حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

جلسه اول: صفحات ۳۸ تا۴۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

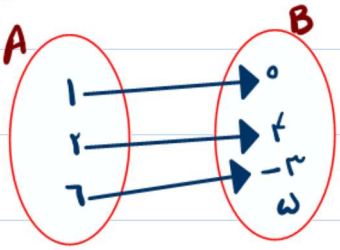
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری مفهوم تابع :

هر تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. A را دامنه و B را هم‌دامنه این تابع می‌نامیم.

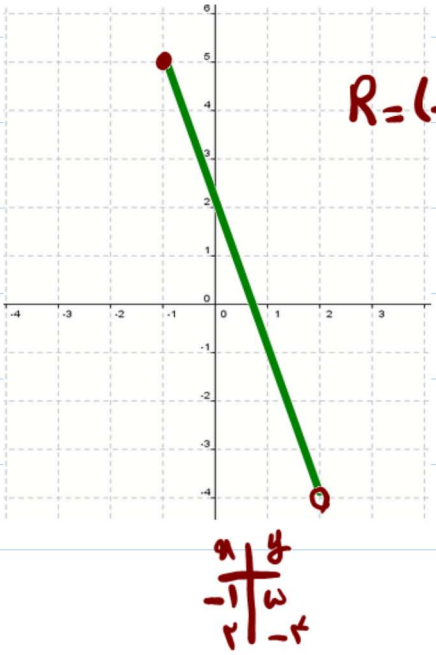


هم‌دامنه $= B = \{0, 4, -3, 5\}$

برد $= R = \{0, 4, -3\}$

مجموعه عضوهایی از B را که به عضوی از A نسبت داده شده‌اند برد این تابع می‌نامیم. بنابراین برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه تابع است.

مثال : برای تابع $\begin{cases} f:[-1,2) \to \mathbb{R} \\ f(x) = -3x + 2 \end{cases}$ (هم‌دامنه: دامنه) کدام‌یک از شناسه‌های زیر قابل قبول است؟



$R = (-4, 5]$

الف) $\begin{cases} f:[-1,2) \to (-2,5) \\ f(x) = -3x + 2 \end{cases}$ ✗

$(-4,5] \not\subset (-2,5)$

ب) $\begin{cases} f:[-1,2) \to [1,+\infty) \\ f(x) = -3x + 2 \end{cases}$ ✗

$(-4,5] \not\subset [1,+\infty)$

ج) $\begin{cases} f:[-1,2) \to (-4,5] \\ f(x) = -3x + 2 \end{cases}$ ✓

مثال :

برای تابع $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to[0,\frac{1}{9}] \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ کدام‌یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟

(ت) $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

(پ) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to[0,\frac{1}{9}] \\ f(x)=x \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to[0,\infty) \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

(الف) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

الف) قابل قبول نیست زیرا دامنه تغییر کرده است .

ب) قابل قبول است زیرا $[0,\frac{1}{3}] \subseteq [0,\frac{1}{9}]$.

پ) قابل قبول نیست زیرا ضابطه تابع تغییر کرده است .

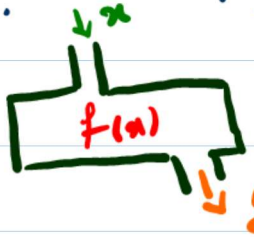
ت) قابل قبول است زیرا $\mathbb{R} \supseteq [0,\frac{1}{9}]$.

تابع به عنوان ماشین

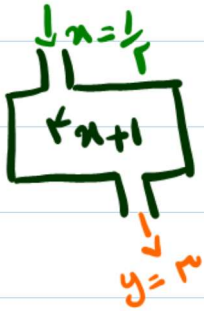
می‌توان تابع را ماشینی در نظر گرفت که به ازای هر ورودی یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه تابع داده می‌شوند و خروجی‌ها در برد هستند . در ضمن به ازای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد . البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسان داشته باشند

اگر x عضوی از دامنه تابع f و y خروجی این تابع به ازای x باشد، می‌نویسیم $y=f(x)$

به عملیاتی که ماشین تابع روی ورودی انجام می‌دهد تا خروجی را تحویل دهد، ضابطه تابع می‌گویند.



مثال: اگر خروجی ماشین تابع $f(x)=4x+1$ عدد 3 باشد، ورودی آن چه عددی بوده است؟



$$4x+1=3 \Rightarrow 4x=3-1$$

$$\Rightarrow 4x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

جمع‌بندی:

- برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه هم دامنه و ضابطه تابع داده شده باشد

- اگر هم دامنه داده نشده باشد و فقط ضابطه و دامنه را داشته باشیم، می‌توانیم هم دامنه را هر مجموعه‌ای که شامل برد باشد در نظر بگیریم.

- اگر دامنه داده نشده باشد، بزرگترین مجموعه‌ای که اعضای آن را بتوانیم به جای x قرار دهیم و خروجی‌ی تحویل بگیریم، دامنه در نظر می‌گیریم.

تساوی دو تابع :

دو تابع f و g با هم برابرند هرگاه :

الف) $D_f = D_g$

ب) برای هر x از دامنه یکسان داشته باشیم $f(x) = g(x)$.

به عبارت دیگر برای هر x ورودی یکسان، خروجی ها هم یکی باشد .

مثال : در هر قسمت تساوی دو تابع را بررسی کنید .

الف) $f = \{(-2,7), (3,7), (4,0)\}$

$g = \{(-2,7), (4,0), (3,6)\}$

$D_f = D_g = D = \{-2, 3, 4\}$

ولی $f(3) \neq g(3)$ ($7 \neq 6$) $\Rightarrow f \neq g$

ب) $f(x) = 4x - 1$ ، $g(x) = \frac{8x-2}{2} = \frac{2(4x-1)}{2} = 4x - 1$

$f = g$

ج) $\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x \end{cases}$ $\begin{cases} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \end{cases}$

زیرا ضابطه‌های یکسان نیست : $f \neq g$

ب) $\begin{cases} f: [0,2] \to \mathbb{R} \\ f(x) = 4x^2 - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} g: (0,2) \to \mathbb{R} \\ g(x) = 4x^2 - 1 \end{cases}$

$D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$: دامنه‌ها برابر نیست

پ) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to [0,+\infty) \\ f(x) = x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{3x+3}{3} = \frac{3(x+1)}{3} = x+1 \end{cases}$

$f = g$

۲) $f(x) = \frac{x}{x}$ $\quad g(x) = 1$

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

$\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

جلسه دوم : حل تمرین صفحه۴۲و۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

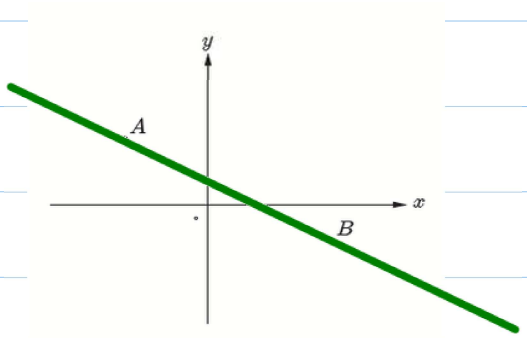
اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

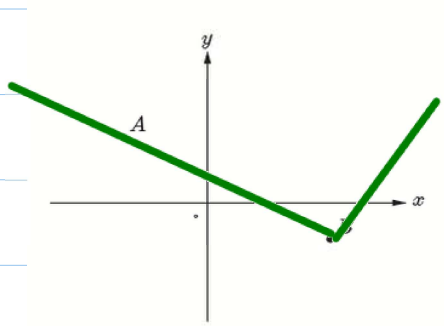
معاونت آموزش متوسطه

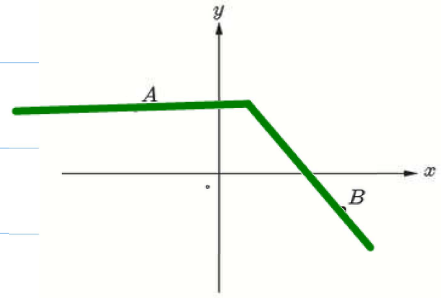
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

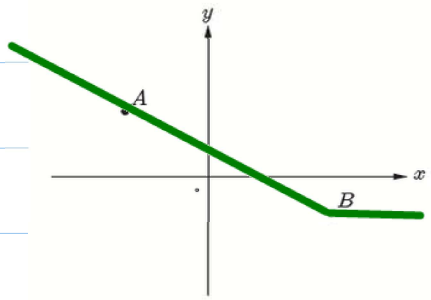
گروه ریاضی استان همدان

۱ در صفحه مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟ بی شمار تابع









۲ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب) برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم‌دامنهٔ تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است.

ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن بازهٔ $[۰,۳]$ است.

الف) نادرست مثال نقض

$f=\{(1,2),(3,5)\}$ $D_f=D_g=\{1,3\}$

$g=\{(1,5),(3,2)\}$ $R_f=R_g=\{2,5\}$

$f(1)\neq g(1)$ ، $f(2)\neq g(2)$ $\Rightarrow f\neq g$

ب) درست است. هم دامنه تابع هر مجموعه‌ای شامل برد یا خود برد است.

پ) نادرست. برد زیر مجموعه هم دامنه است.

ت) درست مانند: $\begin{cases} f:[0,2]\to\mathbb{R} \\ y=4x-1 \end{cases}$ $\begin{cases} f:[0,2]\to\mathbb{R} \\ y=2\sqrt{x} \end{cases}$

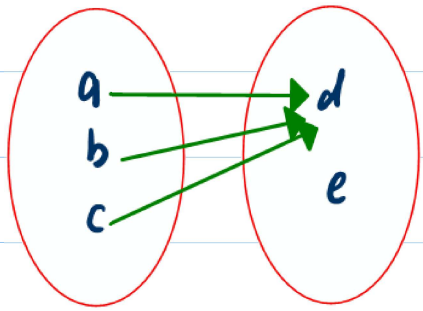
۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟

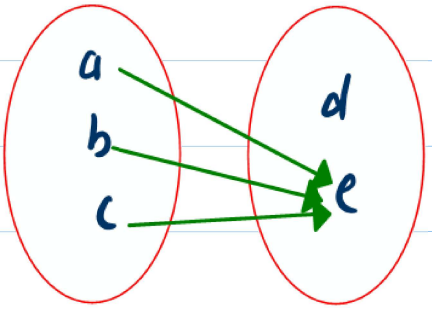
بی‌شمار تابع وجود دارد. $\begin{cases} f:(0,+\infty)\to\mathbb{R} \\ y=x^2 \end{cases}$

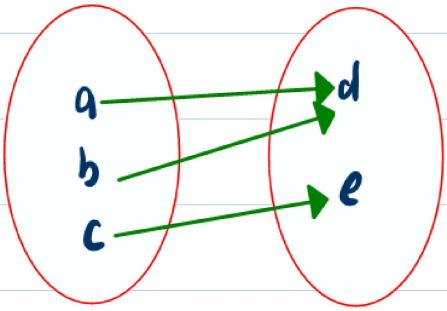
۴ همه تابع‌های از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{d,e\}$ را بنویسید(از نمودار پیکانی کمک بگیرید).

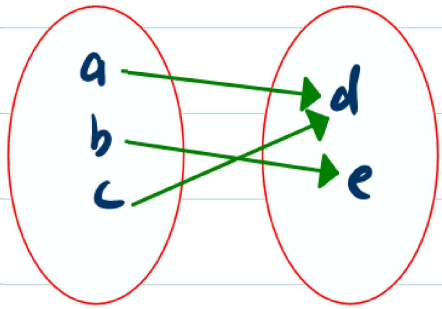
نکته: تعداد توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر n^m است.

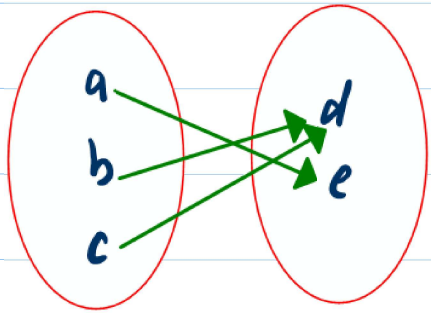
اصل ضرب : $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2} = 2^3 = 8$
a b c

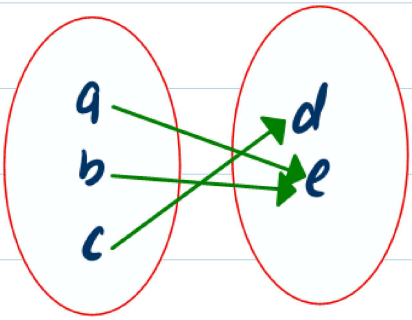


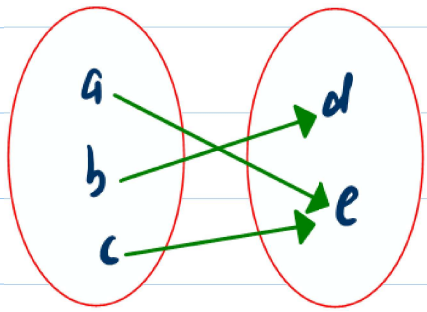


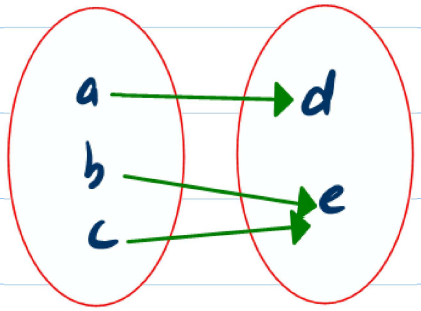












(4)

۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

✓ $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \lvert x \rvert \end{cases}$	$\begin{cases} r: [0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ r(a) = 5a \end{cases}$
✓ $\begin{cases} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = 5x \end{cases}$	✓ $\begin{cases} s: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ s(a) = 5a \end{cases}$
✓ $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} t: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \\ t(x) = 5x \end{cases}$

$f = h$ $\quad$ $g = s$

۲ و ۲+ با هیچ عددی برابر نیستند.

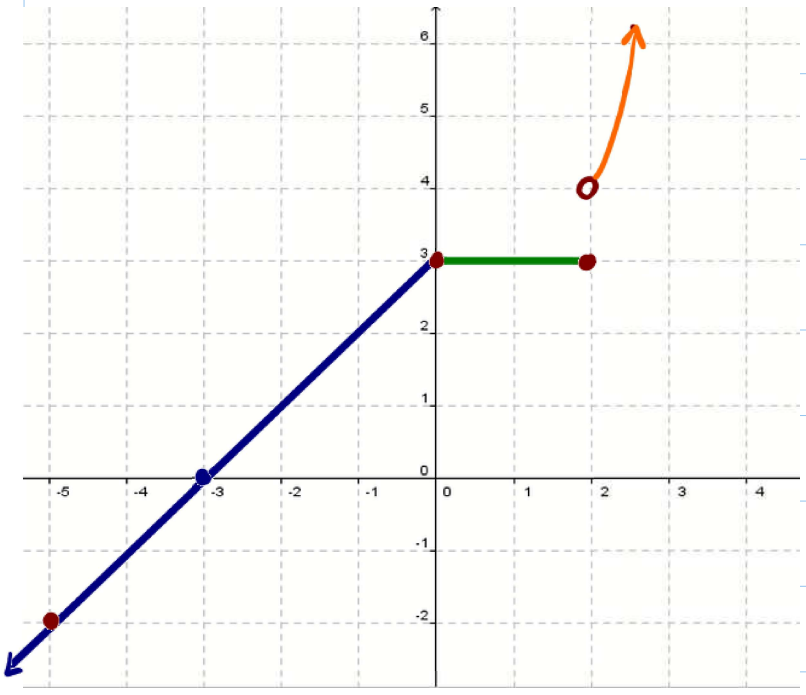
۶ تابع f در همهٔ شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$

ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول -3 قطع می‌کند.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x + 3 & x < 0 \end{cases}$$

۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ‌سال را برآورد کرد :

تابع خطی برای مردان $M(x) = ۲/۸۹x + ۷۰/۶۴$

تابع خطی برای زنان $F(x) = ۲/۷۵x + ۷۱/۴۸$

که در آنها x طول استخوان بازو برحسب سانتی‌متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی‌متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

الف) $M(۳۵) = ۲,۸۹ \times ۳۵ + ۷۰,۶۴ = ۱۰۱,۱۵ + ۷۰,۶۴ = ۱۷۱,۷۹ \text{ cm}$

ب) $۱۸۵ = ۲,۸۹x + ۷۰,۶۴ \Rightarrow ۱۸۵ - ۷۰,۶۴ = ۲,۸۹x$

$$x = \frac{۱۱۴,۳۶}{۲,۸۹} \simeq ۳۹,۵۷ \text{ cm}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس دوم : انواع تابع

جلسه سوم : صفحات ۴۴ تا ۴۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱) توابع گویا :

اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $q(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر نباشد

به تابع با ضابطه $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ و دامنه $D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid q(x)\neq 0\}$ تابع گویا می‌گوییم.

به عبارت دیگر دامنه توابع گویا = اعداد حقیقی منهای ریشه‌های مخرج

یا

$D_f = \mathbb{R} - \{$ اعدادی که مخرج را صفر می‌کنند $\}$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{2x-1}{3x+3}$

$3x+3=0 \rightarrow 3x=-3 \rightarrow x=-\frac{3}{3}=-1$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

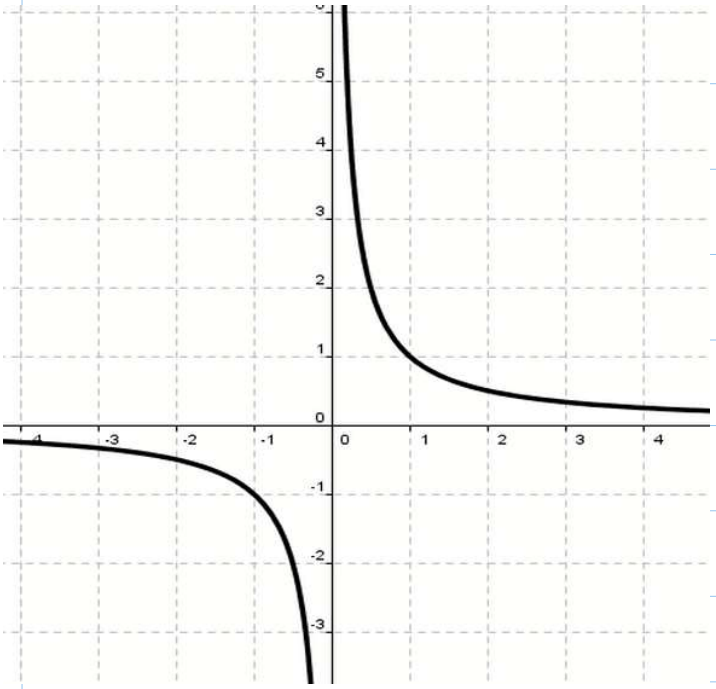
ب) $g(x)=\frac{4}{2x^2-3x+1}$

$2x^2-3x+1=0$

$2-3+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \end{cases}$

$D_g = \mathbb{R} - \{1, \frac{1}{2}\}$

نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$



۲) تابع ریشه nام :

الف) اگر n عدد طبیعی و زوج باشد به تابعی که به هر عدد نامنفی، ریشه nام نامنفی آن را نسبت می دهد تابع ریشه nام می گوییم.

