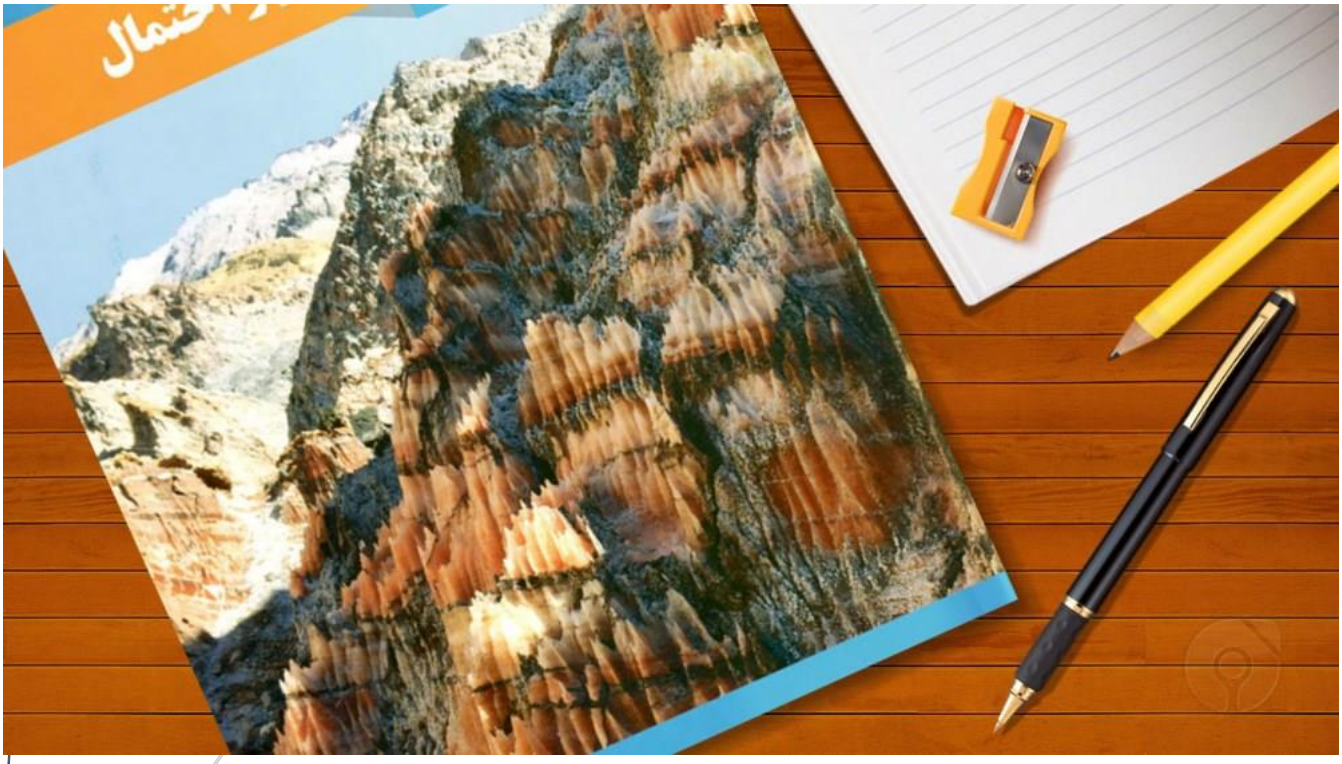
جزوه آمار و احتمال

پایه یازدهم ریاضی



مولف: سیدابوالفضل فاضلیان

به نام خدا

آمار و احتمالات دو شاخه از ریاضیات هستند که ارتباطات نزدیکی با هم داشته و برخی مواقع نتایج آنها با هم ترکیب می‌شود.

با توجه به اهمیت نمرات امتحانات نهایی در آزمون سراسری بر آن شدم جزوه‌ای شامل درسنامه، اثبات قضایای وحل برخی‌تمرین های کتاب درسی، حل مثال و... تالیف کنم.

با توجه به حجم بالای کار قطعاً اشتباهاتی در جزوه وجود دارد که از علاقه‌مندان پوزش‌می‌طلبم و خوشحال می‌شوم با شناسه شاد بنده به آدرس seyedfazelian@ در میان بگذارند، تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح شود.

در کانال گروه ریاضی استان همدان در شاد به آدرس riazihmd۱@ می توانید جزوه دیگر درس‌ها و مطالب متنوع دیگر را ملاحظه نمایید.

در پایان یادآوری می‌شوم استفاده از این جزوه به هرصورت مجاز و هزینه آن فقط دعا برای عاقبت بخیری نگارنده است.

