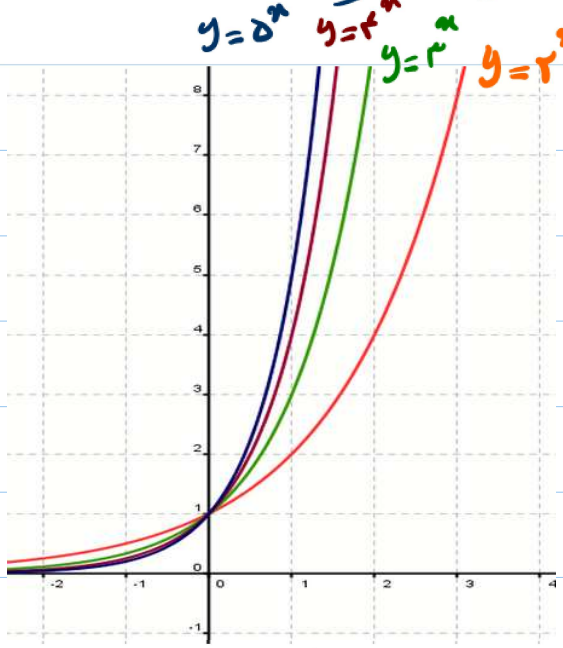
نقطه‌یابی : توان $=0 \rightarrow -x+3=0 \rightarrow x=3$

x	۲	۳	۴
y	۴	۲	$3^{-1}+1=\frac{4}{3}$

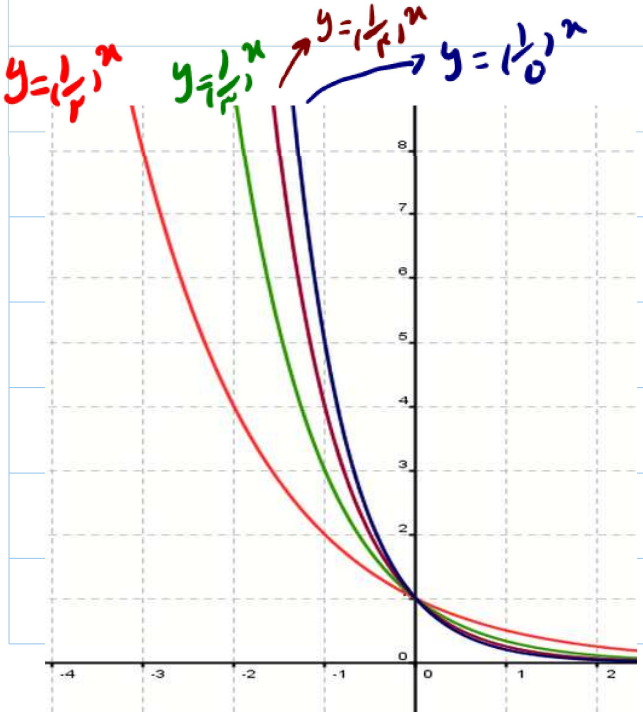


مقایسه توابع نمایی $y=a^x$ و $y=b^x$ ، $y=c^x$ ، ...

(الف) اگر پایه‌ها بزرگتر از یک باشند هرچه پایه بزرگتر شود نمودار تابع در راستای افقی فشرده‌تری شود و به محور y‌ها نزدیک‌تری شود.



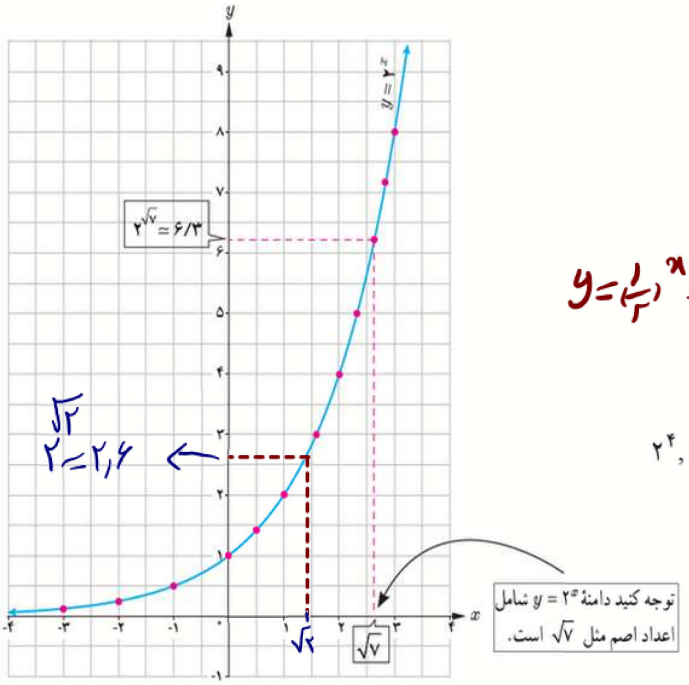
ب) اگر پایه‌ها بین صفر و یک باشند هرچه پایه بزرگتر باشد نمودار در راستای افقی کشیده‌تر می‌شود و از محور y‌ها دورتری شود.



فعالیت کتاب درسی :

الف) نقطهٔ $x=\sqrt{2}$ را روی محور xها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $2^{\sqrt{2}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید.

$2^{\sqrt{2}} \simeq 2,6$



ب) نمودار تابع $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار $y=2^x$ مقایسه کنید.

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$

نمودار $y=2^{-x}$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

پ) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$2^4, \left(\frac{1}{2}\right)^2, 2^2, 2^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^3$

با توجه به نمودار توابع نمایی داریم :

$2^4 > 2^3 > 2^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^4$

نتیجه: در سال‌های گذشته با توان‌های گویا آشنا شدیم. با تعریف تابع نمایی، از توان‌های حقیقی هم با همان ویژگی‌های توان‌های گویا استفاده می‌کنیم.

ویژگی‌های توان حقیقی :

1) $a^0 = 1$

2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

3) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

4) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

5) $(a \times b)^x = a^x \times b^x$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

7) $(a^x)^y = a^{xy}$

مثال: اگر $f(x)=8^x$ و $g(x)=2^{2x+5}$، حاصل $f(\frac{x}{3})g(x-2)$ را بیابید.

$$f(\frac{x}{3})=8^{\frac{x}{3}}=(2^3)^{\frac{x}{3}}=2^x$$

$$g(x-2)=2^{2(x-2)+5}=2^{2x-4+5}=2^{2x+1}$$

$$f(\frac{x}{3})g(x-2)=2^x\times 2^{2x+1}=2^{x+2x+1}=2^{3x+1}$$

معادله‌های نمایی:

معادله‌ای که در آن مجهول در توان (نما) قرار گرفته است را معادله نمایی می‌گوییم.

چون تابع نمایی یک به یک است هرگاه a حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد، اگر $a^x=a^y$ آنگاه $x=y$. پس برای حل معادلات نمایی در صورت توان پایه‌ها را یکی می‌کنیم و با حذف پایه‌ها یکسان قرار دادن توان‌ها حل معادله حاصل، مجهول بدست می‌آید.

مثال: معادله $(\frac{8}{16})^{x-1}=(\frac{2}{3})^{x+2}$ را حل کنید.

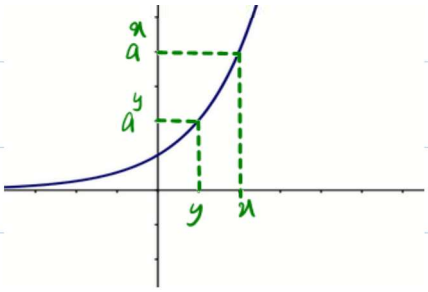
$$(\frac{8}{16})^{x-1}=(\frac{3^4}{2^4})^{x-1}=\left((\frac{3}{2})^4\right)^{x-1}=\left((\frac{2}{3})^{-4}\right)^{x-1}=(\frac{2}{3})^{-4x+4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x+4}$$

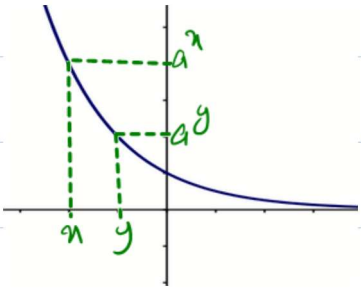
$$\rightarrow \quad x+2 = -2x+4 \longrightarrow \quad 3x = 2 \longrightarrow x = \frac{2}{3}$$

نامعادله‌های نمایی :

اگر a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد داریم :



الف) اگر $a>1$ و $a^x > a^y$ آنگاه $x>y$.