ب) اگر n عدد طبیعی و فرد و مخالف یک باشد، به تابعی که به هر عدد حقیقی ریشه nام آن را نسبت می دهد تابع ریشه nام می گوییم.

فرد n : $g(x)=\sqrt[n]{f(x)} \rightarrow D_g=D_f$

زوج n : $g(x)=\sqrt[n]{f(x)} \rightarrow D_g=\{x\in D_f \mid f(x)\geq 0\}$

به عبارت دیگر دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد همان دامنه تابع زیر رادیکال است و

برای یافتن دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر

قرار می‌دهیم و نامعادله حاصل را حل می‌کنیم.

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{1-2x}$ $\quad 1-2x\geq 0 \rightarrow -2x\geq -1 \xrightarrow{\div(-2)} x\leq \frac{1}{2}$

$D_f=(-\infty,\frac{1}{2}]$

ب) $g(x)=\sqrt[3]{\frac{2x}{x-4}}$ $\quad D_g=D_{\frac{2x}{x-4}}$ ← گویا $D=\mathbb{R}-\{4\}$

$D_g=\mathbb{R}-\{4\}$

ج) $h(x)=\sqrt{\frac{1-x}{2x+4}}$

$\frac{1-x}{2x+4}\geq 0$

$1-x=0 \rightarrow x=1$

$2x+4=0 \rightarrow x=-2$

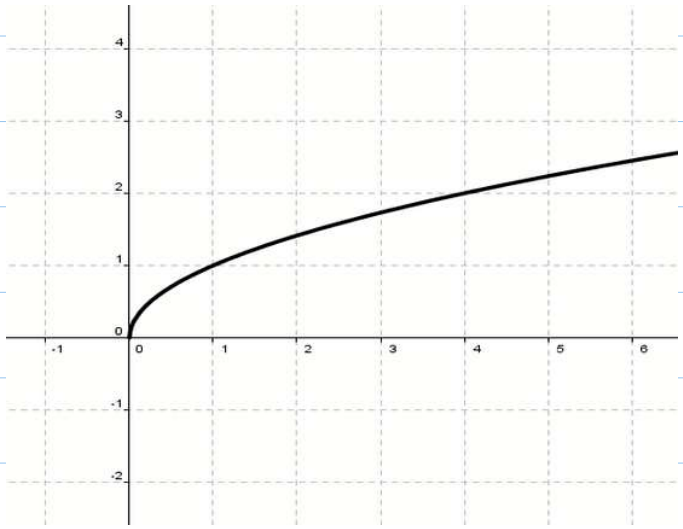
x		-2		1	
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-x}{2x+4}$	$-$	ت ن	$+$	0	$-$

ج

$D_h=(-2,1]$

نمودار توابع رادیکالی (ریشه دوم مثبت)

نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به صورت زیر است :



در ریاضی ۱ با قوانین انتقال برای رسم نمودارها آشنا شدید. این قوانین را برای تابع رادیکالی به کار می بریم :

الف) $y=\sqrt{x}+k$: انتقال عمودی

- $k>0$: نمودار k واحد سمت بالا
- $k<0$: نمودار k واحد سمت پائین

ب) $y=\sqrt{x+k}$: انتقال افقی

- $k>0$: نمودار k واحد سمت چپ
- $k<0$: نمودار k واحد سمت راست

ج) $y=-\sqrt{x}$: نمودار نسبت به محور x ها قرینه می شود. انعکاس

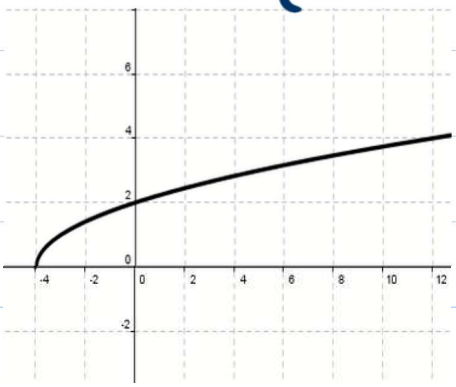
د) $y=\sqrt{-x}$: نمودار نسبت به محور y ها قرینه می شود. انعکاس

نکته: برای رسم توابعی به صورت $y = a\sqrt{bx+c} + d$ از دامنه و نقطه‌ی کمک می‌گیریم (در جلسه‌ی ۲ با ذکر قاعده‌های کلی این نوع تبدیل‌ها تبدیل‌ها بیشتر بررسی می‌شود در جلسه‌ی ۱ به ذکر همین نکته اکتفا می‌کنیم.)

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

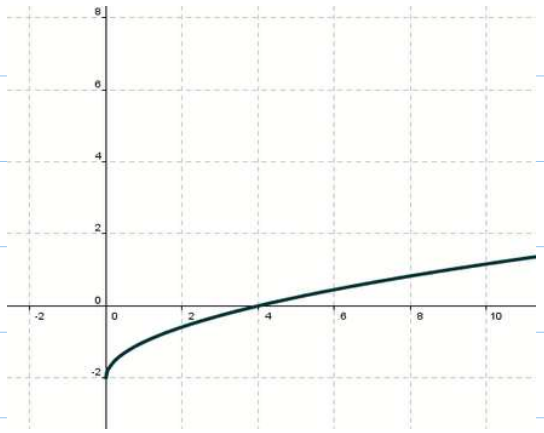
الف) $y = \sqrt{x+4}$

انتقال افقی ۴ واحد به چپ



ب) $y = \sqrt{x} - 2$

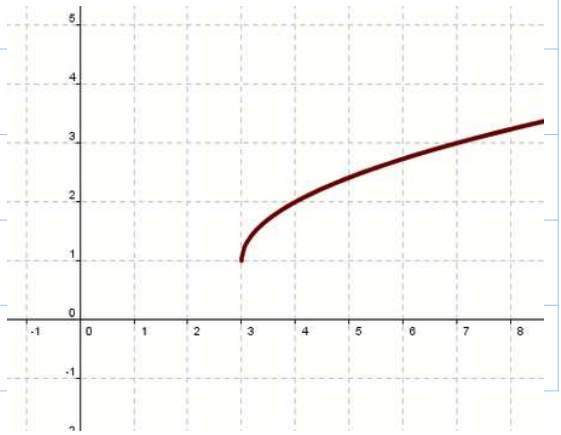
انتقال عمودی ۲ واحد به پایین



پ) $y = 1 + \sqrt{x-3}$

انتقال عمودی ۱ واحد به بالا

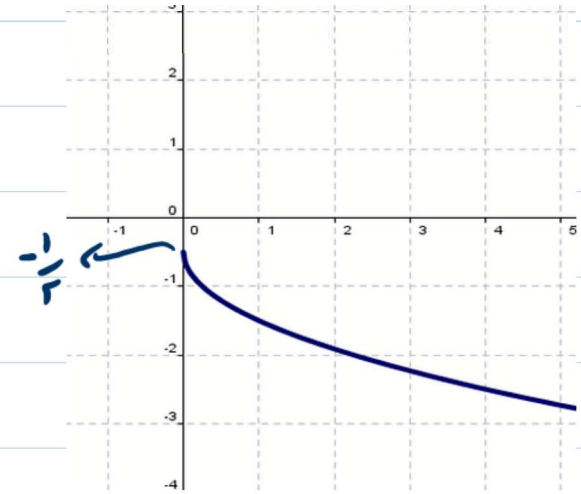
انتقال افقی ۳ واحد به راست



ت) $y = -\sqrt{x} - \frac{1}{2}$

انتقال عمودی $\frac{1}{2}$ به یک پایین

انعکاس نسبت به قرینه xها

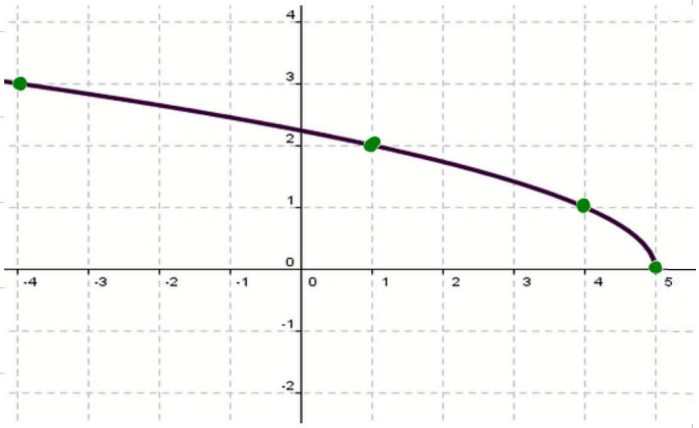


ث) $y = \sqrt{-x+5}$

$D: -x+5 \geq 0 \rightarrow -x \geq -5$

$\xrightarrow{\div(-1)} x \leq 5$

x	-4	1	4	5
y	3	2	1	0

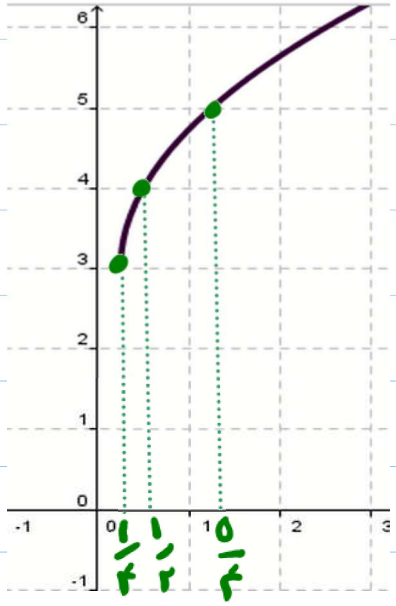


مثال: نمودار تابع $y = \sqrt{4x-1} + 3$ را رسم کنید.

$D: 4x-1 \geq 0 \rightarrow 4x \geq 1$

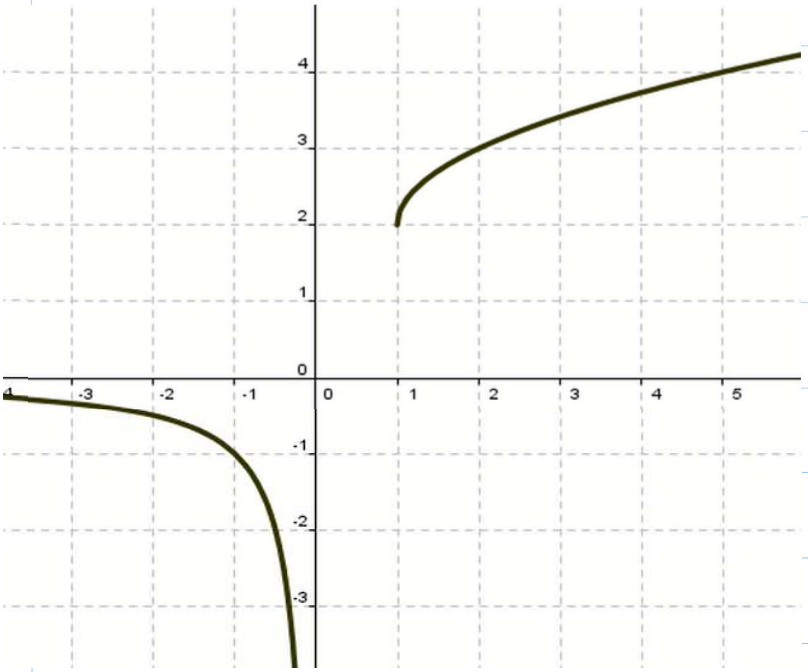
$\rightarrow x \geq \frac{1}{4}$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$
y	3	4	5



یادآوری: توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارند، توابع قطعه‌ای یا چندضابطه‌ای نامیده می‌شوند.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x<0\\ \sqrt{x-1}+2 & x\geq 1\end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

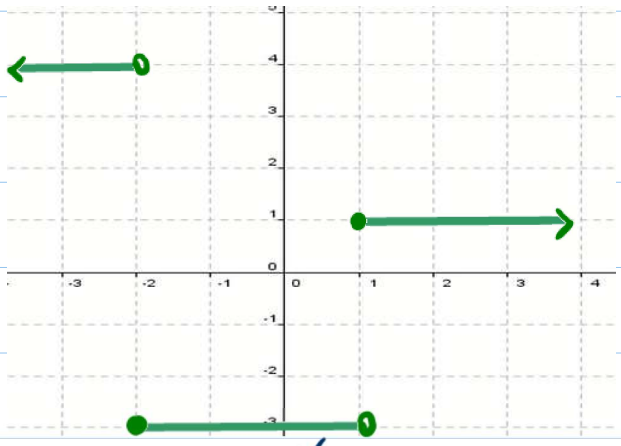


$D=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

$R=(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$

تذکر: اگر در توابع چندضابطه‌ای، همه ضابطه‌ها تابع ثابت باشد (یک عدد که نمودارش خط افقی می‌شود.) آن را **تابع پله‌ای** می‌نامند.

مثال: نمودار تابع $y=\begin{cases}4 & x<-2\\ -3 & -2\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$ را رسم کنید.



قبل از اینکه آخرین نوع توابع خیلی توابع جزء صحیح را بگوئیم به نکته‌ای درباره تشخیص تابع بودن یا نبودن یک رابطه از روی ضابطه اشاره کنیم.

نکته: رابطه یا تابع

فرض کنید رابطه‌ای بین x و y به صورت یک تساوی داریم. در این صورت y تابعی از x است اگر و فقط اگر به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد که در تساوی داده شده صدق کند.

برای تشخیص تابع بودن یا نبودن یک رابطه سعی می‌کنیم y را بر حسب x بدست آوریم و نشان دهیم که تابع هست یا خیر. روش دیگر استفاده از مثال نقض است.

مثال: کدام یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

الف) $y-\sqrt{y}=x-2$ (x^0)

مثال نقض: $x=2 \to y=1, y=0$

تابع نیست

ب) $y^3-3y^2+3y=x$

$y-1=\sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{()^3} (y-1)^3=x-1 \to y^3-3y^2+3y-1=x-1 \xleftarrow{+(-1)}$

تابع است $y=\sqrt[3]{x-1}+1$

پ) $y^2+x=4$

$y^2=4-x \xrightarrow{\sqrt{\ }} |y|=\sqrt{4-x} \to y=\pm\sqrt{4-x}$

تابع نیست $x=1 \to y=\pm\sqrt{3}$

ت) $|x|+|y|=1$

مثال نقض: $x=0 \to |y|=1 \to y=\pm 1$ تابع نیست

ث) $y^2+4x^2=4xy$

$y^2-4xy+4x^2=0 \to (y-2x)^2=0 \to y-2x=0$

$y=2x$ تابع است

ج) $|x|+(y-1)^2=0$

جمع دو عبارت مثبت صفر شده است پس هر دو صفرند

$|x|=0 \to x=0$

$(y-1)^2=0 \to y=1$

این رابطه فقط شامل یک نقطه است پس تابع است $(0,1)$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس دوم : انواع تابع

جلسه چهارم : صفحات ۴۹ تا ۵۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

حسابان ۱

جزء صحیح

تعریف ۱) جزء صحیح هر عدد حقیقی بزرگترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچکتر یا با آن برابر باشد.

تعریف ۲) اگر عدد حقیقی x بین دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ باشد، جزء صحیح x را برابر k تعریف کرده و می‌نویسیم: $[x]=k$. جزء صحیح عدد صحیح با خودش برابر است.

تعریف ۳) برای هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

مثال:

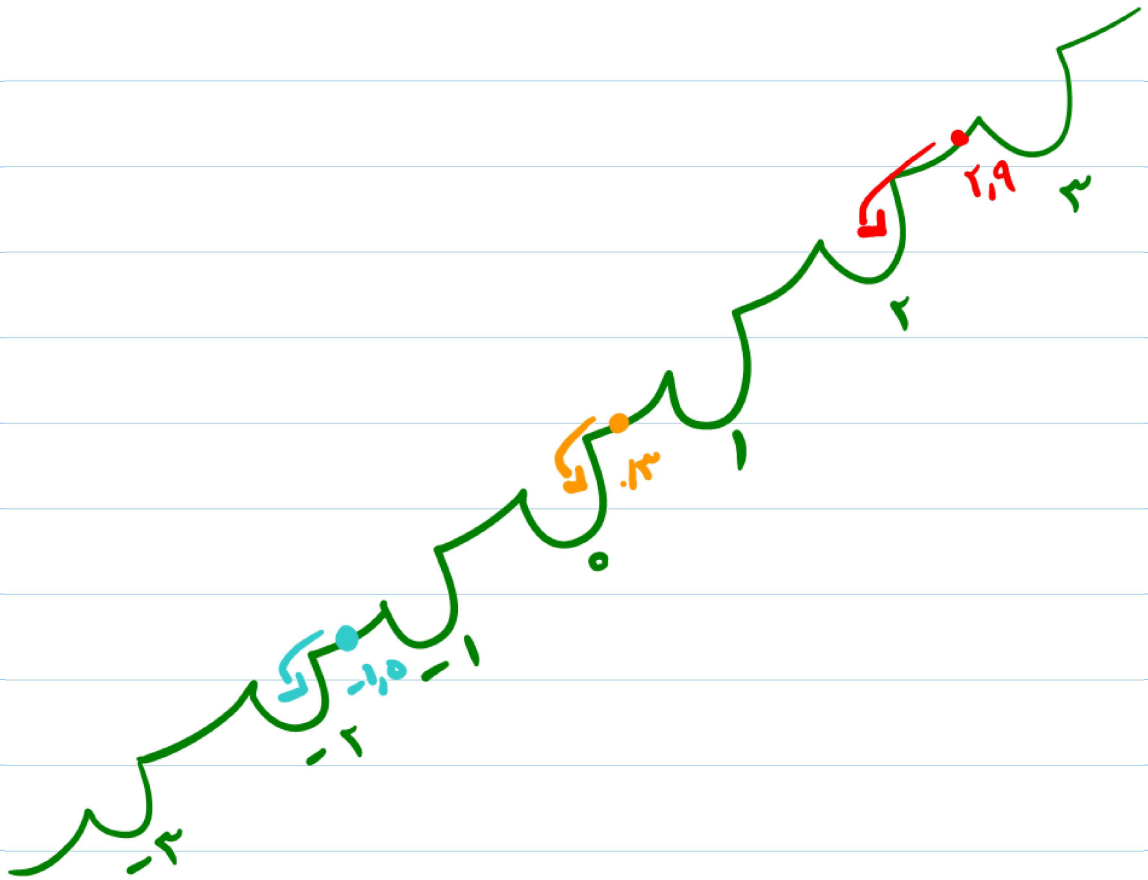
$[2,2] = 2$

$[-5] = -5$

$[-3,9] = -4$

نکته: برای یافتن جزء صحیح یک عدد حقیقی می‌توان از سطح شیب دار چاله دار زیر استفاده کنیم.

در این شکل اعداد صحیح چاله‌ها و اعداد غیر صحیح روی سطح شیب دار و بین چاله‌ها قرار می‌گیرند. با توجه به شیب این سطح، واضح است اگر توپی را در هر موقعیت یک عدد روی سطح قرار دهیم، توپ در این چاله می‌افتد. عدد صحیح مربوط به چاله همان جزء صحیح عدد است.



مثال: جزصحیح های زیر را بدست آورید.