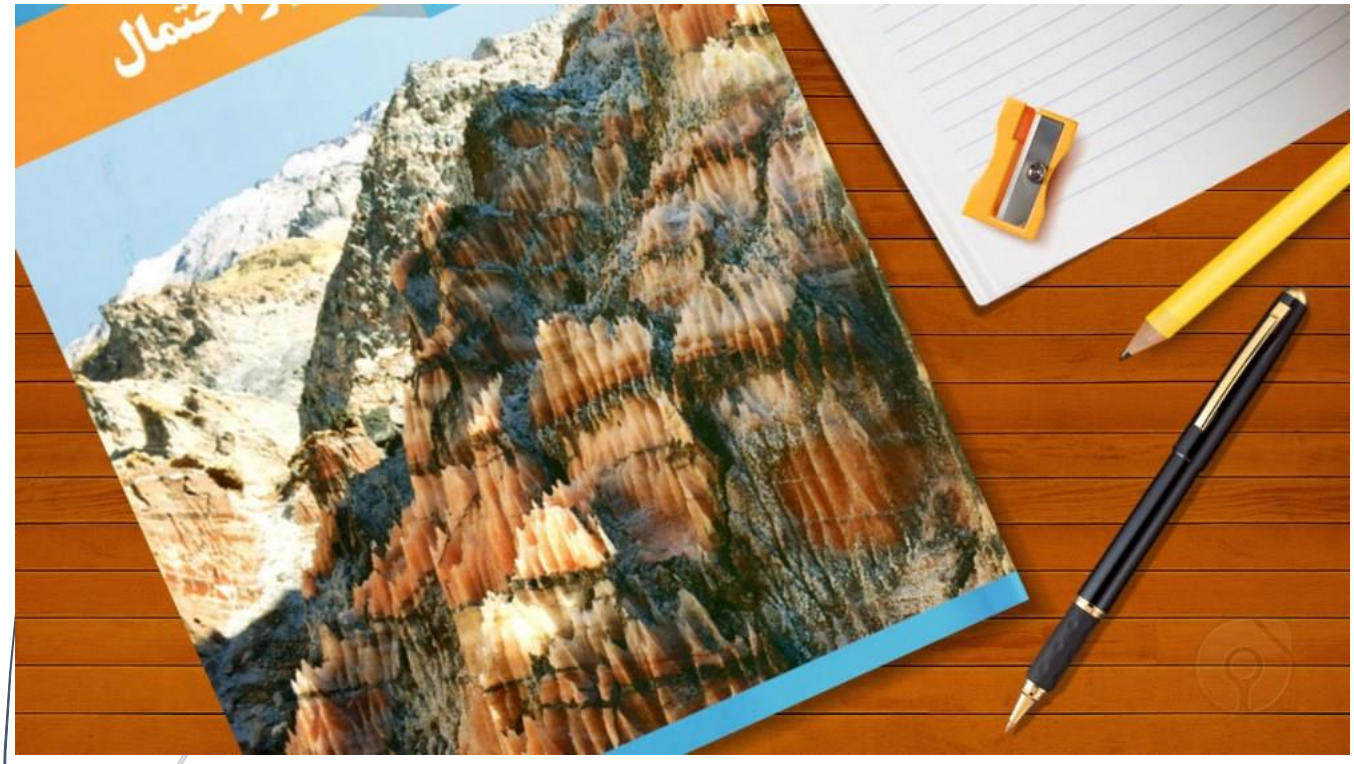
سیدابوالفضل فاضلیان

۱۴۰۳/۵/۲۸

جزوه آمار و احتمال

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات



مولف: سیدابوالفضل فاضلیان

تعریف منطق ریاضی :

دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله هایی است که در ریاضی به کار برده می شود.

این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال ها می پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می کند.

تعریف گزاره :

به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست (راست) یا نادرست (دروغ) باشد گزاره می گوییم.

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می گوییم.

ارزش گزاره درست را با حرف (د) یا T و ارزش گزاره نادرست را با حرف (ن) یا F نشان می دهیم.

نکته :

۱) یک گزاره نمی تواند هم درست و هم نادرست باشد یعنی هر گزاره فقط یک ارزش دارد.

۲) جمله های پرسشی ،امری و عاطفی گزاره محسوب نمی شوند زیرا خبری را بیان نمی کنند.

۳) معمولاً گزاره ها را با حروف $p ,q ,r ,...$ نمایش می دهیم.

مثال : از بین جمله های زیر گزاره ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

۱) افلاطون فیلسوف یونانی است. — **گزاره درست**

۲) $۳+۵>۶$ — **گزاره درست**

۳) عدد ۱۹۱۷ اول است. — **گزاره نادرست**

۴) چه باران شدیدی می آید. — **گزاره نیست**

۵) $Q \subset R$ — **گزاره نادرست**

۶) آیا $۳+۲$ برابر ۵ است؟ گزاره نیست

۷)در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید ، برابر با $\frac{۱}{۳}$ است. گزاره درست

۸) عدد $۵^{۹}+۸$ اول است. گزاره نادرست

$$۵^{۹}+۸=(۵^{۳})^{۳}+۲^{۳}=(۵^{۳}+۲)(۵^{۶}-۵^{۳}\times۲+۲^{۲})$$
$$=(۵^{۳}+۲)(۵^{۶}-۲\times۵^{۳}+۴)$$

حدس گلد باخ :

هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.

$۴=۲+۲$
$۶=۳+۳$
$۸=۳+۵$

این حدس تا به حال اثبات نشده ولی مثالی هم برای نقض آن پیدا نشده است. در هر صورت این جمله را می توان گزاره در نظر گرفت چون بالاخره یکی از ارزشهای درستی یا نادرستی را دار است.

جدول ارزش گزاره ها

هر گزاره می تواند یکی از ارزش های درست یا نادرست را داشته باشد، پس اگر n گزاره داشته باشیم، بنا به اصل ضرب ارزش این گزاره ها ۲^{n} حالت مختلف می تواند داشته باشد. می توانیم جدولی با n ستون و ۲^{n} سطر در نظر بگیریم که هر سطر آن متناظر با یکی از این ۲^{n} حالت باشد.

جدول ارزش یک گزاره :

p
د
ن

جدول ارزش دو گزاره :

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

جدول ارزش سه گزاره :

r	q	p
د	د	د
ن	د	د
د	ن	د
ن	ن	د
د	د	ن
ن	د	ن
د	ن	ن
ن	ن	ن

مثال:

عبارت های خبری زیر را در نظر بگیرید.

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگری برابر عدد شش است. $(۳x+۲y=۶)$

۱)ارزش کدام یک از جملات بالا را می توانید تعیین کنید؟

هیچکدام

۲)اگر به جای متغیر در جمله الف) عدد سه قرار دهیم ارزش آن چگونه است؟

گزاره درست

اگر ۴ قرار دهیم چطور؟

گزاره نادرست

تعریف گزاره نما :

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره نما نامیده می شود.

گزاره نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته درآنها ، یک متغیره، دو متغیره و...می نامیم.

مثال :

در گزاره نماهای مثال قبل به جای متغیرها مقادیری قرار دهید که یکبار به گزاره درست و یکبار به گزینه نادرست تبدیل شوند.

۱)در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۲) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگری برابر عدد شش است. $(۳x+۲y=۶)$

حل ۱) $A=\{۲,۴,۶\}$ گزاره درست و اگر $A=\{۱,۵\}$ گزاره نادرست می شود.

حل۲) $x=۲, y=۰$ گزاره درست و اگر $x=۱, y=۲$ گزاره نادرست می شود.

دامنه متغیر گزاره نما :

در هر گزاره نما ،به مجموعه مقادیری که می توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا گزاره نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره نما می گویند و با D نمایش می دهند.

مجموعه جواب گزاره نما :

در هرگزاره نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آنها ، گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره نما می گویند و با S نمایش می دهند.

مثال:

دامنه متغیر هریک از گزاره نماهای زیر مجموعه اعداد صحیح است. مجموعه جواب هریک را مشخص کنید.

۱) x مضرب ۷ است.

$x = 7k \Rightarrow S = \{0, \pm 7, \pm 14, \dots\}$

۲) $15x^2 - 7x - 8 = 0$

$15 - 7 - 8 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{-8}{15}$

$S = \{1\}$

۳) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.

$a = 5k + 1$

$S = \{\dots, -4, 1, 6, 11, \dots\}$

۴) $\{n(n+1) = 0 \mid n \in W\}$

$n(n+1) = 0 \Rightarrow n = 0, n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1$

$S = \{0\}$

ترکیب گزاره ها

اگر دو یا چند گزاره را با استفاده از رابط های گزاره ای (ادات ربط) مانند (یا) ، (و)،(اگر...آنگاه...) و ... به هم وصل کنیم ، یک گزاره مرکب ساخته می شود.

ارزش گزاره های مرکب به ارزش گزاره های اولیه و نوع ادات ربط به کار رفته در آنها بستگی دارد.

۱– نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می شود و آن را (چنین نیست که p) می خوانیم.

به علامت $(\sim)$ ناقض می گوییم.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال :

نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) $۳ \leq ۴$

$۴ > ۳$

ب) **۲ عددی زوج یا عدد π گویاست**

***چنین نیست که(دو عددی زوج یا عدد π گو یاست.)**

نکته:

اگر دو گزاره pو q هم ارزش باشند می گوییم هم ارز منطقی هستند و می نویسیم :

$$p \equiv q$$

مثال : ثابت کنید $\sim (\sim p) \equiv p$

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

۲– ترکیب فصلی دو گزاره

هرگاه p, q دو گزاره باشند، گزاره مرکب (p یا q) را که به صورت $p \vee q$ می نویسند ، ترکیب فصلی دو گزاره می گوییم. در اینجا به رابط منطقی $(\vee)$ فاصل گفته می شود.