ب) اگر $0<a<1$ و $a^x > a^y$ آنگاه $x<y$.

یعنی درصورت ضرب طرفین نامساوی در پایه‌های دو طرف نامساوی را عوض می‌کنیم. اگر پایه بزرگتر از یک باشد باحذف پایه‌ها جهت نامساوی عوض نمی‌شود ولی اگر پایه بین صفر و یک باشد باحذف پایه‌ها

جهت نامساوی عوض می‌شود.

مثال: مجموعه جواب نامعادله $4^{x-3} < 32^{5-x}$ را بیابید.

$$(2^2)^{x-3} < (2^5)^{5-x} \Rightarrow 2^{2(x-3)} < 2^{5(5-x)}$$

$$\xrightarrow{2>1} \quad 2(x-3) < 5(5-x)$$

$$\rightarrow 2x-6 < 25-5x \rightarrow 7x < 31 \rightarrow x < \frac{31}{7}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی های آن

جلسه دوم: کاربرد تابع نمایی

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

کاربرد توابع نمایی

به صورت کلی یک تابع با ضابطه $f(x) = k a^x$ که $k \in \mathbb{R}$ و a عدد حقیقی، مثبت و مخالف یک است، رفتارهای دارد که کاربرد فراوانی در مسائل زیستی، اقتصادی، مهندسی و ... دارد.

مفهوم رشد نمایی

مثال های زیر را در نظر بگیرید:

- باکتری ها می توانند هر ۲۴ ساعت یک بار دو برابر شوند.

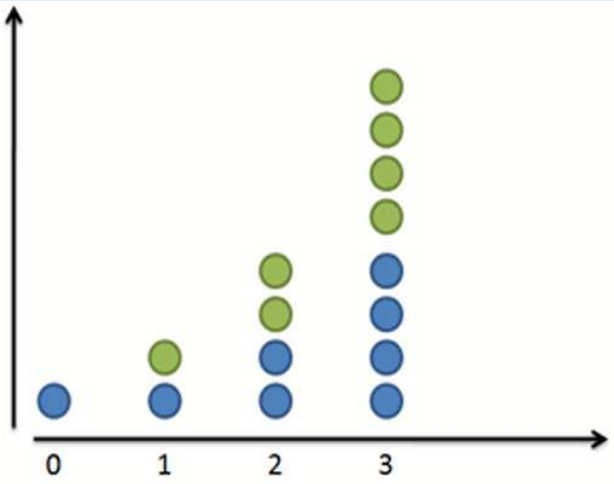
- اگر نرخ سود سالانه ٪۱۰۰ روی سرمایه خود داشته باشید، هر سال سرمایه شما دو برابر خواهد شد.

برای این مسائل می توانیم رفتارهای را به صورت $f(x) = 2^x$ بنویسیم. از طرفی چون دو برابر کردن، همان رشد ٪۱۰۰ است رابطه بالا را می توان به صورت زیر هم نوشت:

$$f(x) = (1 + 100\%)^x$$

این همان معادله قبل است. فقط ۲ را به آن چیزی که واقعاً هست تغییر داده‌ایم.

یعنی مقدار ۱ اولیه بعلاوه ۱۰۰٪.



می‌توانیم هر عددی را به جای ۱۰۰٪ بنویسیم مثل ۵۰٪، ۲۵٪، ۲۰۰٪ و...

و فرمول رشد را برای آن نرخ رشد بدست آوریم.

معادله کلی رشدنمایی به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است که در آن $f(t)$

مقدار نهایی، c مقدار اولیه و r بیانگر میزان رشد یا همان نرخ رشد و تازه‌هاست.

تذکر: تابع $f(t) = c(1-r)^t$ را زوال نمایی می‌گویند.

مثال ۱) : مقدار k گرم باکتری در هر ساعت، ۱٫۵ برابر می‌شود. اگر بعد از دو ساعت مقدار باکتری ۴٫۵ گرم باشد، در پایان ساعت سوم مقدار باکتری‌ها چند گرم خواهد شد؟

$$f(t) = k(1{,}5)^t$$

$$f(2) = 4{,}5 \xrightarrow{\text{قرار می‌دهیم}} f(2) = 4{,}5 = k(1{,}5)^2$$

$$k(1{,}5)^2 = 4{,}5 \rightarrow k = \frac{4{,}5}{(1{,}5)^2} = \frac{4{,}5}{2{,}25} = 2$$

$$f(3) = 2(1{,}5)^3 = 2 \times 3{,}375 = 6{,}75 \text{ gr}$$

مثال ۲) قیمت یک کالا ۴۰۰۰ تومان است و می‌خواهیم به طور نهایی با نرخ تورم ۳۰ درصد در سال افزایش یابد. قیمت آن دو سال دیگر چقدر خواهد بود؟

$$f(t) = c(1+r)^t \Rightarrow f(2) = 4000\left(1 + \frac{30}{100}\right)^2$$

$$f(2) = 4000 \times (1{,}3)^2 = 4000 \times 1{,}69 = 6760 \text{ تومان}$$

مثال ۴) اگر جمعیت یک کشور به طور نمایی و با ضریب ثابت ۰/۰۲ در سال کاهش یابد

پس از چند سال، جمعیت این کشور ۰/۸ برابر جمعیت اولیه می شود؟

($(0/98)^5 \simeq 0/9$ ، $(0/9)^2 \simeq 0/8$)

$$f(t) = c(1-r)^t$$

$$\begin{cases} r = 0/02 \\ f(t) = 0/8c \end{cases} \Rightarrow 0/8c = c(1-0/02)^t$$

$$\div c \Rightarrow 0/8 = (0/98)^t$$

$$0/8 \simeq (0/9)^2 \longrightarrow (0/9)^2 = (0/98)^t \qquad 0/9 \simeq (0/98)^5 \longrightarrow ((0/98)^5)^2 = (0/98)^t$$

$$\Rightarrow (0/98)^{10} = (0/98)^t \Rightarrow t = 10$$

مفهوم نیمه عمر:

منظور از نیمه عمر یک ماده، مدت زمانی است که پس از آن از مقدار اولیه آن از بین می رود.

اگر A_0 مقدار اولیه و A مقدار ماده بعد از n نیمه عمر باشد خواهیم داشت:

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

برای یافتن تعداد نیمه عمر از رابطه مقابل کمک می گیریم: $n = \frac{\text{کل مدت زمان } t}{\text{طول نیمه عمر } T}$

مثال ۴) نیمه عمر یک ماده ۴۰ سال است. اگر در ابتدا ۱۰۰ میلی گرم از این ماده موجود باشد، بعد از ۸۰ سال چند میلی گرم از این ماده از بین می رود؟

$$\begin{cases} T = 40 \\ A_0 = 100 \\ t = 80 \\ A = \text{مقدار ماده بعد از ۸۰ سال} \end{cases}$$

$$n = \frac{t}{T} = \frac{80}{40} = 2$$

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow A = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 100 \times \frac{1}{4} = 25$$

مقدار ماده ای که بعد از ۸۰ سال از بین می رود = $100 - 25$

75 میلی گرم

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی های آن

جلسه سوم: حل تمرین صفحات ۷۷ تا ۷۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

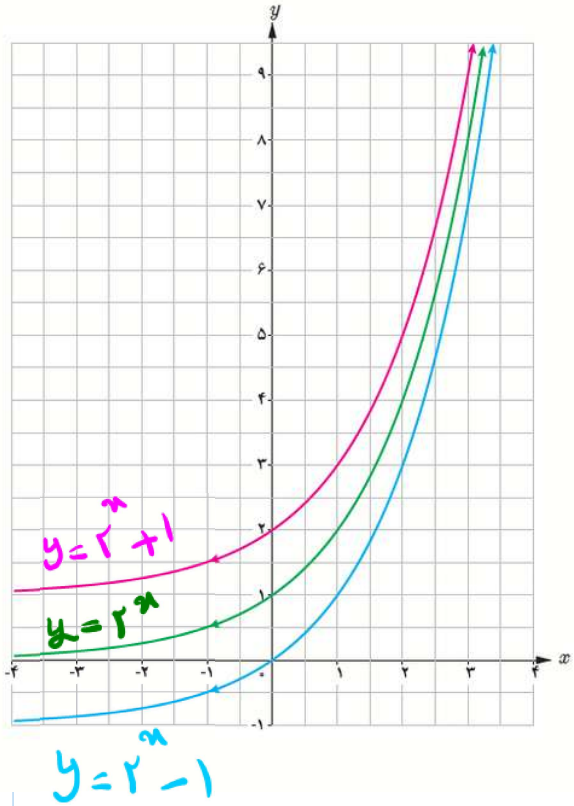
۱ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک تودهٔ معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

الف) $f(t) = 100 \times 2^t$

ب) $f(20) = 100 \times 2^{20}$



۲ نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 2^x+1$ و $y = 2^x-1$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y = a^x$ ، $y = a^x+2$ و $y = a^x-2$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $(a>1)$.