الف) $[\frac{15}{4}] = [3{,}75] = 3$

ب) $[-1{,}4] = -2$

پ) $[\sqrt{2}] = 1$ ($\sqrt{2} \simeq 1{,}4$)

ت) $[\frac{1}{4}] = 0$

ث) $[-0{,}7] = -1$

ج) $-10 < x < -9 \rightarrow [x] = -10$

چ) $[\sqrt[4]{71}]$: $64 < 71 < 125 \rightarrow 4 < \sqrt[4]{71} < 5 \rightarrow [\sqrt[4]{71}] = 4$

برخی از ویژگی های جزءصحیح:

۱) اگر u عبارتی برحسب x باشد از رابطه $[u] = k$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$k \leq u < k+1$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\left[\frac{4x-1}{3}\right]=-2$

$-2 \le \frac{4x-1}{3} < -1 \xrightarrow{\times 3} -6 \le 4x-1 < -3 \xrightarrow{+1} -5 \le 4x < -2 \xrightarrow{\div(-4)} \frac{5}{4} \ge x > \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < x \le \frac{5}{4}$

ب) $[x^2+x]=-1$

$-1 \le x^2+x < 0 \rightarrow \begin{cases} -1 \le x^2+x \rightarrow x^2+x+1 \ge 0 & (1) \\ x^2+x < 0 & (2) \end{cases}$

(1) $x^2+x+1=0 \rightarrow \Delta = 1-4\times1\times1 = -3 \rightarrow x^2+x+1 > 0 \rightsquigarrow x \in \mathbb{R}$

(2) $x^2+x=0 \rightarrow x(x+1)=0 \rightarrow x=0,-1$ $\quad x^2+x$: $+$ | $-$ | $+$ در -1 و 0 $\rightsquigarrow x \in (-1,0)$

(1) $\cap$ (2) $\Rightarrow -1 < x < 0$

۲) حاصل یک جزء صحیح همواره عددی صحیح است یعنی $[x] \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2[x]-7=0 \rightarrow 2[x]=7 \rightarrow [x]=\frac{7}{2}$

معادله جواب ندارد

ب) $x = [x^2] - 6$ $[x^2]$ عدد صحیح است. ۶ هم از آن کم شود حاصل عدد صحیح می‌شود. چون این عبارت با x برابر است پس x هم صحیح می‌شود.

می‌دانیم توان دوم یک عدد صحیح، عددی صحیح است پس $[x^2] = x^2$

$$x^2 - 6 = x \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \rightarrow x = 3, -2$$

۳) اگر عدد صحیح k در درون جزء صحیح جمع یا تفریق شده باشد می‌توان آن را از جزء صحیح خارج کرد یعنی:

$$[x + k] = [x] + k$$

۴)
$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: اگر x صحیح نباشد، حاصل $[x^2 - 4] + [7 - x^2]$ را به دست آورید.

$x = \frac{1}{3} \rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \notin \mathbb{Z}$

$x = \sqrt{5} \rightarrow x^2 = 5 \in \mathbb{Z}$

$$[x^2] - 7 + 4 + [-x^2] = [x^2] + [-x^2] - 3$$

$$[x^2] + [-x^2] = \begin{cases} 0 & x^2 \in \mathbb{Z} \\ -1 & x^2 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$[x^2] + [-x^2] - 3 = \begin{cases} -3 & x^2 \in \mathbb{Z} \\ -4 & x^2 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳) تابع جزء صحیح :

به توابعی که متغیرش داخل جزء صحیح باشد ، تابع جزء صحیح می گوییم .

ساده ترین تابع جزء صحیح که به هر عدد جزء صحیحش را نسبت می دهد تابع

$y=[x]$ است .

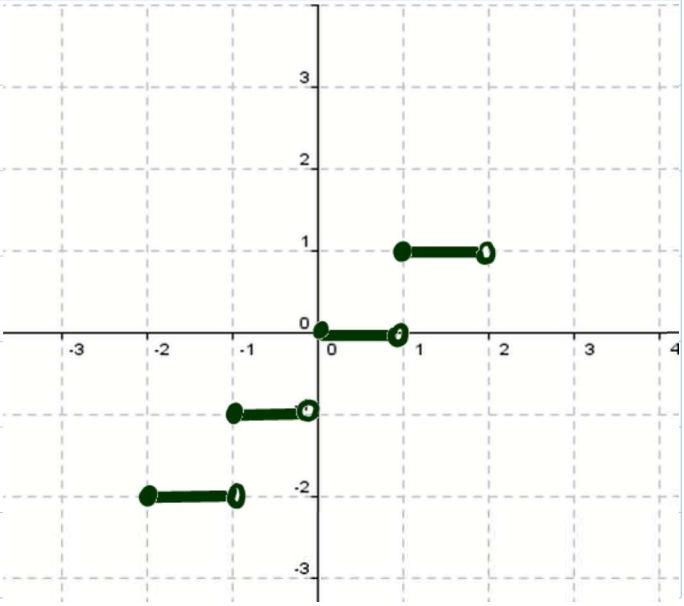
مثال : نمودار تابع $y=[x]$ را در بازه $(-2,2]$ رسم کنید .

پله اول : $-2 \leq x < -1 \Rightarrow y=[x]=-2$

پله دوم : $-1 \leq x < 0 \rightarrow y=-1$

پله سوم : $0 \leq x < 1 \rightarrow y=0$

پله چهارم : $1 \leq x < 2 \rightarrow y=1$



رسم نمودار توابع به صورت $f(x)=[ax]+k$ در یک بازه

ابتدا طول پله را از رابطه $\frac{1}{|a|}$ می‌یابیم. سپس از ابتدای بازه داده شده پله‌ها را تشکیل داده و برای هر پله مقدار y را حساب می‌کنیم.

مثال: نمودار توابع زیر را در بازه داده شده رسم کنید.

$[-1,1]$ در $f(x)=[2x]+1$

طول پله $=\frac{1}{2}$

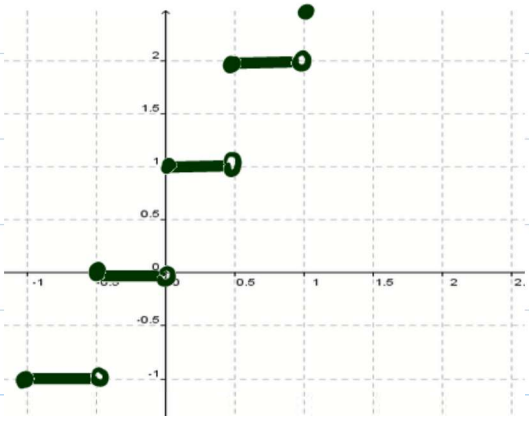
پله اول: $-1\le x<-\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} -2\le 2x<-1 \rightsquigarrow y=[2x]+1=-2+1=-1$

پله دوم: $-\frac{1}{2}\le x<0 \xrightarrow{\times 2} -1\le 2x<0 \rightsquigarrow y=-1+1=0$

پله سوم: $0\le x<\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 0\le 2x<1 \rightsquigarrow y=0+1=1$

پله چهارم: $\frac{1}{2}\le x<1 \xrightarrow{\times 2} 1\le 2x<2 \rightsquigarrow y=1+1=2$

$x=1 \rightarrow y=[2\times 1]+1=2+1=3$

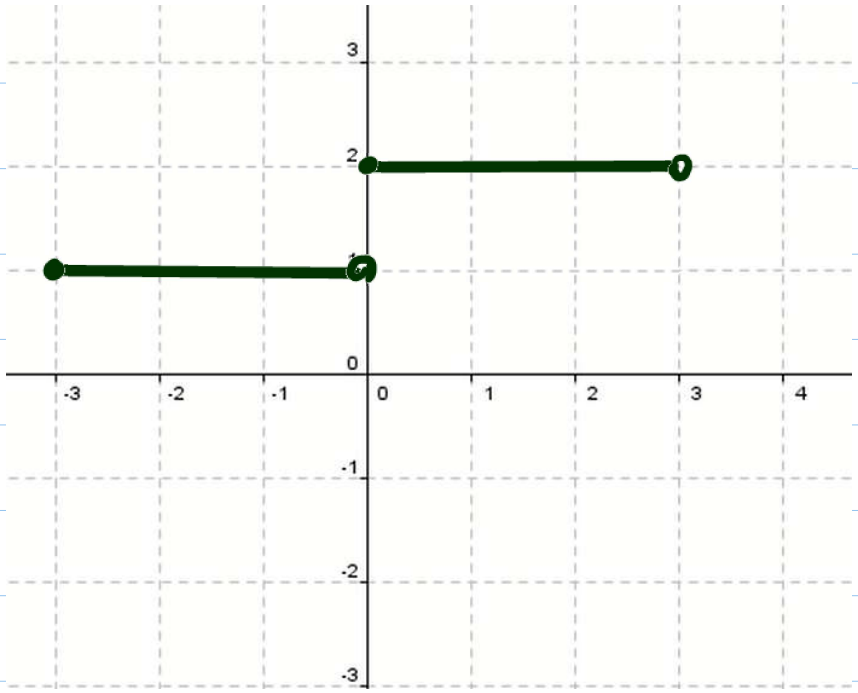


ب) $g(x)=\left[\frac{1}{3}x+2\right]=\left[\frac{1}{3}x\right]+2 \qquad [-3,3)$

$\text{صول بعه} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

بعه اول : $-3 \le x < 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} -1 \le \frac{1}{3}x < 0 \rightarrow y=\left[\frac{1}{3}x\right]+2=-1+2=1$

بعه دوم : $0 \le x < 3 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 0 \le \frac{1}{3}x < 1 \rightarrow y=0+2=2$



حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس دوم : انواع تابع

جلسه پنجم : حل تمرین صفحات ۵۲و۵۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

حسابان ۱

۱ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{x-۱}{۲-x}$ ب) $f(x)=\frac{-۳x}{x^۲+۱}$ پ) $f(x)=\frac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}$

ت) $f(x)=\sqrt{۳x+۱}$ ث) $f(x)=۲\sqrt{x}-۳$ ج) $f(x)=\sqrt{۸-x}$

الف) $۲-x=۰ \rightsquigarrow x=۲ \rightarrow D=\mathbb{R}-\{۲\}$

ب) $x^۲+۱\neq ۰ \rightarrow D=\mathbb{R}$

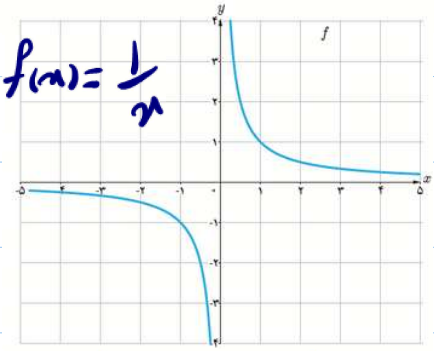
پ) $x^۲+x-۱۲=۰ \rightarrow (x+۴)(x-۳)=۰ \rightarrow x=-۴,۳ \rightarrow D=\mathbb{R}-\{۳,-۴\}$

ت) $۳x+۱\geq ۰ \rightarrow ۳x\geq -۱ \rightarrow x\geq -\frac{۱}{۳} \rightarrow D=[-\frac{۱}{۳},+\infty)$

ث) $x\geq ۰ \rightarrow D=[۰,+\infty)$

ج) $۸-x\geq ۰ \rightarrow ۸\geq x \rightarrow x\leq ۸ \rightarrow D=(-\infty,۸]$

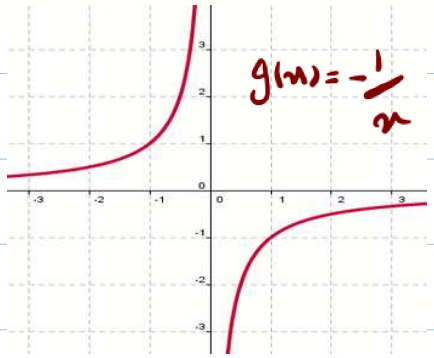
۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کرد.



$f(x)=\frac{۱}{x}$

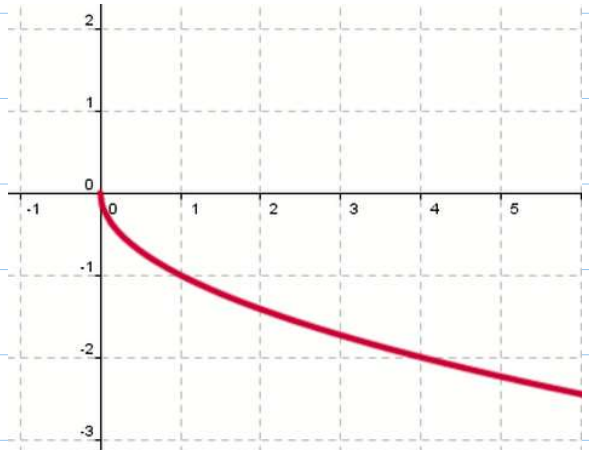
شاخه‌ها ناحیه اول و سوم

نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنم



شاخه‌ها ناحیه دوم و چهارم

۳ نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

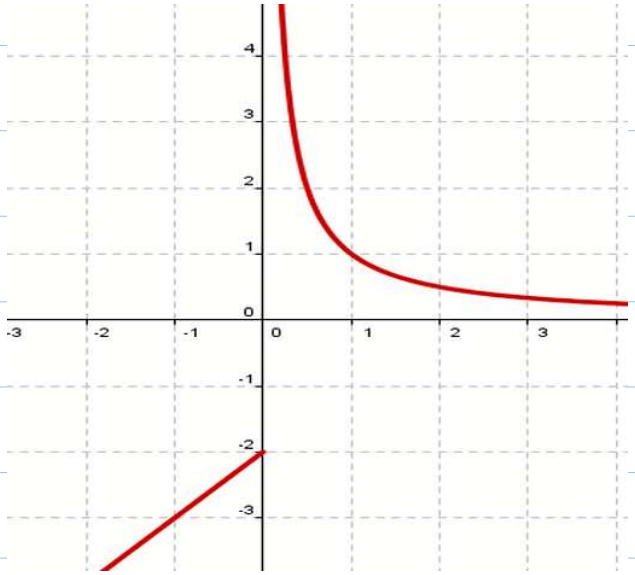


نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

$y=-\sqrt{x}$

۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

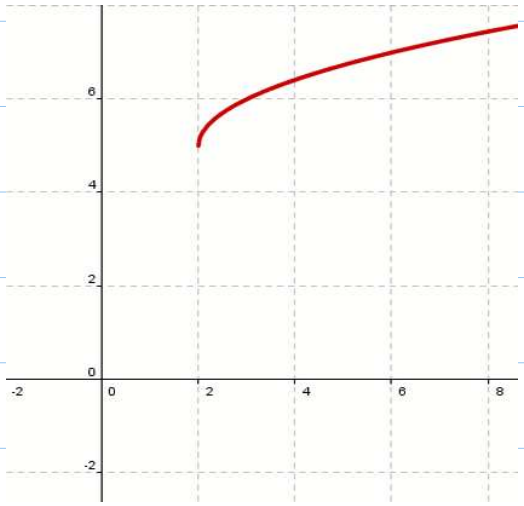
الف) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ x-2 & x\le 0\end{cases}$



$D=\mathbb{R}$

$R=(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$

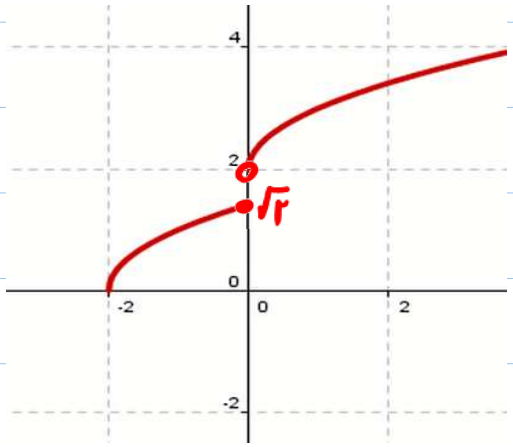
ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}+۵$



$D=[۲,+\infty)$

$R=[۵,+\infty)$

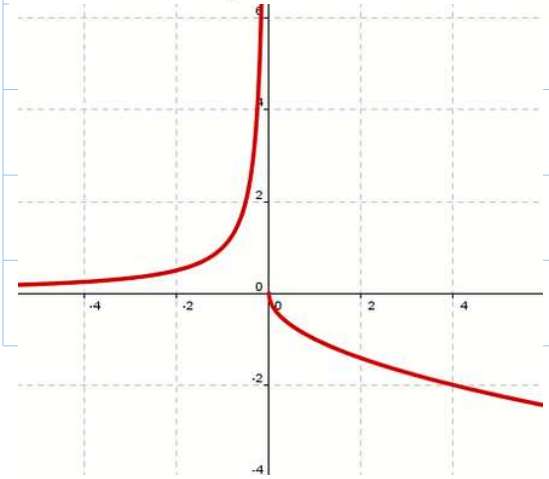
پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\le x\le ۰\end{cases}$



$D=[-۲,+\infty)$

$R=[۰,\sqrt{۲}]\cup(۲,+\infty)$

ت) $f(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x} & x\ge ۰\end{cases}$



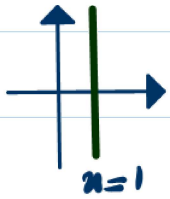
$D=\mathbb{R}$

$R=\mathbb{R}$

۵ کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) $3x+2y=12$ ب) $x=1$ پ) $y=-2$ ت) $f(x)=\begin{cases}x+3 & x\le 0\\ x-1 & x\ge 0\end{cases}$ ث) $y^2=x^2$ ج) $y=|x|$

الف) تابع خطی

ب) 

تابع نیست

پ) تابع ثابت

ت) $x=0 \Rightarrow \begin{cases}y=0+3=3\\ y=0-1=-1\end{cases}$ تابع نیست

ث) $x=1 \rightarrow y^2=1 \rightarrow y=1,-1$ تابع نیست

ج) تابع قدرمطلقی

۶ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به‌وسیله تابع $f(x)=\frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

الف) $f(50)=\frac{255\times 50}{100-50}=\frac{255\times 50}{50}=255$

ب) $D=[0,100)$

۷ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=[x]+1$ ، $-2\le x<3$ ب) $f(x)=[\frac{1}{2}x]$ ، $-4\le x<4$

روش کلی برای رسم نمودار $y=[f(x)]$:

مرحله اول : نمودار تابع را بدون توجه به جزء صحیح رسم می‌کنیم.