مثال : ۹۱ عددی مرکب است یا ۱۳فرد است.

۳ عددی اول نیست یا ۵ عددی گویاست.

جدول ارزش ترکیب فصلی دو گزاره

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال:

جدول ارزش گزاره مرکب $p \vee \sim p$ را رسم کنید.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
د	ن	د
ن	د	د

۳– ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p, q دو گزاره باشند، گزاره مرکب (p و q) را که به صورت $p \wedge q$ می نویسند ، ترکیب عطفی دو گزاره می گوییم. در اینجا به رابط منطقی $(\wedge)$ عاطف گفته می شود.

مثال : ۱۷ اول است و ۲۵ مربع کامل است.

۳>۵ و ۱۵ مضرب ۴ است.

جدول ارزش ترکیب عطفی دو گزاره

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال:

جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هفته هفت روز دارد	ماه شهریور ۳۱ روز دارد	د	د	د	د
۷ زوج است	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن	د	د	ن
۲ عددی اول است	$۴ > ۹$	د	ن	د	ن
$۳ + ۴ = ۸$	$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$	ن	ن	ن	ن
۷– اول است	۸ عددی مرکب است	ن	د	د	ن

مثال: با استفاده ازجدول ارزش ها نشان دهید که گزاره های $(\sim p \wedge \sim q)$و $\sim (p \vee q)$ هم ارزند.

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

تمرین: با کامل کردن جدول ارزش ها نشان دهید که گزاره های

$\sim (p \wedge q)$ و $(\sim p \vee \sim q)$ هم ارز منطقی هستند.

نکته :

در منطق ریاضی به هم ارزی های زیر قوانین دمورگان می گویند.

۱) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

۲) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

۴– ترکیب شرطی دوگزاره

هرگاه p, q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q)$ را ترکیب شرطی آنها می گوییم و آن را چنین می خوانیم :

(اگر P آنگاه q) و (P شرط کافی برای q) و (P شرط لازم برای q است.)

در این ترکیب شرطی P را مقدم یا فرض و q را تالی یا حکم می نامیم.

درهندسه با قضیه های شرطی زیادی روبه رو شده اید مانند قضیه تالس و...

جدول ارزش ترکیب شرطی دو گزاره

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان طور که در جدول می بینید اگر ارزش مقدم نادرست باشد بدون توجه به اینکه تالی درست یا نادرست است ارزش گزاره شرطی همواره درست است. در این حالت می گوییم ارزش گزاره شرطی به انتفای مقدم درست است.

مثال:

با کامل کردن جدول زیر نشان دهید که گزاره های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارز منطقی اند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

نکته :

گزاره $p \Rightarrow q$ را در نظر بگیرید.

$q \Rightarrow p$ را عکس ترکیب شرطی و $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض

ترکیب شرطی می نامیم.

مثال:

با کامل کردن جدول زیر نشان دهید ،هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

مثال :

ثابت کنید هرگاه n عدد صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آنگاه n هم مضرب ۳ است.

اثبات : به جای اثبات خود حکم، عکس نقیض آن را اثبات می کنیم یعنی:

اگر n مضرب ۳ نباشد آنگاه n^2 هم مضرب ۳ نیست.

اگر n مضرب ۳ نباشد آنگاه باقی مانده آن بر ۳ دو یا یک است:

$$n = 3k+1 \Rightarrow n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1 = 3q+1$$

$$n = 3k+2 \Rightarrow n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 9k^2+12k+3+1 = 3(3k^2+4k+1)+1$$
$$= 3q+1$$

مثال: با استفاده از جدول ارزش گزاره ها نشان دهید :

الف) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

حل الف :

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

ب) $p \vee F \equiv p$

حل ب :

p	F	$p \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

۴- ترکیب دو شرطی دو گزاره

هرگاه p, q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را ترکیب دو شرطی آنها می گوییم و به صورت $(p \Leftrightarrow q)$ می نویسیم وآن را چنین می خوانیم :

(اگر p آنگاه q و برعکس) ، (p شرط لازم و کافی برای q است) و (p اگر و تنها اگر q)

مثال : ۱)اگر نقطه ای روی عمود منصف یک پاره خط باشدآنگاه از دو سر پاره خط به یک فاصله است و برعکس

۲) در پرتاب یک تاس شرط لازم و کافی برای اینکه احتمال پیشامد A یک باشد آن است که $S=A$

مثال:

جدول ارزش گزاره مرکب ترکیب دو شرطی را از گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

جدول ارزش ترکیب دو شرطی

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال:

جدول ارزش گزاره مرکب ترکیب دو شرطی $(p \vee q) \Leftrightarrow q$ را رسم کنید.

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

چند هم ارزی مهم:

۱) قوانین جا به جایی

$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

۲) قوانین شرکت پذیری

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

۳)قوانین توزیع پذیری

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

اثبات هم ارزی ۲)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

۴) نقیض گزاره شرطی: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن

۵) نقیض گزاره دو شرطی: $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن

۶) قوانین جذب:

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

سورها

به جملات زیر توجه کنید :

الف) هر مربع، مستطیل است– برای هر عدد حقیقی داریم : $x+0=x$

ب)برخی از لوزی ها مربع هستند–وجود دارد عدد حقیقی که مکعب آن برابر با دو باشد.

عبارت((برای هر))،((به ازای هر)) یا ((به ازای جمیع مقادیر))را سور عمومی می گوییم و با نماد $\forall$ نمایش می دهیم.

عبارت ((وجود دارد)) یا ((به ازای بعضی مقادیر))را سور وجودی می گوییم.

نماد سور وجودی $\exists$ است.

نکته :

سورها قبل از گزاره نماها قرار می گیرند و گزاره هایی با ارزش درست یا نادرست تولید می کنند.

مثال: جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
مربع هر عدد حقیقی، بزرگتر مساوی صفر است.	$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$
همه اعداد زوج مضرب دو هستند.	$\forall a \in E : a = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$
وجود دارد عدد اولی که مضرب دو باشد.	$\exists p \in P : p = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	$\exists x \in O : x \in P$

ارزش گزاره سوری:

الف) گزاره سوری $\forall x \in A : p(x)$ درست است هرگاه مجموعه A برابر با مجموعه جواب گزاره نما باشد ، یعنی : $A = D$ و هیچ مثال نقضی در مجموعه A برای $p(x)$ وجود نداشته باشد.

ب) گزاره سوری $\exists x \in A : p(x)$ درست است هرگاه مجموعه جواب گزاره نما ناتهی و زیرمجموعه A باشد یعنی : $\varnothing \neq D \subseteq A$

به عبارت دیگر گزاره نما برای حداقل یک عضو مجموعه A درست باشد.

مثال:
گزاره های زیر را با استفاده از نمادهای سور عمومی و وجودی بنویسید و ارزش هریک را مشخص کنید.