برای رسم تابع $y=a^x+2$، نمودار $y=a^x$ را دو واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

برای رسم تابع $y=a^x-2$، نمودار $y=a^x$ را دو واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

۳ داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t)=10(0/8)^t$ به‌دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

الف) $A(8)=10(0/8)^8 \simeq 1/67$

ب) $A(0)=10$, $A(1)=10(0/8)^1=8$

درصد تغییرات $=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}\times 100=\frac{8-10}{10}\times 100=-\frac{2}{10}\times 100=-20\%$

بیست درصد

۴ الف) سه عدد بین اعداد $3^{2/5}$ و $3^{\sqrt{10}}$ پیدا کنید.

$3^{2/5} < 3^{2/8} < 3^{2/9} < 3^{3} < 3^{\sqrt{10}}$

ب) نامعادلهٔ توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید.

$(2^2)^{2x-1} > \frac{1}{2^{10}} \rightarrow 2^{4x-2} > 2^{-10}$

$\xrightarrow{2>1} 4x-2 > -10 \rightarrow 4x > -8$

$\longrightarrow x > -2$

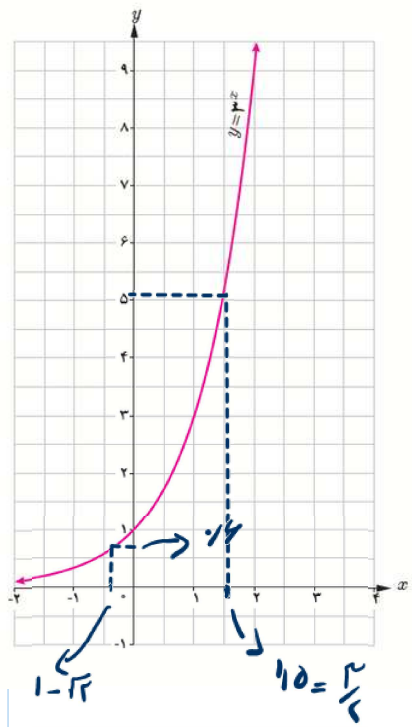
پ) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری که $a^x > a^y > a^z$ ، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ $(a>1)$.

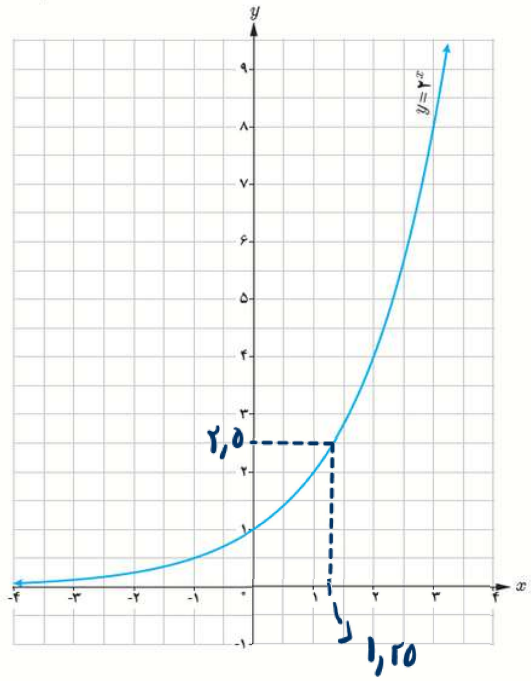
$x > y > z$

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

الف) $3^{1-\sqrt{2}}$ ب) $2^{1/25}$ پ) $3^{\frac{3}{2}}$

$1-1,4 = -0,4$





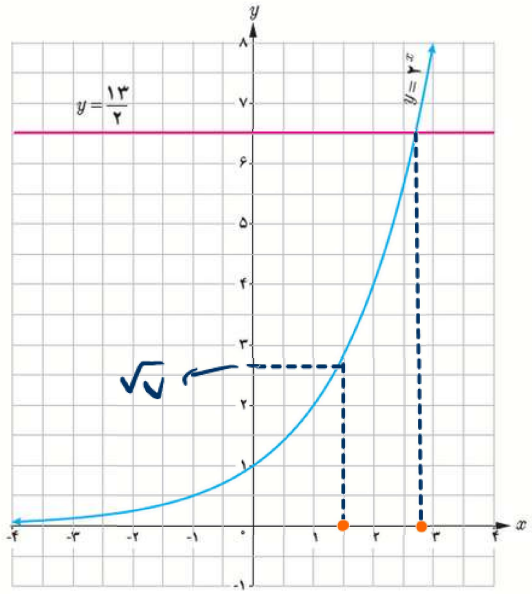
$3^{1-\sqrt{2}} \approx 0,46$

$3^{\frac{3}{2}} \approx 5,19$

$2^{1,25} \approx 2,37$

۶ الف) در شکل زیر خط $y=\frac{۱۳}{۲}$ نمودار $y=۲^x$ را قطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟چرا؟

ب) خط $y=\sqrt{۷}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y=۲^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



الف) $۲<x<۳$

ب) $۱<x<۲$

۷ در تصفیهٔ آب، داخل فیلترها، لایهٔ تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه ۰/۴۹ = ۰/۷ × ۰/۷ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

الف) $f(x)=(۰/۷)^x$ ← تعداد لایه‌های فیلتر

ب) $(۰/۷)^x$ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند

$(\%۱۷)^t < \frac{۴}{۱۰۰} \rightarrow (\%۱۷)^t < \%۰.۴$

با محاسبه‌گر $\rightarrow t \geq ۱۰$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم قسمت اول

جلسه چهارم: صفحات ۸۰ تا ۸۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

مقدمه :

انگیزه اصلی برای تعریف تابع لگاریتم یا همنگر لگاریتم، ساده کردن عملیات پیچیده ضرب است. همچنین لگاریتم گیری از اعداد، مقیاس آنها را کوچکتر می کند.

لگاریتم یک عدد در یک پایه، برابر با توانی از پایه است که آن عدد را می دهد. عنوان مثال لگاریتم ۸ در پایه ۲ برابر ۳ است زیرا : $8 = 2\times2\times2 = 2^3$

در واقع حاصل $\log_2^8$ جواب این سوال است که چه تعداد از عدد ۲ را باید در هم ضرب کنیم تا عدد ۸ بدست آید؟ $\log_2^8 = 3$

از طرف دیگر می توان لگاریتم را وارون تابع نمایی در نظر گرفت.

بعنوان مثال تابع $f(x) = 2^x$ را در نظر بگیرید. اگر ورودی یعنی x، ۳ باشد خروجی یعنی y برابر ۸ می شود: $(3,8) \in f$. تابع وارون این تابع باید y را بگیرد و x را بدهد مثلاً ۸ را بگیرد و ۳ را بدهد: $(8,3) \in f^{-1}$. طبق آنچه در بالا گفتیم این تابع را

لگاریتم در پایه ۲ تعریف می‌کنیم :

$$y = 2^x \Rightarrow \log_2 y = x$$

پس x را برحسب y حساب کردیم. طبق آنچه در فصل تابع برای یافتن وارون تابع گفتیم باید x را به $f(x)$ و y را به x تبدیل کنیم تا :

$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$

تعریف : اگر a عدد حقیقی، مثبت و مخالف یک باشد تابع $f(x) = a^x$ یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. وارون این تابع را تابع لگاریتم با پایه a می‌نامیم و آن را با $f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم.