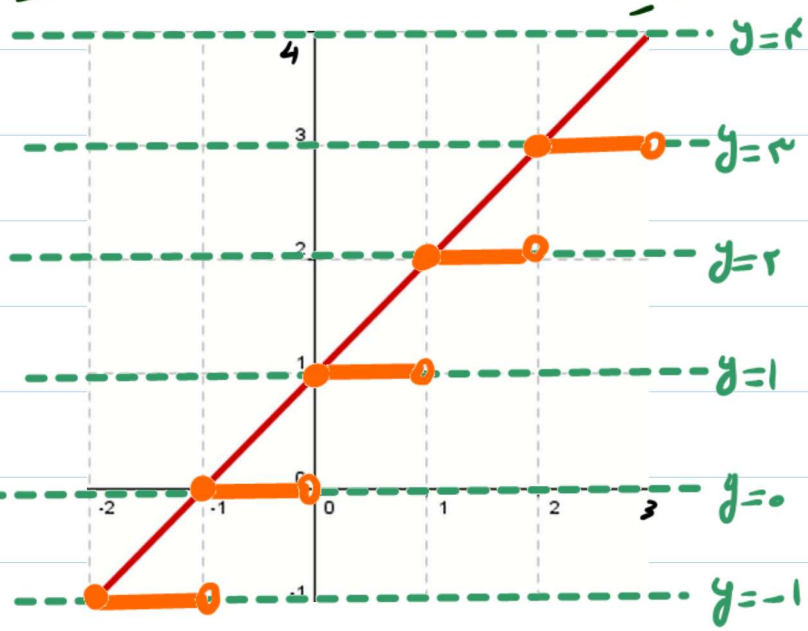
مرحله دوم : خط‌های افقی با مقادیر صحیح یعنی $y=0$ ، $y=\pm1$ ، $y=\pm2$ و ... که نمودار تابع $y=f(x)$ را قطع می‌کنند رسم می‌کنیم.

مرحله سوم : حال جزء صحیح را روی این تابع اثر می‌دهیم به این صورت که هر قطعه که بین دو خط افقی قرار دارد روی خط پائین ریزش می‌کند.

الف) $f(x)=[x+1]$

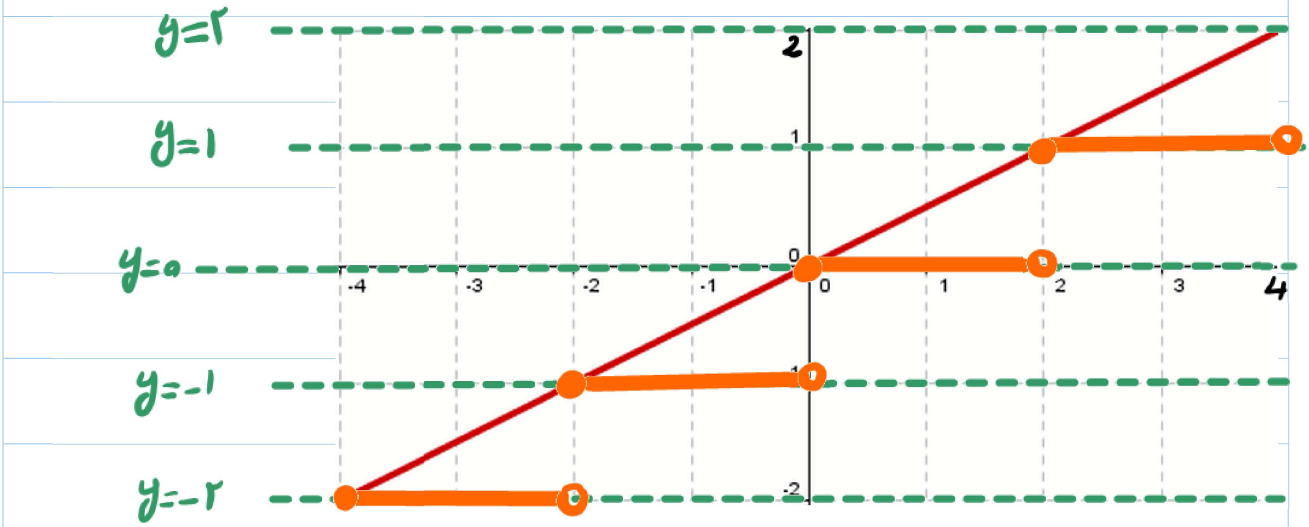
$-2\le x<3$

محل برخورد خط‌های افقی با $f(x)$ نقاط توپر



ب) $f(x)=[\frac{1}{2}x]$

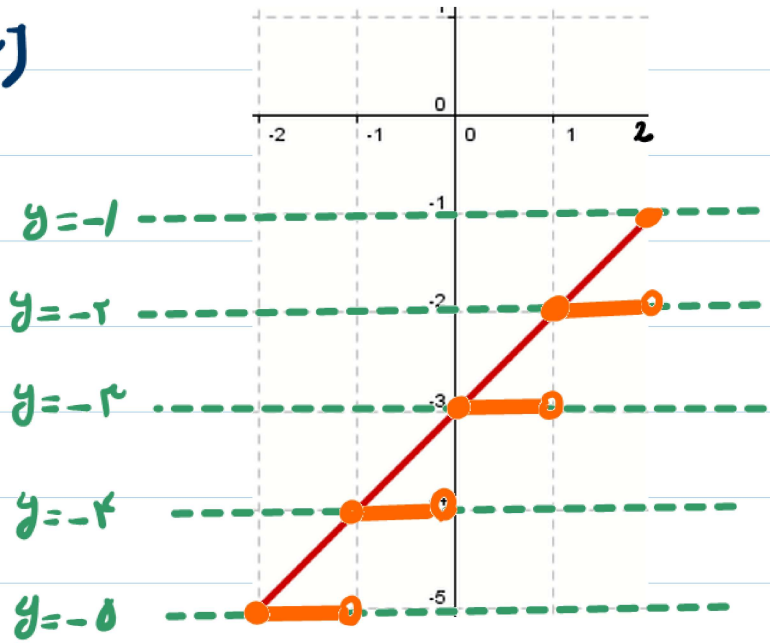
$-4\le x<4$



۸ نمودارهای دو تابع $y=[x-3]$ و $y=[x]-3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

$y=[x-3]=[x]-3$ نمودارهایشان هستند (دو تابع برابرند)

در بازه $[-2,2]$



۹ اگر تعداد افرادی که،طی یک مدت معین، به‌وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t)=\frac{۹۵۰t-۲۰۰۰}{۴+t}$ به‌دست آید که در آن $t>۰$ زمان برحسب ماه است :

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

الف) $n(۵)=\frac{۹۵۰\times ۵-۲۰۰۰}{۴+۵}=\frac{۴۷۵۰-۲۰۰۰}{۹}=\frac{۴۵۵۰}{۹}=۵۰۵۵,۵$

۵۰۵۶ نفر

ب) $\frac{۵۵۰۰}{۱}=\frac{۹۵۰t-۲۰۰۰}{۴+t}$

$۹۵۰t-۲۰۰۰=۵۵۰۰(۴+t)$

$۹۵۰t-۲۰۰۰=۲۲۰۰۰+۵۵۰t$

$۹۵۰t-۵۵۰t=۲۲۰۰۰+۲۰۰۰$

$۴۰۰t=۲۴۰۰۰ \rightarrow t=\frac{۲۴۰۰۰}{۴۰۰}=۶$

پس از ۶ ماه

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس سوم :وارون تابع

جلسه ششم : صفحات ۵۴تا۵۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تابع یک به یک :

تابع f را یک به یک می گوئیم به شرطی که دو عضو متمایز از دامنه به دو عضو متمایز در برد نظیر شوند. به عبارت دیگر f یک به یک است هرگاه به ازای هر دو عضو دلخواه از دامنه f مانند x_1 و x_2 داشته باشیم :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

بررسی یک به یک بودن تابع در نمایش های مختلف آن :

۱) نمایش زوج مرتبی : زمانی یک به یک است که مولفه دوم مساوی نداشته باشد. اگر مولفه های دوم مساوی داشت باید مولفه های اول هم برابر باشند.

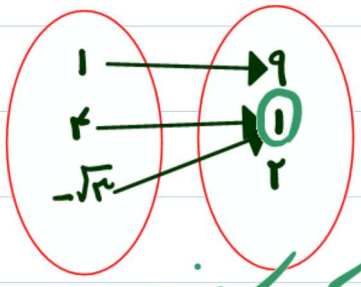
مثال :

$f = \{(2,5),(3,4),(0,\sqrt{3}),(1,5)\}$ — یک به یک نیست

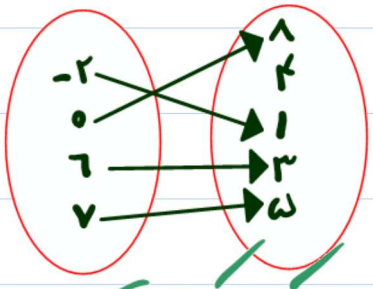
$g = \{(3,\frac{1}{2}),(9,0),(4,1),(5,2)\}$ — یک به یک است

۲) نمایش نمودار ون : زمانی یک به یک است که به هر عضو دایره دوم (سمت راست) بیشتر از یک خط وارد نشود.

مثال :



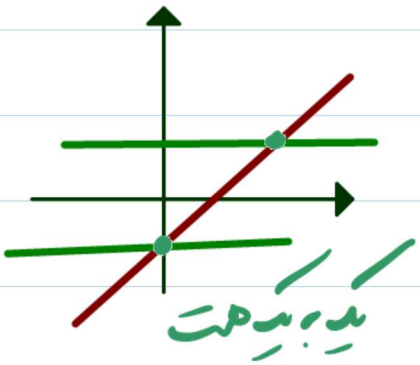
یک به یک نیست



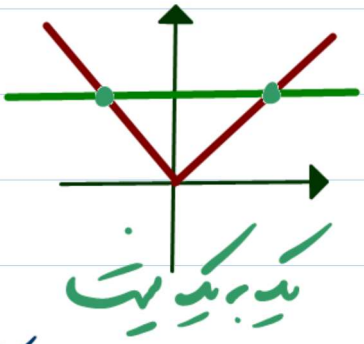
یک به یک هست

۳) نمایش نموداری : زمانی یک به یک است که هر خط موازی محور xها حداکثر در یک نقطه نمودار تابع را قطع کند.

مثال :



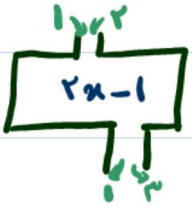
یک به یک هست



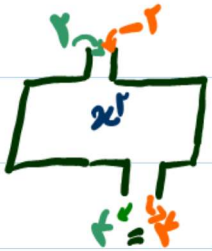
یک به یک نیست

۴) نمایش ماشینی : زمانی یک به یک است که هر خروجی فقط مربوط به یک ورودی باشد به عبارت دیگر خروجی تکراری نداشته باشیم.

مثال:



یک به یک هست



یک به یک نیست

۵) نمایش جبری (ضابطه‌ای) : زمانی یک به یک است که برای هر دو عضو دلخواه از دامنه f مانند x_1 و x_2 :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

به عبارت دیگر یک بار به جای x_1 در ضابطه تابع x_1 و یک بار x_2 قرار داده و با یکدیگر مساوی قرار می‌دهیم. اگر به تساوی $x_1 = x_2$ رسیدیم آنگاه تابع یک به یک خواهد بود.

مثال:

الف) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1^3 + 1} = \sqrt{x_2^3 + 1} \xrightarrow{\text{توان } 2} x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$$

$$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} x_1 = x_2$$

یک به یک هست

ب) $f(x) = x^2 - 4$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }} |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

یک به یک نیست

مثال: اگر تابع $f = \{(a^2, 1), (4, 1), (2a + b, 2), (7, 2), (a, b)\}$ یک به یک باشد a, b را بیابید.

$$a^2 = 4 \longrightarrow a = \pm 2$$

$$2a+b=7 \begin{cases} a=2 \rightarrow 4+b=7 \rightarrow b=3 \\ a=-2 \rightarrow -4+b=7 \rightarrow b=10 \end{cases}$$

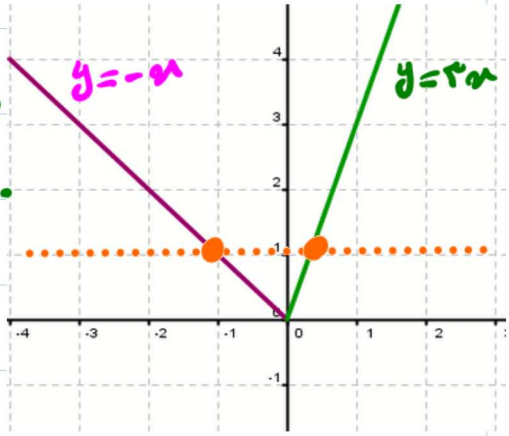
$a=2, b=2 \rightarrow f=\{(1,1),(2,2),(2,2)\}$ تابع یک به یک نیست

$a=-2, b=10 \rightarrow f=\{(1,1),(2,2),(-2,10)\}$ تابع یک به یک هست

مثال: کدام یک از توابع زیر یک به یک است و چرا؟

الف) $f(x)=x+2|x|$

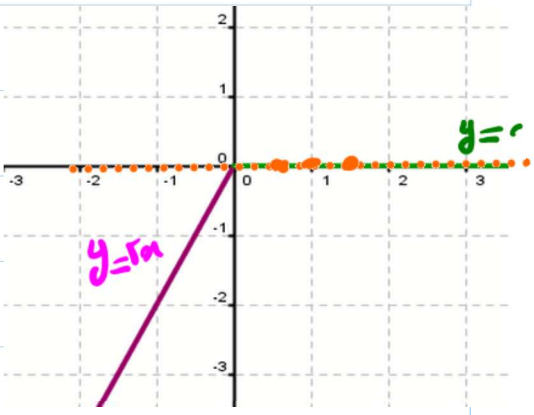
$$f(x)=\begin{cases} x-2x & x<0 \\ x+2x & x\geq 0 \end{cases}=\begin{cases} -x & x<0 \\ 3x & x\geq 0 \end{cases}$$



یک به یک نیست

ب) $f(x)=x-|x|$

$$f(x)=\begin{cases} x-(-x) & x<0 \\ x-x & x\geq 0 \end{cases}=\begin{cases} 2x & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases}$$



یک به یک نیست

ب) $f(x)=x^3-2x^2$

$x=0 \rightarrow y=0$

$x=2 \rightarrow y=2^3-2(2)^2=8-8=0$

تابع یک به یک است

ج) $f(x)=x^2+2x$

$x=0 \rightarrow y=0$

$x=-2 \rightarrow y=4+2(-2)=0$

تابع یک به یک است

د) $f(x)=\dfrac{[x]+[-x]}{x}$

$x \neq 0$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=0 \rightarrow y=0$

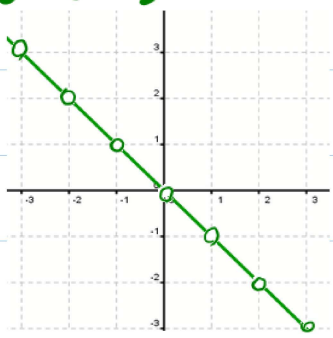
تابع یک به یک است.

ه) $f(x)=\dfrac{x}{[x]+[-x]}$

$D=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

$[x]+[-x]=0 \rightarrow x \in \mathbb{Z}$

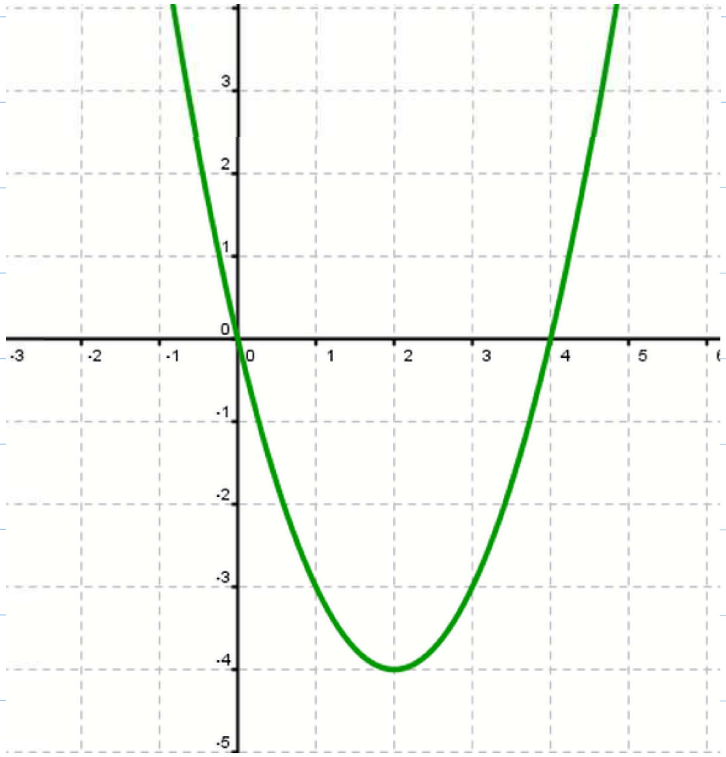
$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=-1 \rightarrow f(x)=\dfrac{x}{-1} \Rightarrow f(x)=-x$



تابع یک به یک است.

نکته: می‌توانیم با محدود کردن دامنه، از یک تابع غیر یک به یک تابعی یک به یک بسازیم.

مثال: ابتدا ثابت کنید تابع $f(x)=x^2-4x$ یک به یک نیست. سپس با محدود کردن دامنه آن را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید.



خط‌های موازی محور xها وضعیت دارند که تابع را در دو نقطه قطع می‌کنند پس تابع یک به یک نیست.

بزرگترین بازه‌ها

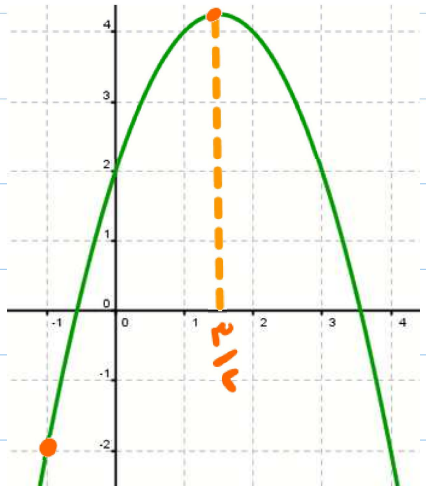
$[2,+\infty)$ یا $(-\infty,2]$ یا $[0,2]$ یا $[2,+\infty)$

نکته: تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ با دامنه $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ یا $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ یک به یک است.

