به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

(قسمت اول: مجموع جملات دنباله حسابی)

جلسه اول: صفحات ۲ تا ۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری :

دنباله حسابی : دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن یک مقدار ثابت به نام قدرنسبت به جمله قبل از خودش بدست می‌آید.

مانند ... ۲، ۵، ۸، ۱۱، ... قدرنسبت = ۳

+۳ +۳ +۳

جمله عمومی دنباله حسابی : اگر جمله اول را با a_1 و قدرنسبت را با d نمایش دهیم، جمله عمومی دنباله حسابی از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

چند رابطه مهم در دنباله حسابی :

جمله بعد — جمله قبل

۱) $d = a_{n+1} - a_n$: قدرنسبت در دنباله‌های برابر تفاضل دو جمله متوالی است :

۲) $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$: با داشتن قدرنسبت و دو جمله از دنباله :

۳) a, b, c سه جمله متوالی دنباله حسابی $\Leftrightarrow$ $b = \frac{a+c}{2}$ رابطه واسطه یا میانگین حسابی

۴) $n = \frac{b-a}{d} + 1$: تعداد جملات دنباله حسابی با جمله اول a و جمله آخر b

۵) $d = \frac{b-a}{k+1}$: درج واسطه حسابی: اگر بین دو عدد a و b، k عدد طوری قرار دهیم که دنباله حسابی حاصل شود

۶) $n+m=p+q \Rightarrow a_n + a_m = a_p + a_q$: رابطه اندیس

مجموع n جمله اول در یک دنباله حسابی :

در ریاضی ۱، رابطه گاوس برای مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n را به شکل زیر بدست آوردیم :

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$
$$+ \quad S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n} \Rightarrow 2S = n(n+1)$$
$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

از همین ایده کمک می‌گیریم و مجموع n جمله اول دنباله حسابی را می‌یابیم :

$$S_n = a_1 + (a_1+d) + \cdots + (a_1+(n-2)d) + (a_1+(n-1)d)$$
$$+$$
$$S_n = (a_1+(n-1)d) + (a_1+(n-2)d) + \cdots + (a_1+d) + a_1$$

$$2S_n = \underbrace{(2a_1+(n-1)d) + (2a_1+(n-1)d) + \cdots + (2a_1+(n-1)d) + (2a_1+(n-1)d)}_{n}$$

$$2S_n = n(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه دوم : زمانی که جمله اول و آخر دنباله را داریم :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال : مجموع هشت جمله اول دنباله $-2, 3, 8, \ldots$ را بیابید.

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 5 \\ S_8 = ? \end{cases}$$

$$S_8 = \frac{8}{2}(2(-2) + (8-1)(5)) = 4(-4+35)$$

$$= 4 \times 31 = 124$$

مثال : حاصل $A = -2 + 1 + 4 + \ldots + 52$ را بدست آورید.

$$n = \frac{b-a}{d} + 1 \Rightarrow n = \frac{52-(-2)}{3} + 1 = \frac{54}{3} + 1 = 18 + 1 = 19$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{19} = \frac{19}{2}(-2 + 52) = \frac{19}{2} \times 50 = 19 \times 25 = 475$$

مثال : در یک دنباله حسابی جمله پنجم ۵۴ و جمله نهم ۷۷ هستند. مجموع دوازده جمله اول را بیابید.

$$d = \frac{a_n - a_m}{n-m} \Rightarrow d = \frac{a_9 - a_5}{9-5} = \frac{77-54}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_5 = a_1 + 4\times 4 \rightarrow 53 = a_1 + 24 \rightarrow a_1 = 29$

$S_{12} = \frac{12}{2}(2\times 29 + (\overset{\sim}{12-1})4) = 6(58+44) = 6\times 124 = 744$

مثال: در یک دنباله حسابی، جمله n ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول را محاسبه کنید.

قدرت d

$a_1 = \frac{3}{2}\times 1 - 5 = \frac{3}{2} - 5$

$a_{15} = \frac{3}{2}\times 15 - 5 = \frac{45}{2} - 5$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}\left(\frac{3}{2} - 5 + \frac{45}{2} - 5\right)$

$S_{15} = \frac{15}{2}\left(\frac{48}{2} - 10\right) = \frac{15}{2}(24 - 10) = \frac{15}{2}\times 14 = 15\times 7 = 105$

مثال: مجموع چند جمله از دنباله حسابی $2, 5, 8, \ldots$ برابر 247 است؟

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 3 \\ S_n = 247 \end{cases}$

$S_n = \frac{n}{2}(2(2) + (n-1)3)$

$247 = \frac{n}{2}(4 + 3n - 3) = \frac{n}{2}(3n + 1)$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(3n+1) = 734 \xrightarrow{\times 2} n(3n+1) = 1468$$

$$3n^2 + n - 1468 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 3(-1467)$$

$$\Delta = 1 + 17688 = 17689$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{17689}}{6} = \frac{-1 \pm 133}{6} \begin{cases} \frac{-1+133}{6} = \frac{132}{6} = 22 \\ \frac{-1-133}{6} = -\frac{134}{6} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow n = 22$$

مثال: در دنباله حسابی با جمله اول ۴ و قدرنسبت ۴ حداقل چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بزرگ‌تر شود؟

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 4 \\ S_n > 300 \\ n = ? \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2\times 4 + (n-1)(4)) = \frac{n}{2}(8 + 4n - 4)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(4n + 4) = n(2n+1)$$

$$S_n = n(2n+1) > 300$$

روش حدس و آزمایش: $n=12 \rightarrow 12(24+1) = 12\times 25 = 300$

$n=13 \rightarrow 13(26+1) = 13\times 27 = 351$

اگر حداقل ۱۳ جمله از این دنباله را جمع کنیم، حاصل از ۳۰۰ بزرگ‌تر می‌شود.

مثال: بین دو عدد ۱۵ و ۳۵ تعدادی واسطه حسابی قرار می‌دهیم تا مجموع همه اعداد ۲۲۵ شود.

قدرنسبت دنباله را بیابید.

$$\underbrace{15, \dots, 35}_{k \text{ تا عدد}} \qquad S_{k+2} = 225$$

$$S_{k+2} = \frac{k+2}{2}(15+35) \Rightarrow 225 = \frac{k+2}{2}(50)$$

$$\Rightarrow 25(k+2) = 225 \xrightarrow{:25} k+2 = 9 \rightarrow k = 7$$

$$d = \frac{b-a}{k+1} = \frac{35-15}{7+1} = \frac{20}{8} = 2{,}5$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر ۳ و کوچک‌تر از ۱۵۱ را بیابید.

$$3, 9, 15, \dots \qquad a_n = 3+(n-1)6 \Rightarrow a_n = 3+6n-6 \rightarrow a_n = 6n-3$$

$$a_n < 151 \Rightarrow 6n-3 < 151 \rightarrow 6n < 154 \rightarrow n < 17{,}33$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 17$$

$$S_{17} = \frac{17}{2}\left(2(3)+\overbrace{(17-1)}^{16}6\right) = \frac{17}{2}(6+96) = \frac{17}{2} \times 102 = 17 \times 51 = 867$$

نکته: جملات شماره فرد یک دنباله حسابی مثل $a_1, a_3, a_5, \ldots$ دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند زیرا:

$$a_1,\ a_1+2d,\ a_1+4d,\ \ldots$$

جملات شماره زوج یک دنباله حسابی مثل $a_2, a_4, a_6, \ldots$ دنباله حسابی با جمله اول a_1+d و قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند زیرا:

$$a_1+d,\ a_1+3d,\ a_1+5d,\ \ldots$$

مثال: در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جملات شماره‌های فرد ۲۲۰ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۲۴۰ است. جمله اول و قدرنسبت را بیابید.

$$S_{\text{فرد}} = S_{20} = \frac{20}{2}\left(2a_1+(20-1)2d\right) \Rightarrow 220 = 10(2a_1+38d)$$

$$\Rightarrow 2a_1+38d = 22 \rightarrow a_1+19d = 11 \quad (1)$$

$$S_{\text{زوج}} = S_{20} = \frac{20}{2}\left(2(a_1+d)+(20-1)2d\right) \Rightarrow 240 = 10(2a_1+2d+38d)$$

$$\Rightarrow 2a_1+40d = 24 \quad (2)$$

$$(1),(2)\begin{cases} a_1+19d = 11 \\ 2a_1+40d = 24 \end{cases} \xrightarrow{(-2)}$$

$$2d = 1 \rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$2a_1+20 = 24 \rightarrow 2a_1 = 4 \rightarrow a_1 = \frac{3}{2}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

(قسمت دوم: مجموع جملات دنباله هندسی)

جلسه دوم: صفحات ۴و۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری :

دنباله هندسی : دنباله ای است که هر جمله آن (به غیر جمله اول) از ضرب یک مقدار ثابت در جمله قبلیش بدست می آید.

مانند : $3, 12, 48, \dots$ (×4) یا $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$ (×$\frac{1}{3}$)

جمله عمومی دنباله هندسی : اگر a_1 جمله اول و q قدرت دنباله هندسی باشد، جمله عمومی یا جمله n ام آن عبارت است از : $a_n = a_1 q^{n-1}$

چند رابطه مهم در دنباله هندسی :

۱) قدرت در دنباله هندسی برابر تقسیم دو جمله متوالی است : $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

۲) یافتن قدرت هرگاه a_m و a_n دو جمله از دنباله هندسی را داشته باشیم : $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$

۳) a, b, c : سه جمله متوالی دنباله هندسی $\Leftrightarrow b^2 = ac$ رابطه واسطه یا میانگین هندسی

۴) درج واسطه هندسی : اگر بین دو عدد a و b، k عدد طوری قرار دهیم که دنباله هندسی حاصل شود : $q^{k+1} = \frac{b}{a}$

۵) $n+m=p+q \Rightarrow a_n \times a_m = a_p \times a_q$: رابطه اندیس

مجموع n جمله اول در یک دنباله هندسی :

مجموع n جمله اول دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \qquad q \neq 1$$

اثبات : $S_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1}$ (۱)

$\xrightarrow{\times q} qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n$ (۲)

(۱) − (۲) ⟹

$S_n - qS_n = (a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}) - (a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n)$

$S_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n \Rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$

$\xrightarrow[q \neq 1]{\div(1-q)} S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

اگر $q=1$ باشد عضو دنباله به صورت $a_1, a_1, \ldots, a_1$ باشد $S_n = na_1$

مثال: مجموع هفت جمله اول دنباله هندسی ... و ۳, ۶, ۱۲ را بیابید.

$$S_7 = 3 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 3 \times \frac{1-128}{1-2} = 3 \times \frac{-127}{-1} = 3 \times 127 = 381$$

مثال: در دنباله هندسی $a_2 = 6$ و $a_7 = 192$، مقدار S_{10} را محاسبه کنید.

$$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \Rightarrow q^{7-2} = \frac{a_7}{a_2} \Rightarrow q^5 = \frac{192}{6} = 32 \rightarrow q^5 = 32$$

$$\Rightarrow q = 2$$

$$a_2 = a_1 q \Rightarrow 6 = a_1 \times 2 \rightarrow a_1 = 3$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 3 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 3 \times \frac{1-1024}{-1} = 3 \times 1023 = 3069$$

مثال: مجموع چند جمله دنباله هندسی ... و ۶, ۱۲, ۲۴, ... برابر ۱۰۲۶ است؟

(۶ و ۱۲: $\times(-2)$ $\times(-2)$)

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ q = -2 \\ S_n = 1026 \\ n = ? \end{cases} \qquad S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$1026 = 6 \times \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} \Rightarrow 1026 = 2\left(1-(-2)^n\right)$$

$$\div 2 \Rightarrow 1-(-2)^n = 513 \rightarrow -(-2)^n = 512$$

$\xrightarrow{\div(-1)} (-2)^n = -512 \rightarrow (-2)^n = (-2)^9 \rightarrow n = 9$

مثال: بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی داده‌اند. مجموع این ۵ عدد چقدر است را بیابید.

$4, \square, \square, \square, 324 \qquad q^{k+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow q^{4+1} = \frac{324}{4}$

$\Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = \pm 3 \xrightarrow[\text{مسئله}]{\text{فرض}} q = 3$

$S_5 = 4 \times \frac{1-3^5}{1-3} = \frac{4(1-243)}{-2} = -2(-242) = 484$

مثال: در دنباله هندسی افزایشی $4, 6, 9, b, \ldots$ مجموع شش جمله اول را بدست آورید.

روش اول یافتن q: $q^{4-1} = \frac{a_4}{a_1} = \frac{9}{4} \rightarrow q^2 = \frac{9}{4} \rightarrow q = \pm\frac{3}{2}$

دنباله افزایشی $\longrightarrow q = \frac{3}{2}$

روش دوم یافتن q:

دنباله هندسی: $a^2 = 6 \times 9 = 36 \rightarrow a = \pm 6 \rightarrow a = 6$

$4, 6, 9, b, \ldots \Rightarrow q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$S_4 = 4 \times \frac{1-(\frac{3}{4})^4}{1-\frac{3}{4}} = 4 \times \frac{1-\frac{81}{256}}{\frac{1}{4}} = -8\left(\frac{256-81}{256}\right) = -\frac{-665}{8}$$

$$= \frac{665}{8}$$

مثال: در یک دنباله هندسی مجموع شش جمله اول ۲۸ برابر مجموع سه جمله اول است. مجموع ده جمله اول چند برابر مجموع پنج جمله اول است؟

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \times \frac{q^n-1}{q-1}$$

$$S_6 = 28 S_3 \Rightarrow a_1 \times \frac{q^6-1}{q-1} = 28 a_1 \times \frac{q^3-1}{q-1}$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{(q^3-1)(q^3+1)}{q-1} = 28 \frac{q^3-1}{q-1} \Rightarrow q^3+1 = 28 \rightarrow q^3 = 27$$

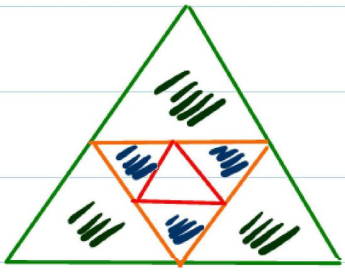
$$\rightarrow q = 3$$

$$\frac{S_{10}}{S_5} = k \rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = k$$

$$\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{a_1 \times \frac{q^{10}-1}{q-1}}{a_1 \times \frac{q^5-1}{q-1}} = \frac{q^{10}-1}{q^5-1} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{(q^5-1)(q^5+1)}{q^5-1}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = q^5+1 = 3^5+1 = 243+1 = 244$$

مثال: وسط اضلاع مثلث متساوی الاضلاعی را به هم وصل می‌کنیم و سه مثلث از چهار مثلث ایجاد شده را رنگ می‌کنیم. پس این کار را با مثلث باقی مانده تکرار می‌کنیم. حداقل چند مرحله باید رنگ آمیزی را انجام دهیم تا بیش از 99,9 درصد مساحت اولیه رنگ شود؟



مساحت مثلث اولیه $= S$

مرحله اول: $\frac{3}{4}S$ ، مرحله دوم: $\frac{3}{4}(\frac{1}{4}S)$ ، مرحله سوم: $\frac{3}{4}(\frac{1}{4})^2 S$ ، ....

دنباله هندسی: $a_1 = \frac{3}{4}S$ ، $q = \frac{1}{4}$ $\quad S_n > \frac{999}{1000}S$

$$S_n = \frac{3}{4}S \times \frac{(\frac{1}{4})^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{3}{4}S \times \frac{\frac{1}{4^n} - 1}{-\frac{3}{4}} = S(1 - \frac{1}{4^n})$$

$$S_n > \frac{999}{1000}S \Rightarrow S(1 - \frac{1}{4^n}) > \frac{999}{1000}S$$

$$1 - \frac{999}{1000} > \frac{1}{4^n} \Rightarrow \frac{1}{1000} > \frac{1}{4^n} \xrightarrow{\text{معکوس}} 1000 < 4^n$$

باحدس‌گذاری $4^5 = 1024 \rightarrow 1000 < 4^5 \Rightarrow n \geq 5$

آشنایی با یک اتحاد

می‌خواهیم رابطهٔ مجموع دنباله هندسی را برای دنباله $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ با فرض $a \neq 1$ و $n \in \mathbb{N}$ بکار ببریم. در این دنباله جمله اول 1 و قدرنسبت $q = a$ و تعداد جمله‌ها n تاست پس:

$$S_n = 1 \times \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow a^n - 1 = (a-1)S_n$$

$$\Rightarrow a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$$

مانند: $a^6 - 1 = (a-1)(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$

(a-1) لازم، (a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) حاصل

مثال: حاصل عبارت $A = \frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ را به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ بدست آورید.

صورت: $a_1 = 1$, $q = t$, $n = 12$

مخرج: $a_1 = 1$, $q = t^3$, $n = 4$

$$A = \frac{1 \times \frac{t^{12} - 1}{t - 1}}{1 \times \frac{(t^3)^4 - 1}{t^3 - 1}} = \frac{\frac{t^{12} - 1}{t - 1}}{\frac{t^{12} - 1}{t^3 - 1}} = \frac{(t^{12} - 1)(t^3 - 1)}{(t-1)(t^{12} - 1)} = \frac{t^3 - 1}{t - 1}$$

$$= \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1} = t^2+t+1$$

$$t = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

$$A = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

$2(3-\sqrt{5})$

$$A = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3-\sqrt{5}-1+\sqrt{5}+2}{2} = 2$$

تذکر: اگر n فرد باشد با تبدیل a به $-a$ داریم:

اثبات جزوان تمرین $a^n+1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + a^{n-3} - \dots + 1)$

نکته: در حالت کلی می‌توان دو رابطه زیر را بدست آورد:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

n فرد: $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$

مثال: کسر زیر را ساده کنید:

$$A = \frac{(x^3+1)(x-1)}{x^2-1}$$

$$A = \frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس دوم: معادلات درجه دوم

(قسمت اول: روابط بین ضرائب و ریشه‌ها)

جلسه سوم: صفحات ۷تا۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

معادله درجه دوم :

به معادله $ax^2+bx+c=0$ باشرط $a\neq 0$ یک معادله درجه دوم گفته می‌شود.

در سال گذشته با روش‌های حل معادله درجه دوم؛ روش تجزیه، روش مربع کامل و روش دلتا آشنا شدید.

یادآوری روش دلتا :

$$\Delta = b^2-4ac \begin{cases} \Delta>0 \rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta=0 \rightarrow x=\dfrac{-b}{2a} \\ \Delta<0 \rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \end{cases}$$

نکته : (روش ضرائب) برخی از معادلات درجه دوم شرایطی دارند که می‌توان به سرعت جواب‌های آن را یافت :

الف) اگر جمع ضرائب صفر باشد یعنی: $a+b+c=0$ باشد یکی از جواب‌ها 1 و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

ب) اگر ضریب x مساوی جمع دو تای دیگر باشد یعنی: $b=a+c$ باشد یکی از جواب‌ها -1 و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $5x^2-3x-2=0$ (a, b, c)

$5-3-2=5-5=0$

$\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=\frac{-2}{5} \end{cases}$

ب) $4x^2+7x+3=0$ (a, b, c)

$7=4+3$

$\begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{c}{a}=-\frac{3}{4} \end{cases}$

جمع و ضرب ریشه‌ها:

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta \geq 0$ باشد، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن برابر است با: (ریشه‌های معادله)

$S=$ جمع دو ریشه $=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

$P=$ ضرب دو ریشه $=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

اثبات: اگر $\Delta>0$ باشد داریم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$ صورت زیر رادیکال مزدوج

$$= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$ ■ به همین ترتیب برای حالت $\Delta=0$ اثبات می‌شود.

مثال: بدون حل معادله $2x^2-7x+3=0$ مجموع و ضرب ریشه‌ها را بیابید.

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-7)}{2}=\frac{7}{2} \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$$

مثال: در معادله $2x^2-mx+m-1=0$ یکی از جواب‌ها عکس و قرینه جواب دیگر است. ($a=2$, $b=-m$, $c=m-1$)

m را بیابید.