۱) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است. $\forall n \in \mathbb{N} : (n \in O \vee n \in E)$

ارزش : درست

۲)عدد صحیحی وجود دارد مانند x به طوریکه $1-2x > 5$

$\exists x \in \mathbb{Z} \; ; \; 1-2x > 5$

$1-2x > 5 \Rightarrow -2x > 4 \Rightarrow x < -2$ ارزش: درست زیرا

۳) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش ، بزرگ تر یا مساوی ۲ است.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \; ; \; x + \frac{1}{x} \geqslant 2$

$x=-1 \Rightarrow -1 + \frac{1}{-1} = -1-1 = -2 \not\geqslant 2$ ارزش نادرست: مثال نقض :

۴) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم : $x^3 = x$

$\exists x \in \mathbb{R} \; ; \; x^3 = x$

ارزش درست : $S = \{0 \, , \pm 1\}$

مثال:
هرگاه $A=\{x\in Z \mid 0<x\leq 5\}$ **دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.**

۱) $\exists x\in A;\ x+3\leq 4$ درست :

$x+3\leq 4 \Rightarrow x\leq 1 \Rightarrow S=\{1\}\neq\emptyset$

۲) $\forall x\in A;\ x+1\geq 6$

نادرست:

$x+1\geq 6 \Rightarrow x\geq 5$

فقط برای ۱ عضو از دامنه یعنی ۵ صحیح است و برای بقیه نادرست است.

نقیض سورها

نقیض گزاره های دارای سور عمومی : $\sim(\forall x; p(x))\equiv \exists x; \sim p(x)$

نقیض گزاره های دارای سور وجودی : $\sim(\exists x; p(x))\equiv \forall x; \sim p(x)$

مثال : ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید. سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x\in\mathbb{R}; \frac{x^2-1}{x-1}=x+1$

نادرست است زیرا برای $x=1$ عبارت تعریف نمی شود

نقیض $\exists x\in\mathbb{R};\ \frac{x^2-1}{x-1}\neq x+1$

ب) $\forall n\in\mathbb{N}; \left(2^{2^n}+1\right)\in P$

نادرست است زیرا

برای $n=5$ داریم :

$2^{2^5}+1 = 4294967297 = 641\times 6700417$

نقیض : $\exists n\in\mathbb{N};\ (2^{2^n}+1)\notin P.$

پ) $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$

نادرست است زیرا برای $x = -1$ داریم:

$-1 - \frac{1}{-1} = -1 + 1 = 0 \not\leq -2$

نقیض: $\exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$

ت) $\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y-3}{5} = 0$

درست است زیرا برای $y = 3$ عبارت برابر صفر می‌شود.

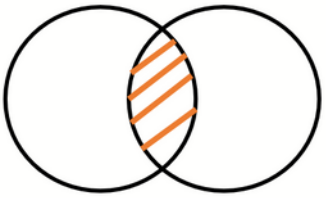
نقیض: $\forall y \in \mathbb{R}; \frac{y-3}{5} \neq 0$

یادآوری:

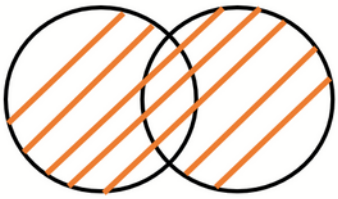
مجموعه

عضویت	$x \in A$
دو مجموعه مساوی	$A=B$
مجموعه تهی	$\varnothing$
زیر مجموعه	$A \subseteq B$
مجموعه مرجع	U

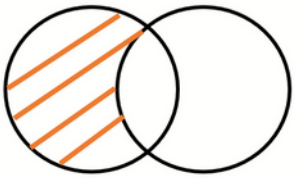
نمودار وِن اعمال روی مجموعه ها :



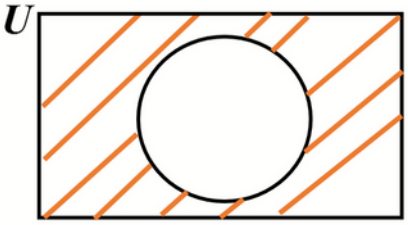
$A \cap B$



$A \cup B$



$A - B$



A'

اعمال روی مجموعه ها

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

مثال :

فرض کنید $A=\{a,b\}$ ، درستی یا نادرستی هریک از گزاره های زیر را تعیین کنید.

$\{a\}\in A$ نادرست

$\varnothing\in A$ نادرست

$\{a\}\subseteq A$ درست

$b\subseteq A$ نادرست

مثال :

فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,...,۸,۹\}$ ، $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ ، $C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ ، $E=\{۳,۵\}$

و $D=\{۳,۴,۵\}$ در هریک از حالات زیر مشخص کنید X می تواند کدامیک از این مجموعه ها باشد؟

الف) X و B عضو مشترکی ندارند. $X=C$ یا $X=E$

ب) $X\subseteq D$ ولی $X\not\subset B$ $X=D$ یا $X=E$

مثال :

کدامیک از مجموعه های زیر با هم مساوی اند؟

$A=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,|m|<۲\}=\{۱و۰و-۱\}$

$B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x^۳=x\}=\{۱-و۱و۰\}$ $A=B=D$

$C=\{y\in\mathbb{Z}\,|\,y^۲\le ۲y\}=\{۲و۱و۰\}$ $C=E$

$D=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m^۲\le ۱\}=\{۰و-۱و۱\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m^۳+۲m=۳m^۲\}=\{۲و۱و۰\}$

مثال :

اگر $A=\{۲, x+۲y, ۴\}$ و $B=\{۴, ۵, x-y\}$ و $A=B$ در اینصورت مقادیر x, y را بیابید.

$$\begin{cases} x-y=۲ \\ x+۲y=۵ \end{cases} \xrightarrow{-}$$

$$-۳y=-۳ \Rightarrow y=۱ \quad , \quad x+۲=۵ \Rightarrow x=۳$$

تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه :

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر ۲^n است.

اثبات :

می دانیم تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با : $\binom{n}{r}$

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\ldots+\binom{n}{n}=۲^n$$

مثال :

برای مجموعه $A=\{a,\{a\},\varnothing\}$ همه زیر مجموعه ها را بنویسید.