مثال: تابع $f(x)=-x^2+3x+2$ روی بازه $[-1,a]$ یک به یک است. حداکثر مقدار a چقدر است؟

را راس سهمی

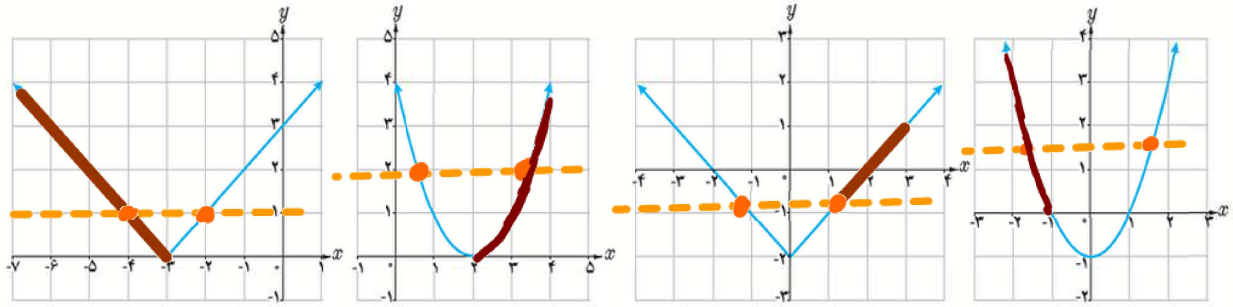
$$a=\frac{-3}{2(-1)}=\frac{3}{2}$$



مثال:

تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y=|x+3|$ ب) $y=(x-2)^2$ پ) $y=|x|-2$ ت) $y=x^2-1$



$D=(-\infty,-1)$ $D=[1,3]$ $D=[2,+\infty)$ $D=(-\infty,-3]$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس سوم :وارون تابع

جلسه هفتم : صفحات ۵۷تا۶۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

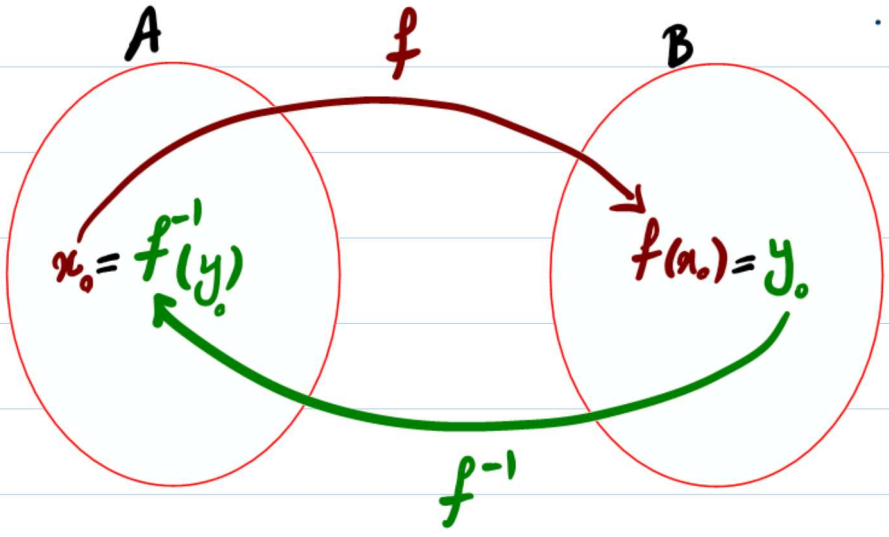
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

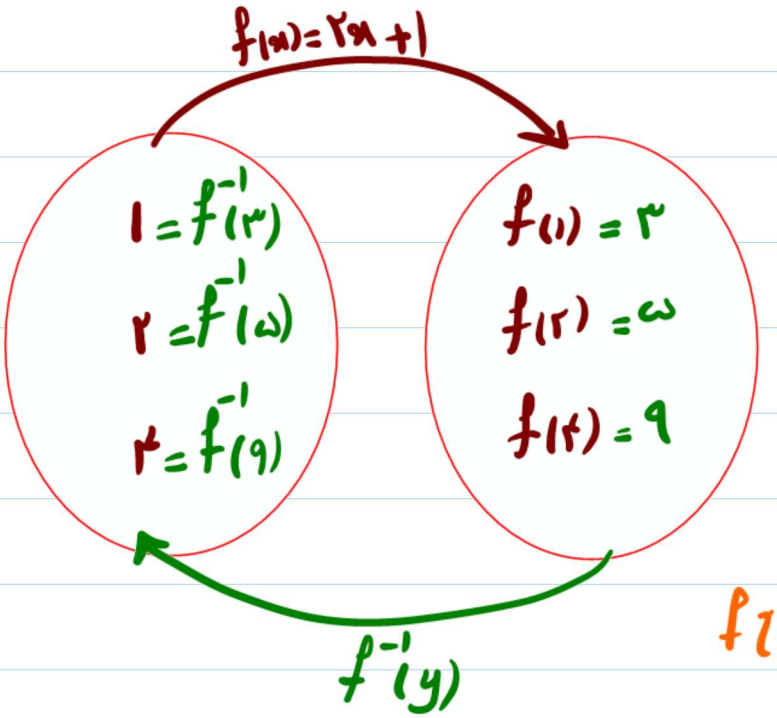
وارون تابع :

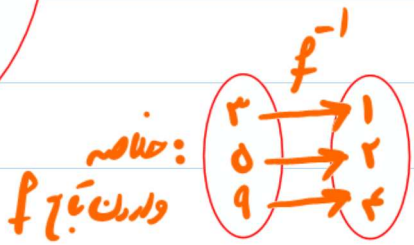
برای برخی توابع ، تابعی دیگر وجود دارد که عکس تابع اصلی عمل کرده و خروجی را به ورودی تبدیل می‌کند . به چنین تابعی ، تابع معکوس یا تابع وارون می‌گوییم.

تعریف : وارون تابع f رابطه‌ای است که در آن به ازای هر خروجی f ، به ورودی مربوطه می‌رسیم . مثلاً اگر تابع f عدد x_0 از دامنه را به y_0 از برد ببرد ، وارون تابع f که آن را با f^{-1} نشان می‌دهند عضو y_0 را به عنوان عضوی از دامنه خودش به x_0 از مجموعه برد می‌برد .

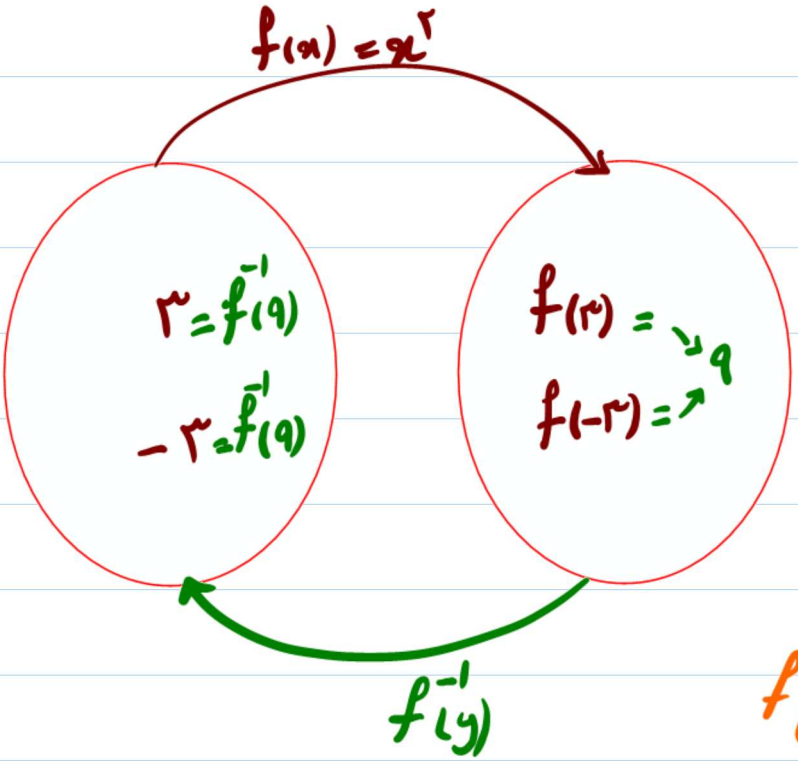


مثال :

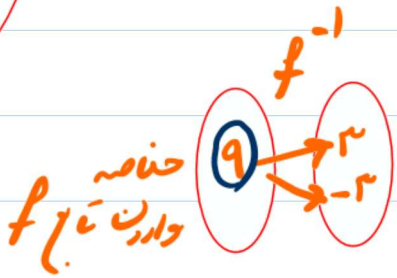




خلاصه وارون تابع f :



وارون تابع خود تابع است :



خلاصه وارون تابع f

تابع وارون پذیر : اگر وارون تابع f ، تابع باشد ، f را وارون پذیر می‌گوییم.

نکته : تابع f وارون پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد

۱) محاسبه وارون تابع از روی نمایش زوج مرتبی :

کافی است جای مولفه اول و دوم را عوض کنیم : $f^{-1}=\{(y,x)\mid (x,y)\in f\}$

مثال: وارون پذیر است $f=\{(1,6),(-1,5),(2,4)\}$ الف)

$f^{-1}=\{(6,1),(5,-1),(4,2)\}$

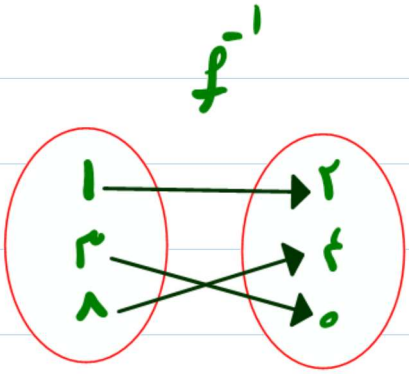
وارون پذیر نیست $g=\{(1,3),(2,4),(5,2),(7,3)\}$ ب)

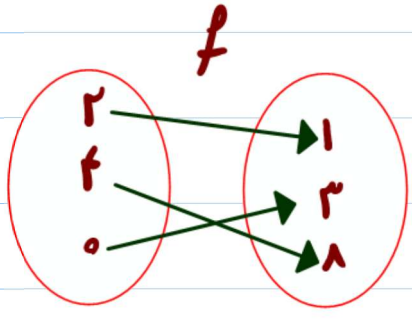
تابع نیست : $g^{-1}=\{(3,7),(5,2),(4,-1),(3,1)\}$ رابطه

۲) محاسبه وارون تابع از روی نمایش نمودار ون :

کافی است جهت فلش‌ها یا جای دایره‌ها را عوض کنیم .

مثال :





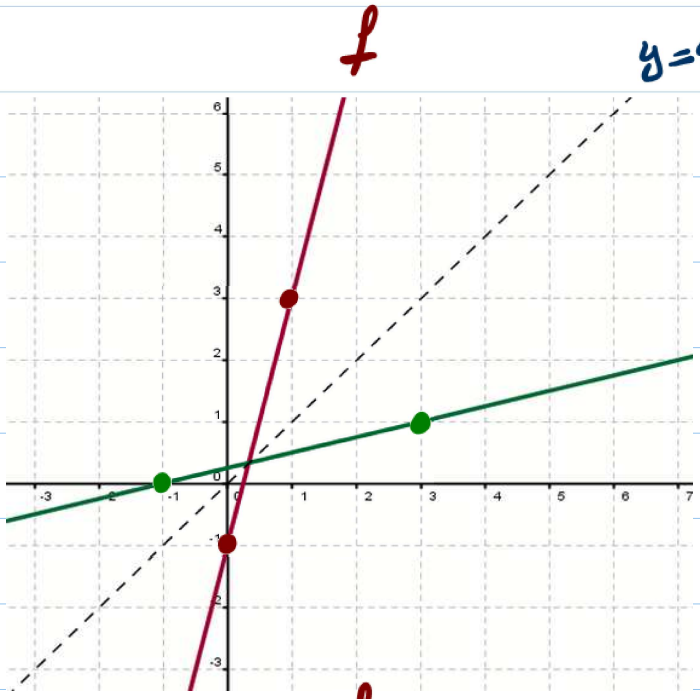
وارون پذیر

۱۳ محاسبه وارون تابع از روی نمایش دستگاه مختصاتی :

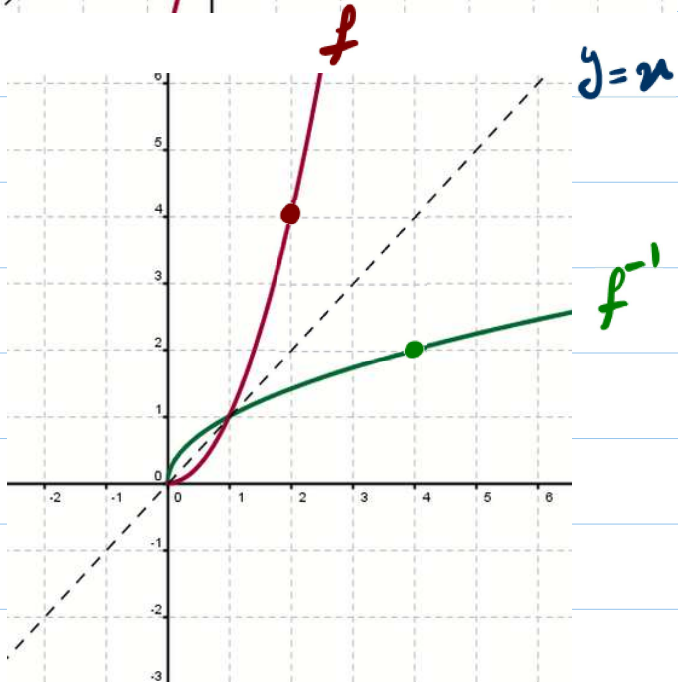
کافی است قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) بیابیم

زیرا دو نقطه (x,y) و (y,x) نسبت به خط $y=x$ قرینه اند.

مثال:



تذکر: بهتر است برای دقیق‌تر شدن نمودار f^{-1} چند نقطه روی f پیدا کنیم و جای x و y را عوض کنیم تا نقطه روی f^{-1} به دست آید.



چند نکته: اگر f وارون پذیر باشد آنگاه

۱- اگر $f(a)=b$ آنگاه $f^{-1}(b)=a$. به عبارت دیگر اگر نقطه (a,b) روی نمودار تابع f باشد آنگاه نقطه (b,a) روی نمودار f^{-1} است.

۲- $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$

۳- $D_{f^{-1}}=R_f$ ، $D_f=R_{f^{-1}}$

۴- اگر f و f^{-1} در نقطه (a,b) متقاطع باشند آنگاه $f(a)=b$ ، $f(b)=a$.

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{18-x}+\sqrt[3]{18+x}$ باشد مقدار $f(9)+f^{-1}(6)$ را بیابید.

$$f(9)=\sqrt{18-9}+\sqrt[3]{18+9}=3+3=6$$

$$f^{-1}(6)=9$$

$$f(9)+f^{-1}(6)=6+9=15$$

مثال: اگر $g=\{(2,4),(3,2),(1,5),(5,-1)\}$ و $f=\{(3,2),(2,3),(4,-1),(5,6)\}$

و $f^{-1}(a)+g^{-1}(2)=6$ ، مقدار $g(a)$ را بدست آورید.

$g(3)=2 \rightarrow g^{-1}(2)=3$

$f^{-1}(a)+3=6 \rightarrow f^{-1}(a)=3 \rightarrow f(3)=a=2$

$g(a)=g(2)=4$

مثال: نمودار تابع $f(x)=-x^3+mx+n$ در نقطه $(\frac{1}{3},-1)$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند.

مقدار m,n را بیابید.

$f(-1)=\frac{1}{3} \rightarrow \underbrace{-(-1)^3}_{+1}-m+n=\frac{1}{3} \rightarrow -m+n=-\frac{2}{3}$ ①

$f(\frac{1}{3})=-1 \rightarrow -\frac{1}{27}+\frac{1}{3}m+n=-1 \rightarrow \frac{1}{3}m+n=-1+\frac{1}{27}$

$\frac{1}{3}m+n=\frac{-26}{27} \xrightarrow{\times 3} m+3n=-\frac{26}{9}$ ②

$$\begin{cases} -m+n=-\frac{2}{3} \\ m+3n=-\frac{26}{9} \end{cases}$$

$4n=\frac{-32}{9}$

$\rightarrow n=\frac{-32}{9\times 4}=-\frac{8}{9} \rightarrow -m-\frac{8}{9}=-\frac{2}{3}$

$m=\frac{2}{3}-\frac{8}{9}=\frac{-2}{9}$

۴) یافتن ضابطه تابع وارون :

اگر تابع به صورت ضابطه بیانی داده شده باشد، مراحل زیر را برای آن انجام می‌دهیم :

۱- به جای $f(x)$ ، y قرار می‌دهیم .

۲- مانند یک معادله به آن نگاه می‌کنیم که می‌خواهیم x را بیابیم یعنی x را برحسب y می‌یابیم .

۳- به جای x ، $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x قرار می‌دهیم .

مثال: وارون توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=4x-7$

$$y=4x-7 \rightarrow y+7=4x \xrightarrow{\div 4} \frac{y+7}{4}=x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+7}{4}$$

۲) $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$

$$\frac{y}{1}=\frac{3x+2}{x-1} \rightarrow yx-y=3x+2 \rightarrow yx-3x=2+y$$

$x(y-3)=2+y \rightarrow x=\frac{2+y}{y-3} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-3}$

۳) $y=3-\sqrt{x+1}$

$\sqrt{x+1}=3-y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+1=(3-y)^2 \rightarrow x=(3-y)^2-1$

$f^{-1}(x)=(3-x)^2-1$

روش دوم

$x+1=9-6y+y^2 \rightarrow x=y^2-6y+8$

$f^{-1}(x)=x^2-6x+8$

تذکر: اگر تابعی یک به یک نباشد پس وارون پذیر نیست ولی می‌توانیم با محدود کردن دامنه تابع آن را یک به یک کنیم و وارونش را به دست آوریم.

مثال: با محدود کردن دامنه تابع $f(x)=x^2+4x+5$، ضابطه تابع وارون را بیابید.

$D=(-\infty,-\frac{b}{2a}]=(-\infty,-\frac{4}{2}]=(-\infty,-2]$

با این دامنه تابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می‌شود.

$f(x) = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1$

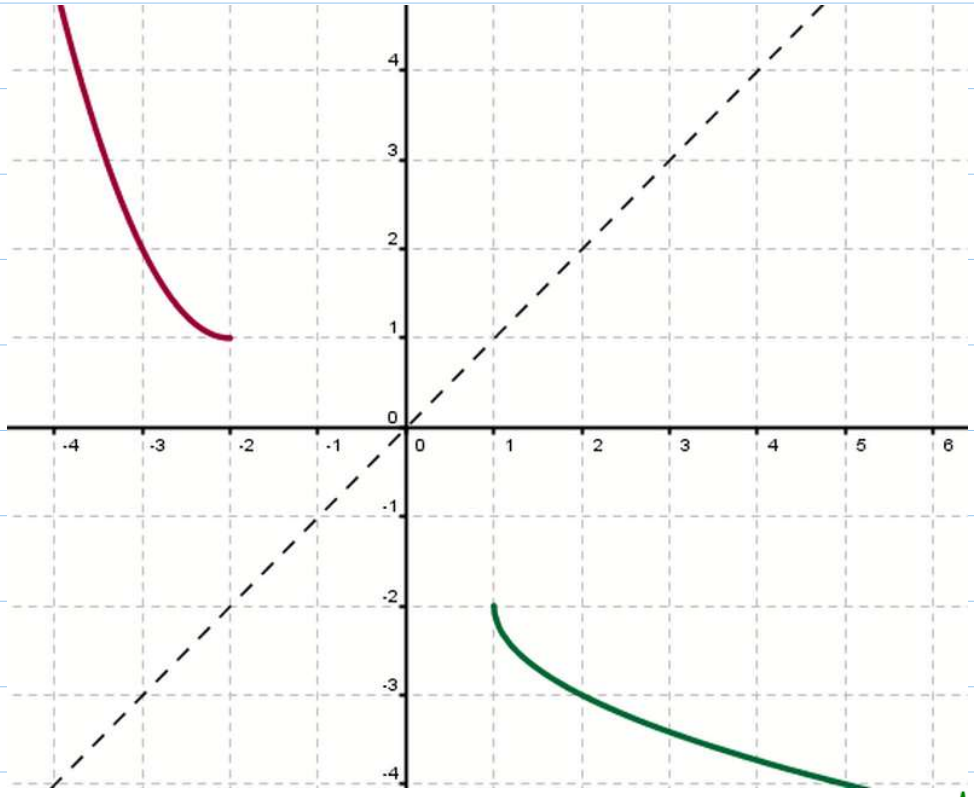
$x+2 \mid x \quad -2$

$y = (x+2)^2 + 1 \longrightarrow y-1 = (x+2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y-1} = |x+2|$

$\sqrt{y-1} = -(x+2) \rightarrow \sqrt{y-1} = -x-2$

$x = -2 - \sqrt{y-1} \longrightarrow f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x-1}$

$f: \; x \leq -2$



f^{-1}

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}7x+2 & x<1\\ 5x+4 & x\geq 1\end{cases}$ ، نمایش دادن f را بیابید.