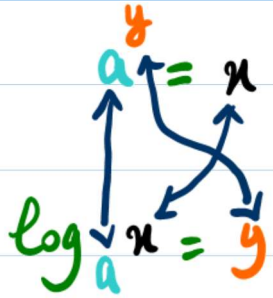
همچنین $D_{f^{-1}} = R_f = (0, +\infty)$ و $D_f = R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

نتیجه : نحوه محاسبه لگاریتم را به یکی از دو شکل زیر به خاطر بسپارید :

۱) $y = \log_a x \iff a^y = x$

(به توان)

۲)



مثال: لگاریتم‌های زیر را پیدا کنید.

۱) $\log_{10} 100 = 2$ (به توان) $\quad 10^2 = 100$

۲) $\log_3 81 = 4 \quad 3^4 = 81$

۳) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} = \frac{1}{2} \quad \sqrt{5}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

۴) $\log_2 \frac{1}{2} = -1 \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}$

مثال: ضابطه تابع وارون $f(x) = \log_3(x-2)$ را بدست آورید.

$y = \log_3(x-2)$ (به توان) $\xrightarrow{\text{ترتیب لگاریتم}} 3^y = x - 2$

$\rightarrow 3^y + 2 = x \rightarrow f^{-1}(x) = 3^x + 2$

مثال: اگر $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3$ باشد. ضابطه تابع وارون f را بیابید.

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3 \longrightarrow y-3=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \rightarrow y-3=\frac{1}{2^{x-1}}$$

$$\xrightarrow[\text{معکوس}]{\text{دو طرف}} \frac{1}{y-3}=2^{x-1} \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} \log_2 \frac{1}{y-3}=x-1$$

به توان

$$\log_2 \frac{1}{y-3}+1=x \Rightarrow f^{-1}(x)=1+\log_2 \frac{1}{x-3}$$

تذکر: به پایه لگاریتم مبنا هم گفته می‌شود. هرگاه مبنا یا پایه لگاریتم ۱۰ باشد به آن لگاریتم اعشاری می‌گوییم. هرزه مبنای یک لگاریتم نوشته نشود آن را ۱۰ در نظر می‌گیریم.

مثال: اگر $f(x)=2+\log(2x-4)$، مقدار $f^{-1}(4)$ را بیابید.

$$f^{-1}(4)=a \xrightarrow[\text{تعریف}]{f} 4=f(a) \Rightarrow 4=2+\log(2a-4)$$

$$\rightarrow 2=\log_{10}(2a-4) \xrightarrow[\text{لگاریتم}]{\text{تعریف}} 10^2=2a-4$$

به توان

$$100=2a-4 \rightarrow 2a=104 \rightarrow a=52 \Rightarrow f^{-1}(4)=52$$

نکته: همانطور که در تعریف تابع لگاریتم اشاره کردیم دامنه تابع لگاریتمی به صورت $y=\log_a^u$ (عبارت درجه صفر) است. در حالت کلی برای یافتن دامنه تابع $y=\log_a^u$ باید اشتراک سه شرط $u>0$ ، $a>0$ ، $a\neq 1$ را بیابیم.

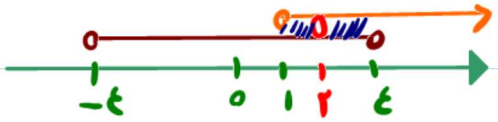
مثال: دامنه تابع $f(x)=\log_{(x-1)}(16-x^2)$ را بدست آورید.

① $16-x^2>0 \rightarrow 16>x^2 \rightarrow x^2<16 \rightarrow -4<x<4$

② $x-1>0 \rightarrow x>1$

③ $x-1\neq 1 \rightarrow x\neq 2$

$D_f = ① \cap ② \cap ③ = (1,4)-\{2\}$



حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی قسمت اول

جلسه پنجم صفحات:۸۶و۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

ویژگی های لگاریتم :

برای محاسبه ساده تر لگاریتم ها، از ویژگی های زیر که همگی با استفاده از تعریف لگاریتم اثبات می شوند، استفاده می کنیم.

ویژگی ۱. لگاریتم یک در هر پایه ای عدد مثبت و مخالف یک، برابر صفر است یعنی:

$$\log_a 1 = 0$$

مثال: $\log_{100} 1 = 0$ ، $\log 1 = 0$ و $\log_{\pi} 1 = 0$

ویژگی ۲. لگاریتم هر عدد مثبت و مخالف یک در مبنای خودش مساوی یک است یعنی:

$$\log_a a = 1$$

مثال: $\log 10 = 1$ ، $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$ ، $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1$

ویژگی ۳. اگر عدد یا عبارت جلوی لگاریتم توان دار باشد، توان را ضریب لگاریتم قرار می دهیم یعنی:

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

مثال: $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3\times 1 = 3$

یادآوری $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

$\log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_5 5 = \frac{1}{3}$

$\log \frac{1}{100} = \log \frac{1}{10^2} = \log 10^{-2} = -2\log 10 = -2$

ویژگی ۴. لگاریتم ضرب دو عدد برابر است با جمع لگاریتم‌هایشان یعنی:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

مثال: $\log_4 12 + \log_4 3 = \log_4 12\times 3 = \log_4 36 = \log_4 6^2 = 2\log_4 6 = 2$

* $\log 2 + \log 5 = \log 2\times 5 = \log 10 = 1$

ویژگی ۵. لگاریتم تقسیم دو عدد برابر است با تفریق لگاریتم‌هایشان یعنی:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

مثال: $\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2\log_5 5 = 2$

$\log_2 54 - \log_2 2 = \log_2 \frac{54}{2} = \log_2 27 = \log_2 3^3 = 3\log_2 3 = 3$

ویژگی ۶.

$$\log_{a^m}^{x^n} = \frac{n}{m}\log_a^x$$

مثال:

$$\log_{\sqrt{2}}^{32} = \log_{2^{\frac{1}{2}}}^{2^5} = \frac{5}{\frac{1}{2}}\log_2^2 = 10$$

$$\log_{\sqrt{4}}^{216} = \log_{4^{\frac{1}{2}}}^{6^3} = \frac{3}{\frac{1}{2}}\log_4^6 = 6$$

ویژگی ۷.

$$\log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a}$$

مثال: اگر $\log_2^3 = m$، مقدار $\log_{12}^{18}$ را برحسب m بیابید.

$$\log_{12}^{18} = \frac{\log_2^{18}}{\log_2^{12}} = \frac{\log_2(3^2\times 2)}{\log_2(2^2\times 3)} = \frac{\log_2^{3^2}+\log_2^2}{\log_2^{2^2}+\log_2^3} = \frac{2\log_2^3+1}{2\log_2^2+\log_2^3} = \frac{2m+1}{2+m}$$

نتیجه: اگر جای b، x قرار دهیم داریم:

$$\log_a^x = \frac{\log_x^x}{\log_x^a} \Rightarrow \log_a^x = \frac{1}{\log_x^a} \quad \text{یا} \quad \log_a^x \times \log_x^a = 1$$

مثال:

$$\frac{1}{\log_4^4} + \frac{1}{\log_9^4} = \log_4^4 + \log_4^9 = \log_4^{4\times 9}$$

$$= \log_4^{36} = \log_4^{4^2} = 2$$

ویژگی ۸.

$$b^{\log_a^x} = x^{\log_a^b}$$

مثال:

$$۳^{\log_۹^۶} = ۶^{\log_۹^۳} = ۶^{\log_{۳^۲}^{۳^۱}} = ۶^{\frac{۱}{۲}\log_۳^۳} = ۶^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۶}$$

نتیجه: اگر جای b، a قرار دهیم داریم:

$$a^{\log_a^x} = x^{\log_a^a} \Rightarrow a^{\log_a^x} = x$$

(ساده)

مثال:

$$۷^{\log_۷^۳} = ۳$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی قسمت دوم

جلسه ششم صفحات:۸۶و۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

مثال‌های بیشتری از لگاریتم :

۱) حاصل عبارت های لگاریتمی زیر را بیابید.