ریشه‌ها α , $\beta=-\frac{1}{\alpha}$

$$P=\alpha\beta=\alpha\left(-\frac{1}{\alpha}\right)=-1 \Rightarrow P=\frac{c}{a}=-1 \Rightarrow \frac{m-1}{2}=-1$$

$$\Rightarrow m-1=-2 \Rightarrow m=-1$$

مثال: در معادله $x^2-8x+m=0$ اگر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه دیگر 5 واحد بیشتر باشد ($a=1$, $b=-8$, $c=m$)

m را محاسبه کنید.

$$\alpha=\frac{\beta}{2}+5 \xrightarrow{\times 2} 2\alpha=\beta+10 \rightarrow 2\alpha-\beta=10$$

$$S = \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{1} = 8 \rightarrow \alpha+\beta = 8$$

$$+\begin{cases} 2\alpha-\beta = 10 \\ \alpha+\beta = 8 \end{cases}$$

$$3\alpha = 18 \rightarrow \alpha = 6 \rightarrow \beta = 2$$

$$P = \alpha\beta = 6\times 2 = 12 \rightarrow P = 12 = \frac{c}{a} = \frac{m}{1} \rightarrow m = 12$$

مثال: اگر α, β جواب‌های معادله $x^2-2x-4=0$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$ $\qquad S = \frac{2}{1} = 2,\ P = \frac{-4}{1} = -4$

$$= \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

ب) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

نکته: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Rightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = \alpha^2+\beta^2$

$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = S^2-2P$$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^2-2P}{P^2} = \frac{2^2-2(-4)}{(-4)^2} = \frac{4+8}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

ب) $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{\alpha+\beta+2}{1+(\alpha+\beta)1+\alpha\beta}=\frac{S+2}{1+S+P}$

$$=\frac{2+2}{1+2-4}=\frac{4}{-1}=-4$$

ت) $\alpha^3+\beta^3$

نکته: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=\alpha^3+\beta^3 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow \alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

$\alpha^3+\beta^3=2^3-3(-4)(2)=8+24=32$

مثال: کنکور ۹۹ تجربی

معادله درجه دوم $2x^2+(2m-1)x+m-2=0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ✓ ۲) ۴ ۳) -1 ۴) $-\frac{5}{2}$

$\alpha+\beta=\frac{1}{\alpha\beta} \Rightarrow S=\frac{1}{P} \rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{c}{a}} \rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{a}{c}$

$\rightarrow a^2=-bc \rightarrow 4^2=-(2m-1)(2-m)$

$9=-(4m-2m^2-2+m) \Rightarrow -2m^2+5m-2+9=0$

$-2m^2+5m+7=0 \Rightarrow -2+7=5 \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=-\frac{7}{2}=\frac{7}{2} \end{cases}$ غ ق ق ✓

$m=-1 \Rightarrow 3x^2-4x+3=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-x+1=0 \rightarrow \Delta=1-4\times1\times1=-3<0$

گزینه ۱

حالت ریشه‌ها :

الف) $P>0$ (دو ریشه هم‌علامت)
- $S>0$: دو ریشه مثبت
- $S<0$: دو ریشه منفی

ب) $P<0$ (دو ریشه مختلف‌العلامه)
- $S>0$: اندازه ریشه مثبت بزرگ‌تر
- $S<0$: اندازه ریشه منفی بزرگ‌تر
- $S=0$: دو ریشه قرینه هم

مثال کنکور ۹۶ رشته ریاضی :

به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14-a = 0$ دو ریشه مثبت دارد؟

(۱ $-2 < a < 2$ (۲ $2 < a < 5$ (۳ $2 < a < 14$ (۴ ✓ $5 < a < 14$

$\Delta > 0$ ، $P > 0$ ، $S > 0$

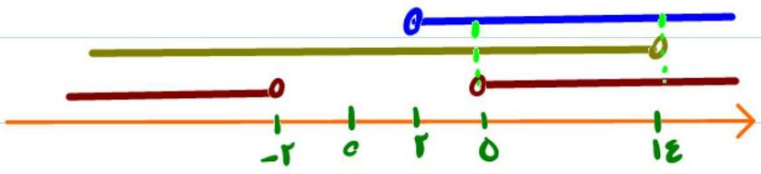
$\Delta > 0 \rightarrow (-2(a-2))^2 - 4 \times 1 \times (14-a) > 0 \rightarrow 4(a^2 - 4a + 4) - 56 + 4a > 0$

$4a^2 - 16a + 16 - 56 + 4a > 0 \rightarrow 4a^2 - 12a - 40 > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0$

$\rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a > 5$ یا $a < -2$ ①

$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{14-a}{1} > 0 \rightarrow a < 14$ ②

$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow \frac{2(a-2)}{1} > 0 \Rightarrow 2a - 4 > 0 \rightarrow a > 2$ ③



① ∩ ② ∩ ③ : $5 < a < 14$ گزینه ۴

ساخت معادله درجه دوم :

تا به حال معادله درجه دوم را داشتیم و ریشه‌ها یا ضرب و جمع ریشه‌ها را پیدا می‌کردیم.

حال می‌خواهیم ببینیم اگر اطلاعاتی درباره ریشه‌ها داشته باشیم، می‌توانیم معادله را بنویسیم؟

قضیه: اگر α و β دو عدد دلخواه باشند و $S=\alpha+\beta$ ، $P=\alpha\beta$ باشد آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^2-Sx+P=0$ است.

اثبات: فرض کنید می‌خواهیم معادله بنویسیم که ریشه‌هایش α و β است در این صورت

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

پس:

$$x^2+(-\alpha-\beta)x+(-\alpha)(-\beta)=0$$ از یک جمله مشترک

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Rightarrow x^2-Sx+P=0$$ ☑

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $2\pm\sqrt{3}$ باشد.

$$S=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4 \quad , \quad P=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$$

$$x^2-Sx+P=0 \longrightarrow x^2-4x+1=0$$

مثال کنکور ۹۴ :

ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2-3x-1=0$ یک واحد کمتر است؟

۱) $x^2-3x+1=0$ ۲) $x^2+3x+1=0$ ۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$ ✓

اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2-3x-1=0$ باشند آنگاه ریشه‌های معادله جدید :

$\frac{1}{\alpha}-1$ و $\frac{1}{\beta}-1$ است. $\quad P_{قدیم}=-\frac{1}{2}$ و $S_{قدیم}=\frac{3}{2}$

$$S_{جدید}=\frac{1}{\alpha}-1+\frac{1}{\beta}-1=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=\frac{S_{قدیم}}{P_{قدیم}}-2=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}-2$$

$$=\frac{6}{-2}-2=-3-2=-5$$

$$P_{جدید}=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=(-1)^2+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)(-1)+\frac{1}{\alpha\beta}=1-3(-1)+\frac{1}{-\frac{1}{2}}$$

($\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{S_{قدیم}}{P_{قدیم}}$)

$$=1+3-2=2$$

معادله جدید: $x^2-S_{جدید}x+P_{جدید}=0\rightarrow x^2+5x+2=0$ گزینه ۴

مثال: ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2+ax+b=0$ یک واحد از ریشه‌های معادله $3x^2+7x+1=0$ بیشتر است. b کدام است؟

۱) -2 ✓ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2+7x+1=0$ آنگاه ریشه‌های معادله $x^2+ax+b=0$ برابر $\alpha+1$ و $\beta+1$ است. $\left(P_{\text{قدیم}}=\frac{1}{3},\ S_{\text{قدیم}}=-\frac{7}{3}\right)$

پس: $b=P_{\text{جدید}}=(\alpha+1)(\beta+1)=1+(\alpha+\beta)+1+\alpha\beta=1+S_{\text{قدیم}}+P_{\text{قدیم}}$

$=1-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}=1+\frac{-6}{3}=1-2=-1$

گزینه ۲

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس دوم: معادلات درجه دوم

(قسمت دوم: صفرهای تابع)

جلسه چهارم: صفحات ۱۰ تا ۱۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

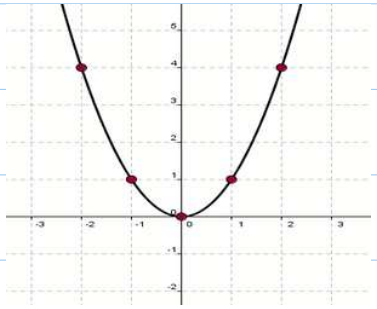
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

یادآوری:

به نمودار $y=ax^2+bx+c$ که در آن $a,b,c\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$ سهمی می‌گویند.

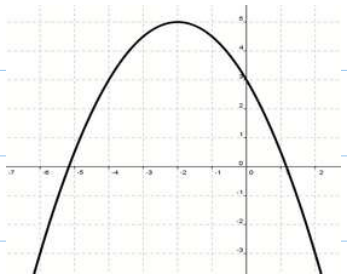
اگر $a>0$ باشد سهمی رو به بالا و اگر $a<0$ باشد سهمی رو به پائین است.



$a>0$

y ↑

min دارد



$a<0$

y ↑

max دارد

در هر دو حالت نقطه $S(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$ (x_S ↑) را رأس سهمی می‌گوئیم.

همچنین اگر $S(x_S,y_S)$ رأس سهمی باشد می‌توانیم ضابطه سهمی را به صورت:

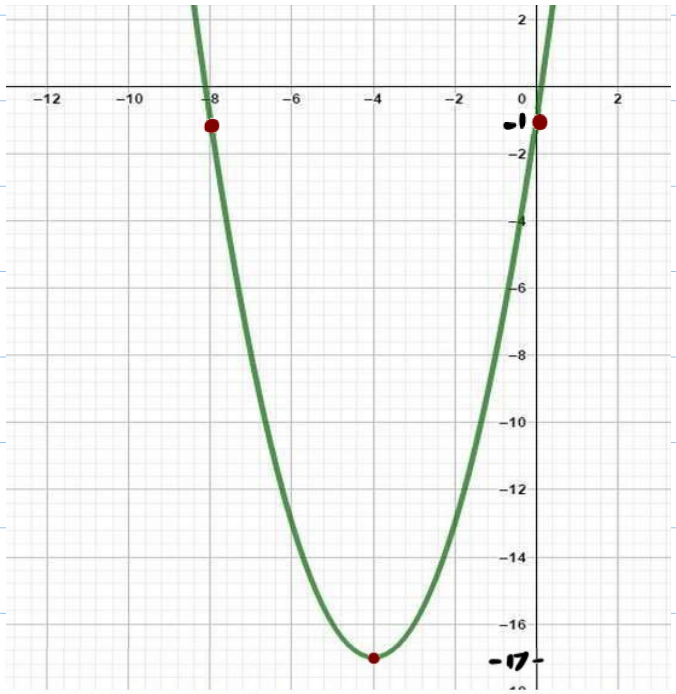
$y=a(x-x_S)^2+y_S$ هم بنویسیم.

مثال: سهمی $y=\overset{a}{1}x^2+\overset{b}{8}x\overset{c}{-1}$ را رسم کنید.

x	-8	-4	0
y	-1	-17	-1

$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{2}=-4$

$y=(-4)^2+8(-4)-1=16-32-1=-17$



مثال : فرض کنید $A(-1,9)$ رأس سهمی باشد و سهمی از نقطه $(3,1)$ هم بگذرد .

ضابطه سهمی را بنویسید .

$$y = a(x-x_A)^2 + y_A$$

$$y = a(x+1)^2 + 9 \xrightarrow[\text{در سهمی}]{(3,1)} 1 = a(3+1)^2 + 9 \rightarrow 1 = 16a + 9 \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 9$$

صفرهای تابع :

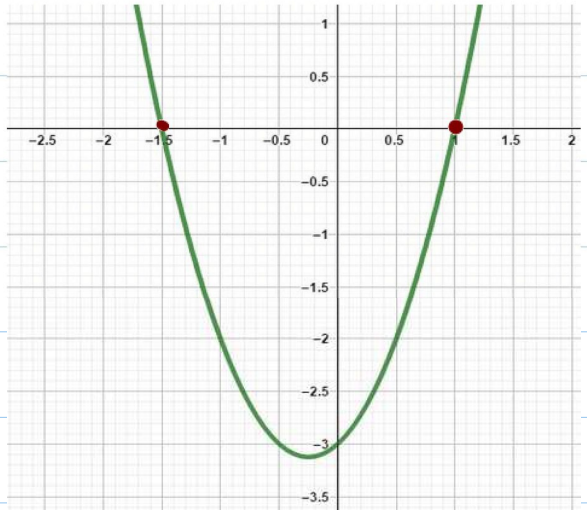
اگر f تابع باشد ، جواب‌های معادله $f(x)=0$ را صفرهای تابع می‌گوئیم . در واقع صفرهای تابع ، xهایی از تابع هستند که y آن‌ها صفر است . پس می‌توان گفت :

صفرهای تابع ، طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور x هستند .

مثال : صفرهای توابع زیر را با رسم نمودار بدست آورید.

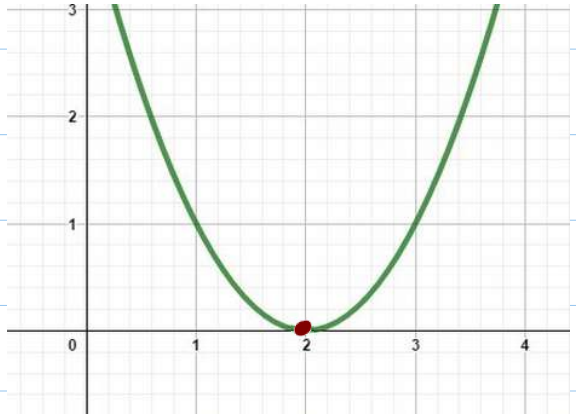
الف) $y = 2x^2 + x - 3$

$2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \;,\; x = -1,5$



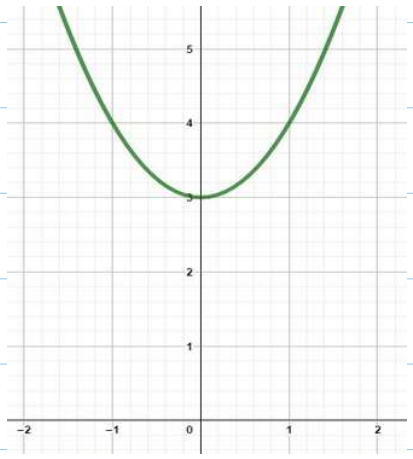
ب) $y = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$



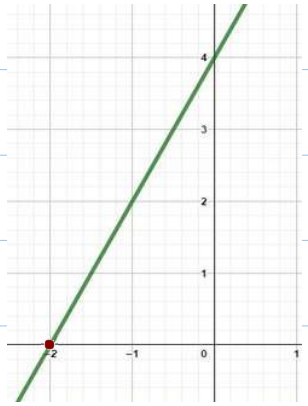
ج) $y = x^2 + 3$

$x^2 + 3 = 0$ صفر ندارد



ت) $y = 2x + 4$

x	y
0	4
-2	0



$2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$

نتیجه :

- اگر Δ مثبت باشد یعنی در دو نقطه که همان جواب های معادله هستند محور x ها را

قطع می کند.



- اگر Δ صفر باشد یعنی فقط در یک نقطه که همان رأس سهمی است محور x ها را

قطع می کند.



- اگر Δ منفی باشد یعنی محور x ها را قطع نمی کند زیرا معادله جواب ندارد.



مثال : به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$ (که در آن $a=a$، $b=a+3$، $c=-1$)، محور xها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

۱) $a<-9$ ✓ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

دو ریشه منفی دارد $\rightarrow$ $f(x)=0 \rightarrow ax^2+(a+3)x-1=0$

$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = (a+3)^2 - 4a(-1) = a^2 + 6a + 9 + 4a = a^2 + 10a + 9 > 0$

$(a+9)(a+1)$

a	-9	-1
Δ	$+$ 0 $-$	0 $+$

$\text{ح.ق.ق}: a < -9 \text{ یا } a > -1$ ①

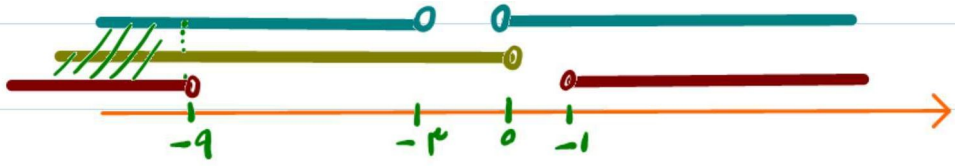
$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{-1}{a} > 0 \rightarrow a < 0$ ②

$S < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \rightarrow -\frac{(a+3)}{a} < 0 \rightarrow \frac{a+3}{a} > 0$

a	-3	0
$\frac{a+3}{a}$	$+$ 0 $-$	$\not\exists$ $+$

$\text{ح.ق.ق}: a < -3 \text{ یا } a > 0$ ③

① ∩ ② ∩ ③ :



$a < -9$ گزینه ۱

قضیه‌ی مهم : اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ باشد آنگاه می‌توانیم ضابطه‌ی آن را به صورت $y = a(x - x')(x - x'')$ هم بنویسیم.

ثبات : چون x' و x'' صفرهای تابع $y = ax^2 + bx + c$ هستند پس جواب هاریه

$a(x-x')(x-x'') = ax^2+bx+c$: کنیم ثابت . $ax^2+bx+c=0$ ریشه‌های x', x'' فرض

$$a(x-x')(x-x'') = a(x^2-\underbrace{(x'+x'')}_{S}x+\underbrace{x'x''}_{P})$$

$$= a(x^2-Sx+P)$$

$$= a(x^2-(-\tfrac{b}{a})x+\tfrac{c}{a})$$

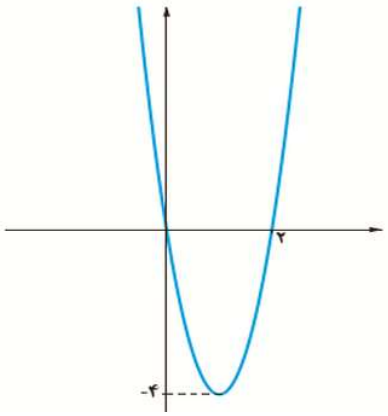
$$= ax^2+bx+c$$ ▣

تذکر: طول رأس سهمی با ضابطه $y=a(x-x')(x-x'')$ دقیقاً وسط دو ریشه است،

یعنی: $x_S = \frac{x'+x''}{2}$.

مثال: ضابطه سهمی‌های زیر را بنویسید.

۱)



$x'=0$, $x''=2$

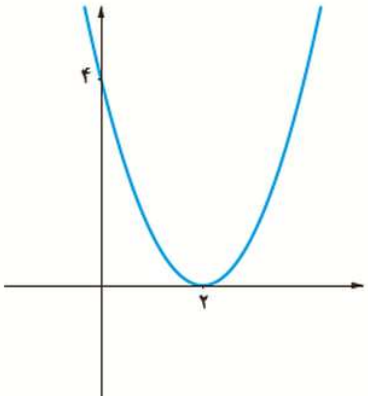
$y=a(x-0)(x-2) = ax(x-2)$

$x_S = \frac{0+2}{2} = 1 \Rightarrow S(1,-4)$

S را در ضابطه قرار می‌دهیم: $-4 = a(1)(1-2) \Rightarrow -4 = -a \Rightarrow a = 4$

$y = 4x(x-2) \Rightarrow y = 4x^2 - 8x$

۲)



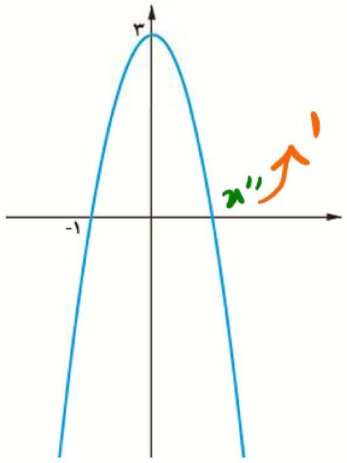
$x' = x'' = 2$

$y = a(x-2)(x-2) = a(x-2)^2$

$(0,4) \xrightarrow{\text{ضابطه}} 4 = a(0-2)^2 \Rightarrow 4 = 4a \Rightarrow a = 1$

$y = (x-2)^2 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 4$

۳)



$x_S = \frac{x' + x''}{2} \Rightarrow 0 = \frac{-1 + x''}{2} \Rightarrow x'' - 1 = 0$

$\Rightarrow x'' = 1$

$y = a(x-(-1))(x-1)$

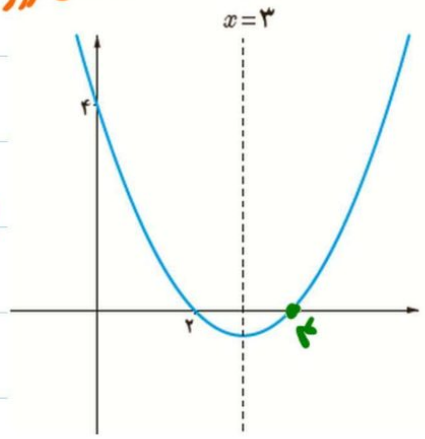
$y = a(x+1)(x-1) = a(x^2-1)$

$S(0,3) \xrightarrow{\text{ضابطه}} 3 = a(0^2-1) \Rightarrow 3 = -a \Rightarrow a = -3$

$y = -3(x^2-1) \Rightarrow y = -3x^2 + 3$

خورتقارب از راس سهمی می‌گذرد

۴)



$x_S = ۳ = \frac{۲+x''}{۲} \Rightarrow ۶ = ۲ + x'' \rightarrow x'' = ۴$

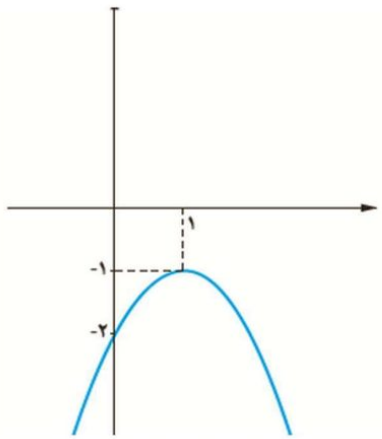
$y = a(x-۲)(x-۴)$

از ضابطه $(۰,۴)$ $\quad ۴ = a(۰-۲)(۰-۴)$

$\Rightarrow ۴ = a(۸) \Rightarrow a = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}(x^۲ - ۶x + ۸)$

$y = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۳x + ۴$

۵)



$y = a(x-x_S)^۲ + y_S \rightarrow y = a(x-۱)^۲ - ۱$

از ضابطه $(۰,-۲)$ $\quad -۲ = a(۰-۱)^۲ - ۱ \Rightarrow -۲ = a - ۱$

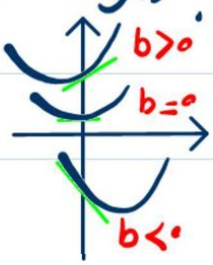
$\Rightarrow a = -۱ \Rightarrow y = -۱(x-۱)^۲ - ۱$

$y = -۱(x^۲ - ۲x + ۱) - ۱ = -x^۲ + ۲x - ۱ - ۱ \Rightarrow y = -x^۲ + ۲x - ۲$

علامت a، b، c از روی نمودار سهمی:

۱- a : سهمی رو به بالا : $a>۰$ - سهمی رو به پایین : $a<۰$

۲- b : علامت b، همان علامت شیب خط مماس بر نمودار در محل برخورد سهمی با محور yها است.