$A_۱=\{a\}$ $\quad$ $A_۲=\{\{a\}\}$ $\quad$ $A_۳=\{\varnothing\}$ $\quad$ $A_۴=\{a,\{a\}\}$ $\quad$ $A_۵=\{a,\varnothing\}$ $\quad$ $A_۶=\{\{a\},\varnothing\}$ $\quad$ $A_۷=A$ $\quad$ $A_۸=\varnothing$

مثال :

اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود، مجموعه A چند زیر مجموعه دارد؟

$$۲^{n-۲}=۲^n-۳۸۴ \Rightarrow ۲^n\times ۲^{-۲}=۲^n-۳۸۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}۲^n-۲^n=-۳۸۴ \Rightarrow -\frac{۳}{۴}۲^n=-۳۸۴$$

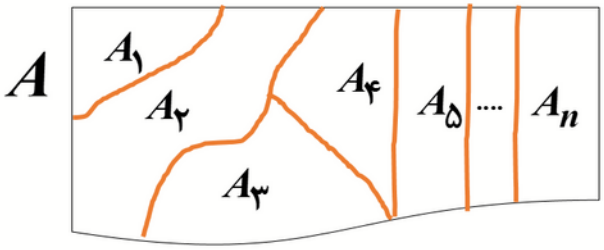
$$\Rightarrow ۲^n=۳۸۴\times\frac{۴}{۳}=۵۱۲ \Rightarrow ۲^n=۲^۹ \Rightarrow n=۹$$

افراز یک مجموعه :

زیر مجموعه هایی از A که دارای ویژگی های زیر باشند :

افراز

مخالف تهی | **دو به دو مجزا** | **اجتماع آنها A**



۱) $\forall i : 1 \le i \le n;\ \ A_i \neq \varnothing$

۲) $\forall i, j\,(i \neq j);\ \ A_i \cap A_j = \varnothing$

۳) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

مثال :

برای مجموعه $A = \{1,2,3,\ldots,9\}$ سه افراز سه عضوی بنویسید.

۱) $\{1,3,5,7,9\}$ و $\{2,4,6\}$ و $\{8\}$

۲) $\{1,2,3\}$ و $\{4,5,6\}$ و $\{7,8,9\}$

۳) $\{1,2,3,4\}$ و $\{5,6,7\}$ و $\{8,9\}$

تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x;\left(x \in A \Rightarrow x \in B\right)$$

با استفاده از هم ارزی $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x;\left(x \in A \wedge x \notin B\right)$$

روش عضوگیری برای اثبات ویژگی ها در مجموعه ها:

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A \subseteq B$ کافی است عضو دلخواهی مانند x از مجموعه A در نظر بگیریم، سپس با استفاده از فرض های داده شده نشان دهیم که x در B هم وجود دارد.

مثال۱:

ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \subseteq C$.

باید ثابت کنیم $\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in C)$

$$\forall x; x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \xrightarrow{B \subseteq C} x \in C$$

مثال۲:

ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ آنگاه $B' \subseteq A'$.

باید ثابت کنیم $\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$

$$\forall x; (x \in B' \rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \rightarrow x \in A')$$

مثال۳:

ثابت کنید برای مجموعه های A, B, C, D با مجموعه مرجع U : اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$

آنگاه : $A \cap C \subseteq B \cup D$

$$\forall x; (x \in A \cap C \rightarrow x \in A \wedge x \in C \xrightarrow{A \subseteq B, C \subseteq D} x \in B \wedge x \in D$$

$$\rightarrow x \in B \vee x \in D \rightarrow x \in B \cup D)$$

توجه کنید از درستی $P \wedge q$ می‌توان درستی $P \vee q$ را نتیجه گرفت.

مثال۴:

ثابت کنید برای مجموعه های A و BوCبا مجموعه مرجع U اگر $A \subseteq B$ آنگاه :

$$A \cap C \subseteq B \cap C$$

$$\forall x;\ (x \in A \cap C \rightarrow x \in A \wedge x \in C \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \wedge x \in C$$

$$\rightarrow x \in B \cap C)$$

نکته:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

مثال۵:

ثابت کنید برای مجموعه های A و B با مجموعه مرجع U اگر $A \cap B = \varnothing$ آنگاه

$$B - A = B$$

ابتدا ثابت می‌کنیم $B-A \subseteq B$.

$$\forall x;\ (x \in B-A \rightarrow x \in B \wedge x \notin A \rightarrow x \in B) \Rightarrow B-A \subseteq B$$

حال ثابت می‌کنیم $B \subseteq B-A$.

$$\forall x;\ (x \in B \xrightarrow{A \cap B = \varnothing} x \in B \wedge x \notin A \rightarrow x \in B-A) \Rightarrow B \subseteq B-A$$

قوانین جبر مجموعه‌ها :

۱) اجتماع و اشتراک هر مجموعه با خودش : $A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A$

۲) خاصیت جابه‌جایی در اشتراک و اجتماع : $A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A$

۳) خاصیت شرکت‌پذیری : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad , \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

۴) خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad , \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

۵) اجتماع و اشتراک با مجموعه‌ی جهان و تهی : $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \quad , \quad A \cap \mathcal{U} = A \quad ; \quad A \cup \phi = A \quad , \quad A \cap \phi = \phi$

۶) متمم، متمم یک مجموعه : $(A')' = A$

۷) اجتماع و اشتراک هر مجموعه با متمم خودش : $A \cap A' = \phi \quad , \quad A \cup A' = \mathcal{U}$

۸) تبدیل تفاضل به اشتراک : $A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$

۹) قوانین دمورگان : $(A \cup B)' = A' \cap B' \quad , \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

۱۰) قانون جذب : $A \cap (A \cup B) = A \quad , \quad A \cup (A \cap B) = A$

اثبات ۲ : $A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \vee x \in B\} \overset{\text{جابه‌جایی } \vee}{=} \{x \in \mathcal{U} \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$

اثبات ۳ : $A \cap (B \cap C) = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \wedge x \in (B \cap C)\} = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)\}$

$= \{x \in \mathcal{U} \mid (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\} = (A \cap B) \cap C$ ← شرکت‌پذیری $\wedge$

اثبات ۴ : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

به روش عضوی : $\forall x ; \ x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ← تجزیع‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$

$\Rightarrow A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

به همین ترتیب ثابت می‌شود : $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

اثبات ۸ :

$$A-B=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\notin B\}=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\in B'\}=A\cap B'$$

اثبات ۹:

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

بررسی عضو گیری :

$$\forall x;\ x\in(A\cup B)' \Rightarrow x\notin(A\cup B) \Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B \Rightarrow x\in A' \wedge x\in B'$$

$$\Rightarrow x\in A'\cap B' \Rightarrow (A\cup B)'\subseteq A'\cap B'$$

تمام روابط بالا برگشت پذیرند پس $A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'$.

قضیه: الف) $A\subseteq B \iff A\cup B=B$

ب) $A\subseteq B \iff A\cap B=A$

اثبات الف :

ابتدا فرض می کنیم $A\subseteq B$ است پس ثابت می کنیم $A\cup B=B$. رابطه $B\subseteq A\cup B$ طبق تعریف اجتماع بدیهی است.

کافی است ثابت کنیم : $A\cup B\subseteq B$.

$$\begin{cases} B\subseteq B \\ A\subseteq B \end{cases} \overset{\cup}{\Rightarrow} (A\cup B)\subseteq(B\cup B) \Rightarrow A\cup B\subseteq B$$

حال فرض می کنیم $A\cup B=B$ است و ثابت می کنیم $A\subseteq B$.

$A\subseteq(A\cup B) \xrightarrow{A\cup B=B} A\subseteq B$ طبق تعریف اجتماع

ب) را بعنوان تمرین ثابت کنید.

اثبات ۱۰ :

$A\cap(A\cup B)=A$ فاکتورگیری از A

اثبات چپ : $(A\cup\phi)\cap(A\cup B) \overset{\text{فاکتورگیری از } A}{=} A\cup(\phi\cap B)=A\cup\phi=A$

تمرین : با استفاده از قضیه بالا ، اثبات دیگری برای قوانین جذب بیاورید.