الف) $\log_2 \sqrt[5]{8} + \log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_2 8^{\frac{1}{5}} + \log_{3^{-1}} 3^2$

$= \frac{1}{5}\log_2 2^3 + 2\log_{3^{-1}} 3^2 = \frac{3}{5}\log_2 2 + 2 = \frac{3}{5} + 2 = \frac{13}{5}$

ب) $7\log_4 \sqrt[7]{81} - 2\log_7 \frac{1}{49} + 3\log 0.01$ ($0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$)

$= 7\log_4 3^{\frac{4}{7}} - 2\log_7 7^{-2} + 3\log 10^{-2}$

$= 7 \times \frac{4}{7}\log_4 3 - 2(-2)\log_7 7 + 3(-2)\log 10 = 4 + 4 - 9 = -1$

۲) اگر $\log 3 = 0.5$ و $\log 7 \simeq 0.8$ باشند، مقدار $\log \frac{8100}{\sqrt[5]{3432}}$ را بیابید.

$\log 8100 - \log \sqrt[5]{3432} = \log 3^4 \times 10^2 - \log \sqrt[5]{7^3}$

$= \log 3^4 + \log 10^2 - \log 7^{\frac{3}{5}} = 4\log 3 + 2\log 10 - \frac{3}{5}\log 7$

$= 4 \times 0.5 + 2 - \frac{3}{5} \times 0.8 = 2 + 2 - 0.48 = 4 - 0.48 = 3.52$

۳) حاصل عبارت های لگاریتمی زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt{2(\log 25)^2+(\log\frac{1}{5})^2}$

$\log 25 = \log 5^2 = 2\log 5$

$\log\frac{1}{5} = \log 1 - \log 5 = -\log 5$

$= \sqrt{2(2\log 5)^2+(-\log 5)^2}$

$= \sqrt{2(4)(\log 5)^2+(\log 5)^2} = \sqrt{8(\log 5)^2+(\log 5)^2} = \sqrt{9(\log 5)^2}$

$= 3\log 5$

ب) $\log_{16\sqrt[3]{4}} 8\sqrt{2} = \log_{2^4\times 2^{\frac{2}{3}}} 2^3\times 2^{\frac{1}{2}}$

$= \log_{2^{\frac{14}{3}}} 2^{\frac{7}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{14}{3}}\log_2 2 = \frac{7\times 3}{2\times 14} = \frac{3}{4}$

پ) $\log(5+2\sqrt{6}) + \log(5-2\sqrt{6}) = \log(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})$

$= \log(5^2-(2\sqrt{6})^2) = \log(25-24) = \log 1 = 0$

ت) $\log_{(\sqrt{5}-2)}(\sqrt{5}+2)$

$(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = (\sqrt{5})^2-2^2 = 5-4 = 1$

$\sqrt{5}+2 = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$

$= \log_{\sqrt{5}-2}\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \log_{\sqrt{5}-2}(\sqrt{5}-2)^{-1} = -\log_{\sqrt{5}-2}(\sqrt{5}-2) = -1$

ث)
$$\frac{1}{1+\log_{12}^{3}}+\frac{1}{1+\log_{12}^{4}}=\frac{1}{1+\log_{12}^{3}}+\frac{1}{\frac{1}{1}+\log_{12}^{4}}$$

$$=\frac{1}{1+\log_{12}^{3}}+\frac{1}{\frac{\log_{12}^{4}+1}{\log_{12}^{3}}}=\frac{1}{1+\log_{12}^{3}}+\frac{\log_{12}^{3}}{1+\log_{12}^{4}}=\frac{1+\log_{12}^{3}}{1+\log_{12}^{3}}$$

$$=1$$

ج)
$$\left(a^{\log_{4}^{3}}\right)^{\log_{a}^{8}}=a^{\log_{4}^{3}\times\log_{a}^{8}}$$

حاسبه‌توان:
$$\log_{4}^{3}\times\log_{a}^{8}=\frac{\log 3}{\log 4}\times\frac{\log 8}{\log a}=\frac{\log 3}{\log 2^{2}}\times\frac{\log 2^{3}}{\log a}$$

$$=\frac{\log 3}{2\log 2}\times\frac{3\log 2}{\log a}=\frac{3}{2}\frac{\log 3}{\log a}=\frac{3}{2}\log_{a}^{3}$$

عبارت
$$=a^{\frac{3}{2}\log_{a}^{3}}=\left(a^{\log_{a}^{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{3^{3}}=3\sqrt{3}$$

ح)
$$\log_{\sqrt{9}}\frac{1}{81}+\log_{16}\sqrt{8}+10^{2\log 3}$$

$$\log_{\sqrt{9}}\frac{1}{81}=\log_{3^{2}}3^{-4}=\frac{-4}{2}\log_{3}^{3}=-2=-2$$

$$\log_{4^{2}}2^{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{4}\log_{2}^{2}=\frac{3}{8}$$

$10^{2\log 4} = 10^{\log 4^2} = 10^{\log 16} = 9$

حاصل عبارت $= -6 + \frac{4}{8} + 9 = 4 + \frac{4}{8} = \frac{27}{8}$

۴) اگر $A = 3^9$، مقدار $\log_4 9A^2$ را برحسب a بدست آورید.

$\log_4 9(3^9)^2 = \log_4 3^2 \times 3^{2a} = \log_4 3^{2+2a}$

$= (2+2a)\log_4 3 = 2+2a$

۵) اگر $\log 4 = a$، $\log 2 = b$، مقدار $\log \sqrt[4]{54}$ را برحسب a و b بیابید.

$\log \sqrt[4]{54} = \log 54^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log 54 = \frac{1}{4}\log(27 \times 2)$

$= \frac{1}{4}(\log 27^3 + \log 2) = \frac{1}{4}(3\log 3 + \log 2)$

$= \frac{1}{4}(3a + b)$

۶) اگر $\log_4 3 = 0/8$ باشد، مقدار $\log_{12} 6$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{18}$ ۲) $\frac{8}{11}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{7}{9}$

$\log_4 3 = \log_{2^2} 3^1 = \frac{1}{2}\log_2 3 \rightarrow \log_2 3 = 1/6$

$$\log_{12}^{6} = \frac{\log_2^{6}}{\log_2^{12}} = \frac{\log_2^{2\times 3} + \log_2^{2}}{\log_2^{2^2\times 3} + \log_2^{4}} = \frac{1,6+1}{2+1,6} = \frac{2,6}{3,6} = \frac{13}{18}$$

گزینه ۱

۷) اگر $(0/4)^{2x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2}$ باشد، $\log_8(9x+1)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-1} = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{3}\right)^{x^2} \rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x-1} = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right)^{x^2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3x^2} \rightarrow 2x-1 = -3x^2$$

$$\rightarrow 3x^2+2x-1=0 \xrightarrow{3-1=2} \begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x=-1 \rightarrow \log_8(-9+1) = \log_8^{-8} \quad \times$$

$$x=\frac{1}{3} \rightarrow \log_8\left(9\times\frac{1}{3}+1\right) = \log_8^{4} = \log_{2^3}^{2^2}$$

$$= \frac{2}{3}\log_2^2 = \frac{2}{3}$$

گزینه ۱

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی قسمت سوم

جلسه هفتم صفحات:۸۷ تا۸۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

معادله لگاریتمی :

معادله‌ای که در آن، مجهول در جلوی لگاریتم یا در پایه‌ی لگاریتم قرار دارد را معادلات لگاریتمی می‌گوییم.

برای حل معادلات لگاریتمی در صورت لزوم از ویژگی های لگاریتم استفاده می‌کنیم تا به یکی

از دو صورت زیر درآید :

۱) هر دو طرف فقط یک عبارت لگاریتمی هم پایه باشد . در این حالت چون تابع لگاریتم

یک به یک است می‌توانیم لگاریتم ها را از دو طرف حذف بزنیم و معادله حاصل را حل کنیم .