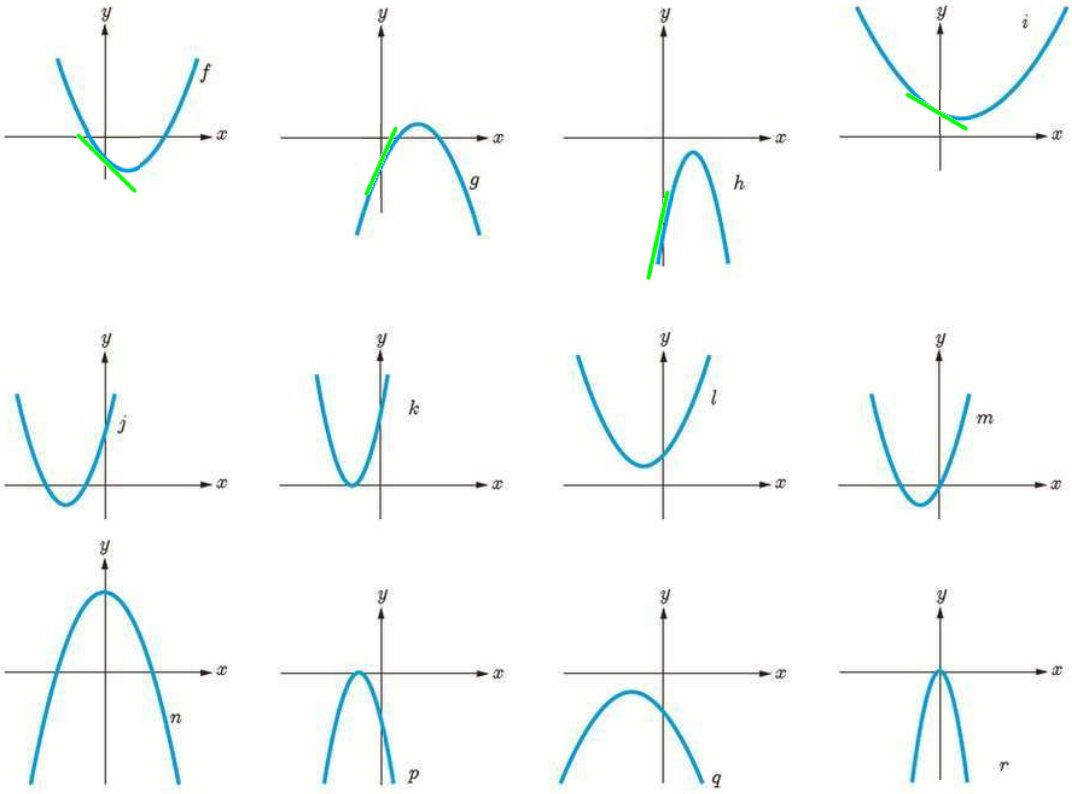


۳ـ c : در سهمی‌ها، c عرض نقطهٔ تلاقی سهمی با محور yهاست. (فاصله از مبدأ)

پس اگر محور yها را بالای مبدأ قطع کند، $c>0$ است. اگر در مبدأ قطع کند، $c=0$

و اگر محور yها را پایین مبدأ قطع کند، $c<0$ خواهد بود.

مثال : با توجه به نمودارهای زیر، جدول را تکمیل کنید.



ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−
علامت b	−	+	+	−	+	+	+	+	۰	−	−	۰
علامت c	−	−	−	+	+	+	+	۰	+	−	−	۰
تعداد ریشه‌های متمایز	دو	دو	ندارد	ندارد	دو	یک	ندارد	دو	دو	یک	صفر	یک
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت	هر دو مثبت	ندارد	ندارد	هر دو منفی	منفی	ندارد	یکی منفی یکی صفر	یکی + یکی −	منفی	ریشه ندارد	صفر

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم (معادلات دو مجذوری)

برخی از معادلات درجه اول درجه دوم نیستند ولی با تغییر متغیری می‌توان آن‌ها را به معادله درجه دوم تبدیل کرد. به این صورت که عبارت تکرار شونده را u در نظر بگیریم بطوریکه معادله درجه دوم شود. معادله را حل کرده u را بدست می‌آوریم. در آخر با جای‌گذاری u، x را می‌یابیم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ $\quad u = x^2$ ($x^4 = (x^2)^2$)

$$u^2 - 3u + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ u = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

ب) $(x^2+x)^2 - 18(x^2+x) + 72 = 0$

$$u = x^2 + x \Rightarrow u^2 - 18u + 72 = 0 \Rightarrow (u-12)(u-6) = 0$$

$$u = 12 \rightarrow x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow (x+4)(x-3) = 0 \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$u = 6 \rightarrow x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

نکته: اگر $x=\alpha$ یکی از صفرهای تابع چندجمله‌ای $f(x)$ باشد، آنگاه $x-\alpha$ یکی از عامل‌های $f(x)$ است و اگر $f(x)$ را بر $x-\alpha$ تقسیم کنیم، عامل یا عامل‌های دیگر را برای $f(x)$ بدست می‌آید.

مثال: اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^4+kx^2+x+6$ باشد، ابتدا k را بیابید. پس صفرهای دیگر f را بدست آورید.

$$f(2)=0 \Rightarrow 2^4+k(2)^2+2+6=0 \rightarrow 8+4k+8=0$$

$$4k=-16 \rightarrow k=-4 \qquad f(x)=x^4-4x^2+x+6$$

$$\begin{array}{r|l} x^4-4x^2+x+6 & x-2 \\ -(x^4-2x^3) & \hline x^3+2x^2-4 \\ \hline 2x^3-4x^2+x+6 & \\ -(2x^3-4x^2) & \\ \hline -3x+6 & \\ -(-3x+6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x-2)(x^3+2x^2-4)=0$$

حل شد

$$x^3+2x-4=0 \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس دوم: معادلات درجه دوم

(قسمت سوم: روش هندسی حل معادلات)

جلسه پنجم: صفحه ۱۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

روش هندسی حل معادلات

اگر طرفین معادله $f(x)=g(x)$ را به روش هندسی حل کنیم، می‌توان توابع طرفین را در یک دستگاه مختصات رسم کرد. طول نقاط برخورد توابع جواب معادله است.

تذکر ۱) از این روش بیشتر برای یافتن تعداد جواب معادله استفاده می‌شود.

تذکر ۲) نقاط برای رسم طرفین نیاز به جدول تغییرات ندارد و تنها از یک طرف به طرف دیگر معادله می‌باشد.

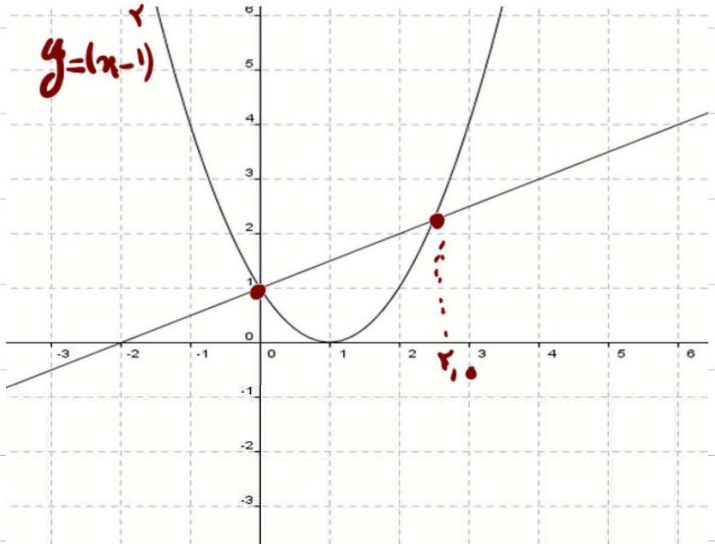
مثال ۱ معادله $(x-1)^2=\frac{1}{2}x+1$ را حل کنید.

روش جبری:

$$x^2-2x+1=\frac{1}{2}x+1 \Rightarrow x^2-2x-\frac{1}{2}x=0$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{5}{2}x=0 \longrightarrow x(x-\frac{5}{2})=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases}$$

روش هندسی



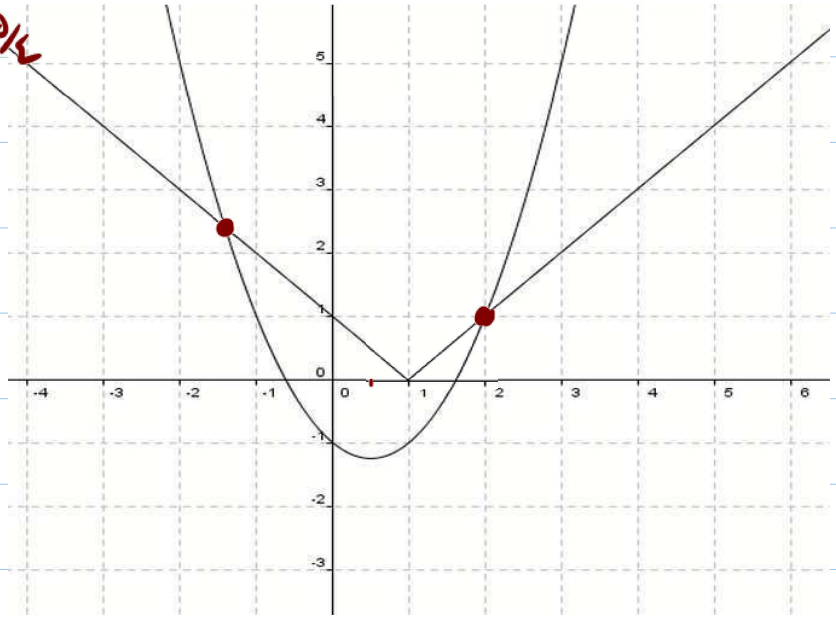
مثال :

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به‌دست آورید.

$g(x) = x^2 - x - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$

$g(x) = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$

$f(x) = |x-1|$

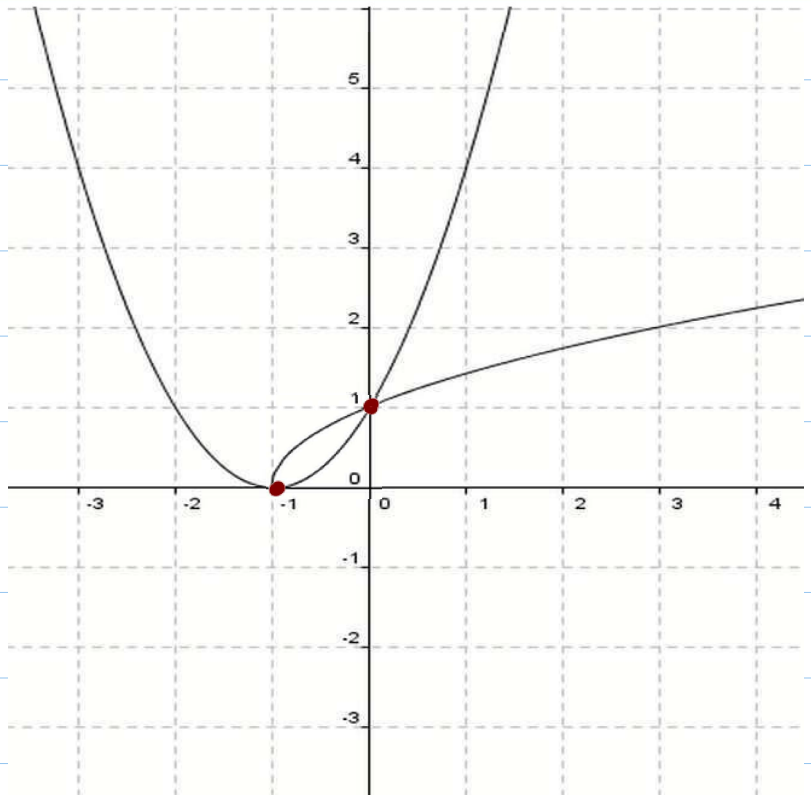


دو ریشه. یکی از ریشه‌ها $x = 2$ است و دیگری حدوداً بین -1 و -2.

مثال: معادله $\sqrt{x+1} - 2x = x^2 + 1$ را به روش هندسی حل کنید.

$$\underbrace{\sqrt{x+1}}_{f} = x^2 + 2x + 1 = \underbrace{(x+1)^2}_{g}$$

$g(x) = (x+1)^2$



$f(x) = \sqrt{x+1}$

دو ریشه دارد: $x = 0 \ , \ x = -1$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس دوم: معادلات درجه دوم

حل تمرین: صفحات ۱۵ و ۱۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تمرین

۱ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که :

الف) ریشه‌های آن $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

الف) $x^۲ - Sx + P = ۰$ $\quad S = \alpha + \beta \quad P = \alpha\beta$

$S = \alpha + \beta = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} = ۱$ ، $P = \alpha\beta = \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۹}$

$x^۲ - x + \frac{۲}{۹} = ۰$

ب) $\alpha , ۲\alpha$ ریشه‌های معادله

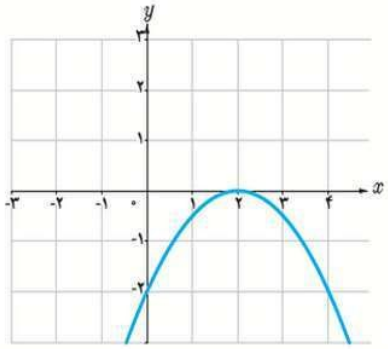
$S = \alpha + ۲\alpha = ۳\alpha$ $\quad P = \alpha \times ۲\alpha = ۲\alpha^۲$

$x^۲ - ۳\alpha x + ۲\alpha^۲ = ۰$ بی‌شمار جواب دارد

$\alpha = ۱ \rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$

$\alpha = ۵ \rightarrow x^۲ - ۱۵x + ۵۰ = ۰$

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.



(الف)

الف) $x=2$ صفر مضاعف

نکته: اگر α و β دو صفر حقیقی (نه لزوماً متمایز) تابع $f(x)$ باشند، آنگاه ضابطه تابع درجه دوم f به صورت زیر است:

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

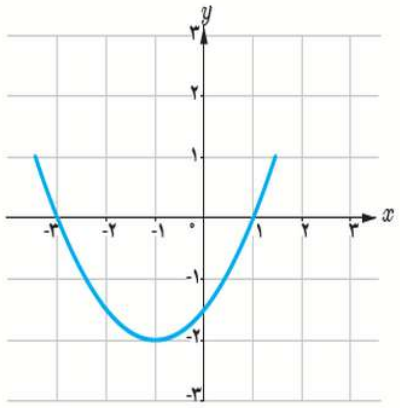
تذکر: در حالتی که $f(x)=0$ ریشه مضاعف دارد ($\Delta=0$) تابع درجه دوم $f(x)$ فقط در یک نقطه ریشه محور طول‌ها را قطع کند رابطه را به صورت $f(x) = a(x-\alpha)^2$ نوشته می‌شود.

$p(x) = a(x-2)^2$ رأس سهمی $(2, 0)$

$-2 = a(0-2)^2 \rightarrow -2 = 4a \rightarrow a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$p(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2$

نکته: برای محاسبه a از نقاطی که طول رئوس آن روی نمودار مشخص است استفاده می‌کنیم مانند رأس سهمی، محل برخورد با محور xها.



(ب)

ب) $x = 1, -3$ صفرهای تابع

$$p(x) = a(x-1)(x-(-3)) = a(x-1)(x+3)$$

رأس سهمی $(-1, -2)$ $\overset{x}{\uparrow}$ $\overset{p(x)}{\uparrow}$ در $p(x)$ قرار می‌دهیم.

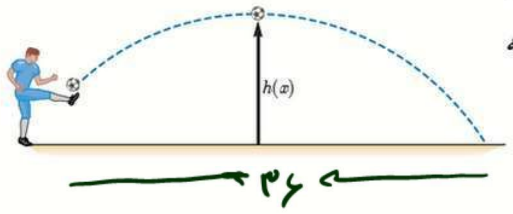
$$-2 = a(-1-1)(-1+3)$$

$$-4 = a(-2)(2) \longrightarrow 1 = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$p(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+3) = \frac{1}{2}(x^2+2x-3)$$

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

۳ یک توپ فوتبال بر اثر ضربه بازیکن طبق شکل روبه‌رو حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد. در هر لحظه ارتفاع توپ از سطح زمین را می‌توانیم با رابطهٔ $h(x)=-۰/۰۳x(x-۳۶)$ مدل‌سازی کنیم که x فاصله افقی توپ از نقطه اولیه است (x برحسب متر است)



الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد.

ب) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود.

حل الف)

معادل کف زمین $h(x)=0$

$$-۰/۰۳x(x-۳۶)=0 \begin{cases} -۰/۰۳x=0 \rightarrow x=0 \\ x-۳۶=0 \rightarrow x=۳۶ \end{cases}$$

حل ب)

$$h(x) = -۰/۰۳x^۲ + ۱/۰۸x$$

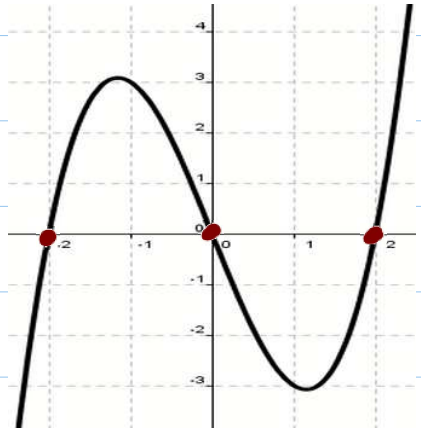
$$x_{max} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱/۰۸}{-۰/۶} = ۱۸$$

$$h(۱۸) = -۰/۰۳ \times ۱۸^۲ + ۱/۰۸ \times ۱۸ = -۹/۷۲ + ۱۹/۴۴ = ۹/۷۲$$

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^3-4x$

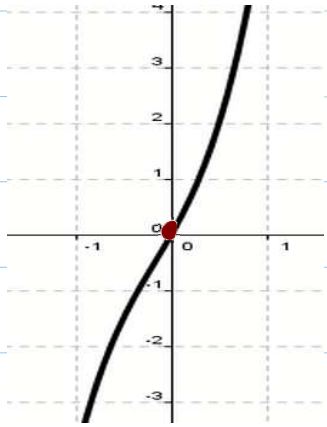
$x^3-4x=0 \rightarrow x(x^2-4)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$



ب) $g(x)=2x^3+x^2+3x$ $\rightarrow$ $x(2x^2+x+3)=0 \begin{cases} x=0 \\ 2x^2+x+3=0 \times \end{cases}$

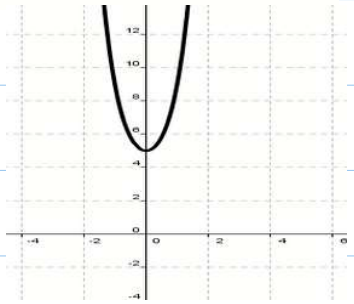
$\Delta = 1-4\times 2\times 3$

$=1-24=-23$



پ) $h(x)=x^4+3x^2+5$ $u=x^2 \rightarrow u^2+3u+5=0$ فاقد صفر حقیقی

$\Delta = 9-4\times 1\times 5=-11<0$



۵ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ $\Rightarrow (x^2)^2$ $\quad u = x^2$

$u^2 - 3u - 4 = 0$ $\quad 1 - t = -4$ $\quad \begin{cases} u = -1 \\ u = 4 \end{cases}$

$a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a} \end{cases}$ نکته:

$a+c=b \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{c}{a} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = -1 \quad \times \\ x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2 \end{cases}$

ب) $(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 7(\frac{x^2}{3} - 2) + 6 = 0$

$u = \frac{x^2}{3} - 2$

$u^2 - 7u + 6 = 0$ $\quad 1 - 7 + 6 = 0$ $\quad \begin{cases} u = 1 \\ u = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \longrightarrow x^2 = 9 \longrightarrow x = \pm 3 \\ \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \longrightarrow \frac{x^2}{3} = 8 \longrightarrow x^2 = 24 \longrightarrow x = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$

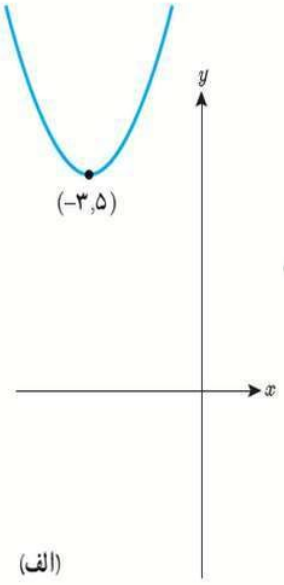
پ) $(۴-x^۲)^۲-(۴-x^۲)=۱۲$

$u=۴-x^۲$

$u^۲-u-۱۲=۰ \rightarrow (u-۴)(u+۳)=۰ \begin{cases} u=۴ \\ u=-۳ \end{cases}$

$\begin{cases} ۴-x^۲=۴ \rightarrow x=۰ \\ ۴-x^۲=-۳ \rightarrow -x^۲=-۷ \rightarrow x^۲=۷ \rightarrow x=\pm\sqrt{۷} \end{cases}$

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ است که در آن $|a|=۱$ است و نقطهٔ رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به‌دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.