نکته: از قوانین بالا در اثبات روابط جبری و ساده سازی عبارت ها، در مجموعه ها استفاده می شود.

مثال: درستی هر یک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

۱) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$

پخش : A فاکتور گیری $\Rightarrow A\cap(B\cup B')=A\cap U=A$

۲) $(A'\cap B')\cap A=\varnothing$

پخش : جابجایی $\cap$ $\Rightarrow (B'\cap A')\cap A=$

شرکت پذیری $\cap$ $\Rightarrow B'\cap(A'\cap A)=B'\cap\phi=\phi$

۳) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

نادرست : شرکت پذیری $\cap$ $\Rightarrow [(A\cap B)\cap A]\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

۴) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

پخش : $(A\cap B')\cup(A\cap B)\overset{A\text{ فاکتور گیری}}{=} A\cap(B'\cup B)=A\cap U=A$

۵) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

درست : $(A\cap C')\cap(B\cap C')=[(A\cap C')\cap C']\cap B \overset{A\cap C'\subseteq C'}{=} (A\cap C')\cap B=A\cap(C'\cap B)$

$=A\cap(B\cap C')=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$

۶) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$ (تمرین)

درست : $(A\cup B)\cap(A\cap B)'=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']$

$=[(A\cap A')\cup(B\cap A')]\cup[(A\cap B')\cup(B'\cap B)]=(B\cap A')\cup(A\cap B')$

$=(A\cap B')\cup(B\cap A')=(A-B)\cup(B-A)$

۷) $(A-B)'=(A'\cup B)$ (درست)

اثبات چپ : $(A\cap B')' = A'\cup B$

۸) $(A-B)-C=(A-C)-B$

اثبات چپ : $(A\cap B')\cap C' = A\cap(B'\cap C') = A\cap(C'\cap B') = (A\cap C')\cap B' = (A-C)-B$

شرکت‌پذیری — جابه‌جایی — شرکت‌پذیری

۹) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\varnothing$

اثبات چپ : (درست) : $(\underbrace{A\cup B}_{x})\cap(\underbrace{A\cup B}_{x})' = x\cap x' = \phi$

مثال: هرکدام از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۱) $(A'\cap B)\cup([(B\cap A)-B']\cap(B\cup A))$

$= (A'\cap B)\cup(\underbrace{(B\cap A)\cap B'}_{(A\cap B)\cap B' = A\cap(B\cap B')\ \phi})\cap(B\cup A)) = (A'\cap B)\cup(\underbrace{\phi}\cap(B\cup A)) = A'\cap B$

$= B\cap A' = B-A$

۲) $(A\cup B)-B = (A\cup B)\cap B' = (A\cap B')\cup\underbrace{(B'\cap B)}_{\phi} = (A\cap B')\cup\phi = A\cap B' = A-B$

۳) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B) = \left[(A\cup B)\cap A'\right]\cup(A\cap B) = \left[\underbrace{(A'\cap A)}_{\phi}\cup(A'\cap B)\right]\cup(A\cap B)$

$= (A'\cap B)\cup(A\cap B) = B\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{U} = B$

ضرب دکارتی دو مجموعه :

اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، ضرب دکارتی دو مجموعه به صورت زیر تعریف می‌شود :

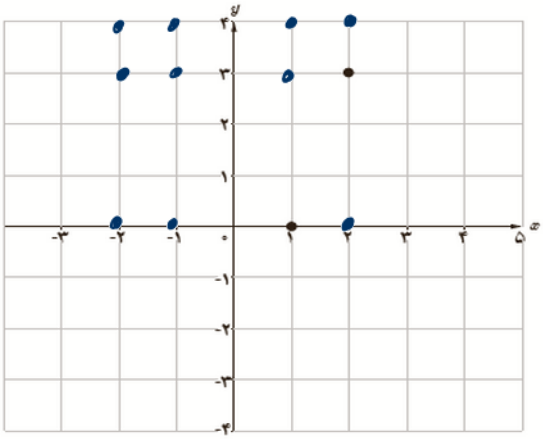
$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge x\in B\}$$

مثال:

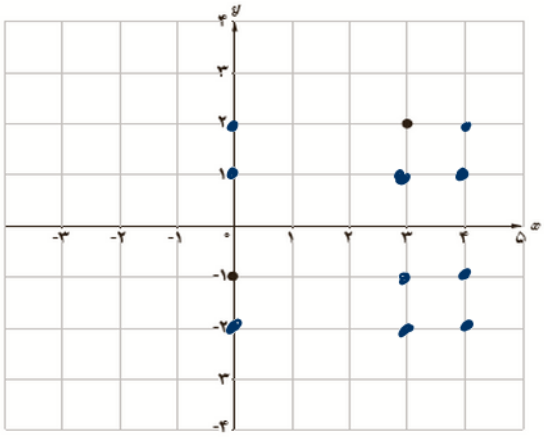
۱ اگر $A=\{-2,-1,1\}$ و $B=\{0,3,4\}$، ابتدا مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را تشکیل دهید و سپس نمودار مختصاتی هر یک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$A\times B=\{(1,0),(1,3),(1,4),(-1,0),(-1,3),(-1,4),(2,0),(2,3),(2,4),(-2,0),(-2,3),(-2,4)\}$

$B\times A=\{(0,1),(0,-1),(0,2),(0,-2),(3,1),(3,-1),(3,2),(3,-2),(4,1),(4,-1),(4,2),(4,-2)\}$



نمودار مختصاتی $A\times B$

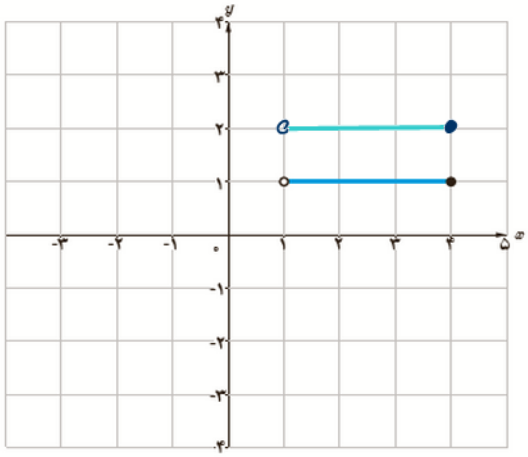


نمودار مختصاتی $B\times A$

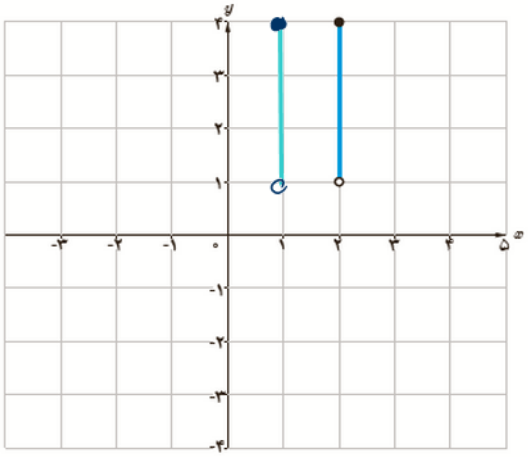
۲ اگر فرض کنیم : $A=(1,4]$ و $B=\{1,2\}$ در این صورت، نمودارهای مربوط به $A\times B$ و $B\times A$ که بخشی از آنها رسم شده است را تکمیل کنید.