یعنی : $\log_a u = \log_a v \Rightarrow u = v$

۲) یک طرف لگاریتم و طرف دیگر عدد (یا عبارت) باشد . در این حالت از تعریف

لگاریتم استفاده می‌کنیم و معادله را به شکل توانی می‌نویسیم یعنی :

$$\log_a u = b \Rightarrow u = a^b$$

تذکر مهم : بعد از یافتن جواب یا جواب ها آن‌ها را در معادله لگاریتمی قرار می‌دهیم .

طبق آنچه در تواب لگاریتمی گفتیم باید حتماً لگاریتم مثبت و مبنا هم مثبت و مخالف یک باشد. جوابی که یکی از شرط‌ها را نقض کند مورد قبول نیست.

مثال: معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log(2x-1)+\log(x+2)=\log 20-\log 2$

$\log(2x-1)(x+2)=\log\frac{20}{2} \rightarrow \log(2x^2+4x-x-2)=\log 10$

$\Rightarrow 2x^2+5x-2=10 \rightarrow 2x^2+5x-12=0$

$\Delta=25-4(2)(-12)=25+144=169 \rightarrow x=\frac{-5\pm 13}{4}$ $\begin{cases}\frac{-5+13}{4}=2 \checkmark\\ \frac{-5-13}{4}=-\frac{9}{2} \times\end{cases}$

$x=-\frac{9}{2} \rightarrow \log(2\times(-\frac{9}{2})-1)=\log -10 \times$, $\log(-\frac{9}{2}+2)\times$

ب) $\log(x+1)=\frac{1}{2}\log(x^2+x^2+2)$

$\xrightarrow{\times 2} 2\log(x+1)=\log(x^2+x^2+2)$

$\rightarrow \log(x+1)^2=\log(x^2+x^2+2)$

$\rightarrow x^2+2x^2+2x+1=x^2+x^2+2 \rightarrow 2x^2+2x-2=0$

$\Delta = 9 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 \rightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{4} < \begin{matrix} \frac{1}{2} \checkmark \\ -2 \times \end{matrix}$

ب) $\log_3(2x^2+1) - \log_3(x+2) = 1$

$\rightarrow \log_3 \frac{2x^2+1}{x+2} = 1 \rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = 3^1 \rightarrow 2x^2+1 = 3x+6$

(به توان ۳)

$\rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$

$x = \frac{3 \pm 7}{4} < \begin{matrix} \frac{5}{2} \checkmark \\ -1 \checkmark \end{matrix}$

ج) $\log_x(3x+1) = 2 - \log_x(x-4)$

$\rightarrow \log_x(3x+1) + \log_x(x-4) = 2$

$\rightarrow \log_x(3x+1)(x-4) = 2 \rightarrow (3x+1)(x-4) = x^2$

$3x^2 - 12x + x - 4 = x^2 \rightarrow 2x^2 - 11x - 4 = 0$

$\div 2 \rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow (x-8)(x+3) = 0$

$< \begin{matrix} x = 8 \checkmark \\ x = -3 \times \end{matrix}$

ت) $\log_{2}(2+\log_{4}x)=2$

به توان ۲

$\rightarrow 2+\log_{4}x=2^{2}\rightarrow \log_{4}x=4-2$

$\rightarrow \log_{4}x=2\rightarrow x=4^{2}=9$

به توان

ج) $\log_{5}x+\log_{\sqrt{5}}x-2\log_{25}x=\log_{2}25$

$\rightarrow \log_{5}x+\log_{5^{\frac{1}{2}}}x-2\log_{5^{2}}x=\log_{2}5^{2}$

$\rightarrow \log_{5}x+\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_{5}x-2\times\frac{1}{2}\log_{5}x=2\log_{2}5$

$\rightarrow \log_{5}x+2\log_{5}x-\log_{5}x=2\log_{2}5$

$\rightarrow 2\log_{5}x=2\log_{2}5\rightarrow \log_{5}x=\log_{2}5$

به توان

$\rightarrow x=5^{\log_{2}5}$

کاربرد لگاریتم:

۱) مسائل زلزله : اگر قدرت (بزرگی) زمین‌لرزه M ریشتر و انرژی آزاد شده از آن E (با واحد ارگ) باشد داریم:

$$\log E = 11,8 + 1,5M$$

مثال: در یک زلزله ۵ ریشتری مقدار انرژی آزاد شده چقدر است؟

$$\log E = 11,8 + 1,5 \times 5 = 11,8 + 7,5 = 19,4 \rightarrow \log E = 19,4 \rightarrow E = 10^{19,4}$$

۲) مسائل نیمه‌عمر، رشد و زوال :

هرگاه در این مسائل مجهول در توان باشد (اغلب زمان) با گرفتن لگاریتم از دو طرف تساوی و استفاده از ویژگی $\log_a^n = n\log_a$ و مقادیر لگاریتم داده شده، مقدار مجهول را می‌یابیم.

مثال:

مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر موردنظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ $(\log 3 = 0/48)$

۱) ۳۶۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۴۰

✓

ماه یا دوره ۳۰ روزه

$A = 24(1 - 0.1)^t \xrightarrow{\div 24} \frac{1}{3} = (0.9)^t \xrightarrow{\log} \log\frac{1}{3} = \log 0.9^t$

$\log 3^{-1} = t \log\frac{9}{10} \rightarrow -\log 3 = t(\log 3^2 - \log 10)$

$\rightarrow -0.48 = t(2 \times 0.48 - 1) \rightarrow t = \frac{-0.48}{-0.4} = 12$ ماه

$12 \times 30 = 360$ روز

مثال: یک قایق کاملاً باری روزانه ۵ درصد بارش را از دست می‌دهد. باد این قایق پس از چند روز به نصف بار روز اول می‌رسد؟ ($\log 2 = 0.301$ ، $\log 19 = 1.287$)

$\frac{1}{2}A_0 = A_0(1 - 0.05)^t \rightarrow \frac{1}{2} = 0.95^t$

$\xrightarrow{\log} \log\frac{1}{2} = \log 0.95^t \rightarrow \log 2^{-1} = t \log 0.95$

$\rightarrow -\log 2 = t \log\frac{19}{20} \rightarrow -\log 2 = t(\log 19 - \log 2 \times 10)$

$\rightarrow -\log 2 = t(\log 19 - \log 2 - \log 10)$

$\rightarrow -0.301 = t(1.287 - 0.301 - 1) \rightarrow -0.301 = t(-0.014)$

$t = \frac{-0.301}{-0.014} = 21.5$

مثال: نیمه‌عمر یک ماده رادیواکتیو ۱۰ سال است. پس از چند سال از ۱۰۰ میلی‌گرم آن ۴۰ میلی‌گرم باقی می‌ماند؟ ($\log 0.4 = -0.39$, $\log 2 = 0.3$)

$$40 = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} \xrightarrow{\div 100} 0.4 = 2^{-\frac{t}{10}}$$

$$\xrightarrow{\log} \log 0.4 = \log 2^{-\frac{t}{10}}$$

$$\rightarrow -0.39 = -\frac{t}{10} \times 0.3 \rightarrow t = \frac{-0.39}{-0.3} = 13 \text{ سال}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