(الف)

فاقد صفر

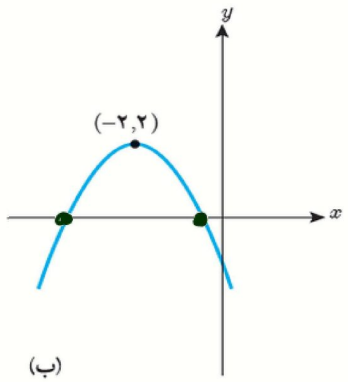
$x=\frac{-b}{۲a} \xrightarrow{a=۱} -۳=\frac{-b}{۲} \rightarrow b=۶$

رأس

$(-۳,۵)$ رعایت $\rightarrow f(x)=x^۲+۶x+c$

$۵=۹-۱۸+c \Rightarrow c=۱۴$

$f(x)=x^۲+۶x+۱۴$



$a=-1$ $\quad x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2(-1)} \rightarrow -2 = \frac{-b}{-2} \rightarrow b=-4$

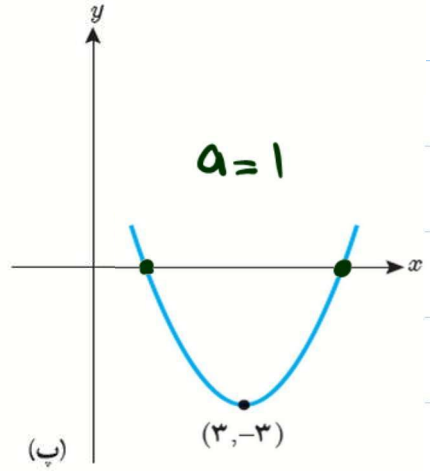
$(-2,2) \rightarrow f(x) = -x^2 - 4x + c$

$2 = -4 + 8 + c \longrightarrow c = -2$

$f(x) = -x^2 - 4x - 2 \rightarrow f(x) = 0$

$\xrightarrow{\div(-1)} x^2 + 4x + 2 = 0 \quad \Delta = 16 - 8 = 8 \rightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$ صفر



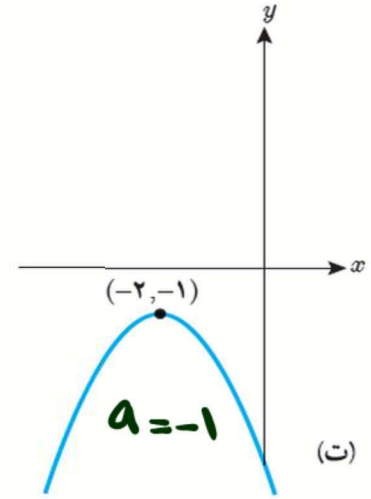
$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2} \Rightarrow 3 = -\frac{b}{2} \rightarrow b = -6$

$f(x) = x^2 - 6x + c$

$(3,-3) \longrightarrow -3 = 9 - 18 + c$

$\longrightarrow c = 6$

$f(x) = x^2 - 6x + 6$ دو صفر دارد

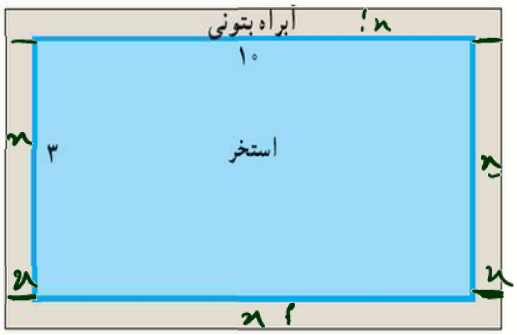


$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{-2} \longrightarrow -2 = \frac{-b}{-2} \longrightarrow b = -4$

$f(x) = -x^2 - 4x + c$

$(-2,-1) \rightarrow -1 = -4 + 8 + c \rightarrow c = -5$

$f(x) = -x^2 - 4x - 5$



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

مساحت آبراه $= 14 = 2(\text{عرض}) + 2(\text{طول})x$

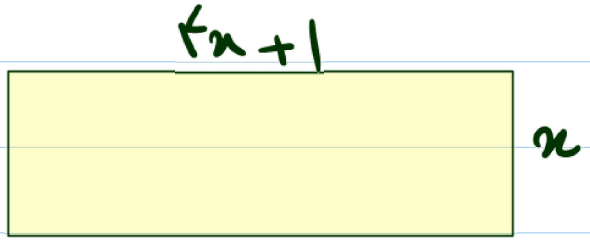
$\rightarrow 14 = 2(3x) + 2(10+2x)x \rightarrow 6x + 20x + 4x^2 - 14 = 0$

$4x^2 + 26x - 14 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 13x - 7 = 0$

$\Delta = 169 - 4 \times 2(-7) = 169 + 56 = 225$

$x = \dfrac{-13 \pm 15}{4}$ $\begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \longrightarrow x = \frac{1}{2} \\ -\frac{28}{4} = -7 \times \end{cases}$

۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشانیدن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟



مساحت یک کاشی $= (4x+1)x = 4x^2 + x$

$2000(4x^2+x) = 52,8 \times 10^4 \rightsquigarrow cm^2$

$\div 10^4 \longrightarrow 2(4x^2+x) = 52,8 \times 10 = 528$

$8x^2 + 2x - 528 = 0$

$\div 2 \longrightarrow 4x^2 + x - 264 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \times 4 \times (-264) = 1 + 4224 = 4225$

$x = \frac{-1 \pm 65}{8} < \begin{matrix} \frac{64}{8} = 8 \\ -\frac{66}{8} \end{matrix}$ $x = 8$ عرض $\rightarrow$ $4x+1 = 33$ طول

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

قسمت اول: حل معادلات گویا

جلسه ششم: صفحات ۱۷ تا ۱۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

عبارت گویا: عبارتی است که از تقسیم دو چندجمله‌ای به دست می‌آید.

عبارت گویا: عبارتی است که در آن متغیرها فقط در مخرج عبارت گویا وجود دارد.

حل عبارت گویا: ابتدا کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها را پیدا می‌کنیم.

پس با ضرب طرفین عبارت در ک.م.م مخرج‌ها، عبارت را از حالت گویا خارج می‌کنیم و عبارت حاصل را حل می‌کنیم. جوابی مورد قبول است که هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نکند.

ک.م.م عبارت‌های جبری: ابتدا عبارات را تجزیه می‌کنیم. حاصل ضرب عوامل مشترک و غیرمشترک با توان بزرگتر ک.م.م عبارات است.

مثال: ک.م.م $(x-2)^2x^2$ و $(x^2-4)x+4$ را بیابید.

$x^2-4 \rightarrow (x-2)(x+2)$

ک.م.م $= 4x^2(x-2)(x+2)$

مثال: معادله گویای $\frac{1}{x^2+x}+\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{3x-1}{x^3-x}$ را حل کنید.

$x^2+x=x(x+1)$ ، $x^2-1=(x-1)(x+1)$ ، $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$

ک.م.م $=x(x+1)(x-1)$

$$x(x+1)(x-1)\frac{1}{x(x+1)}+x(x+1)(x-1)\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=x(x+1)(x-1)\frac{3x-1}{x(x-1)(x+1)}$$

$$x-1+x(x^2)=3x-1$$

$$x^3+x-5x=0 \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0$$

$x=0$ یا

$x^2-4=0 \longrightarrow x^2=4 \longrightarrow \boxed{x=\pm 2}$

مثال :

معادلات زیر را حل کنید.

۱ $\frac{۶}{x}=۲+\frac{x-۳}{x+۱}$ ۲ $\frac{P}{۲-P}+\frac{۲}{P}=\frac{-۳}{۲}$ ۳ $\frac{۳y+۵}{y^۲+۵y}+\frac{y+۴}{y+۵}=\frac{y+۱}{y}$

حل ۱ : $ک.م.م = x(x+۱)$

$$\frac{۶}{x}x(x+۱) = ۲x(x+۱) + x(x+۱)\frac{(x-۳)}{x+۱}$$

$$۶(x+۱) = ۲x^۲+۲x+x(x-۳)$$

$$۶x+۶ = ۲x^۲+۲x+x^۲-۳x$$

$$۳x^۲-۷x-۶=۰$$

$$\Delta = ۴۹-۴\times۳\times(-۶) = ۴۹+۷۲ = ۱۲۱$$

$$x=\frac{۷\pm۱۱}{۶} \Rightarrow x=\frac{۷+۱۱}{۶}=\frac{۱۸}{۶}=۳ \checkmark \quad , \quad x=\frac{۷-۱۱}{۶}=\frac{-۴}{۶}=\frac{-۲}{۳} \checkmark$$

حل ۲

$$ک.م.م = ۲p(۲-p)$$

$$۲p(۲-p)\frac{p}{۲-p} + ۲p(۲-p)\frac{۲}{p} = ۲p(۲-p)(\frac{-۳}{۲})$$

$$۲p^۲ + ۲(۲-p)۲ = p(۲-p)(-۳)$$

$$۲p^۲+۸-۴p = -۶p+۳p^۲$$

$$p^۲-۲p-۸=۰ \rightarrow (p-۴)(p+۲)=۰ \begin{cases} p=۴ \checkmark \\ p=-۲ \checkmark \end{cases}$$

حل ۳

$$\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

$$y^2+5y = y(y+5)$$

ک.م.م $= y(y+5)$

$$\frac{y(y+5)(3y+5)}{y(y+5)} + \frac{y(y+5)(y+4)}{y+5} = \frac{y(y+5)(y+1)}{y}$$

$$3y+5 + y(y+4) = (y+5)(y+1)$$

$$3y+5 + y^2+4y = y^2+6y+5$$

$$7y+5 = 6y+5 \longrightarrow 7y-6y = 0 \longrightarrow y = 0$$

مورد قبول نیست

لذا جواب ندارد.

مثال :

۱ معادله $\frac{۳}{۲} = \frac{۲}{x-۲} + \frac{۱}{(x-۲)^۲}$ را حل کنید.

$$ک.م.م = (x-۲)^۲$$

$$(x-۲)^۲ \frac{۱}{(x-۲)^۲} + (x-۲)^۲ \frac{۲}{x-۲} = ۳(x-۲)^۲$$

$$۱ + ۲(x-۲) = ۳(x-۲)^۲$$

$$۱ + ۲x - ۴ = ۳(x^۲ - ۴x + ۴)$$

$$۲x - ۳ = ۳x^۲ - ۱۲x + ۱۲$$

$$۳x^۲ - ۱۴x + ۱۵ = ۰$$

$$\Delta = (۱۴)^۲ - ۴ \times ۳ \times ۱۵ = ۱۹۶ - ۱۸۰ = ۱۶$$

$$x = \frac{۱۴ \pm ۴}{۶} \rightarrow x = \frac{۱۴+۴}{۶} = \frac{۱۸}{۶} = ۳ \quad ✓$$

$$x = \frac{۱۴-۴}{۶} = \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۳} \quad ✓$$

مثال :

۲ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم : $\frac{L}{w}=\frac{w+L}{L}$ آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل‌شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

مستطیل طلایی : مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد.



$$p=2(L+w)=144 \longrightarrow L+w=72 \longrightarrow w=72-L$$

$$\frac{w+L}{L}=\frac{L}{w} \Rightarrow \frac{72-L+L}{L}=\frac{L}{72-L}$$

$$\frac{72}{L}=\frac{L}{72-L} \qquad \text{طرفین وسطین} \quad L(72-L)=L^2$$

$$L(72-L)\frac{72}{L}=L(72-L)\frac{L}{72-L}$$

$$(72-L)72=L^2 \longrightarrow L^2+72L-5184=0$$

$$\Delta=(72)^2-4(1)(-5184)=72^2+4(72)^2=5(72)^2$$

$$z = \frac{-۷۲ \pm \sqrt{۵(۷۲)^۲}}{۲} = \begin{cases} \frac{-۷۲ + ۷۲\sqrt{۵}}{۲} = ۳۶(-۱+\sqrt{۵}) \checkmark \\ \frac{-۷۲ - ۷۲\sqrt{۵}}{۲} = ۳۶(-۱-\sqrt{۵}) \times \end{cases}$$

$$z = ۳۶(-۱+\sqrt{۵})$$

$$\omega = ۷۲ - z = ۷۲ - (۳۶(-۱+\sqrt{۵}))$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

قسمت دوم: مدلسازی با معادلات گویا

جلسه هفتم: صفحات ۱۷ تا ۱۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

در حل برخی مسائل بعد از مدل سازی آن، به یک معادله درجه دو می رسیم. برای راحت شدن حل آنلاین

مسائل کنکور را به صورت زیر دسته بندی می کنیم.

نوع اول: مسائل سرعت - زمان

فعالیت صفحه ۲۰ ریاضی ۱

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام‌خمینی(قُدِّسَ سِرُّهُ) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت قطار $10\ km/h$ کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب‌است محاسبهٔ طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

در این نوع مسائل از رابطه متحرک استفاده می کنیم: $x = vt$

$$t = \frac{x}{v} \qquad t_{\text{رفت}} = \frac{60}{v}$$

$$t_{\text{برگشت}} = t_{\text{رفت}} + \frac{1}{2}$$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{60}{v-10}$$

معادله گویا

$$\Rightarrow \frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{2v(v-10)} 120v = 120(v-10) + v(v-10)$$

$$v^2 - 10v + 120v - 120v - 1200 = 0$$

$$v^2 - 10v - 1200 = 0 \rightarrow (v-40)(v+30) = 0$$

$$\begin{cases} v = 40 \rightarrow t_{\text{رفت}} = \frac{60}{40} = 1{,}5 \text{ ساعت} \\ v = -30 \times \end{cases}$$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{60}{40-10} = \frac{60}{30} = 2 \text{ ساعت}$$

تمرین صفحه ۲۲ حسابان ۱

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. درصورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

رفت $\xrightarrow{v}$

برگشت $\xleftarrow{v-8}$

$t_{\text{رفت}} = \frac{144}{v}$

$t_{\text{برگشت}} = \frac{144}{v-8}$

$\rightarrow t_{\text{رفت}} + t_{\text{برگشت}} = 17 - 2$ (توقف)

$\frac{144}{v} + \frac{144}{v-8} = 15 \xrightarrow{\div 3} \frac{48}{v} + \frac{48}{v-8} = 5$

$\times v(v-8) \rightarrow 48(v-8) + 48v = 5v(v-8)$

$\rightarrow 5v^2 - 40v - 48v - 48v + 384 = 0$

$\rightarrow 5v^2 - 136v + 384 = 0$

$\Delta = (-136)^2 - (4 \times 5 \times 384) = 18496 - 7680 = 10816$

$\sqrt{10816} = 104$

$v = \frac{136 \pm 104}{10} \begin{cases} v = \frac{136+104}{10} = 24 \\ v = 3{,}2 \times \end{cases}$

نوع دوم: مسائل تقسیم کار

تمرین صفحه ۲۴ ریاضی ۲

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کنند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

در حل این نوع مسائل می‌گوییم اگر کاری در n ساعت (دقیقه و ...) انجام می‌پذیرد، در یک ساعت (یک دقیقه و ...) $\frac{1}{n}$ از کار انجام شده است.

n: زمان تنهایی رضا

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{1\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{3}{4}$$

$\times 4n$ $\quad 2n + 4 = 3n \longrightarrow n = 4$

تمرین صفحه ۲۲ حسابان ۱

۹ ماشین A کاری را به‌تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

$A: x$

$B: x+15$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+15}=\frac{1}{18}$$

$\xrightarrow{18x(x+15)}$ $18(x+15)+18x=x(x+15)$

$$x^2+15x-18x-270-18x=0$$

$$x^2-21x-270=0$$

$$(x-30)(x+9)=0 \begin{cases} x=30 \longrightarrow A \\ x=-9 \text{ ق} \end{cases}$$

B در ۴۵ ساعت

مثال: زمانی که طول می‌کشد تا شیر A به تنهایی حوضی را پر کند، از روی زمان که شیر B همان حوض را پر کند، یک ساعت بیشتر است. اگر هر دو شیر را هم‌زمان باز کنیم، حوض در ۲ ساعت ۶ دقیقه پر می‌شود. شیر A به تنهایی در چند ساعت حوض را پر می‌کند؟

t: زمان شیر B به تنهایی

$2t+1$: A

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2,1} = \frac{1}{\frac{21}{10}} = \frac{10}{21}$$

$21t(2t+1)$ ←

$$\rightarrow 21(2t+1) + 21t = 10t(2t+1)$$
$$\rightarrow 42t + 21 + 21t = 20t^2 + 10t$$
$$\rightarrow 20t^2 + 10t - 63t - 21 = 0$$
$$\rightarrow 20t^2 - 53t - 21 = 0$$
$$\Delta = (-53)^2 - (4 \times 20 \times (-21)) = 2809 + 1680 = 4489$$
$$\sqrt{4489} = 67$$
$$t = \frac{53 \pm 67}{40} \begin{cases} \frac{53+67}{40} = 3 \rightarrow \text{شیر } B \\ \frac{53-67}{40} = \frac{-14}{40} = -\frac{7}{20} \times \end{cases}$$

شیر A به تنهایی: $2 \times 3 + 1 = 7$ ساعت

نوع سوم : مسائل مخلوط

ص ۱۷ و ۱۸ حل مثال ۱

در یک مغازهٔ ماهی‌های تزیینی، ماهی‌های آب‌شور در محلول‌های آب‌نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟

حالت اول : فرض کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد.

مقدار نمک در محلول ۴ درصدی $200 \times \frac{4}{100} = 8\ kg$

x کیلوگرم نمک اضافه کنیم

$$\frac{8+x}{200+x} = \frac{7}{100}$$

$$\longrightarrow 100(8+x) = 7(200+x) \longrightarrow 800+100x = 1400+7x$$

$$\longrightarrow 93x = 600 \longrightarrow x = \frac{600}{93}\ kg$$

حالت دوم : اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

y کیلوگرم از آب تبخیر کنیم.