دامنه f^{-1} :

$$D_{f^{-1}} = R_f$$

$$x<1 \xrightarrow{\times 7} 7x<7 \xrightarrow{+2} 7x+2<9$$

$$x\geq 1 \xrightarrow{\times 5} 5x\geq 5 \xrightarrow{+4} 5x+4\geq 9$$

ضابطه f^{-1} :

$$y=7x+2 \rightarrow y-2=7x \rightarrow x=\frac{y-2}{7} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-2}{7}$$

$$y=5x+4 \rightarrow y-4=5x \rightarrow x=\frac{y-4}{5} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-4}{5}$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{7} & x<9\\ \frac{x-4}{5} & x\geq 9\end{cases}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس سوم :وارون تابع

جلسه هشتم : حل تمرین صفحه۶۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

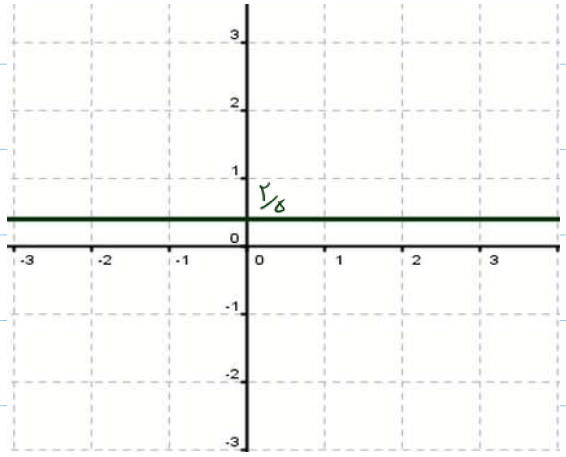
۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک‌به‌یک نباشد.

دمای هوا در طول یک روز : مثلاً دمای هوا ۸ صبح ۳ درجه سانتی‌گراد و ۲۲ شب هم ۳ درجه باشد .

$\{(8,3),(22,3)\}$

۲ آیا تابع $f(x)=\frac{2}{5}$ وارون تابع $g(x)=\frac{5}{2}$ است؟ خیر.

تابع ثابت $f(x)=\frac{2}{5}$ چون یک‌به‌یک نیست در نتیجه وارون‌پذیر نیست.



$f(x)=\frac{2}{5}$

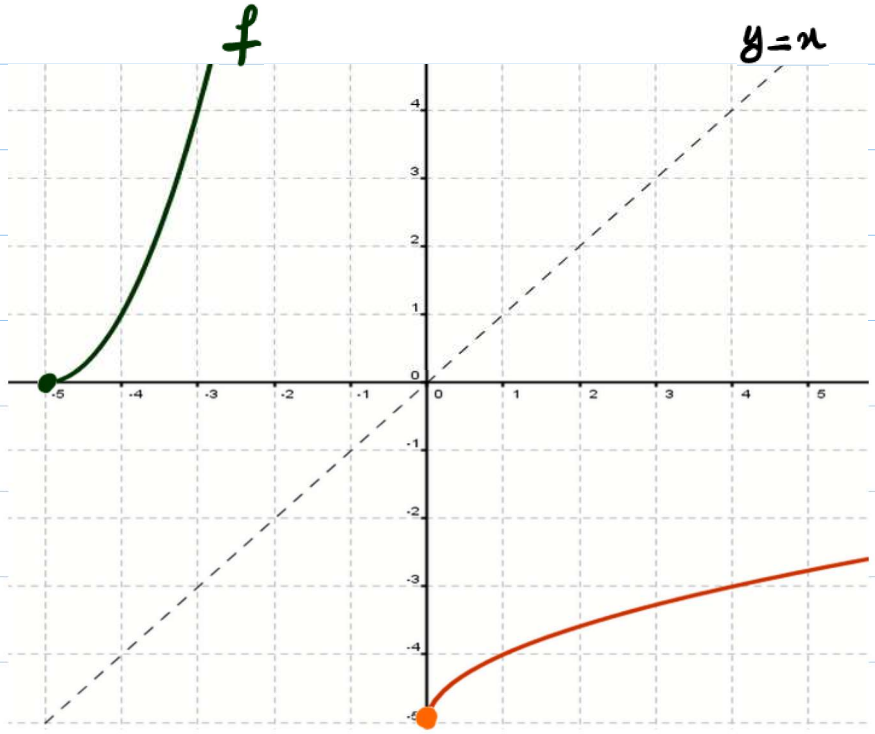
۳ به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به‌دست آورید :

الف) $f(x)=(x+5)^2 \quad , \quad x\geq -5$

یک‌به‌یک با : $D_f=[-5,+\infty)$ و $(-5,0)$ رأس سهمی

$y=(x+5)^2 \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{y}=|x+5| \xrightarrow{x\geq -5} \sqrt{y}=x+5 \rightarrow \sqrt{y}-5=x$

$\rightarrow \quad f^{-1}(x)=\sqrt{x}-5$



ب) $f(x)=-|x-1|+1 \quad , \quad x\geq 2$

$x-1$ | − | ۰ | + | 1 | *

$f(x)=-(x-1)+1=-x+1+1=-x+2 \quad : x\geq 2 : D_f=[2,+\infty)$

تابع به یک تابع خطی تبدیل شده که توابع خطی همواره یک‌به‌یک هستند.

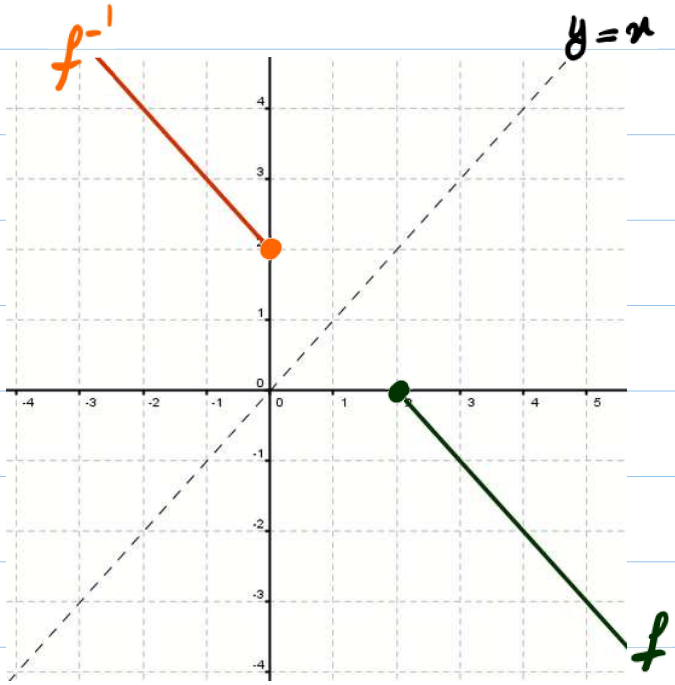
ضابطه‌ی f^{-1} همان ضابطه‌ی f است

$y=-x+2 \longrightarrow x=2-y \longrightarrow f^{-1}(x)=2-x=-x+2$

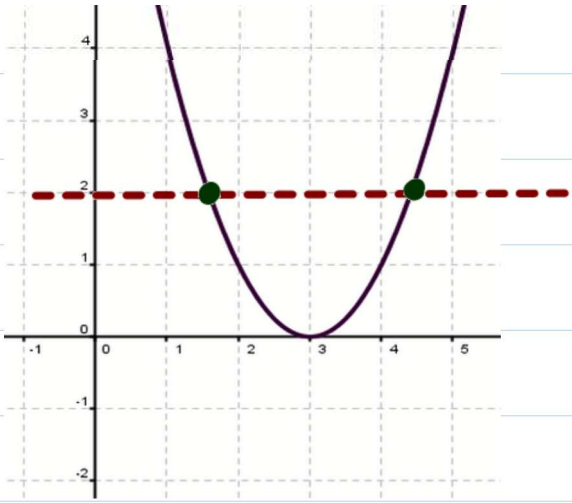
پس باید برد f را بیابیم تا دامنه f^{-1} مشخص شود:

$R_f : \quad x\geq 2 \xrightarrow{\times(-1)} -x\leq -2 \xrightarrow{+2} -x+2\leq 0 \longrightarrow R_f=(-\infty,0]$

$R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty,0]$



پ) $f(x)=(x-۳)^۲$



تابع f یک به یک نیست زیرا خط $y=۲$ در دو نقطه تابع را قطع کرد.

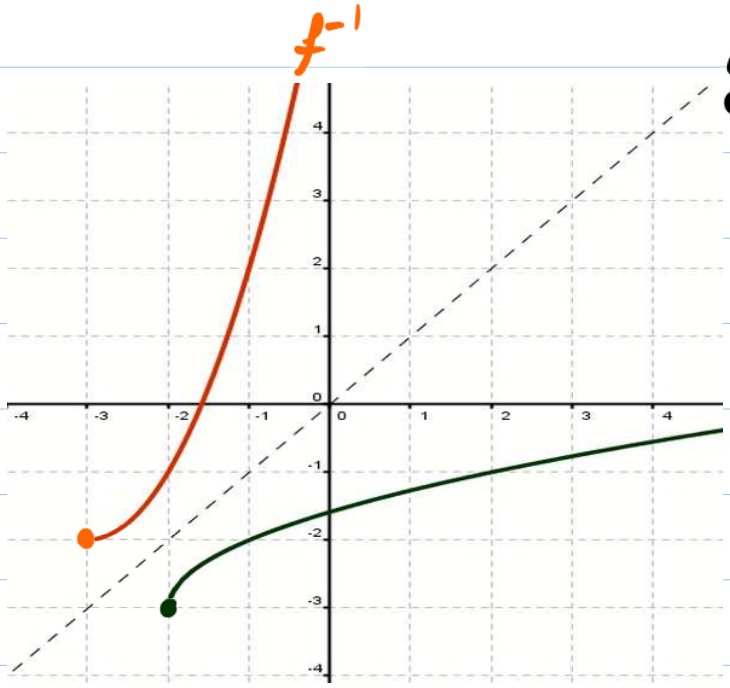
در نتیجه تابع وارون ندارد هم نخواهد بود.

ت) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

$R_f=[-۳,+\infty)=D_{f^{-1}}$

$y=\sqrt{x+۲}-۳ \rightarrow y+۳=\sqrt{x+۲} \xrightarrow{\text{به توان دو}} (y+۳)^۲=x+۲$

$(y+۳)^۲-۲=x \rightarrow f^{-1}(x)=(x+۳)^۲-۲$: $D_{f^{-1}}=[-۳,+\infty)$



$f \rightsquigarrow$ یک به یک

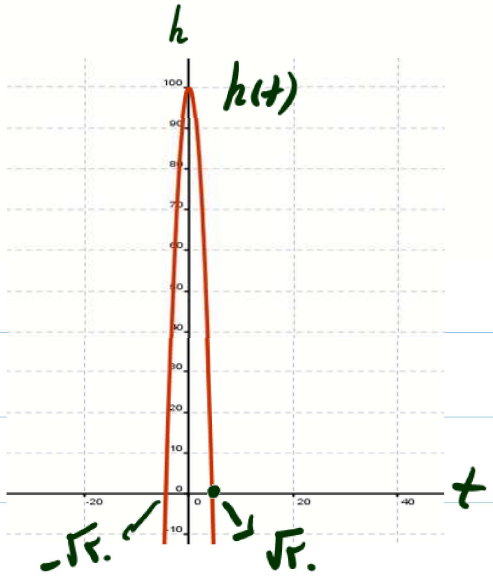
هر خط موازی محورها آن را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=100-5t^2$ به‌دست می‌آید.

الف) دامنه و برد h را به‌دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون h را به‌دست آورید.



چون زمان منفی نداریم شاخه سمت چپ حذف می‌شود.

چون ارتفاع منفی نداریم، ریشه‌های t حذف می‌شوند.

الف) D_h : $100-5t^2=0 \rightarrow 5t^2=100 \rightarrow t^2=20 \rightarrow t=\pm 2\sqrt{5}$

فقط مثبت‌ها قبول

$D_h=[0,2\sqrt{5}]$ $\quad R_h=[0,100]$

ب) سنگ در هر ثانیه یک ارتفاع منحصر به فرد دارد.

$$y = 100 - 5t^2 \rightarrow 5t^2 = 100 - y$$

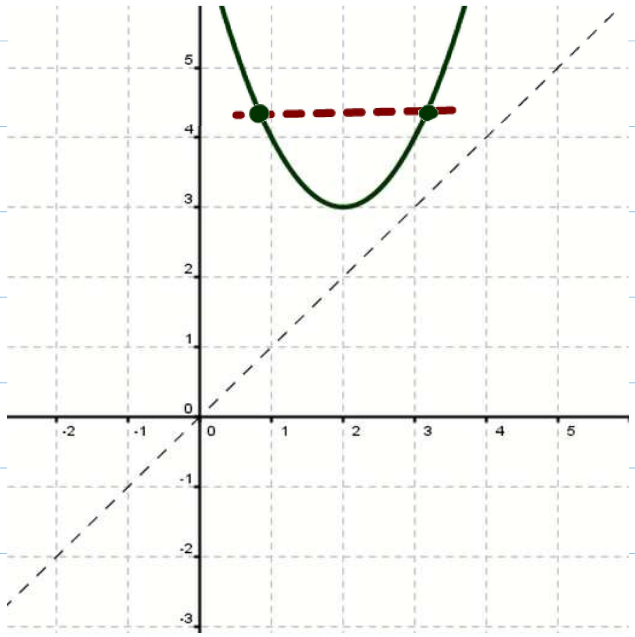
$$\xrightarrow{\div 5} t^2 = \frac{100-y}{5} \xrightarrow[t>0]{\sqrt{\ }} t = \sqrt{\frac{100-y}{5}}$$

$$h^{-1}(t) = \sqrt{\frac{100-t}{5}}$$

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x < f(x)$.

نمودار f باید بالای $y=x$ باشد.

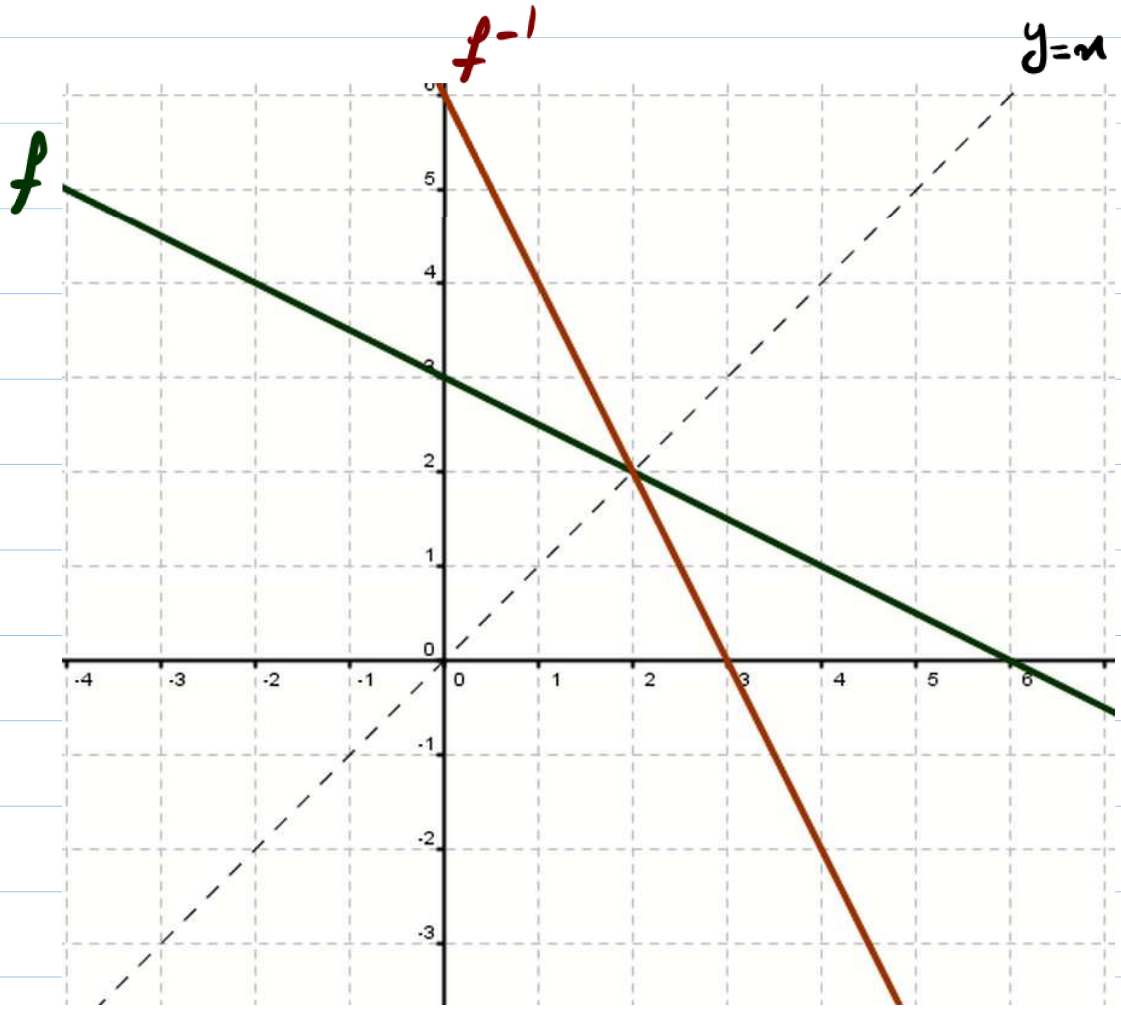
$f(x)$: یک سهمی



۶ وارون تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

$y=-\frac{۱}{۲}x+۳ \rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۲}x \xrightarrow{\times(-۲)} -۲(y-۳)=x$

$\rightarrow f^{-۱}(x)=-۲(x-۳)=-۲x+۶$



حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس چهارم : اعمال روی توابع

جلسه نهم : صفحات ۶۳ تا ۶۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

اعمال روی توابع :

فرض کنید f و g دو تابع باشند، در این صورت :

۱- جمع f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از این دامنه مشترک داریم: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

حاصل جمع دو تابع f و g را با $f+g$ نمایش می‌دهیم.

۲- تفاضل f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از این دامنه مشترک داریم: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

تفاضل دو تابع f و g را با $f-g$ نمایش می‌دهیم.

۳- ضرب f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از این دامنه مشترک داریم: $(f \times g)(x)=f(x) \times g(x)$

حاصل ضرب دو تابع f و g را با $f \times g$ نمایش می‌دهیم.

۴- تقسیم f بر g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=0\}$

است و برای هر x از دامنه این تابع داریم: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

تقسیم تابع f بر تابع g را با $\frac{f}{g}$ نمایش می‌دهیم.