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in(1,4]\wedge y\in B\}$$

$$B\times A=\{(x,y)\mid(x=1\vee x=2)\wedge 1<y\leq 4\}$$



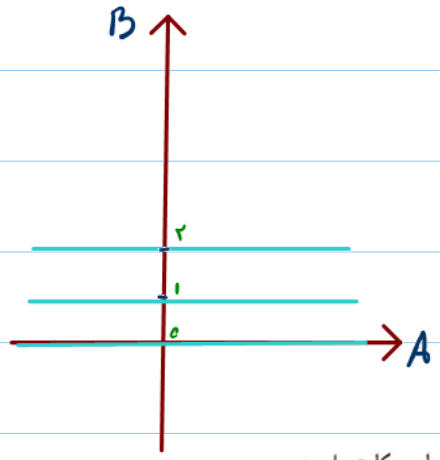
نمودار $A\times B$



نمودار $B\times A$

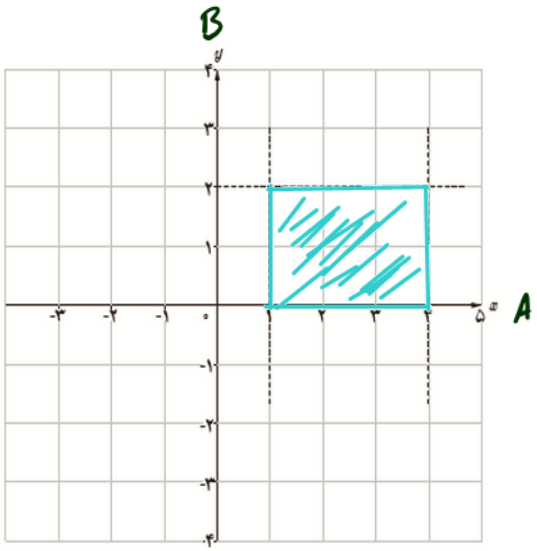
نکته: اگر $n(A)=m$ و $n(B)=k$ آنگاه $n(A\times B)=m\times k$. (طبق اصل ضرب)

۳ اگر فرض کنیم: $A=\mathbb{R}$ و $B=\{0,1,2\}$ نمودار $A\times B$ را رسم کنید.



۴ در صورتی که $A=[1,4]$ و $B=[0,2]$ در این صورت، نمودار $(A\times B)$ را که بخشی از صفحهٔ مختصات دکارتی است، هاشور بزنید.

$$A\times B=\{(x,y)\mid 1\le x\le 4\wedge 0\le y\le 2\}$$



قضیه: اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، در این صورت:

الف) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

ب) $A\times B=B\times A\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

فرض کنیم: $A\times\varnothing\neq\varnothing$ (فرض خلف) در این صورت، حداقل یک عضو مانند (x,y) در ... $A\times\varnothing$ ... باید وجود داشته باشد که در این صورت:

$$(x,y)\in A\times\varnothing \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in A\wedge \underbrace{y\in\varnothing}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y\in\varnothing$ یک تناقض است (مجموعهٔ $\varnothing$ فاقد عضو است) پس فرض خلف، باطل شده است و حکم برقرار می‌باشد، به طریق مشابه ثابت کنید که $\varnothing\times A=\varnothing$.

اثبات ب) اگر $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ که حکم اثبات می‌شود.

حال فرض کنیم : $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ که در این صورت، به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرضِ $A\times B=B\times A$، ثابت می کنیم $A=B$.

$$\forall x\in A\ ,\ \forall y\in B \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} (x,y)\in A\times B$$

$$\xrightarrow{A\times B=B\times A} (x,y)\in B\times A \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in B\wedge y\in A\Rightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$$

$$\Rightarrow A=B$$

(xای که از A فرض کردیم ثابت شد در B است و yای که از B فرض کردیم ثابت شد در A است.)

جزوه آمار و احتمال

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم: احتمال



مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

درس اول : مبانی احتمال

یادآوری نکات و مفاهیم پایه در شمارش :

۱- **اصل ضرب** : فرض کنید انجام کاری k مرحله دارد. اگر مرحله اول را بتوان به m_1 طریق

یا

تکیه بر "و" انجام داد، مرحله دوم را به m_2 طریق و ... مرحله k ام را به m_k طریق

انجام داد، کل کار مورد نظر را می‌توان به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق انجام داد.

۲- **اصل جمع** : فرض کنید بتوان کاری را از k روش انجام داد. اگر روش اول به m_1 طریق،

یا

تکیه بر "یا" روش دوم به m_2 طریق و ... و روش kام به m_k طریق ممکن باشد و بخواهیم

فقط یکی از این k روش را انتخاب کنیم، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$

یا از روش اول یا از روش دوم یا ...

طریق وجود دارد.

مثال کنکور ریاضی ۹۹:

تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟

۱) ۹۴۸ ✓ ۲) ۹۵۲ ۳) ۹۶۸ ۴) ۹۷۲

گزینه ۲

$\Rightarrow 504 + 448 = 952$

$\boxed{9} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{1,5} = 504$

$\boxed{8} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{1,5} = 448$

← پیرو ۰ و ۵

۳ـ جایگشت :

فرض کنید n شیء متمایز داریم. به هر حالت از قرار گرفتن این اشیاء در کنار هم یک جایگشت می‌گوییم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

$$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad \text{و} \quad n! = n(n-1)(n-2)\cdots \times 1$$

مثال: a,b,c — $3! = 3\times 2\times 1 = 6$

abc, acb, bac, bca, cab, cba

۴ـ تبدیل (ترتیب):

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارت دیگر تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن اهمیت داشته باشد را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و به آن تبدیل r شیء از n شیء متمایز گفته می‌شود و از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: a,b,c $\xrightarrow{\text{جایگشت‌های ۲تایی}}$ ab, ba, ac, ca, bc, cb

$$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

۵- ترکیب :

به هر انتخاب r تایی از n شیء متمایز که در آن ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می گوییم و تعداد آن ها را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می دهیم که از رابطه زیر بدست می آید:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال a,b,c $\xrightarrow[\text{۲ تایی}]{\text{ترکیب های}}$ $\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$ $\quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

حالات خاص در رابطه ترکیب :

۱) $\binom{n}{0} = 1$ مثال $\binom{10}{0} = 1$

۲) $\binom{n}{n} = 1$ مثال $\binom{5}{5} = 1$

۳) $\binom{n}{1} = n$ مثال $\binom{7}{1} = 7$

۴) $\binom{n}{n-1} = n$ مثال $\binom{6}{5} = 6$

۵) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ مثال $\binom{8}{2} = \frac{8\times 7}{2} = 28$

۶) $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ مثال $\binom{7}{3} = \frac{7\times 6\times 5}{3!} = 35$