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100}$$

$$800 = 7(200-y) \longrightarrow 7y = -800 + 1400$$

$$7y = 600 \longrightarrow y = \frac{600}{7}\ kg$$

در مسئله ماهی‌های تزیینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازهٔ کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

y: کیلوگرم تبخیر آب

$$\frac{۸+۵}{۲۰۰+۵-y} = \frac{۷}{۱۰۰}$$

$$\rightarrow \frac{۱۳}{۲۰۵-y} = \frac{۷}{۱۰۰}$$

$$\rightarrow ۱۳۰۰ = ۷\times ۲۰۵ - ۷y$$

$$\rightarrow ۷y = ۱۴۳۵ - ۱۳۰۰$$

$$\rightarrow ۷y = ۱۳۵ \rightarrow y = \frac{۱۳۵}{۷} \approx ۱۹,۲۸ \ kg$$

۱۹,۲۸kg از آب تبخیر

مسائل متفرقه مانند :

تمرین صفحه ۲۲ حسابان ۱

۸ پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

x : قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف

تعداد قبل از تخفیف: x — تعداد بعد از تخفیف: x

$$\frac{۱۲۰۰۰۰}{x} + ۴ = \frac{۱۲۰۰۰۰}{x-۱۰۰۰}$$

$\times x(x-۱۰۰۰)$ ⟶

$$۱۲\times ۱۰^۴(x-۱۰۰۰) + ۴x(x-۱۰۰۰) = ۱۲\times ۱۰^۴ x$$

$$۴x^۲ - ۴۰۰۰x + ۱۲\times ۱۰^۴ x - ۱۲\times ۱۰^۷ - ۱۲\times ۱۰^۴ x = ۰$$

$$۴x^۲ - ۴۰۰۰x - ۱۲\times ۱۰^۷ = ۰$$

$\div ۴$ ⟶

$$x^۲ - ۱۰۰۰x - ۳۰\times ۱۰^۶ = ۰ \rightarrow \Delta = ۱۲۱\times ۱۰^۶$$

$$x = \begin{cases} \frac{۱۰۰۰ + ۱۱۰۰۰}{۲} = \frac{۱۲۰۰۰}{۲} = ۶۰۰۰ \checkmark \\ \frac{۱۰۰۰ - ۱۱۰۰۰}{۲} = -۵۰۰۰ \end{cases}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول : جبر و معادله

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

قسمت سوم: معادلات شامل عبارت‌های گنگ

جلسه هشتم: صفحات ۲۰و۲۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

معادلات گنگ (اصم)

معادلاتی که در آن ها مجهول زیر رادیکال است را معادله گنگ می گوییم.

روش حل معادلات اصم با فرجه دو :

یک رادیکال را یک طرف و بقیه عبارت ها را سمت دیگر منتقل می کنیم.

طرفین را به توان ۲ می رسانیم تا رادیکال از بین برود. اگر باز هم رادیکال داشتیم این عمل را تکرار می کنیم تا همه رادیکال ها از بین بروند و معادله بدست آمده را حل می کنیم.

جواب های به دست آمده به شرطی قابل قبول هستند که در معادله اولیه صدق کنند.

تذکر: گاهی اوقات برای سرعت عمل در تشخیص مردود یا قبول بودن جواب می توان از نکات زیر استفاده کرد :

- عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.
- هر عبارت که با یک رادیکال برابر است باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

تذکر: در معادلاتی که رادیکال‌ها در مخرج قرار می‌گیرند ابتدا مانند معادلات گویا حل کرده، با حذف طرفین معادله در ک.م.م مخرج‌ها، معادله را از حالت کسری خارج می‌کنیم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

ث) $k=\sqrt{6k-8}$

ج) $x+\sqrt{x}=6$

چ) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$

ح) $\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$

ث) $k^2=6k-8 \rightarrow k^2-6k+8=0$

$(k-4)(k-2)=0$

$k=4 \rightarrow 4=\sqrt{24-8}=\sqrt{16}=4$ ✓

$k=2 \rightarrow 2=\sqrt{12-8}=\sqrt{4}=2$ ✓

ج) $\sqrt{x}=6-x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x=(6-x)^2 \rightarrow$ با استفاده از اتحاد دوجمله‌ای

$x=36-12x+x^2$

$\rightarrow x^2-13x+36=0 \rightarrow (x-9)(x-4)=0$

$x=9$ ✗

$x=4$ ✓

$\sqrt{9}=6-9 \rightarrow 3=-3$ ✗

$\sqrt{4}=6-4 \rightarrow 2=2$ ✓

ج) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$

$\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{2x-5}$

به توان ۲ $\longrightarrow (\sqrt{x+1} - 1)^2 = 2x - 5$

$\longrightarrow x+1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 2x - 5$

$\longrightarrow x + 2 - 2x + 5 = 2\sqrt{x+1}$

$\longrightarrow -x + 7 = 2\sqrt{x+1}$

به توان ۲ $\longrightarrow x^2 - 14x + 49 = 4(x+1)$

$\longrightarrow x^2 - 14x + 49 - 4x - 4 = 0$

$\longrightarrow x^2 - 18x + 45 = 0$

$\longrightarrow (x-3)(x-15) = 0$ $\begin{cases} x=3 \rightarrow \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1 \checkmark \\ x=15 \rightarrow 4 - 3 = 1 \times \end{cases}$

د) $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$

در $\sqrt{m}$ $\longrightarrow m + 1 = 2\sqrt{m}$ به توان ۲ $\longrightarrow m^2 + 2m + 1 = 4m$

$\longrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \longrightarrow (m-1)^2 = 0 \longrightarrow m = 1 \checkmark$

$2 = \frac{1}{1} + 1$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

$\xrightarrow{\times(1+\sqrt{x})}$ $1-\sqrt{x} = (1-x)(1+\sqrt{x})$

$\rightarrow 1-\sqrt{x} = 1-x+\sqrt{x}-x\sqrt{x}$

$\rightarrow x = \sqrt{x}+\sqrt{x}-x\sqrt{x}$

$\rightarrow x = 2\sqrt{x}-x\sqrt{x}$

$\rightarrow x = \sqrt{x}(2-x)$

$\xrightarrow[\text{توان ۲}]{}$ $x^2 = x(4-4x+x^2)$

$x^2 = 4x-4x^2+x^3$

$\rightarrow x^3-5x^2+4x=0 \rightarrow x(x^2-5x+4)=0$

$x=0$ ✓ $\frac{1-0}{1+0}=1-0$

$x^2-5x+4=0 \begin{cases} x=1 \rightarrow \frac{1-1}{1+1}=1-1 \rightarrow 0=0 & \checkmark \\ x=4 \rightarrow \frac{1-2}{1+4}=1-4 \rightarrow -\frac{1}{5}=-3 & \times \end{cases}$

۲) $\frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2-\frac{1}{\sqrt{x}-2}$ $\xrightarrow{\times(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$ $5(\sqrt{x}-2) = 2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}+2)$

(قدر مشترک)

$\rightarrow 5\sqrt{x}-10 = 2(x-4)-\sqrt{x}-2$

$\rightarrow 5\sqrt{x}-10 = 2x-8+\sqrt{x}+2$

$\rightarrow 4\sqrt{x} = 2x \xrightarrow[\text{توان ۲}]{} 16x = 4x^2 \rightarrow 4x^2-16x=0$

$\rightarrow 4x(x-4)=0 \begin{cases} x=0 & 0/5 = 2+\frac{1}{2} \quad \checkmark \\ x=4 & \frac{5}{5} = 2-\frac{1}{1} \quad \checkmark \end{cases}$

۳) $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+1$ $\xrightarrow{\text{به توان ۲}}$ $x+7=x+2\sqrt{x}+1$

$\rightarrow 6=2\sqrt{x} \rightarrow 3=\sqrt{x} \rightarrow x=9$ ✓ $4=3+1$

۴) $\frac{1}{\sqrt{u-3}}-\frac{2}{\sqrt{u}}=0$ $\rightarrow \times \sqrt{u}\sqrt{u-3} \rightarrow \sqrt{u}-2\sqrt{u-3}=0$

$\sqrt{u}=2\sqrt{u-3}$ $\xrightarrow[\text{دو توان}]{}$ $u=4(u-3) \rightarrow u=4u-12$

$\rightarrow -3u=-12 \rightarrow u=4$ ✓

$\frac{1}{1}-\frac{2}{2}=0$

مثال: جواب معادلات زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\sqrt{t}+2=0$ ب) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}+1=0$ پ) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$

الف) $\sqrt{t}=-2$ ✗ جواب ندارد

ب) $(+)+(+)+1=0$ امکان ندارد $\rightarrow$ جواب ندارد

پ) $(+)+(+)=0$ $\xrightarrow{\text{هر دو عبارت}=0}$ $1-x=0 \rightarrow x=1$ و $x-2=0 \rightarrow x=2$ جواب ندارد

در مثال های بالا حل شد.

$x+\sqrt{x}=6 \longrightarrow x=4$

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

۲ معادله $\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x-2}=0$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

$x^2-4=0 \longrightarrow x=\pm 2$

$x-2=0 \longrightarrow x=2$

$x=2$ هم زیر رادیکال صفر می‌شود

پس جواب مسئله است.

نکته: هرگاه جمع دو رادیکال صفر شود تنها جواب داریم که هردو رادیکال با هم صفر شوند.

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به‌طوری که $t=\sqrt{10-\frac{h}{5}}$.
این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

$2=\sqrt{10-\frac{h}{5}} \xrightarrow{\text{به توان } 2} 4=10-\frac{h}{5} \longrightarrow -6=-\frac{h}{5}$

$\longrightarrow -h=-30 \longrightarrow h=30\ m$

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

الف) $\sqrt{n} - n = \frac{n}{2} \longrightarrow \sqrt{n} = \frac{n}{2} + n = \frac{3}{2}n$

$\xrightarrow[2]{\text{به توان}} n = \frac{9}{4}n^2 \longrightarrow \frac{9}{4}n^2 - n = 0 \longrightarrow n(\frac{9}{4}n - 1) = 0$

$n = 0$ ✓

$\frac{9}{4}n = 1 \longrightarrow n = \frac{4}{9}$ ×

ب) $n - \sqrt{n} = \frac{n}{2} \longrightarrow n - \frac{n}{2} = \sqrt{n}$

$\frac{1}{2}n = \sqrt{n} \xrightarrow[2]{\text{به توان}} \frac{1}{4}n^2 = n \longrightarrow \frac{1}{4}n^2 - n = 0 \longrightarrow n(\frac{1}{4}n - 1) = 0$

$n = 0$ ✓

$n = 4$ ✓ $4 - 2 = \frac{4}{2}$

۵ معادله‌ای شاملِ مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

$\sqrt{2 - n} + \sqrt{n + 3} = 3$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

قسمت اول: ویژگی‌ها و رسم نمودار توابع قدرمطلقی

جلسه هشتم: صفحات ۲۳ تا ۲۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تعریف: قدرمطلق یک عدد حقیقی a به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

مثبت

تذکر: قدرمطلق یک عدد همواره مثبت است و با هدف حل معادلات، نامعادلات، رسم نمودار و... با استفاده از تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق حذف می‌شود.

کار در کلاس

۱ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-5-(-3)| =$

ب) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}| =$ (سته، سته، ۱٫۷، ۲٫۲)

پ) $|1/5-1\frac{1}{2}| =$

الف) $|-5+3| = |-2| = 2$

ب) $-(\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

پ) $|0| = 0$

۲ عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\sqrt{a^4+2a^2+1} = \sqrt{(a^2+1)^2} = |a^2+1| = a^2+1$ (مثبت)

ب) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} =$

$\sqrt{3-4\sqrt{3}+4} = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = -(\sqrt{3}-2)$ (۱٫۷، منفی)

$= 2-\sqrt{3}$

ویژگی‌های قدرمطلق :

۱) $|a| \geq 0$

۲) $\sqrt{a^2} = |a|$

۳) $|x| = a \xrightarrow{a \geq 0} x = \pm a$

۴) $|x| = |a| \longrightarrow x = \pm a$

۵) $|x|^2 = x^2$

۶) $|-x| = |x|$

فعالیت

فرض کنید a و b عددهای حقیقی دلخواه باشند.

۱ از رابطه $\sqrt{a^2} = |a|$ استفاده کنید و نشان دهید که : $|ab| = |a|\,|b|$ ۷)

۲ با فرض $b \neq 0$ و استفاده از مرحله قبل ثابت کنید که : $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ۸)

اثبات :

حل ۱) $|ab| = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = |a|\,|b|$

حل ۲) $\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \times \frac{1}{b}\right| = |a| \times \left|\frac{1}{b}\right| = |a| \times \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$

فعالیت

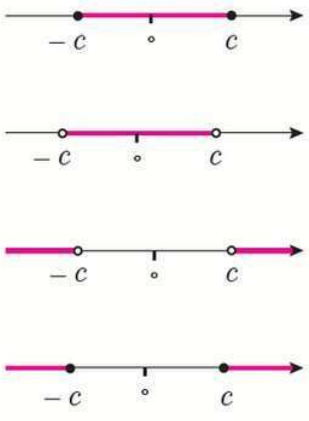
۱ فرض کنید c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. هریک از نامعادله‌های زیر را به جواب متناظر آن وصل کنید.

الف) $|x| < c, (c \neq 0)$ (۲) — (۱)

ب) $|x| > c$ (۳) — (۲)

پ) $|x| \leq c$ (۱) — (۳)

ت) $|x| \geq c$ (۴) — (۴)



9) $|x| \leq c \xrightarrow{c>0} -c \leq x \leq c$

10) $|x| \geq c \xrightarrow{c>0} x \geq c \quad \text{یا} \quad x \leq -c$

11) $-|a| \leq a \leq |a|$

اثبت: $|a| \leq |a| \xrightarrow{|a|=c} |a| \leq c \rightarrow -c \leq a \leq c \xrightarrow{c=|a|}$

$\rightarrow -|a| \leq a \leq |a|$

12) $-|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$

اثبت:

$$+\begin{cases} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{cases}$$

$$-|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$$

۱۳) $|a+b| \leq |a|+|b|$ نامساوی مثلث

اثبات: $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$

$\longrightarrow |a+b| \leq |a|+|b|$

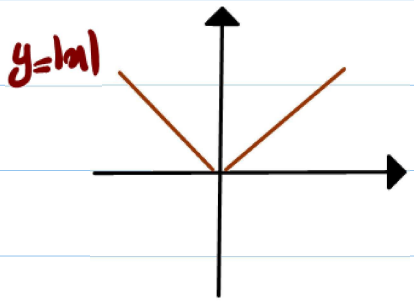
رسم نمودار توابع قدرمطلقی:

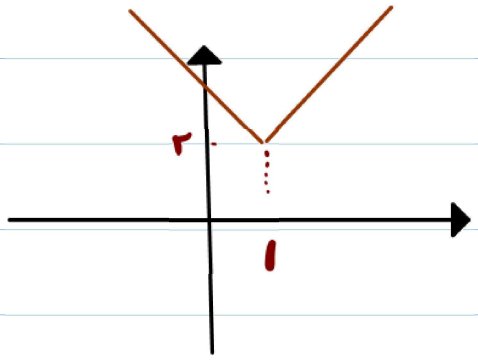
۱) اگر ضابطه تابع به صورت $y=|x+a|+b$ باشد با استفاده از انتقال نمودار تابع $y=|x|$ نمودار را رسم می‌کنیم.

۲) اگر ضابطه به صورت $y=|f(x)|$ باشد کافی است تابع $f(x)$ را رسم کنیم سپس قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور x هاست را قرینه کنیم و بالای محور x رسم کنیم.

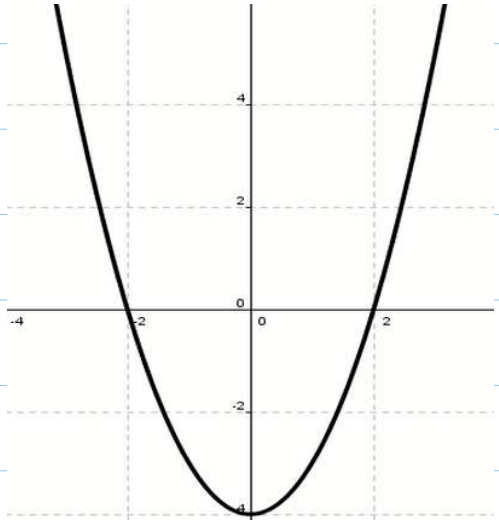
۳) اگر به هیچ یک از دو صورت بالا نبود، با استفاده از تعیین علامت عبارات داخل قدرمطلق تابع را به صورت چند ضابطه‌ای و بدون قدرمطلق می‌نویسیم.

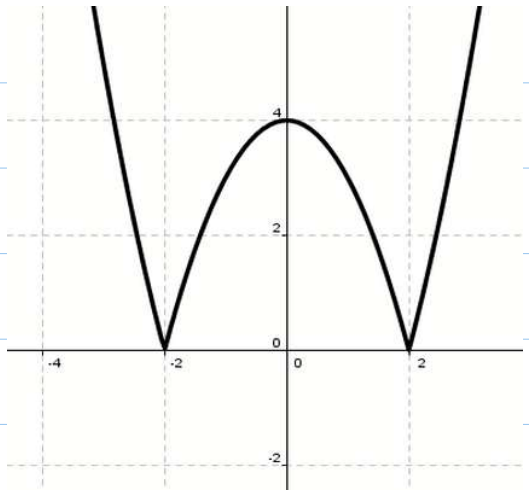
مثال : می‌خواهیم نمودار تابع $y=|x-1|+2$ را رسم کنیم.





مثال : نمودار $y=|x^2-4|$ را رسم کنید.





۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطهٔ هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید و رسم کنید.

الف) $f(x)=x|x|$

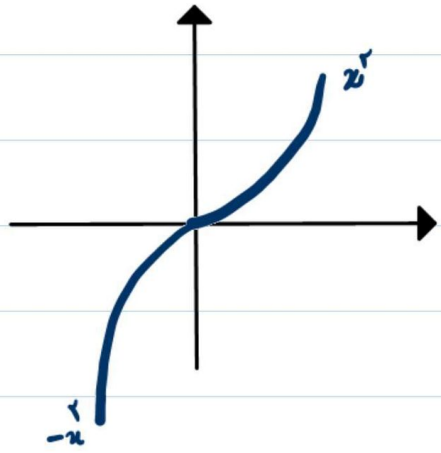
ب) $g(x)=|x^2-1|$

پ) $h(x)=|x-1|+|x+1|$

الف)

x		۰	
x	−	۰	+

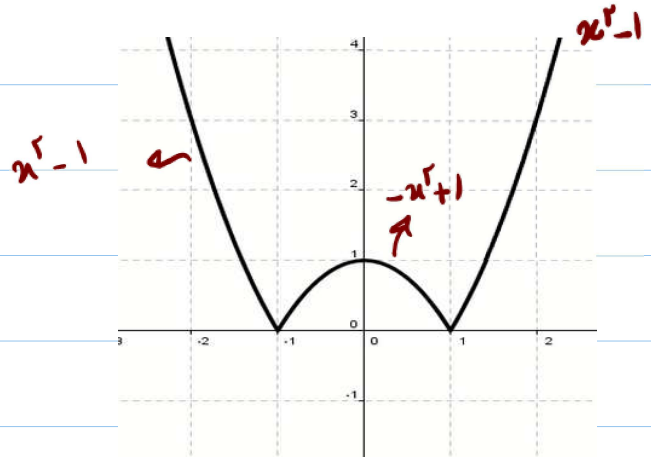
$$f(x)=\begin{cases} x\times x & x\geq 0 \\ x\times(-x) & x<0 \end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$



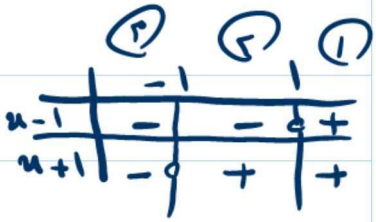
ب) $x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1$

x		-1		1	
x^2-1	+	۰	−	۰	+

$$g(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\geq 1 \\ -x^2+1 & -1<x<1 \\ x^2-1 & x\leq -1 \end{cases}$$



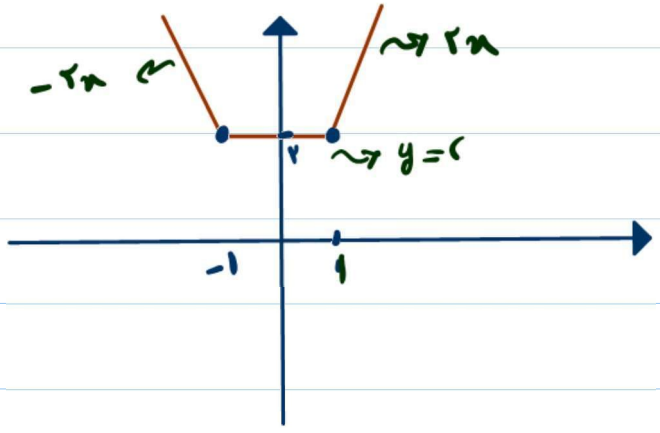
ب) $h(x) = |x-1| + |x+1|$



$x-1=0 \rightarrow x=1$ $\quad$ $x+1=0 \rightarrow x=-1$

$$h(x) = \begin{cases} x-1+x+1 & x \geq 1 \\ -(x-1)+x+1 & -1 < x < 1 \\ -(x-1)-(x+1) & x \leq -1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ -2x & x \leq -1 \end{cases}$$



حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

قسمت دوم: معادلات و نامعادلات قدرمطلقی

جلسه نهم: صفحات ۲۶ و ۲۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

معادلات قدرمطلقی

معادلاتی که در آن‌ها مجهول داخل قدرمطلق قرار دارد را معادله قدرمطلقی می‌نامند.