مثال (زوج مرتب) :

اگر داشته باشیم : $f = \{(-2,1), (3,0), (1,4), (6,0)\}$

مطلوب است: $g = \{(1,9), (0,0), (3,7), (-2,2), (6,\sqrt{2})\}$

$D_f \cap D_g = \{1, 3, -2, 6\}$

الف) $f+g = \{(1,13), (3,12), (-2,3), (6,\sqrt{2})\}$

ب) $f \times g = \{(1,36), (3,35), (-2,2), (6,0)\}$

ج) $\frac{f}{g} = \{(1,\frac{4}{9}), (3,\frac{0}{7}), (-2,\frac{1}{2}), (6,0)\}$

د) $\frac{g}{f} = \{(1,9), (3,\frac{7}{0}), (-2,2), (6,\frac{\sqrt{2}}{0})\}$

در عاصر بسی شوند

ه) $2f-3g$ $\qquad 2f=\{(-2,2),(3,10),(1,8),(6,0)\}$

$3g=\{(1,27),(0,0),(3,21),(-2,6),(\frac{1}{2},\frac{3}{4})\}$

$2f-3g=\{(-2,-4),(3,-11),(1,-19),(6,-\frac{3}{2})\}$

مثال (ضابطه جبری)

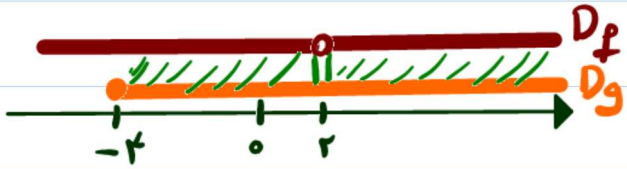
دو تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ ، $g(x)=\sqrt{x+4}$ را در نظر بگیرید. مطلوب است:

الف) دامنه و ضابطه توابع $f-g$ و $\frac{f}{g}$.

ب) محاسبه مقادیر $(f+g)(0)$ ، $(\frac{g}{f})(-3)$ و $(\frac{1}{2}g-f)(3)$.

الف) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+1}{x-2}-\sqrt{x+4}$

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ $\qquad D_g: x+4\geq 0 \longrightarrow x\geq -4 \longrightarrow D_g=[-4,+\infty)$



$D_f\cap D_g=[-4,2)\cup(2,+\infty)$ $\qquad D_{f-g}=[-4,2)\cup(2,+\infty)$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\frac{x+1}{x-2}}{\sqrt{x+4}}=\frac{x+1}{(x-2)(\sqrt{x+4})}$

$g(x)=0 \rightarrow \sqrt{x+4}=0 \rightarrow x=-4$ ← از ریشه مشترک خارج می‌کنیم

$D_{\frac{f}{g}} = (-4,2) \cup (2,+\infty)$ *

ب) $(f+g)(0) = f(0)+g(0) = \frac{0+1}{0-2} + \sqrt{0+4} = -\frac{1}{2}+2 = \frac{3}{2}$

$(\frac{g}{f})(-3) = \frac{g(-3)}{f(-3)} = \frac{\sqrt{-3+4}}{\frac{-3+1}{-3-2}} = \frac{1}{\frac{-2}{-5}} = \frac{5}{2}$

$(4f-\frac{1}{2}g)(0) = 4f(0) - \frac{1}{2}g(0) = 4\times\frac{0+1}{0-2} - \frac{1}{2}\sqrt{0+4}$

$= 4\times 2 - \frac{1}{2}\times 2 = 8 - \frac{2}{2} = \frac{16-2}{2} = \frac{14}{2}$

مثال: (زوج مرتب و ضابطه جبری)

اگر $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ و $g=\{(3,1),(1,7),(-4,2),(0,6)\}$ باشند،

توابع $f+g$ و $\frac{g}{f}$ را بیابید.

$D_g = \{3,1,-4,0\}$

$D_f : x^2-2x \geq 0$ ← حل می‌کنیم $x=0, x=2$

x		0		2	
x^2-2x	$+$	0	$-$	0	$+$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$D_f \cap D_g = \{2, -4, 0\}$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = \sqrt{9-5} + 1 = \sqrt{4} + 1$$

$$(f+g)(-4) = f(-4) + g(-4) = \sqrt{16+8} + 4 = \sqrt{24} + 4$$

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 2 = 2$$

$$f+g = \{(2, 1+\sqrt{2}), (-4, 4+\sqrt{24}), (0, 2)\}$$

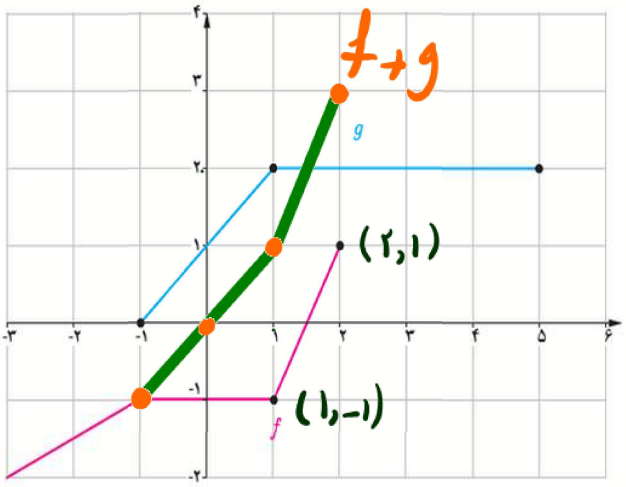
$$\left(\frac{g}{f}\right)(2) = \frac{g(2)}{f(2)} = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(-4) = \frac{g(-4)}{f(-4)} = \frac{4}{\sqrt{24}} = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{2}{0}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{\left(2, \frac{1}{\sqrt{4}}\right), \left(-4, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

مثال: (سنجاری)



نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع $f+g$ و f ، g را به‌دست آورید.

ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.

الف) $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = -1+2 = 1$

$(f+g)(-1) = f(-1)+g(-1) = -1+0 = -1$

ب) $D_f = [-1,5]$ $\quad D_g = (-\infty, 2]$

$D_f \cap D_g = [-1,2]$ با بدست آوردن چند نقطه از این دامنه تابع را رسم می‌کنیم.

$(f+g)(-1) = -1$, $(f+g)(0) = f(0)+g(0) = -1+1 = 0$

$(f+g)(1) = 1$, $(f+g)(2) = f(2)+g(2) = 1+2 = 3$

این نقاط روی $f+g$ هستند: $(-1,-1), (0,0), (2,3), (1,1)$

۳)

$$m=\frac{1+1}{-1-1}=2$$

$$y-1=2(x-2)$$

$$y-1=-2x+4$$

$$y=-2x+5$$

در بازه مورد نظر

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x\le 1\\ -2x+5 & 1<x\le 2\end{cases}$$

در بازه مورد نظر

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & -1\le x\le 1\\ 2 & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}x+1-1 & -1\le x\le 1\\ -2x+5+2 & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}x & -1\le x\le 1\\ -2x+7 & 1<x\le 2\end{cases}$$

ت) نمودار هر دو تابع است ولی رسم نمودار به کمک ضابطه دقیق‌تر است.

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس چهارم : اعمال روی توابع

جلسه دهم : صفحات ۶۶ تا ۶۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

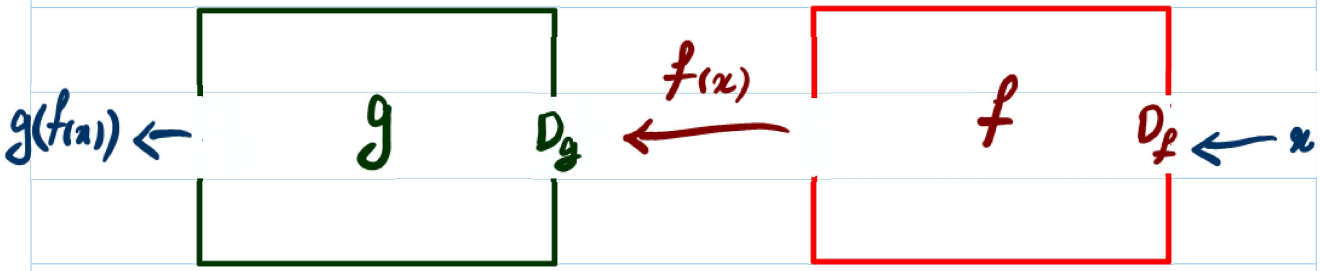
معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

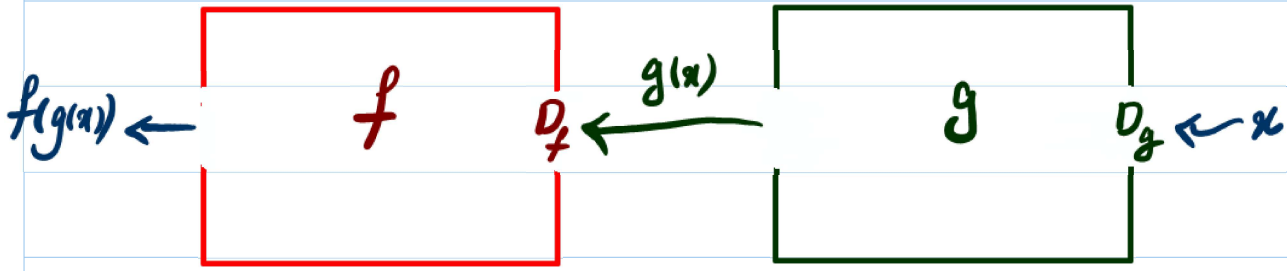
گروه ریاضی استان همدان

ترکیب توابع :

اگر f و g دو تابع باشند، ماشین این توابع را به صورت های زیر در نظر بگیرید :

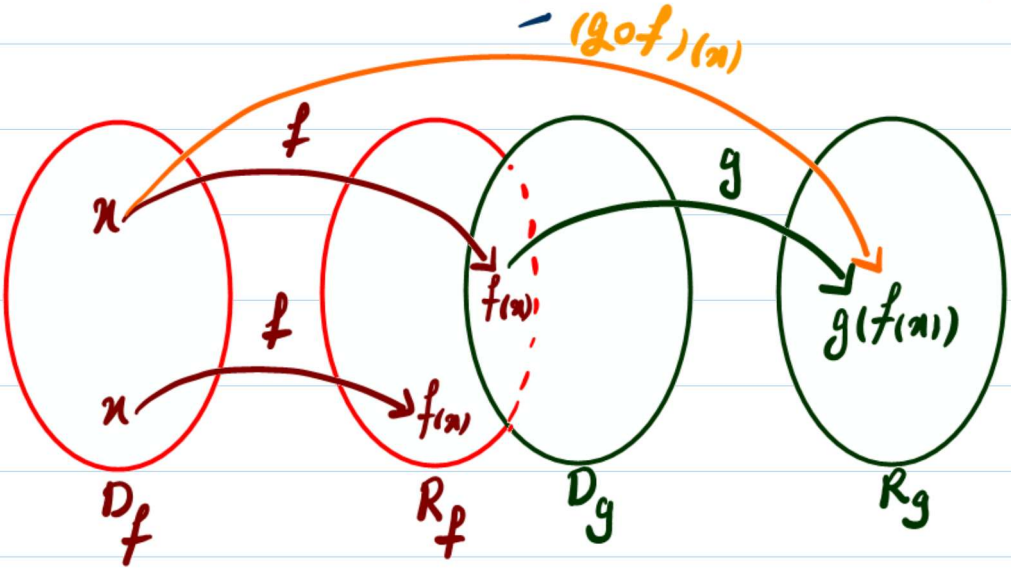


xهای که حق ورود به f را دارند خیلی در D_f هستند وارد تابع f می شوند و عمل f روی x انجام می پذیرد و $f(x)$ تحویل داده می شود. اگر $f(x)$ها اجازه ورود به g را داشته باشند خیلی در D_g باشند، ماشین g روی $f(x)$ اثر کرده و $g(f(x))$ را به عنوان خروجی تحویل می دهد.



در شکل دوم، x هایی که حق ورود به g را دارند یعنی در دامنه g هستند وارد ماشین تابع می‌شوند و خروجی g(x) تحویل داده می‌شود. اگر g(x) اجازه ورود به f را داشته باشد یعنی در دامنه f باشند، ماشین f روی g(x) اثر کرده و f(g(x)) را تحویل می‌دهد.

همین مفهوم را در نمودار ون هم ببینیم.



تمرین: نموداری مشابه، نمودار بالا برای f(g(x)) رسم کنید.

تعریف: ترکیب g با f را با $g\circ f$ نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنه آن:

$$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

است و برای هر x در دامنه این تابع داریم:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

تذکر: به همین ترتیب $f\circ g$ با دامنه $\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ تعریف می‌شود که

برای هر x در این دامنه خودمان داریم: $(f\circ g)(x) = f(g(x))$.

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\cos x$ باشند، $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$

را بدست آورید.

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$: یعنی در تابع f به جای x، $g(x)$ بگذار

$$= \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$$

$(g\circ f)(x) = g(f(x))$: یعنی در تابع g به جای x، $f(x)$ بگذار

$$= \cos\sqrt{1-x^2}$$

مثال: اگر $f=\{(1,2),(2,-1),(-1,1),(0,2)\}$ و $g=\{(1,1),(2,0),(3,-1)\}$ باشند، توابع fog و gof را تشکیل دهید.

fog: ست چپ xهای g را می‌نویسیم و به ترتیب در برد f بعد f را اثر می‌دهیم.

$$1 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 2$$
$$2 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} 2$$
$$3 \xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} 1$$

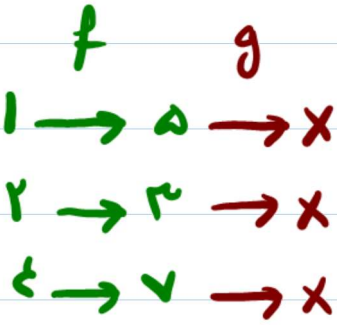
$$fog=\{(1,2),(2,2),(3,1)\}$$

gof: ست چپ xهای f را می‌نویسیم و به ترتیب در برد g بعد g را اثر می‌دهیم.

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 0$$
$$2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} \times$$
$$-1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 1$$
$$0 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 0$$

$$gof=\{(1,0),(-1,1),(0,0)\}$$

مثال: اگر $f=\{(1,0),(2,3),(4,7)\}$ ، $g=\{(0,2),(1,1)\}$ باشند آیا gof تشکیل می‌شود؟ چرا؟



خلاصه‌ی آن: $R_f \cap D_g = \emptyset$

نتیجه: برای تشکیل gof باید $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ باشد.

برای تشکیل fog باید $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ باشد.

مثال: اگر $f(x)=\frac{2x-2}{x+1}$ ، $g(x)=\frac{x+3}{x-1}$ باشند، دامنه و ضابطه gof را به دست آورید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{\frac{2x-2}{x+1}+3}{\frac{2x-2}{x+1}-1}=\frac{\frac{2x-2+3x+3}{x+1}}{\frac{2x-2-x-1}{x+1}}$$

$$(gof)(x)=\frac{5x+1}{x-3}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{-1\} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \underbrace{\mathbb{R} - \{-1\}}_{1} \mid \underbrace{\frac{2x-2}{x+1} \in \mathbb{R} - \{1\}}_{2}\}$$

۲: $\frac{2x-2}{x+1} \neq 1 \rightarrow 2x-2 \neq x+1 \rightarrow x \neq 3 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{3\}$

$\textcircled{1} \cap \textcircled{2}$

$$D_{gof} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x^2 - 7$ باشند، دامنه و ضابطه fog را بیابید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 7 - 2} = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \qquad D_g = \mathbb{R} \qquad D_f = [2, +\infty)$$

$$= \{\underbrace{x \in \mathbb{R}}_{1} \mid \underbrace{x^2 - 7 \in [2, +\infty)}_{2}\}$$

۲: $x^2 - 7 \geq 2 \rightarrow x^2 \geq 9 \rightarrow x \geq 3$ یا $x \leq -3$

$\textcircled{1} \cap \textcircled{2}$: $D_{fog} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{3-2x}$, $g(x)=\frac{1}{3x-5}$ ، D_{fog} ضابطه fog را بنویسید.

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{3-2\times\frac{1}{3x-5}}=\sqrt{3-\frac{12}{3x-5}}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

D_g: $3x-5\neq 0 \rightarrow x\neq \frac{5}{3}$ $\quad D_g=\mathbb{R}-\{\frac{5}{3}\}$

D_f: $3-2x\geq 0 \rightarrow -2x\geq -3 \xrightarrow{\div(-2)} x\leq \frac{3}{2} \rightarrow D_f=(-\infty,\frac{3}{2}]$

$$D_{fog}=\{\underbrace{x\in\mathbb{R}-\{\tfrac{5}{3}\}}_{1} \mid \underbrace{\tfrac{1}{3x-5}\in(-\infty,\tfrac{3}{2}]}_{2}\}$$

۲: $\frac{1}{3x-5}\leq\frac{3}{2} \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3x-5}\leq\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3x-5}-\frac{1}{2}\leq 0$

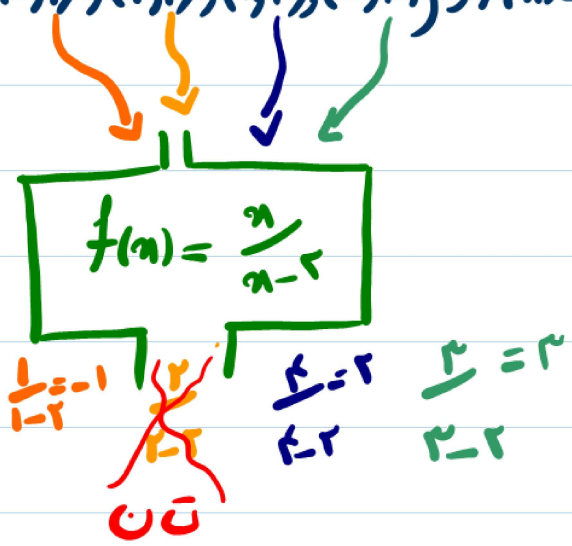
$$\frac{4-6x+5}{2(3x-5)}\leq 0 \rightarrow \frac{9-6x}{2(3x-5)}\leq 0$$

x		$\frac{5}{3}$		$\frac{3}{2}$
$9-6x$	+	+	0	−
$3x-5$	−	0	+	+
	−	∄	+	0	−

$$۲ \text{ ق.م} = (-\infty,\tfrac{5}{3})\cup[\tfrac{3}{2},+\infty)$$

$$①\cap②=D_{fog}=(-\infty,\tfrac{5}{3})\cup[\tfrac{3}{2},+\infty)$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{x}{x-2}$ و $g=\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4)\}$ باشد، fog را بیابید.



$$fog=\{(0,-1),(3,2),(5,3)\}$$

نکته: اگر fog را داشته باشیم و بخواهیم g را بدست آوریم. چون f را داریم، تابع fog را تشکیل می‌دهیم و با fog داده شده مساوی قرار می‌دهیم. معادله حاصل را حل می‌کنیم تا $g(x)$ بدست آید.

مثال: اگر $(fog)(x)=\frac{2x}{x-1}$ و $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ باشد، ضابطه $g(x)$ را بیابید.