رسم توابع لگاریتمی

جلسه هشتم

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

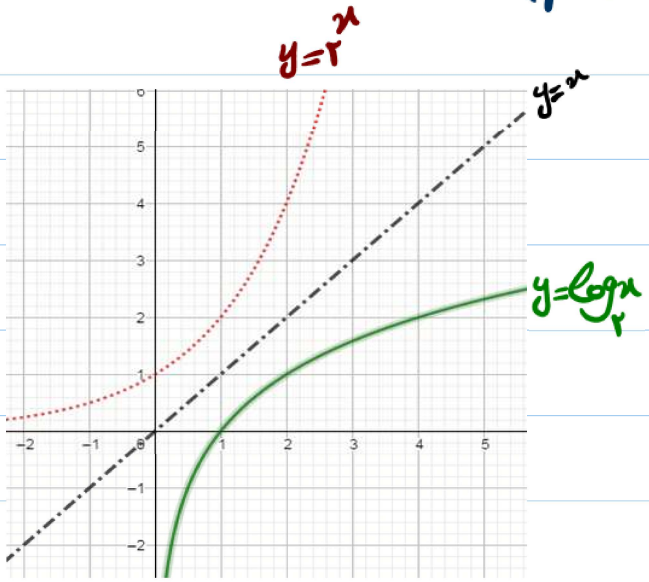
معاونت آموزش متوسطه

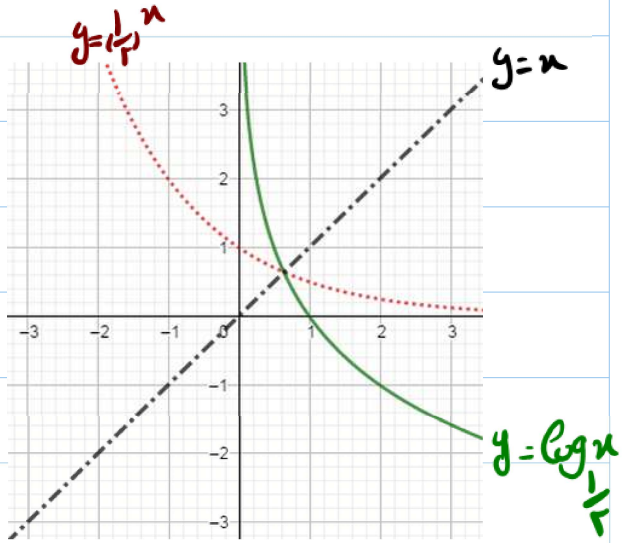
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

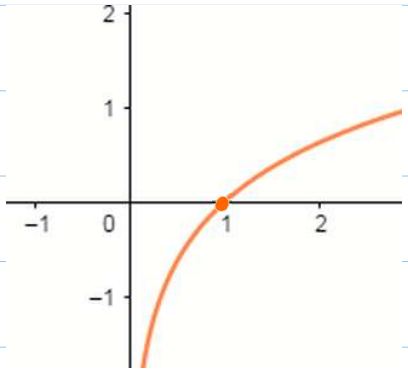
رسم نمودار تابع لگاریتمی :

همانطور که گفتیم تابع لگاریتمی وارون تابع نمایی است. پس نمودار آن قرینه نمودار تابع نمایی نسبت به خط $y=x$ (نیم ساز ناحیه اول و سوم) است.



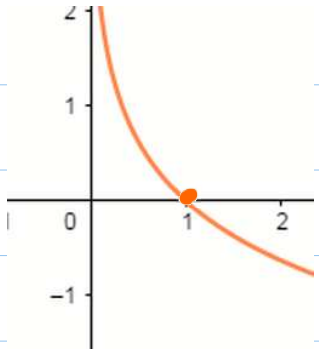


در حالت کلی نمودار تابع $y=\log_a x$ با توجه به مقدار a به یکی از دو صورت زیر است:



$a>1$

$D=(0,+\infty)$, $R=\mathbb{R}$, افزایشی



$0<a<1$

$D=(0,+\infty)$, $R=\mathbb{R}$, کاهشی

برای رسم توابع لگاریتمی ساده مانند $y=\log_a x$ از روش نقطه یابی استفاده می‌کنیم.

سه مقدار زیر را به x می‌دهیم:

۱) مبنا ۲) یک ۳) معکوس مبنا

مثال: نمودار سه تابع $y=\log_2 x$ ، $y=\log_4 x$ و $y=\log_5 x$ را رسم کنید و با یکدیگر مقایسه کنید.

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

$y=\log_2 x$

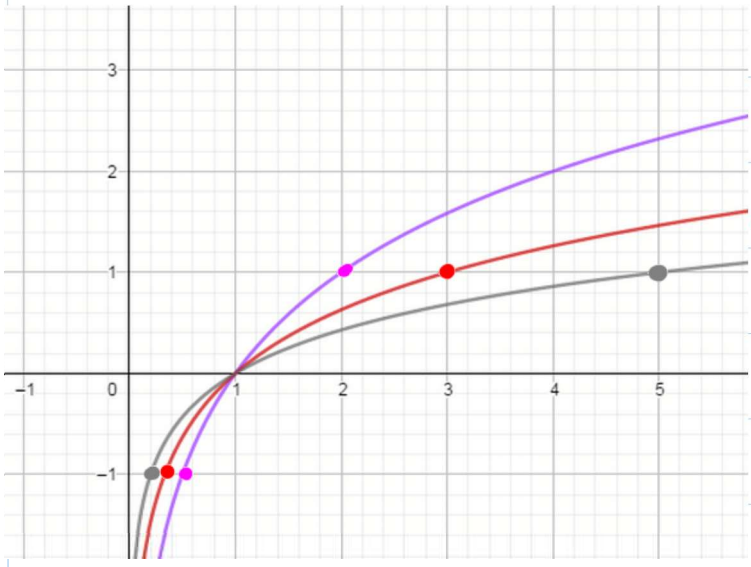
x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-1	0	1

$y=\log_4 x$

x	$\frac{1}{4}$	1	4
y	-1	0	1

$y=\log_5 x$

x	$\frac{1}{5}$	1	5
y	-1	0	1



هرچه پایه بزرگتر شود نمودار در راستای محور yها فشرده‌تر می‌شود و به محور x نزدیک‌تر می‌شود.

$y=\log_2 x$

$y=\log_4 x$

$y=\log_5 x$

تمرین: توابع $y=\log_{\frac{1}{2}}^{x}$ ، $y=\log_{\frac{1}{5}}^{x}$ را رسم کنید و با یکدیگر مقایسه کنید.

تذکر: از قرارداد انتقال برای رسم توابع لگاریتمی به صورت $y=k\log_a(x\pm b)\pm c$ استفاده کنیم.

نکته: می‌توان از نقطه‌ی هم برای رسم اینگونه توابع استفاده کرد. دقت کنید همیشه لگاریتم‌ها

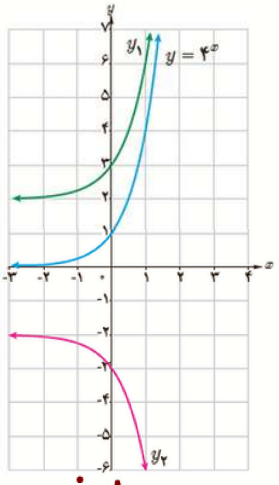
به جای x قرار دهید تا به $\log_a^0$ ، $\log_a^1$ یا $\log_{a^n}^{a^m}$ برسیم.

نکته: برای یافتن محل برخورد نمودار تابع لگاریتمی با محور xها کافی است y را با صفر قرار داده و معادله لگاریتمی حاصل را حل کنیم.

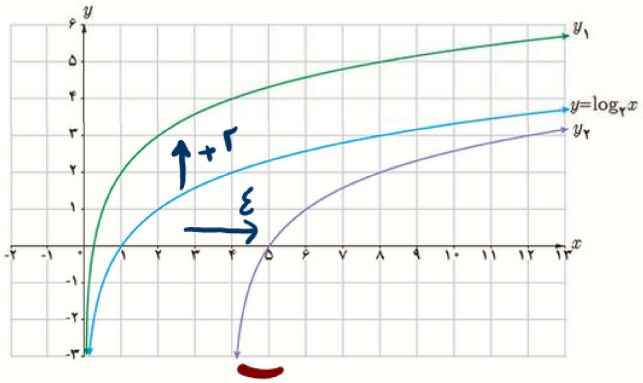
نکته: برای یافتن خط مجانبی که تابع لگاریتمی به آن نزدیک می‌شود (مجانب قائم) داخله تابع را برابر

مثال

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.