روش‌های حل معادله قدرمطلقی:

۱) استفاده از تعریف‌ها:

$$\begin{cases} |x| = a \to x = \pm a \\ |x| = |a| \to x = \pm a \end{cases}$$

الف) اگر فقط در یک طرف قدرمطلق وجود داشته باشد مانند: $|x-2| = 2x-3$.
در این حالت قدرمطلق را برداشته برای سمت دیگر $\pm$ می‌گذاریم و معادلات حاصل را حل می‌کنیم.
چون شرط بزرگ‌تر یا مساوی صفر بودن سمتی که قدرمطلق وجود ندارد را داریم باید جواب‌ها را در معادله امتحان کنیم.

ب) اگر هر دو طرف قدرمطلق باشد مانند: $|2x-3| = |4x+1|$. باز هم قدرمطلق را برداشته برای یک سمت $\pm$ می‌گذاریم و معادلات حاصل را حل می‌کنیم.

۲) توان دو رساندن:

معادلات دسته الف ب را می‌توان با به توان دو رساندن دو طرف و حذف قدرمطلق هم حل کرد، البته باید در آخر جواب‌ها را در معادله قرار دهیم که درست باشند.

۳) تعیین علامت:

اگر معادله به صورت دسته الف ب نبود، چاره‌ای جز حذف قدرمطلق‌ها با استفاده از تعیین علامت قدرمطلق‌ها نداریم. به این صورت که:

مرحله اول: عبارت‌های درون قدرمطلق را در یک جدول تعیین علامت می‌کنم تا ببینم که این عبارت‌ها در ناحیه‌های ایجاد شده، مثبت اند یا منفی.

مرحله دوم: در هر ناحیه از جدول تعیین علامت، عبارت‌های درون قدرمطلق را با توجه به علامت آن‌ها از قدرمطلق خارج می‌کنم. (مثبت باشند بدون هیچ تغییری از قدرمطلق خارج و منفی باشند با بیرون آمدن از قدرمطلق در منفی ضرب می‌شوند.)
و معادله را بدون قدرمطلق حل می‌کنم.

مرحله سوم: هرکدام از جواب‌های بدست آمده زمانی قابل قبول اند که در ناحیه مورد نظر باشند.

مرحله چهارم: اجتماع جواب‌های به دست آمده در هر ناحیه، مجموعه جواب معادله است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $|x-2| = 2x-3$

$$x-2 = \pm(2x-3) \begin{cases} x-2 = 2x-3 \rightarrow -x = -1 \rightarrow x = 1 \\ x-2 = -(2x-3) \rightarrow x-2 = -2x+3 \\ \rightarrow 3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

آزمون جواب‌ها:
$x=1 \rightarrow 1 = -1$ ✗
$x=\frac{5}{3} \rightarrow |\frac{5}{3}-2| = 2\times\frac{5}{3}-3 \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ✓

ب) $|2x-3| = |4x+1|$

$2x-3 = \pm(4x+1)$ ⟨ $2x-3 = 4x+1 \rightarrow -2x = 4 \rightarrow x = -2$; $2x-3 = -4x-1 \rightarrow 6x = 2 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

ب) $|2-x| - |2x-2| = x$

ریشه ۱ ، ریشه ۲

x	①	1	②	2	③
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$2x-2$	$-$	0	$+$		$+$

ناحیه ① $x<1$: $2-x-(-(2x-2)) = x$

$2-x+2x-2 = x \rightarrow x = x$ همواره برقرار

ناحیه ② $1 \le x \le 2$: $2-x-(2-2x) = x$

$2-x-2+2x = x \rightarrow x = 1$

ناحیه ③ $x>2$: $-(2-x)-(2x-2) = x$

$-2+x-2x+2 = x \rightarrow 0 = 2x$

$x = 0 \notin (2,+\infty)$ قابل قبول نیست

مجموعه جواب $= (-\infty,1) \cup \{1\} = (-\infty,1]$

تذکر: از روش هندسی هم می‌توان در حل معادلات قدرمطلقی کمک گرفت. (در نظر گرفتن دو طرف تساوی به عنوان دو تابع و رسم آن‌ها در دستگاه مختصات و یافتن محل برخورد آن‌ها)

کار در کلاس

معادله قدر مطلقی $|x-1|=4-3x$ را به سه روش زیر حل کنید.

الف) حذف قدرمطلق

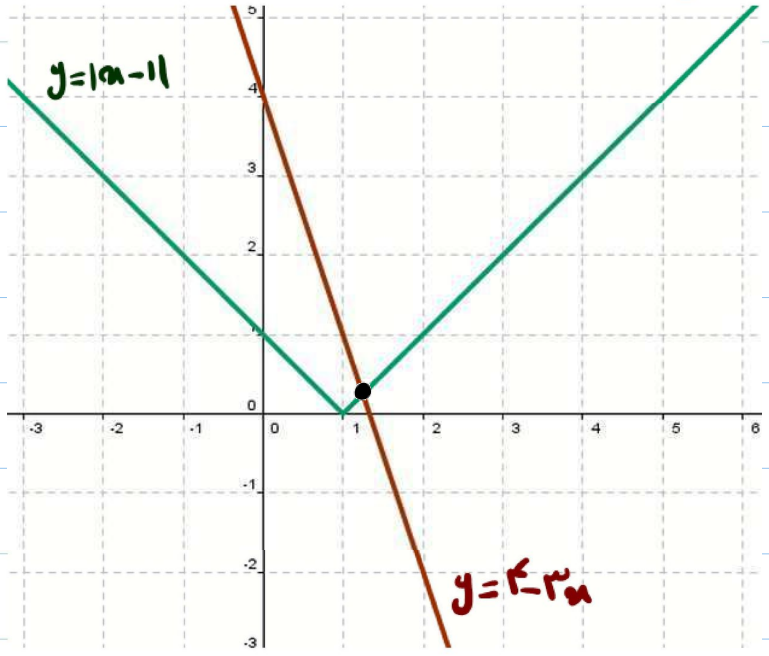
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$x<1$: $-(x-1)=4-3x \rightarrow -x+1=4-3x$

$\rightarrow 2x=3 \rightarrow x=\frac{3}{2}$ ✗

$x\geq 1$: $x-1=4-3x \rightarrow 4x=5 \rightarrow x=\frac{5}{4}$

ب) هندسی



پ) به توان ۲ رسانده

$|x-1|^2=(4-3x)^2 \rightarrow x^2-2x+1=16-24x+9x^2$

$8x^2-22x+15=0 \rightarrow \Delta=484-(4\times 8\times 15)=484-480=4$

$$x = \frac{22 \pm 2}{16} = \begin{cases} \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \times \\ \frac{20}{16} = \frac{5}{4} \checkmark \end{cases}$$

کاردرکلاس

۱ با استفاده از شکل روبه‌رو، نمودار توابع $y=|2x-1|$ و $y=|x^2-1|$ را رسم کنید و تعداد جواب‌های معادله $|2x-1|=|x^2-1|$ و مقدار تقریبی جواب‌ها را به‌دست آورید.

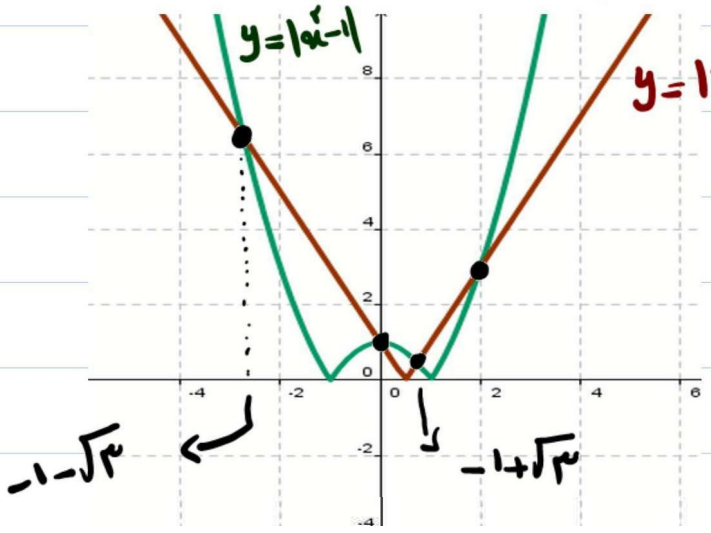
۲ به روش جبری و با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق معادلهٔ $|2x-1|=|x^2-1|$ را حل کنید.

روش جبری :

$$x^2-1 = \pm(2x-1) \begin{cases} x^2-1 = 2x-1 \rightarrow x^2-2x=0 \\ x^2-1 = -2x+1 \rightarrow x^2+2x-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-2)=0 \rightarrow x=0 \text{ , } x=2 \\ x^2+2x-2=0 \rightarrow \Delta = 4-4\times1(-2) = 4+8 = 12 \end{cases}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{3})}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$



روش های حل نامعادلات قدرمطلقی :

الف) اگر یک طرف قدرمطلقی و یک طرف عدد باشد مانند $|2x-1| \leq 3$ از ویژگی های :

$$|u| \leq c \Rightarrow -c \leq u \leq c$$

و

$$|u| \geq c \Rightarrow u \geq c \text{ یا } u \leq -c$$

استفاده می کنیم .

ب) اگر به صورت دسته الف نباشد ، باید با توجه حل نامعادلات از تعیین علامت استفاده کرد و جواب هر ناحیه را با آن ناحیه اشتراک گرفت و در آخر جواب های نهایی هر قسمت را اجتماع می گیریم .

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $|2x-1| \leq 3$

$$-3 \leq 2x-1 \leq 3 \xrightarrow{+1} -2 \leq 2x \leq 4 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x \leq 2$$

$$ج.م = [-1, 2]$$

ب) $|2x-1| \leq x+1$

ریشه: $x=\frac{1}{2}$

x	①	$\frac{1}{2}$	②
$2x-1$	$-$	0	$+$

① حالت: $x < \frac{1}{2}$: $-(2x-1) \leq x+1 \longrightarrow -2x+1 \leq x+1$

$\longrightarrow -3x \leq 0 \xrightarrow{\div(-3)} x \geq 0$

اشتراک‌ها: $(-\infty, \frac{1}{2}) \cap [0, +\infty) = \underline{[0, \frac{1}{2})}$

② حالت: $x \geq \frac{1}{2}$: $2x-1 \leq x+1 \longrightarrow x \leq 2$

اشتراک‌ها: $[\frac{1}{2}, +\infty) \cap (-\infty, 2] = \underline{[\frac{1}{2}, 2]}$

ج.م = $[0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, 2] = [0, 2]$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

جلسه دهم: حل تمرین صفحه۲۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

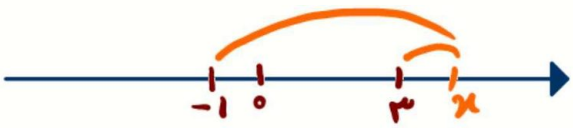
اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

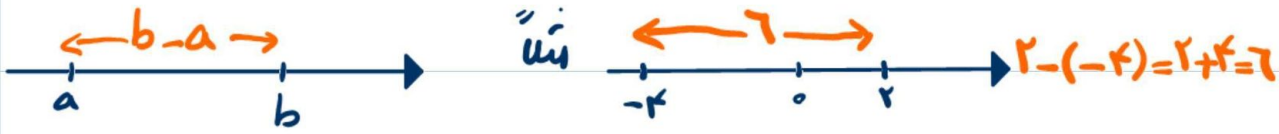
گروه ریاضی استان همدان

۲ بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های ۱- و ۳ روی محور xها برابر ۶ باشد؟



نکته: فاصله بین دو نقطه a و b روی محور:

اگر $a<b$ باشد، فاصله بین a و b برابر $b-a$ می‌شود:



اگر $a-b$ یعنی $-۶=-۲-۴$ بنویسیم، چون فاصله نمی‌تواند منفی باشد، باید جواب را قدر مطلق بگیریم. پس برای رفع این مشکل و زمانی که نمی‌دانیم a بزرگ‌تر است یا b، فاصله بین a و b روی یک محور را $|b-a|$ می‌گیریم.

$$|x-۳|+|x-(-۱)|=۶ \rightarrow |x-۳|+|x+۱|=۶$$

	①	-۱	②	۳	③
$x-۳$	−		−	۰	+
$x+۱$	−	۰	+		+

۱) $x<-۱$: $-(x-۳)-(x+۱)=۶$

$-x+۳-x-۱=۶ \rightarrow -۲x=۴$

$\rightarrow x=-۲$ ✓

۲) $-1 \le x \le 3$: $-(x-3)+(x+1)=7$

$-x+3+x+1=7$

$4=7$ نیرسیس

۳) $x>3$: $x-3+x+1=7$

$2x=8 \rightarrow x=4$ ✓

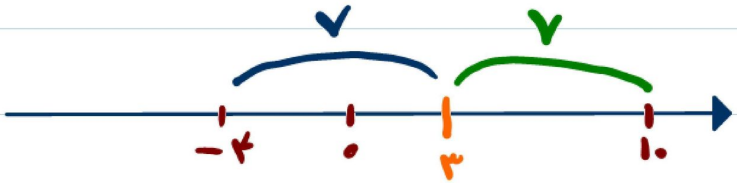
۳ هر یک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به‌صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است.

$|x-3|=7 \rightarrow x-3=\pm 7$

$x-3=7 \rightarrow x=7+3=10$

$x-3=-7 \rightarrow x=-7+3=-4$

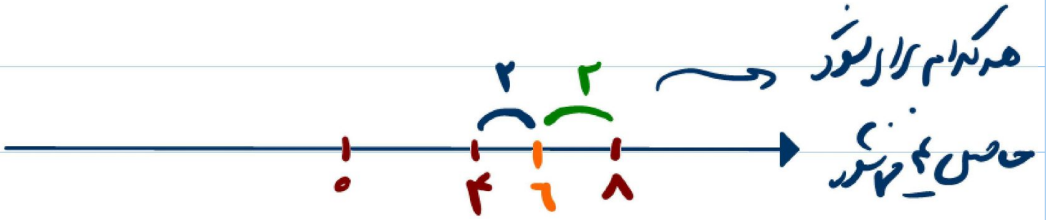


ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است.

$2|x-6|=4 \xrightarrow{\div 2} |x-6|=2 \rightarrow$

$x-6=2 \rightarrow x=8$

$x-6=-2 \rightarrow x=4$



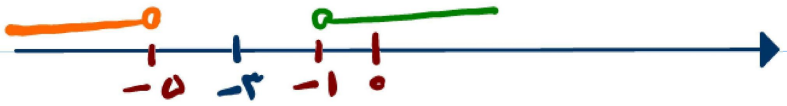
هرکدام را بسنجد

حاصل را بسنجد

پ) فاصله بین x و ۳- بزرگ‌تر از ۲ است.

$|x-(-3)|>2 \rightarrow |x+3|>2$

بزرگی $\rightarrow$
- $x+3>2 \rightarrow x>-1$
- $x+3<-2 \rightarrow x<-5$



۴ دو معادلهٔ زیر را حل کنید.

الف) $\frac{2-x}{|x-3|}=1$

$\rightarrow |x-3|=2-x \rightarrow x-3=\pm(2-x)$

- $x-3=2-x \rightarrow 2x=5 \rightarrow x=\frac{5}{2}=2.5$ ← قبول می‌شود
  $|2.5-3|=2-2.5$
  $0.5 \neq -0.5$
- $x-3=-2+x \rightarrow -3=-2$ غیرممکن

این معادله جواب ندارد.

ب) $\sqrt{x^2-2x+1}=2x+1$ → $\sqrt{(x-1)^2}=2x+1$

مجذور کامل

$|x-1|=2x+1$

→ $x-1=\pm(2x+1)$

$x-1=2x+1 \rightarrow x=-2$ غ ق ق

$|-2-1|=-4+1$

$3 \neq -3$

$x-1=-2x-1 \rightarrow 3x=0 \rightarrow x=0$ ✓

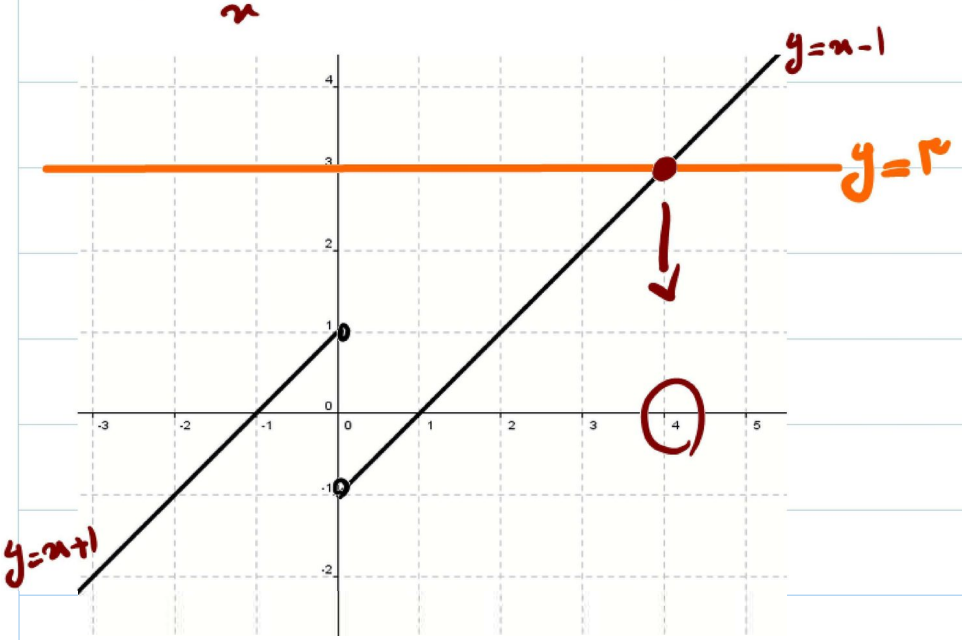
$|0-1|=2\times0+1$

$1=1$

۵ نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y=3$ معادله‌های به‌دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y=x-\frac{x}{|x|}$ → $\frac{x}{|x|}$: -1 | $+1$ (0)

$y=\begin{cases} x-\frac{x}{-x} & x<0 \\ x-\frac{x}{x} & x>0 \end{cases}$ → $y=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$



روش هندسی:

جواب معادله:

$x=4$

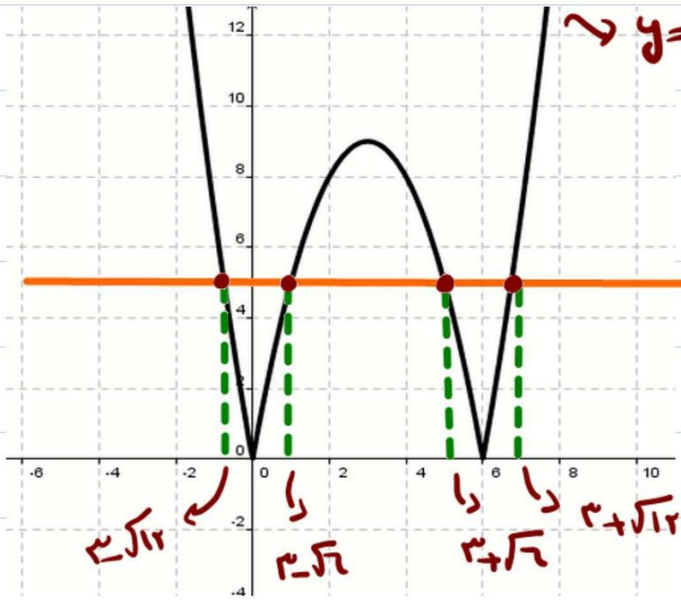
روش جبری :

$x = x - \frac{x}{|x|}$

$x<0$: $x = x+1 \rightarrow x=2 \sim$ ✗ در ناحیه‌ی

$x>0$: $x = x-1 \rightarrow x=4$ ✓

ب) $y=|x^2-6x| \sim y=|x^2-6x+9-9|=|(x-3)^2-9|$



$\sim y=|x^2-6x|$

روش هندسی :

۴ جواب داریم

روش جبری:

$|x^2-6x|=3 \rightarrow |(x-3)^2-9|=3$

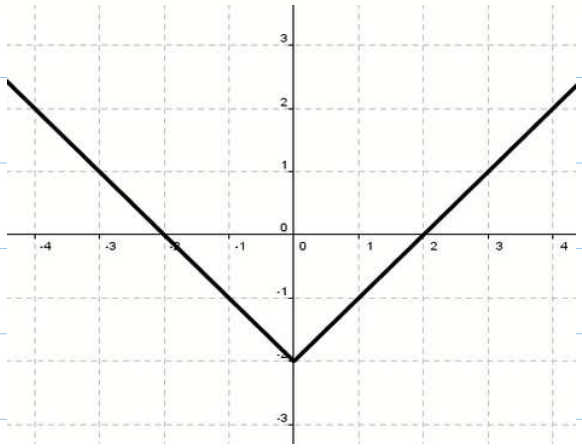
$(x-3)^2-9=3 \rightarrow (x-3)^2=12 \xrightarrow{\sqrt{}} |x-3|=\sqrt{12} \rightarrow x-3=\pm\sqrt{12}$

$\rightarrow x=3\pm\sqrt{12}$

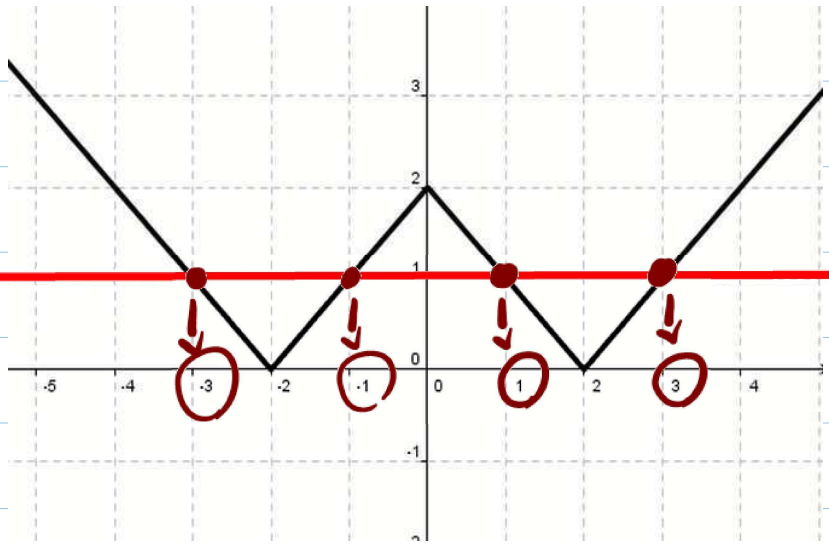
$(x-3)^2-9=-3 \rightarrow (x-3)^2=6 \xrightarrow{\sqrt{}} |x-3|=\sqrt{6} \rightarrow x-3=\pm\sqrt{6}$

$\rightarrow x=3\pm\sqrt{6}$

۶ نمودار تابع $f(x)=||x|-۲|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x)=۱$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.