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)+1}{g(x)-2}=\frac{2x}{x-1}$$

$$2x(g(x)-2)=(x-1)(g(x)+1)$$

$$2xg(x) - 4x = xg(x) + x - g(x) - 1$$

$$2xg(x) - xg(x) + g(x) = 4x + x - 1$$

$$xg(x) + g(x) = 5x - 1 \Rightarrow g(x)(x+1) = 5x - 1 \rightarrow g(x) = \frac{5x-1}{x+1}$$

نکته: اگر در $f \circ g$ را در نظر بگیریم و f را بدست آوریم، ابتدا g را مساوی t می‌گیریم و x را برحسب t بدست می‌آوریم و در $f \circ g$ قرار می‌دهیم تا $f(t)$ بدست آید. $f(t)$ همان $f(x)$ است فقط به جای t، x می‌نویسیم.

مثال: اگر $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{2x}{x-1}$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

$$g(x) = \frac{x+1}{x} = \frac{t}{1} \rightarrow xt = x + 1 \rightarrow xt - x = 1$$

$$\rightarrow x(t-1) = 1 \rightarrow x = \frac{1}{t-1}$$

$$f\left(\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{t}\right) = \frac{2x}{x-1} \rightarrow f(t) = \frac{2 \times \frac{1}{t-1}}{\frac{1}{t-1} - 1} = \frac{\frac{2}{t-1}}{\frac{1-t+1}{t-1}}$$

$$f(t) = \frac{2}{-t+2} \xrightarrow{t \to x} f(x) = \frac{2}{2-x}$$

نکته: ترکیب تابعی مانند f با خودش را بصورت $f \circ f$ می‌نویسند.

مثال: اگر $f=\{(2,1),(3,5),(7,2),(5,9),(4,3)\}$ ، $f \circ f$ را بیابید.

f f

$2 \to 1 \to X$

$3 \to 5 \to 9$

$7 \to 2 \to 1$

$5 \to 9 \to X$

$4 \to 3 \to 5$

$f \circ f=\{(3,9),(7,1),(4,5)\}$

مثال: اگر $f=\{(1,2),(3,-1),(4,5)\}$ باشد، $f \circ f^{-1}$ ، $f^{-1} \circ f$ را بیابید.

$f^{-1}=\{(2,1),(-1,3),(5,4)\}$

$f \circ f^{-1}$:

$2 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{f} 2$

$-1 \to 3 \to -1$

$5 \to 4 \to 5$

$f \circ f^{-1}=\{(2,2),(-1,-1),(5,5)\}$

$f^{-1}of$:

$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f^{-1}} 1$

$3 \to -1 \to 3$

$4 \to 5 \to 4$

$f^{-1}of = \{(1,1),(3,3),(4,4)\}$

نکته: اگر f تابعی وارون پذیر باشد آنگاه:

$$(f^{-1}of)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

$$(fof^{-1})(x) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

توجه کنید عکس گزاره بالا هم درست است یعنی اگر دو تابع در رابطه بالا صدق کنند آنگاه f تابعی وارون پذیر است که وارون آن f^{-1} خواهد بود.

مثال: ثابت کنید $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$, $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$ وارون یکدیگرند.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = -\frac{7}{2} \times \left(-\frac{2x+6}{7}\right) - 3$$

$$= \frac{2(x+3)}{2} - 3$$

$$= x + 3 - 3 = x$$

به عنوان تمرین ثابت کنید: $(gof)(x) = x$

مثال*: دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-1}$ داده شده‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a))=6$ باشد، a را بدست آورید.

$$f^{-1}(g(2a))=6 \longrightarrow g(2a)=f(6)=3$$

$$3=\frac{2a}{2a-1} \longrightarrow 6a-3=2a \longrightarrow 4a=3$$

$$\longrightarrow a=\frac{3}{4}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس چهارم : اعمال روی توابع

جلسه یازدهم و دوازدهم : حل تمرین صفحات ۶۹و۷۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱ اگر $f(x)=4x$ و $g(x)=2-x$، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f-g$ و fog را به همراه دامنهٔ آنها به‌دست آورید.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{4x}{2-x} \qquad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}$$

$$=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{x\mid 2-x=0\}=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=4x-(2-x)=4x-2+x=5x-2$$

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=4(2-x)=8-4x$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\mid 2-x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

۲ برای دو تابع $f(x)=\frac{1}{x-3}$ و $g(x)=\frac{4}{x}$ تابع fog و دامنهٔ آن را به‌دست آورید.

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{1}{\frac{4}{x}-3}=\frac{1}{\frac{4-3x}{x}}=\frac{x}{4-3x}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{3\}\ ,\qquad D_g=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{4}{x} \in \mathbb{R} - \{3\}\}$$

(1) (2)

(2): $\frac{4}{x} \neq 3 \rightarrow 3x \neq 4 \rightarrow x \neq \frac{4}{3}$

$(1) \cap (2) = D_{fog} = \mathbb{R} - \{0, \frac{4}{3}\}$

۳ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(۴) = ۷$ و $f(۷) = ۵$ آن‌گاه $(fog)(۴) = ۳۵$

ب) اگر $f(x) = x + ۴$ و $g(x) = ۳x$ آن‌گاه $(\frac{f}{g})(۲) = ۱$

پ) اگر $g(x) = ۲x - ۱$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن‌گاه $(fog)(۵) = g(۲)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $fog = gof$

ث) اگر $f(x) = x^۲ - ۴$ و $g(x) = \sqrt{x^۲ - ۴}$، آن‌گاه $(fog)(۵) = -۲۵$ و $(fog)(x) = -x^۲$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg = gf$

الف) نادرست است زیرا: $(fog)(۴) = f(g(۴)) = f(۷) = ۵ \neq ۳۵$

ب) درست است زیرا: $(\frac{f}{g})(۲) = \frac{f(۲)}{g(۲)} = \frac{۲+۴}{۳\times۲} = \frac{۶}{۶} = ۱$

پ) درست است زیرا: $(fog)(۵) = f(g(۵)) = f(۹) = \sqrt{۹} = ۳$

$g(۲) = ۲\times۲ - ۱ = ۳$

ت) نادرست است . مثال نقض :

$f(x)=x^2+5 \qquad g(x)=\sqrt{x}$

$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x})^2+5=x+5$

$\Rightarrow fog \neq gof$

$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2+5}$

ث) نادرست است زیرا :

$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x^2-4})^2-4=x^2-4-4=x^2-8\neq -x^2$

ج) درست است زیرا :

$(fg)(x)=f(x)\times g(x)=g(x)\times f(x)=(gf)(x)$

$fg=gf$

۴ فرض کنیم $\begin{cases} g:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ g(n)=2n \end{cases}$ و $f:A\to\mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود : $\{(4,7),(3,5),(2,3),(1,2)\}=f$ که در آن :
$A=\{1,2,3,4\}$، توابع $f+g$ و gof را به‌دست آورید.

$D_f=\{1,2,3,4\} \qquad D_g=\mathbb{N} \rightarrow D_f\cap D_g=\{1,2,3,4\}$

$g=\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$

$f+g=\{(1,4),(2,7),(3,11),(4,15)\}$

$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 4$

$2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6$

$3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 10$

$4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 14$

$gof=\{(1,4),(2,6),(3,10),(4,14)\}$

۵ اگر $f=\{(-4,13),(-1,7),(0,5),(\frac{5}{2},0),(3,-5)\}$ و $g=\{(-4,-7),(-2,-5),(0,-3),(3,0),(5,2),(9,6)\}$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

$D_f \cap D_g = \{-4,0,3\}$

$f+g=\{(-4,7),(0,2),(3,-5)\}$

$f-g=\{(-4,13-(-7)),(0,5-(-3)),(3,-5-0)\}$

$=\{(-4,20),(0,8),(3,-5)\}$

$\frac{f}{g}=\{(-4,\frac{13}{-7}),(0,-\frac{5}{3}),(3,\frac{-5}{0})\}$

۶ اگر $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

$D_f: x^2+5\geq 0 \rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$D_g: 4-x^2\geq 0 \rightarrow -x^2\geq -4 \xrightarrow{\div(-1)} x^2\leq 4 \rightarrow -2\leq x\leq 2$

$D_g=[-2,2]$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[-2,2] \mid \sqrt{4-x^2}\in\mathbb{R}\}=[-2,2]$

$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{(\sqrt{4-x^2})^2+5}=\sqrt{4-x^2+5}=\sqrt{9-x^2}$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \underbrace{\sqrt{x^2+5}\in[-2,2]}_{*}\}$

$*: \sqrt{x^2+5}\in[0,2]$: حال رادیکال با فرجه زوج هیچ‌گاه منفی نمی‌شود پس

$0\leq \sqrt{x^2+5}\leq 2$

$\rightarrow x^2+5\leq 4 \rightarrow x^2\leq -1$ غیرممکن

$*$ $\rightarrow D_{gof}=\emptyset \rightarrow$ gof تشکیل نمی‌شود.

۷ اگر $f(x)=x^۲-۹$ و $g(x)=x+۳$، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۹}{x+۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳\ ,\ D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}$$

$x+۳$ از صورت و مخرج بدون در نظر گرفتن اینکه $x+۳\neq ۰$ باشد، ساده شده است

درست:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳\ ;\quad x\neq -۳$$

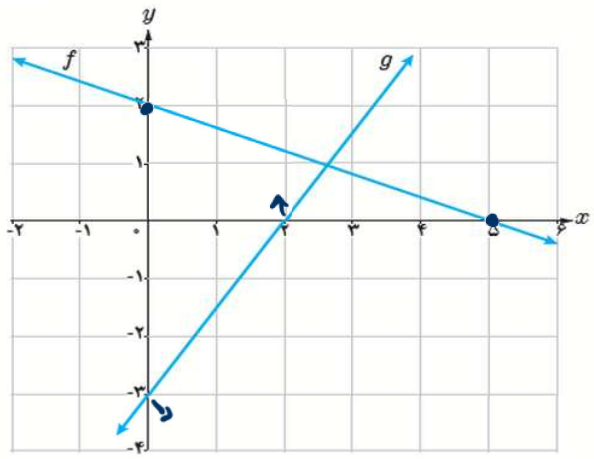
۸ اگر $f(x)=۲x+۵$، $f^{-۱}(x)$، $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به‌دست آورید.

$$y=۲x+۵ \longrightarrow y-۵=۲x \longrightarrow x=\frac{y-۵}{۲} \longrightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$$

$$(f^{-۱}of)(x)=f^{-۱}(f(x))=\frac{۲x+۵-۵}{۲}=\frac{۲x}{۲}=x\ ;\ x\in D_f=\mathbb{R}$$

$$(fof^{-۱})(x)=f(f^{-۱}(x))=۲\frac{x-۵}{۲}+۵=x-۵+۵=x\ ;\ x\in D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$$

۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.



f: $(0,2), (5,0) \rightarrow y-2=\frac{0-2}{5-0}(x-0) \rightarrow f(x)=-\frac{2}{5}x+2$

g: $(2,0), (0,-3) \rightarrow y+3=\frac{-3-0}{0-2}(x-0) \rightarrow g(x)=\frac{3}{2}x-3$

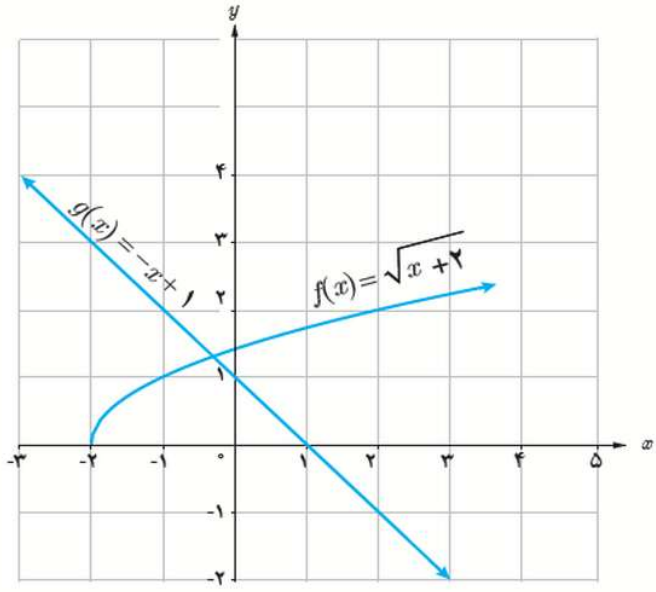
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-\frac{2}{5}x+2+\frac{3}{2}x-3=\frac{11}{10}x-1$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=-\frac{2}{5}x+2-\frac{3}{2}x+3=\frac{-19}{10}x+5$

$(fg)(x)=f(x)g(x)=(-\frac{2}{5}x+2)(\frac{3}{2}x-3)$

$D_{f\pm g}=D_f \cap D_g=\mathbb{R}$, $D_{f\times g}=D_f \cap D_g=\mathbb{R}$

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



الف) $(f+g)(2)$

$f(2)+g(2)=\sqrt{2+2}+(-2+1)=2-1=1$

ب) $(f+g)(-3)$

$f(-3)+g(-3)=\sqrt{-3+2}+g(-3)=$ تعریف نشده

(نکن)

پ) $(fg)(\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2})\times g(\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{1}{2}+2}\times(-\frac{1}{2}+1)$

$=\sqrt{\frac{5}{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$

ت) $(fog)(-۴)$

$$f(g(-۴)) = f(-(-۴)+۱) = f(۵) = \sqrt{۵+۴} = \sqrt{۹}$$

ث) $(\frac{f}{g})(۰)$

$$\frac{f(۰)}{g(۰)} = \frac{\sqrt{۰+۴}}{۰+۱} = \sqrt{۴}$$

ج) $(gof)(-۱)$

$$g(f(-۱)) = g(\sqrt{-۱+۴}) = g(۱) = -۱+۱ = ۰$$

۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به‌صورت $y = ax + b$ $(a \neq ۰)$ باز هم یک تابع خطی است.

$$y = ax+b \longrightarrow y-b = ax \xrightarrow{\div a} x = \frac{y-b}{a}$$

$$f^{-۱}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{۱}{a}x - \frac{b}{a} \quad (a \neq ۰)$$

$f^{-۱}$ هم تابع خطی شد.

۱۲ تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

وارون f را می‌یابیم:

$$y=\frac{۵}{۹}(x-۳۲) \xrightarrow{\times \frac{۹}{۵}} \frac{۹}{۵}y=x-۳۲$$

$$\frac{۹}{۵}y+۳۲=x \longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$$

x: سانتی‌گراد

f^{-1}: فارنهایت

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزهٔ خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.

کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به‌چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دوکتاب را برحسب شماره چاپ نمایش دهند.

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شدهٔ هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

الف)

$$f(n)=۱۰۰۰۰+(n-۱)(۷۰۰۰) \qquad n\geq ۱$$

$$g(n)=۲۰۰۰۰+(n-۱)(۹۰۰۰) \qquad n\geq ۱$$

ب)

$$(f+g)(n)=f(n)+g(n)=۳۰۰۰۰+(n-۱)(۱۶۰۰۰) \; ; \; n\geq ۱$$

پ) برای ساده‌تر شدن رسم بهتر است روی محورها واحد را هزار نسخه در نظر بگیریم:

$$f(n)=۱۰+(n-۱)۷=۷n-۷+۱۰=۷n+۳ \; ; \; n\geq ۱$$

$$g(n) = ۲۰ + (n-۱)۹ = ۹n - ۹ + ۲۰ = ۹n + ۱۱ \quad ; \quad n \geq ۱$$

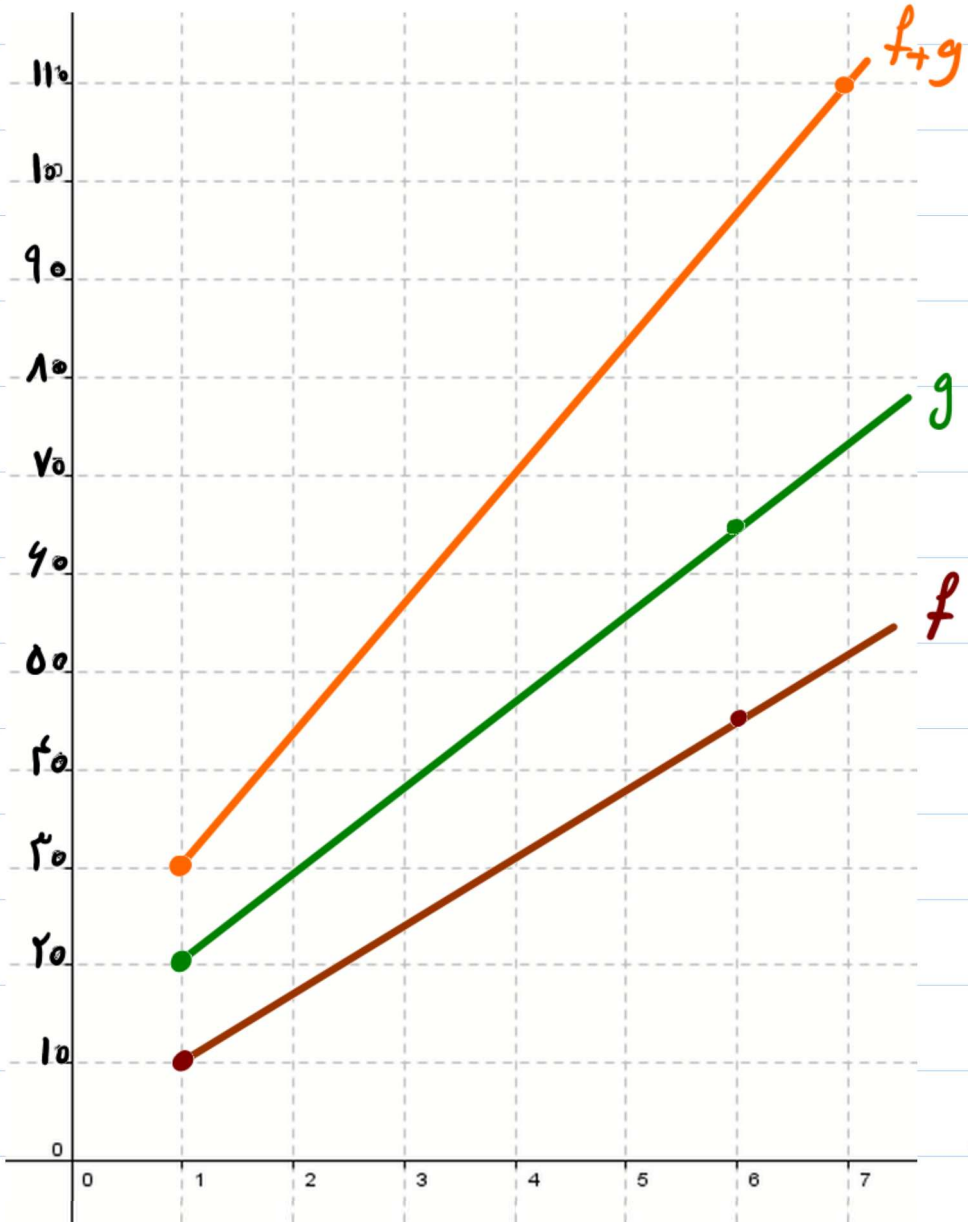
$$(f+g)(n) = ۳۰ + (n-۱)۱۶ = ۱۶n - ۱۶ + ۳۰ = ۱۶n + ۱۴ \quad ; \quad n \geq ۱$$

n	۱	۶
$f(n)$	۱۰	۴۵

n	۱	۶
$g(n)$	۲۰	۶۵

n	۱	۶
$f+g$	۳۰	۱۱۰

مقدار سفته‌ها (هزار نفر)



شماره جام