الف



ب

الف) $y_1=4^x+2$ ، $y_2=-4^x-2$

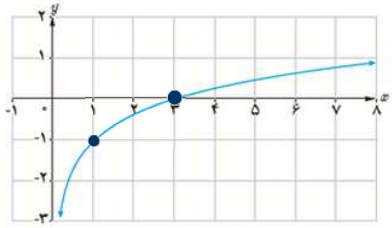
ب) $y_1=\log_4 x+2$ ، $y_2=\log_4(x-4)$ $\begin{cases} x=5\to y=0 \\ x=8\to y=1 \end{cases}$

مثال :

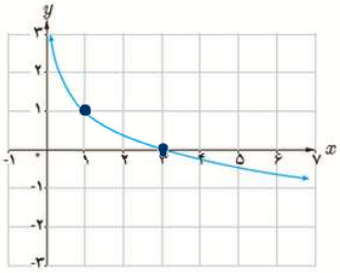
کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

۱) $y = \log_۳ (x-۱)$ ۲) $y = ۳^x + ۱$ ۳) $y = ۱ - ۳^x$

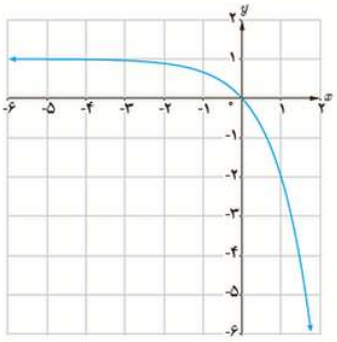
۴) $y = \log_۳ x - ۱$ ۵) $y = ۱ - \log_۳ x$ ۶) $y = ۳^{(x-۲)}$



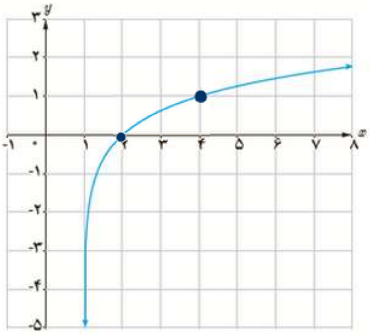
(الف)



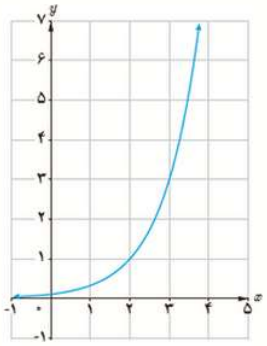
(ب)



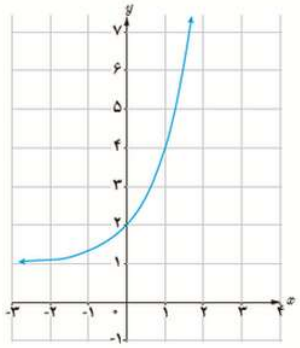
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

الف) ۴) $y = \log_۳ x - ۱$

$\begin{cases} x=۳ \rightarrow y = ۱-۱ = ۰ \\ x=۱ \rightarrow y = ۰-۱ = -۱ \end{cases}$

ب) ۵) $y = ۱ - \log_۳ x$

$\begin{cases} x=۳ \rightarrow y = ۱-۱ = ۰ \\ x=۱ \rightarrow y = ۱-۰ = ۱ \end{cases}$

پ) ۳) $y = ۱ - ۳^x$

$x=۰ \rightarrow y = ۱-۱ = ۰$

ت) ۱) $y = \log_۳ (x-۱)$

$\begin{cases} x=۲ \rightarrow y = ۰ \\ x=۴ \rightarrow y = \log_۳ (۴-۱) = \log_۳ ۳ = ۱ \end{cases}$

ث) ۶) $y = ۳^{x-۲}$ ۲) ۲) $y = ۳^x + ۱$

مثال: نمودار توابع لگاریتمی زیر را رسم کنید.

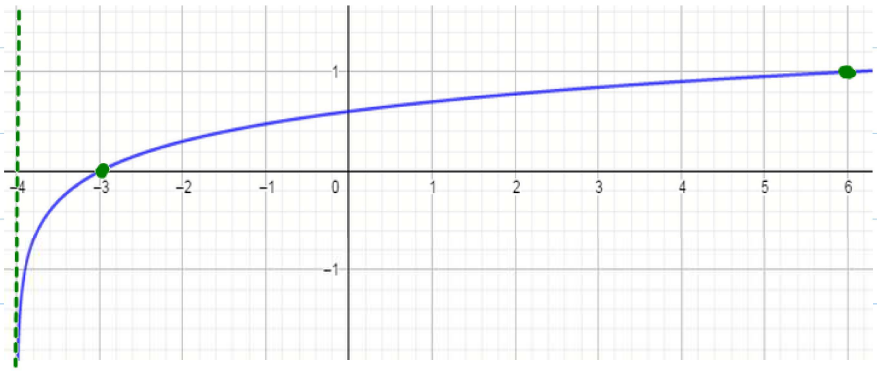
الف) $y = \log_{10}(x+4)$

x	-3	6
y	0	1

$\log_{10}^{1}$ $\log_{10}^{1}$

$D: x+4>0$

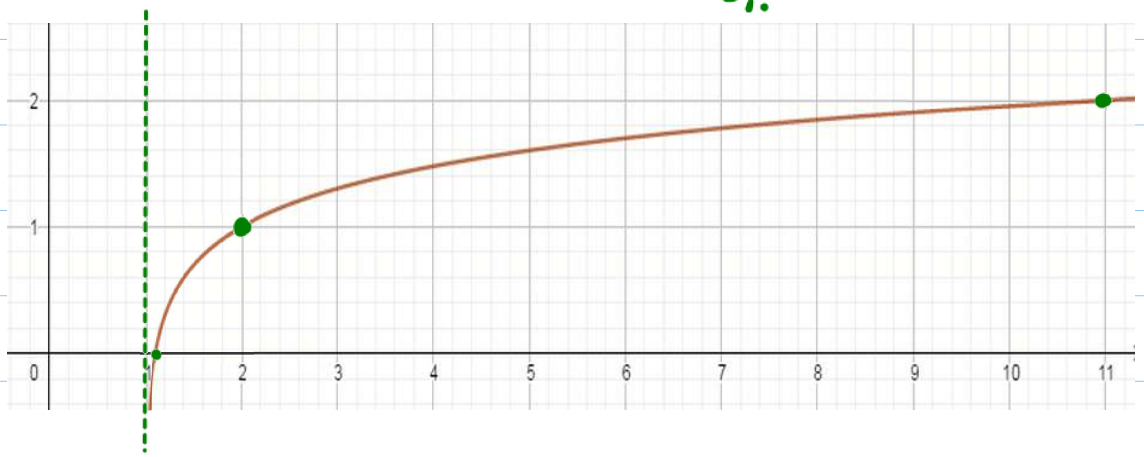
$x > -4$



ب) $y = 1 + \log_{10}(x-1)$

x	2	11
y	1	2

$1+\log_{10}^{1}$ $1+\log_{10}^{1}$



محل برخورد با محور x ها: $0 = 1 + \log_{10}(x-1) \rightarrow -1 = \log_{10}(x-1)$

$\rightarrow x-1 = 10^{-1} = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{1}{10}+1 = \frac{11}{10}$

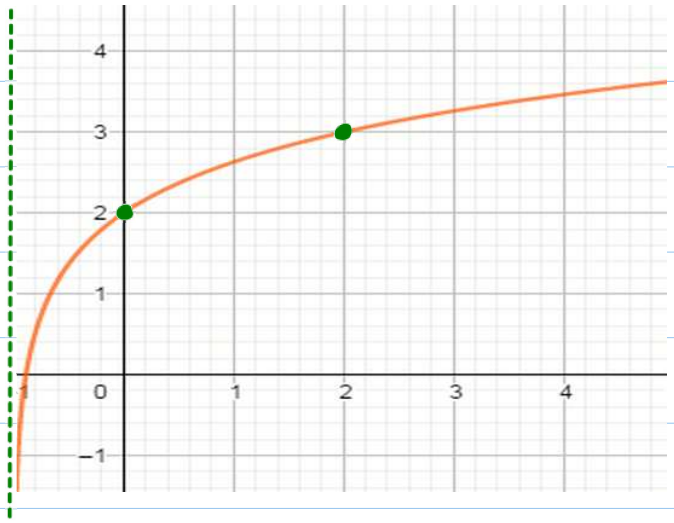
$D: x-1>0 \rightarrow x>1$

ب) $y = 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

x	۰	۲
y	۲	۳

$x=2$ ← $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{2^{-1}} 2^1 = -1$

تمرین: محل برخورد نمودار را با محور x ها مشخص کنید.



$D: x+1>0 \rightarrow x>-1$