$y=|x|-۲$



$y=||x|-۲|$

روش هندسی :

$y=۱$

$x=-۳,-۱,۱,۳$

روش جبری :

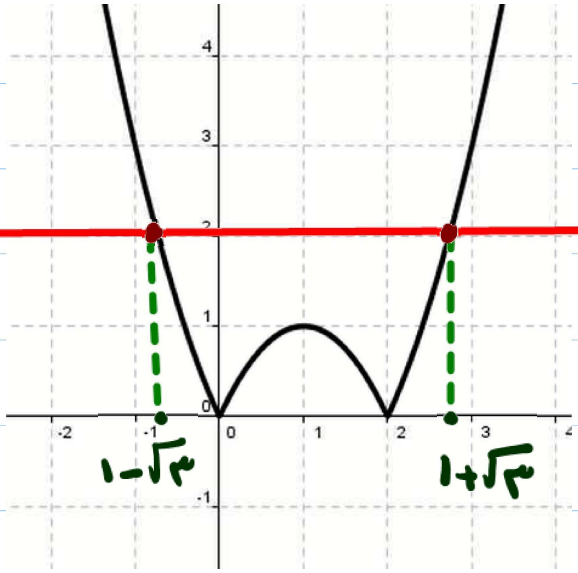
$||x|-۲|=۱ \rightarrow |x|-۲=\pm ۱$

$|x|-۲=۱ \rightarrow |x|=۳ \rightarrow x=\pm ۳$

$|x|-۲=-۱ \rightarrow |x|=۱ \rightarrow x=\pm ۱$

۷ نمودار تابع $f(x)=|x^2-2x|$ را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2-2x|=2$ را حل نمایید.

$y=|x^2-2x|=|x^2-2x+1-1|=|(x-1)^2-1|$



روش هندسی :

۲ جواب داریم.

روش جبری :

$|x^2-2x|=|(x-1)^2-1|=2$

$\rightarrow (x-1)^2-1=\pm 2$

$(x-1)^2-1=2 \longrightarrow (x-1)^2=3 \xrightarrow{\sqrt{}} x-1=\pm\sqrt{3}$

$\longrightarrow x=1\pm\sqrt{3}$ ✓

$(x-1)^2-1=-2 \longrightarrow (x-1)^2=-1$ ✗

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

قسمت اول و دوم

جلسه یازدهم و دوازدهم: صفحات ۲۹ تا ۳۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۱) فاصله دو نقطه (طول پاره خط)

همانطور که در درس قبل دیدیم، اگر دو نقطه A و B مشخص با اعداد x_A و x_B روی محور ها باشند آنگاه فاصله بین دو نقطه $|AB| = |x_B - x_A|$ می‌شود.

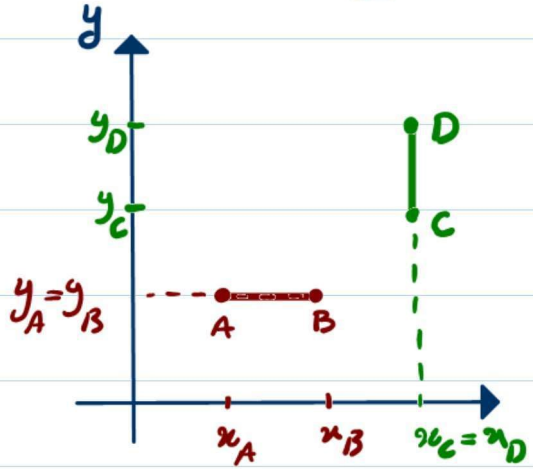


مانند:



$$|AB| = |۳ - (-۲)| = |۳ + ۲| = ۵$$

تذکر: در دستگاه مختصات دو نقطه A و B که عرض برابر دارند هم عرض و دو نقاط C و D که طول مساوی دارند هم طول گفته می‌شود و داریم:



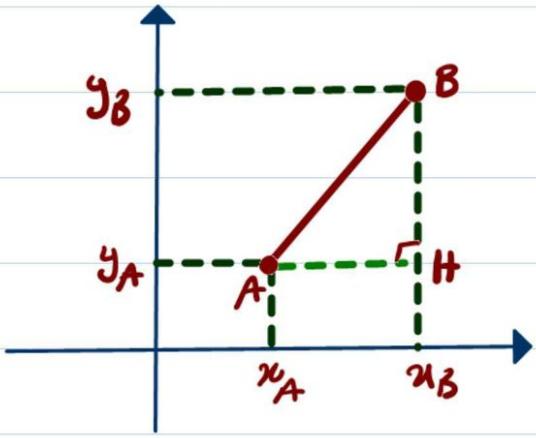
$$|AB| = |x_B - x_A|$$

$$|CD| = |y_D - y_C|$$

فرمول شماره (۱) : اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در دستگاه مختصات باشند، طول پاره خط AB یا فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

اثبات :



اگر از نقطه A بر خط تقریر B روی محور xها، x_B، عمود کنیم و پای عمود را H بنامیم،

مثلث ABH قائم‌الزاویه خواهد بود و طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad (1)$$

ولی B و H هم طول هستند پس : $|BH| = |y_B - y_A|$

همچنین H و A هم عرض هستند پس : $|AH| = |x_B - x_A|$

با جایگذاری روابط بالا در (۱) داریم:

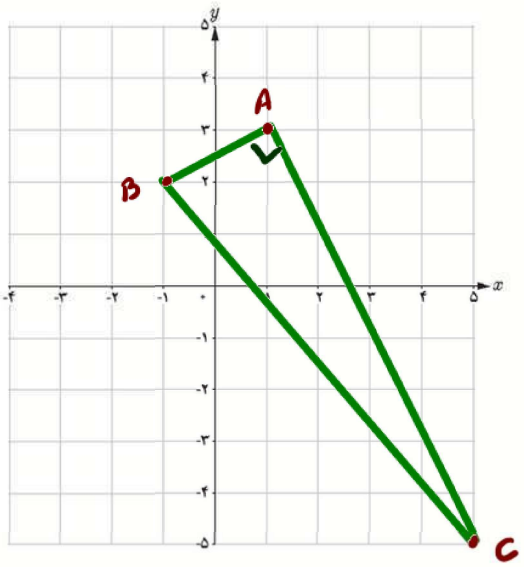
$$AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

با گرفتن رادیکال از طرفین و این خاصیت قدرمطلق ($|a|^2 = a^2$) و توجه به این نکته که طول را همواره عددی مثبت در نظر می‌گیریم خواهیم داشت: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

یادآوری: شیب خط گذرا از دو نقطه $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ برابر: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

و معادله خط گذرنده از نقطه A با شیب m برابر: $y - y_A = m(x - x_A)$ است.

کار در کلاس



سه نقطهٔ $A(1,3)$، $B(-1,2)$ و $C(5,-5)$ سه رأس مثلث ABC، در صفحهٔ مختصات روبه‌رو، هستند.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) طول اضلاع مثلث را به‌دست آورید.

پ) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ت) شیب دو خط AB و AC را به‌دست آورید.
چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟

ب) $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$

$BC = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$

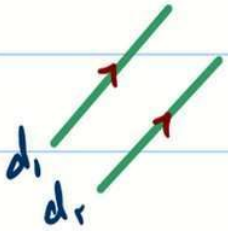
پ) $(\sqrt{85})^2 = (\sqrt{80})^2 + (\sqrt{5})^2 \rightarrow 85 = 85 \rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2$

قدر مطلق دو عدد معکوس یکدیگر با حاصل ضرب منفی یک می‌شود.

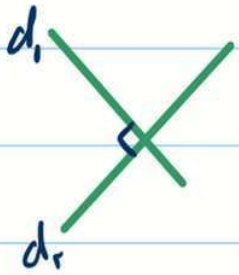
ت) $m_{AB} = \frac{2-3}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

$m_{AC} = \frac{-5-3}{5-1} = \frac{-8}{4} = -2$

تذکر: شیب دو خط موازی با هم برابر و شیب دو خط عمود بر هم قرینه و معکوس یکدیگرند.



$m_1 = m_2$



$m_1 \times m_2 = -1$

مثال: وضعیت خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$d_1: y = 4x - 1$ $\quad d_2: 8y + 2x = 3$ $\quad d_3: 12x - 3y + 1 = 0$

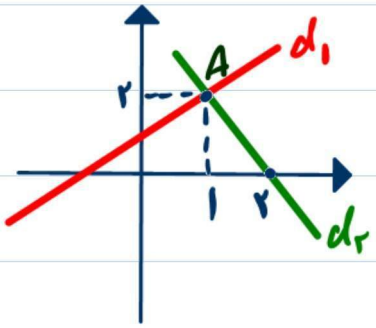
نکته: ضریب x در صورت استاندارد خط ($y = mx + h$) شیب خط است.

نکته: شیب خط $ax + by + c = 0$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

$m_1 = 4$ $\quad m_2 = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$ $\quad m_3 = \frac{-12}{-3} = 4$

$m_1 = m_3 \rightarrow d_1 \parallel d_3$, $m_1 \times m_2 = m_2 \times m_3 = -1 \rightarrow d_2 \perp d_1, d_3$

مثال: معادله خط d_1 عمود بر d_2 را در شکل مقابل بیابید.



$d_1 \perp d_2 \Rightarrow m_1 \times m_2 = -1$

$(2,0), (1,2) \rightarrow m_2 = \frac{2-0}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$

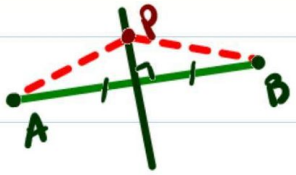
$m_1 = \frac{1}{2}$

$d_1: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$

نکته: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است و برعکس.

کاردرکلاس

نشان دهید نقطه $P(-۱۲,۱۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه $A(۰,-۳)$ و $B(۶,۱۵)$ قرار دارد.



کافی است ثابت کنیم $AP=PB$.

$$AP=\sqrt{(-۱۲-۰)^۲+(۱۱+۳)^۲}=\sqrt{۱۴۴+۱۹۶}=\sqrt{۳۴۰}$$

$$BP=\sqrt{(-۱۲-۶)^۲+(۱۱-۱۵)^۲}=\sqrt{۳۲۴+۱۶}=\sqrt{۳۴۰}$$

$\rightarrow AP=BP$

۲) مختصات نقطه وسط یک پاره خط:

اگر M وسط پاره خط AB روی محور طول‌ها باشد:



$$AM=MB \Rightarrow x_M-x_A=x_B-x_M \Rightarrow ۲x_M=x_A+x_B \xrightarrow{\div ۲} x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

به همین ترتیب اگر M وسط پاره خط AB روی محور عرض‌ها باشد: $y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$

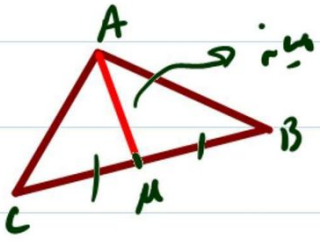
و در حالت کلی اگر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند با

تصویر کردن این نقاط بدی محور xها و yها به فرمول شماره (۲) می‌رسیم.

فرمول شماره (۲): مختصات نقطه M وسط پاره خط AB:

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

مثال: اگر $A(1,9)$ ، $B(3,1)$ ، $C(7,11)$ سه رأس یک مثلث باشند، معادله میانه AM را به دست آورید.



$$M=\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{3+7}{2}, \frac{1+11}{2}\right)=(5,6)$$

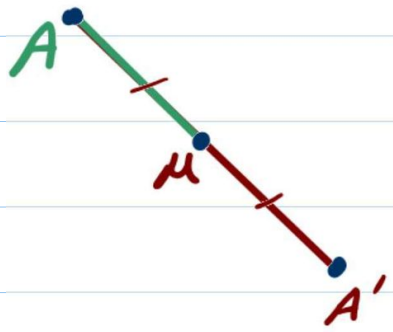
$$M, A \longrightarrow m=\frac{\text{تب}}{\text{ترا}}=\frac{9-6}{1-5}=\frac{3}{-4}$$

$$y-9=-\frac{3}{4}(x-1)$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+9$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{39}{4}$$

نکته: قرینه نقطه $A(x_A, y_A)$ نسبت به نقطه $M(x_M, y_M)$:

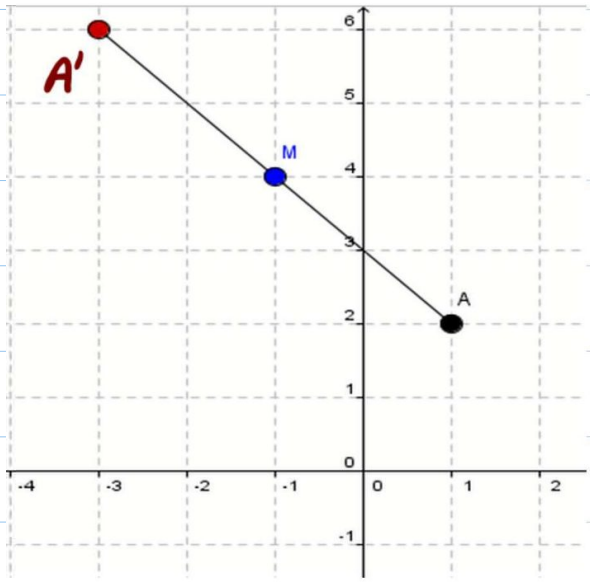


اگر A' را نقطه مورد نظر بگیریم. چون M وسط AA' واقع می‌شود پس خواهیم داشت :

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \rightarrow 2x_M = x_A + x_{A'} \rightarrow x_{A'} = 2x_M - x_A$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \rightarrow 2y_M = y_A + y_{A'} \rightarrow y_{A'} = 2y_M - y_A$$

مثال: قرینه نقطه $A(1,2)$ را نسبت به نقطه $M(-1,4)$ بیابید.



$$x_{A'} = 2 \times (-1) - 1 = -3$$

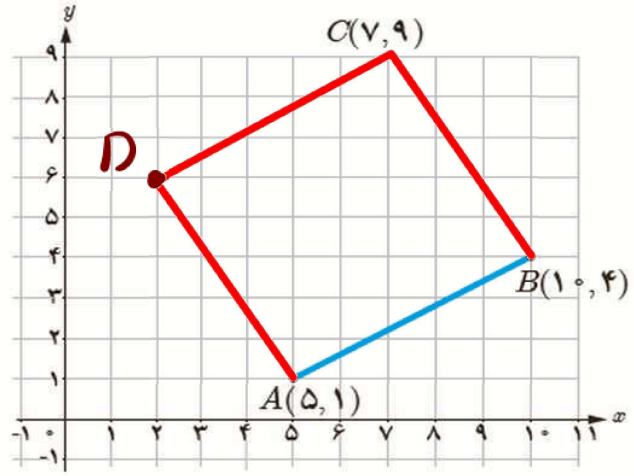
$$y_{A'} = 2 \times 4 - 2 = 6$$

$$A'(-3, 6)$$

نکته : در هر چهارضلعی که قطرها همدیگر را نصف می‌کنند (مانند مربع، مستطیل، لوزی و متوازی الاضلاع) مجموع طول‌ها و مجموع عرض‌های دو رأس روبه‌رو با هم برابرند.

(اثبات جزو این تمرین)

مثال : مربع $ABCD$ را با رأس‌های : $A(5,1)$ ، $B(10,4)$ ، $C(7,9)$ در نظر بگیرید. مختصات رأس D را بیابید.



$$x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow 5+7 = 10 + x_D \rightarrow x_D = 2$$

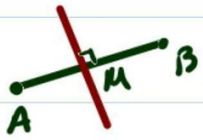
$$y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow 1+9 = 4 + y_D \rightarrow y_D = 6$$

$$D(2,6)$$

مثال: معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خطی را بنویسید که دو نقطهٔ $A(-2,1)$ و $B(3,4)$ را به هم وصل کرده است.

روش اول: صفحه ۳۱ کتاب جدید

روش دوم:



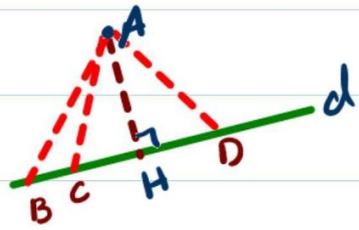
$$M=\left(\frac{-2+3}{2},\frac{1+4}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) \qquad m_{AB}=\frac{4-1}{3+2}=\frac{3}{5} \xrightarrow[\text{عمودمنصف}]{} m=-\frac{5}{3}$$

$$y-\frac{5}{2}=-\frac{5}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\times 6} 6y-15=-10x+5 \rightarrow 6y+10x=20$$

$$\div 2 \rightarrow \quad 3y+5x=10$$

۳) فاصله نقطه از خط:

می‌دانیم فاصله یک نقطه از یک خط، کوتاه‌ترین فاصله یعنی فاصله عمودی در نظر می‌گیریم.



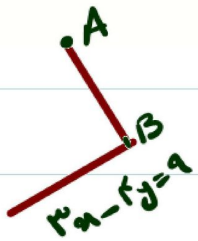
فرمول شماره ۳: (بدون اثبات می‌پذیریم)

فاصله نقطه $A(x_A,y_A)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر:

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

کار در کلاس

۱ اگر نقطهٔ $A(۲,۳)$ رأس یک مربع و معادلهٔ یک ضلع مربع $۳x-۴y=۹$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟



$A(۲,۳) \xrightarrow{\text{در خط}}$ $۳\times۲-۴\times۳=۹$ روی خط قرار ندارد

$۶-۱۲=-۶\neq۹$

صورت کلی خط: $۳x-۴y-۹=۰$

$$AB=\frac{|۳\times۲-۴\times۳-۹|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$$\Rightarrow S=۳\times۳=۹$$

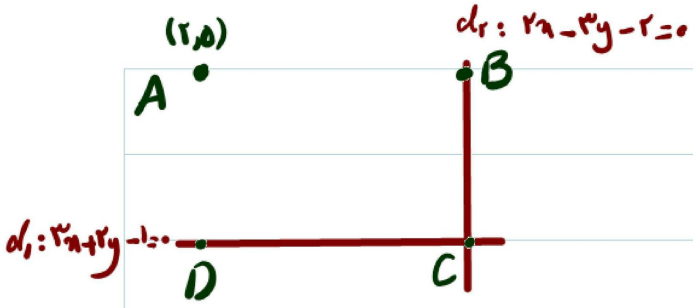
۲ دو خط $۳x+۲y=۱$ و $۲x-۳y=۲$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل‌اند و نقطهٔ $A(۲,۵)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

$d_۱: ۳x+۲y=۱ \rightarrow m=-\frac{۳}{۲}$ ، $d_۲: ۲x-۳y=۲ \rightarrow m=-\frac{۲}{-۳}=\frac{۲}{۳}$

$d_۱ \perp d_۲ \rightarrow$ $d_۱$ و $d_۲$ در وضع عمود

$(۲,۵) \xrightarrow{d_۱}$ $۳\times۲+۲\times۵\neq۱$ ، $(۲,۵) \xrightarrow{d_۲}$ $۲\times۲-۳\times۵\neq۲$

(۲,۵) روی اضلاع قرار ندارد پس A رأس مستطیلی است که مستطیل در وضع قرار دارد.



پس داریم :

$$d_1 \text{ تا } A \text{ مینیمم} = AD = \frac{|۳\times۲+۲\times۵-۱|}{\sqrt{۹+۴}} = \frac{۱۵}{\sqrt{۱۳}}$$

$$d_2 \text{ تا } A \text{ مینیمم} = AB = \frac{|۲\times۲-۳\times۵-۲۱|}{\sqrt{۴+۹}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}$$

$$S = \frac{۱۵}{\sqrt{۱۳}} \times \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} = ۱۵ \times \frac{۱۳}{۱۳} = ۱۵$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

حل تمرین: صفحات ۳۵ و ۳۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

تمرین

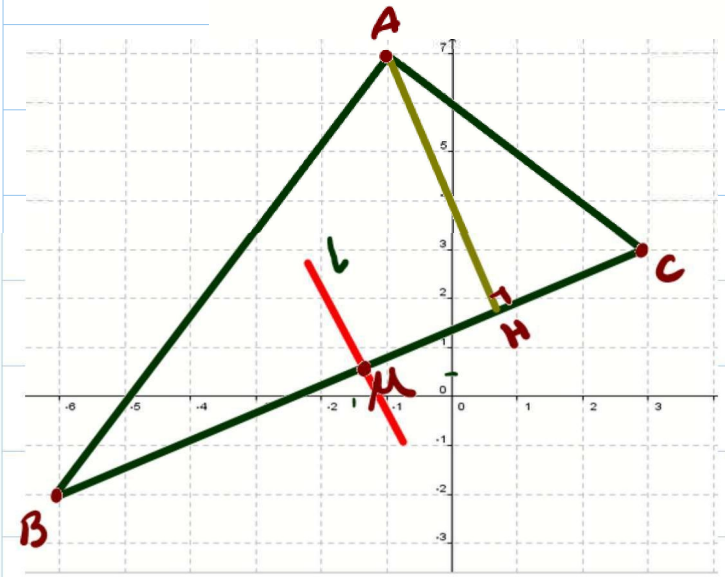
۱ مثلث ABC به رأس‌های $A(-۱,۷)$ و $B(-۶,-۲)$ و $C(۳,۳)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمودمنصف ضلع BC را به‌دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟



ب) $AB=\sqrt{(-۶+۱)^۲+(-۲-۷)^۲}=\sqrt{۲۵+۸۱}=\sqrt{۱۲۶}$

$BC=\sqrt{(۳+۶)^۲+(۳+۲)^۲}=\sqrt{۸۱+۲۵}=\sqrt{۱۲۶}$

$AB=BC$ پس مثلث متساوی‌الساقین است

پ) $M_{BC}=\left(\frac{-۶+۳}{۲},\frac{-۲+۳}{۲}\right)=\left(\frac{-۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$

$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۳+۲}{۳+۶}=\frac{۵}{۹}$ شیب BC

شیب عمودمنصف BC برابر BC است پس $m_l=-\frac{۹}{۵}$.

با داشتن m و نقطه M معادله را می‌نویسیم :

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{9}{5}\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\times 10} 10\left(y-\frac{1}{2}\right)=10\times\left(-\frac{9}{5}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 10y-5=-18x-27 \Rightarrow 18x+10y+22=0$$

$$\xrightarrow{\div 2} 9x+5y+11=0$$

معادله عمودمنصف BC

ت) BC معادله : $m_{BC}=\frac{5}{9}$, $C(3,2)$

$$y-2=\frac{5}{9}(x-3) \xrightarrow{\times 9} 9y-27=5x-15$$

$$BC : -5x+9y-12=0 \quad , \quad A(-1,7)$$

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-5\times(-1)+9\times 7-12|}{\sqrt{(-5)^2+9^2}}$$

$$=\frac{|5+63-12|}{\sqrt{25+81}}=\frac{56}{\sqrt{106}}$$

۲ $A(0,6)$ و $B(8,-8)$ نقاط دوسر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به‌دست آورید.

وسط AB مرکز دایره

$$O=\left(\frac{0+8}{2},\frac{6-8}{2}\right)=(4,-1)$$

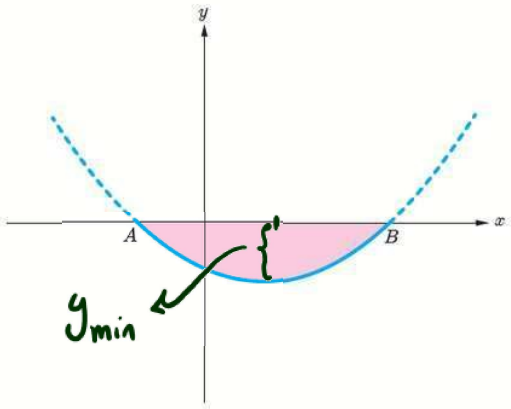
$$OA=R=\sqrt{(0-4)^2+(6+1)^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$$

۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادلهٔ $y=x^2-8x-20$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.

الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به‌دست آورید.

ب) اگر x برحسب سانتی‌متر باشد طول AB را به‌دست آورید.

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y برحسب میلی‌متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟



الف) صفرهای سهمی: $x^2-8x-20=0 \rightarrow (x-10)(x+2)=0 \begin{cases} x=10 \\ x=-2 \end{cases}$

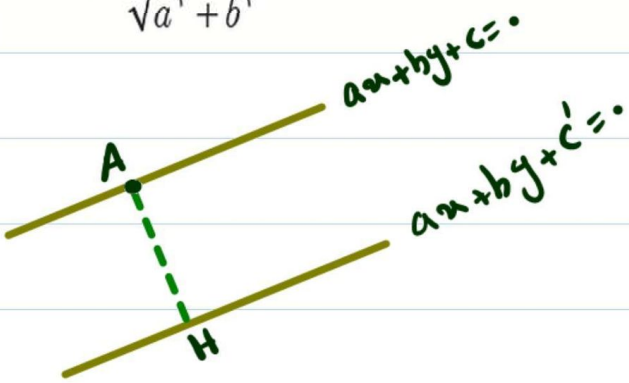
$\Rightarrow x_A=-2 \quad , \quad x_B=10$

ب) $|AB|=|10+2|=12\,cm$

پ) $x_{min}=-\frac{b}{2a}=-\frac{-8}{2}=4 \rightarrow y_{min}=4^2-8\times4-20=16-32-20=-36$

ضخامت عدسی $=36\,mm$

۴ ثابت کنید فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می‌باشد.



روش اول :

$$A \rightsquigarrow x=0 \rightsquigarrow ax_0+by+c=0 \rightarrow by=-c \rightarrow y=-\frac{c}{b}$$

$$A\left(0,-\frac{c}{b}\right)$$

$$AH=\frac{|ax_0+bx(-\frac{c}{b})+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

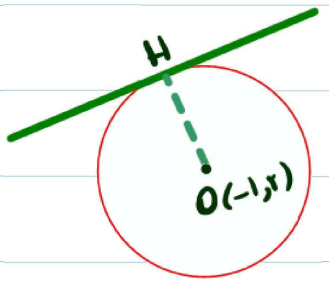
$$|-x|=|x| \Longrightarrow AH=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

روش دوم :

$$A(x_1,y_1) \xrightarrow{\text{در خط}} ax_1+by_1+c=0 \rightarrow ax_1+by_1=-c$$

$$AH=\frac{|\overbrace{ax_1+by_1}^{-c}+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۵ خط $۴x + ۳y = ۵$ بر دایرهٔ C به مرکز $O(-۱,۲)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟



$۴x+۳y-۵=۰$

مقصد: شعاع برخط مماس در نقطه تماس عمود است.

$$OH = R = \frac{|۴\times(-۱)+۳\times۲-۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}} = \frac{|-۴+۶-۵|}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۳}{۵}$$

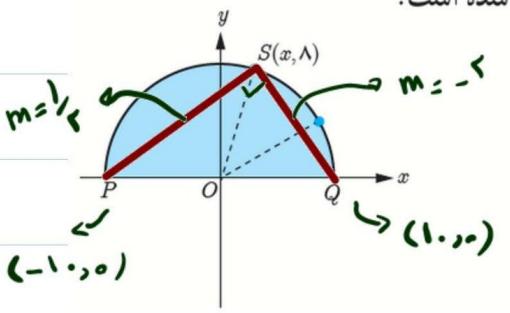
OH = R = فاصله نقطه O تا خط مماس

۶ نقطهٔ $S(x,۸)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۰ در شکل روبه‌رو داده شده است.

الف) مقدار x را به‌دست آورید.

ب) شیب خط‌های PS و SQ را به‌دست آورید.

پ) نشان دهید $P\hat{S}Q$ قائمه است.



الف) $R = ۱۰ = OS = \sqrt{(x-۰)^۲+(۸-۰)^۲} = \sqrt{x^۲+۶۴}$

$۱۰ = \sqrt{x^۲+۶۴}$ توان ۲ $\rightarrow ۱۰۰ = x^۲+۶۴ \rightarrow x^۲ = ۳۶ \xrightarrow{x>۰} x = ۶$

ب) $S(۶,۸)$, $P(-۱۰,۰)$, $Q(۱۰,۰)$

$$m_{PS} = \frac{۸-۰}{۶+۱۰} = \frac{۸}{۱۶} = \frac{۱}{۲} \quad , \quad m_{SQ} = \frac{۰-۸}{۱۰-۶} = \frac{-۸}{۴} = -۲$$

ب) $m_{PS} \times m_{SQ} = \frac{1}{2} \times (-2) = -1 \Rightarrow$ پس PS بر SQ عمود است.

۷ اگر فاصله نقطه $A(1,2)$ از خط $ax+4y=1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

$ax+4y-1=0$

$$AH = \frac{|a\times 1 + 4\times 2 - 1|}{\sqrt{a^2+16}} = 2 \Rightarrow \frac{|a+7|}{\sqrt{a^2+16}} = 2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{a^2+16} = |a+7| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4(a^2+16) = a^2+14a+49$$

$$\Rightarrow 4a^2+64-a^2-14a-49=0 \Rightarrow 3a^2-14a+15=0$$

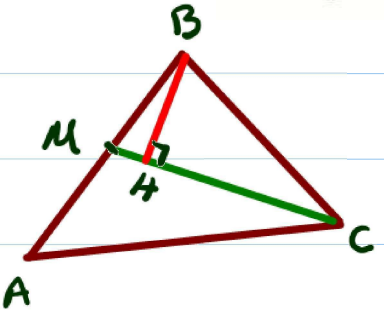
$$\Delta = 196-(4\times 3\times 15) = 196-180 = 16 \rightarrow a = \frac{14\pm 4}{6}$$

$$a = \begin{cases} \frac{14+4}{6} = 3 & \text{قبول} \\ \frac{14-4}{6} = \frac{5}{3} & \text{قبول} \end{cases}$$

۸ سه رأس مثلث ABC ، $A(-11,-13)$، $B(-3,3)$، $C(3,1)$ می‌باشند.

الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به‌دست آورید.

ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.



الف) ابتدا M را پیدا می‌کنیم. سپس فاصله

نقطه B تا AM را پیدا می‌کنیم.

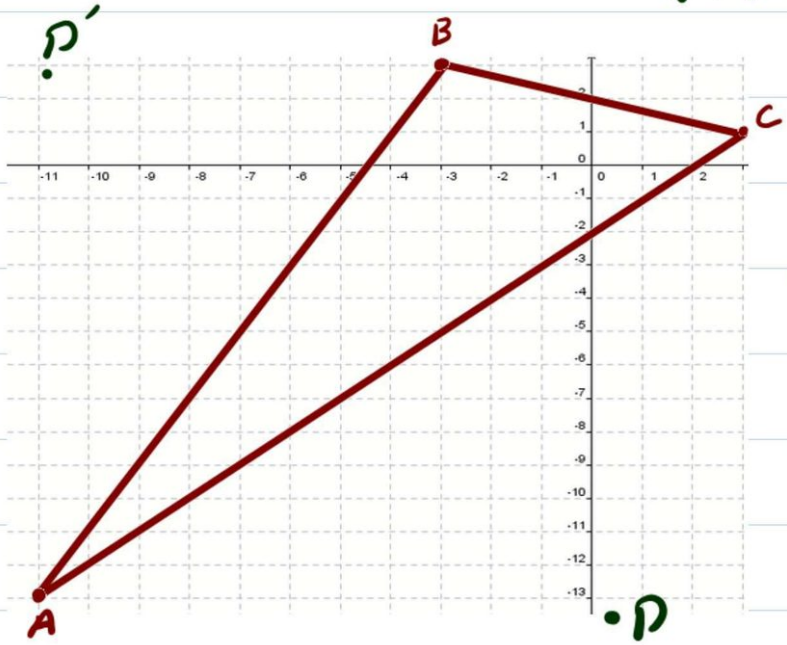
$$M\left(\frac{-11-3}{2}, \frac{-13+3}{2}\right) \Rightarrow M(-7, 0)$$

$$m_{MC} = \frac{y_C - y_M}{x_C - x_M} = \frac{1-0}{3+7} = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}$$

معادله MC : $y - 1 = -\frac{2}{5}(x-3) \xrightarrow{\times 5}$ $5y - 5 = -2x + 6$ (معادله از نقطه C)

$$\Rightarrow 2x + 5y - 11 = 0$$

$$MC \text{ و } B \text{ فاصله} = BH = \frac{|2\times(-3) + 5\times 3 - 11|}{\sqrt{4+25}} = \frac{|-6+15-11|}{\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$



ب)

$ABCD$:

$$\begin{cases} x_B + x_D = x_A + x_C \\ y_B + y_D = y_A + y_C \end{cases}$$

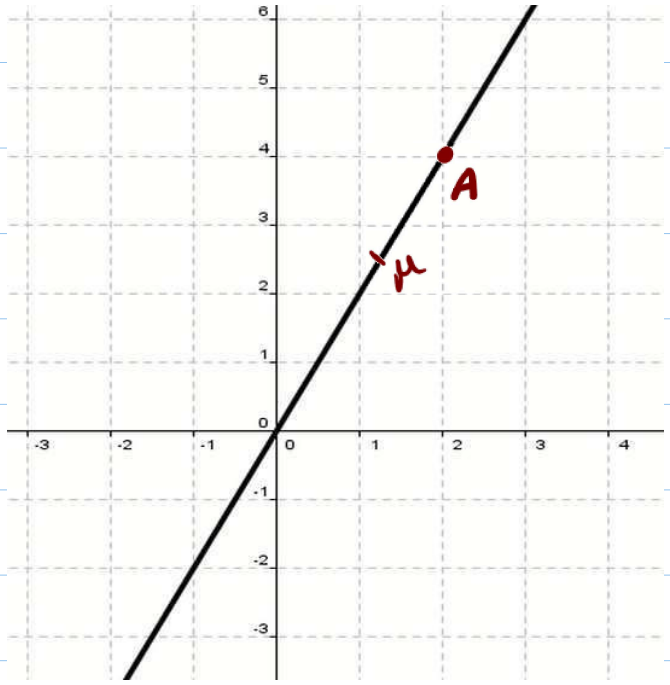
$$\begin{cases} -3 + x_D = -11 + 3 \rightarrow x_D = -5 \\ 3 + y_D = -13 + 1 \rightarrow y_D = -10 \end{cases}$$

$D(-5, -10)$

$ABCD'$: $\begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_{D'} \\ y_A + y_B = y_C + y_{D'} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -11 - 3 = 3 + x_{D'} \rightarrow x_{D'} = -17 \\ -13 + 3 = 1 + y_{D'} \rightarrow y_{D'} = -11 \end{cases}$

$D'(-17, -11)$

۹ نقطه‌ای روی خط $y=2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2,4)$ برابر ۵ باشد.



$OM+MA=5$

$M(a,2a)$ ← $y=2x$

فرض کنیم مختصات M

باشد.

$$OM=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5a^2}$$

$$MA=\sqrt{(a-2)^2+(2a-4)^2} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \sqrt{5a^2}+\sqrt{(a-2)^2+(2a-4)^2}=5$$

$(2a-4)^2=(2(a-2))^2$

$$\sqrt{5a^2}+\sqrt{(a-2)^2+4(a-2)^2}=5$$

$$\sqrt{5a^2}+\sqrt{5(a-2)^2}=5 \Rightarrow \sqrt{5}|a|+\sqrt{5}|a-2|=5$$

$$\div\sqrt{5} \Rightarrow |a|+|a-2|=\frac{5}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$$

$|a|+|a-2|=\sqrt{5}$

		۰		۲
a	−	۰	+	+
$a-2$	−		−	۰ +

$a<0$: $-a-a+2=\sqrt{5} \rightarrow -2a=\sqrt{5}-2 \rightarrow a=\frac{2-\sqrt{5}}{2}$ قبول

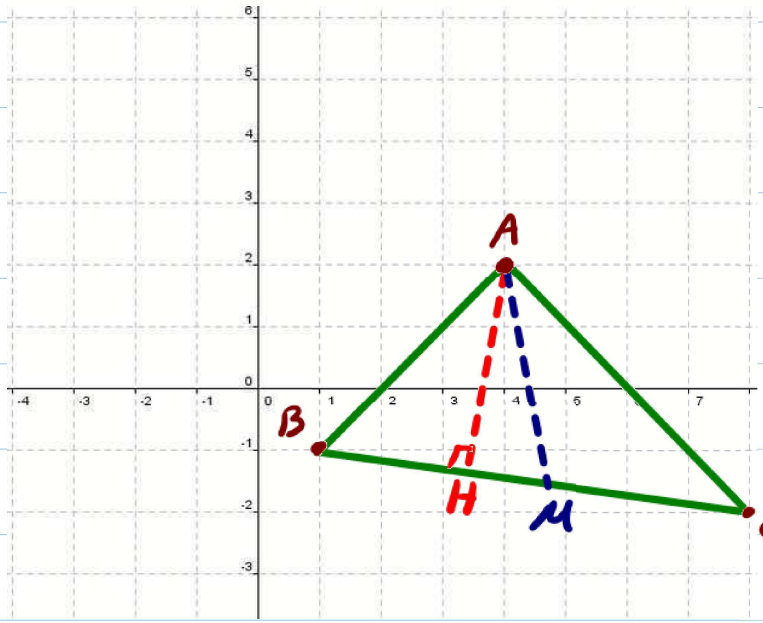
$0<a<2$: $\cancel{a}-\cancel{a}+2=\sqrt{5} \rightarrow 2=\sqrt{5}$ غیرممکن

$a>2$: $a+a-2=\sqrt{5} \rightarrow 2a=\sqrt{5}+2 \rightarrow a=\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

$a=1+\frac{\sqrt{5}}{2}$ قبول

$M\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2}, 2-\sqrt{5}\right)$, $M'\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}\right)$

۱۰ نقاط $A(۴,۲)$ و $B(۱,-۱)$ و $C(۸,-۲)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به‌دست آورید.



$A\hat{H}M$ ← قضیه فیثاغورس

$AM^2=AH^2+MH^2$

↓ طول میانه ، ↓ فاصله A تا خط BC ، ↘ ?

AH : معادله خط BC را به دست آوردیم
سپس فاصله A را تا BC بدست آوردیم.

$$m_{BC} = \frac{-2+1}{8-1} = \frac{-1}{7} \xrightarrow{\text{با نقطه } B} y+1 = -\frac{1}{7}(x-1)$$

$$\xrightarrow{\times 7} 7y+7 = -x+1 \longrightarrow x+7y+6=0 \quad , A(4,2)$$

$$AH = \frac{|1\times 4+7\times 2+6|}{\sqrt{1+49}} = \frac{24}{\sqrt{50}}$$

AM : M را A فاصله و BC وسط را بدست می‌آوریم
را حساب می‌کنیم.

$$M = \left(\frac{1+8}{2}, \frac{-1-2}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad \text{وسط } BC$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{9}{2}-4\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$AM^2 = AH^2 + MH^2 \longrightarrow MH^2 = AM^2 - AH^2$$

$$MH^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{24}{\sqrt{50}}\right)^2 = \frac{25}{2} - \frac{576}{50} = \frac{350-576}{50} = \frac{49}{50}$$