۷) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ مثال $\binom{۷}{۳}=\binom{۷}{۴}$ و $\binom{۱۰}{۸}=\binom{۱۰}{۲}$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{r}$ است و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر ۲^n است پس:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n$$

مثال کنکور تجربی ۹۹ :

به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری‌که دو نفر انان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۷ ۳) ۹۱ ✓ ۴) ۹۵

دو نفر را کنار بگذاریم $\binom{۷}{۵}=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$

یکی از دو نفر را انتخاب کنیم $\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۴}=۲\times\binom{۷}{۳}=۲\times\frac{۷\times۶\times۵}{۳!}=۲\times۳۵=۷۰$

$۲۱+۷۰=۹۱$ گزینه ۳

مثال کنکور تجربی ۹۸ :

گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری‌که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۵۴ ✓ ۴) ۱۶۸

$$\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}=۷۰+\binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۲}=۷۰+\frac{۸\times۷\times۶}{۶}+\frac{۸\times۷}{۲}$$

$$=۷۰+۵۶+۲۸=۱۵۴$$ گزینه ۳

$\frac{۸!}{۴!\times۴!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴\times۳\times۲\times۱\times۴!}=۷۰$

یادآوری نکات و مفاهیم پایه در احتمال :

۱- پدیده یا آزمایش تصادفی : پدیده ای است که نتیجه آن را نتوان قبل از رخ دادن، به طور قطعی پیش بینی کرد.

۲- فضای نمونه ای : مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای می نامیم و آن را با S نمایش می دهیم. به هر عضو فضای نمونه یک برآمد می گوییم.

۳- پیشامد تصادفی : هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد تصادفی در آن فضای نمونه ای می گویند. و آن را A، B، C، ... نشان می دهیم.

۴- اعمال روی پیشامدها : اگر A و B پیشامدهای تصادفی در فضای نمونه ای S باشند :

الف) اجتماع A و B : پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می دهد که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد :

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \ \underset{\text{یا}}{\vee} \ x \in B\}$$

ب) اشتراک A و B : پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند :

$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

پ) تفاضل A و B: پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد:

$$A-B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(از A اشتراک A و B را حذف می‌کنیم.)

ت) متمم یک پیشامد: پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد:

$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

$$(A' = S - A)$$

۵- احتمال رخ دادن یک پیشامد: احتمال وقوع پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}}$$

(تعداد)

دقت کنید برای یافتن $n(A)$ و $n(S)$ در صورت امکان با نوشتن پیشامد و فضای نمونه‌ای، تعداد اعضای آن‌ها را به‌دست آورید در غیر این صورت از اصل ضرب و جمع، جایگشت و ترکیب استفاده می‌کنیم.

۶- چند پیشامد خاص :

الف) اگر A تهی باشد آنگاه $P(A)=0$ است و به پیشامد A غیرممکن می‌گویند.

ب) اگر $A=S$ باشد آنگاه $P(A)=1$ است و به پیشامد A حتمی می‌گویند.

ج) اگر $A\cap B=\emptyset$ آنگاه A و B را پیشامدهای ناسازگار می‌گویند.

۷- اصول احتمال

۱) احتمال هیچ خروجی بین ۰ و ۱ است یعنی $0\le P(A)\le 1$.

۲) $P(S)=1$

۳) اگر A و B ناسازگار باشند: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

تذکر: اصل سوم قابل تعمیم برای هر تعداد پیشامد است.

۸- چند قانون در احتمال :

۱) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$A\cap B'$

اثبات :

$A=(A-B)\cup(A\cap B)$

زیرا : $(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(B'\cup B)=A\cap U=A$

ازطرفی: $(A-B)\cap(A\cap B)=\emptyset$

زیرا : $(A\cap B')\cap(A\cap B)=A\cap(B\cap B')=A\cap\emptyset=\emptyset$

پس طبق اصل سوم : $P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

۲) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

اثبات:

$A\cup B=B\cup(A-B)$

زیرا: $B\cup(A\cap B')=(B\cup A)\cap(B\cup B')=(A\cup B)\cap U=A\cup B$

از طرفی: $B\cap(A-B)=\phi$

زیرا $B\cap(A\cap B')=(B\cap B')\cap A=\phi\cap A=\phi$

پس طبق اصل سوم: $P(A\cup B)=P(B)+P(A-B)$

طبق قانون دوم: $P(A\cup B)=P(B)+P(A)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

۳) $P(A')=1-P(A)$

اثبات: $1=P(S)=P(A\cup A')=P(A)+P(A')$

$\Rightarrow P(A')=1-P(A)$ یا $P(A)=1-P(A')$

۴) $P(\phi)=0$

اثبات: چون ϕ متمم S است پس: $P(\phi)=1-P(S)=1-1=0$

مثال: اگر $B \subseteq A$ ثابت کنید: الف) $P(A-B)=P(A)-P(B)$ ب) $P(B) \leq P(A)$

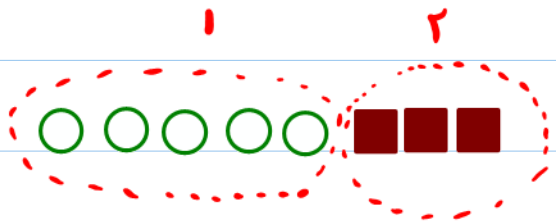
الف) $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \xrightarrow{\text{قانون ۱}} P(A-B)=P(A)-P(\overbrace{A \cap B}^{B})=P(A)-P(B)$

ب) طبق الف $\rightarrow P(A)=\overbrace{P(A-B)}^{\geq 0}+P(B) \Rightarrow P(A) \geq P(B)$

مثال کنکور تجربی ۹۹:

پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲۸}$ ✓ ۴) $\frac{۱}{۵۶}$



$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵! \times ۳! \times ۲!}{۸!}=\frac{۵! \times ۶ \times ۲}{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}=\frac{۲}{۵۶}=\frac{۱}{۲۸}$$ گزینه ۳

مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹:

یک تاس سالم را سه بار به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم، احتمال روشدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳۶}$ ۲) $\frac{۴۱}{۱۰۸}$ ۳) $\frac{۹۱}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۳۱}{۷۲}$

A: آمدن حداقل یک ۶

A': اصلاً ۶ ظاهر نشود $\quad n(A')=۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$

$$P(A')=\frac{۱۲۵}{۶^۳}=\frac{۱۲۵}{۲۱۶} \rightarrow P(A)=۱-\frac{۱۲۵}{۲۱۶}=\frac{۲۱۶-۱۲۵}{۲۱۶}=\frac{۹۱}{۲۱۶}$$

گزینه ۳

مثال کنکور تجربی (خارج) ۹۹ :

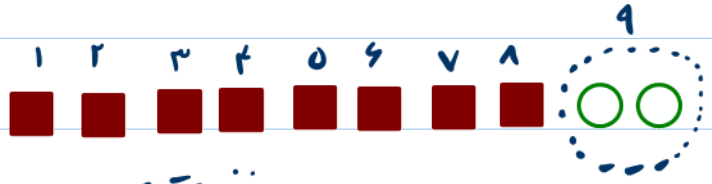
۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ✓ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

روش اول : استفاده از پیشامد متمم

A : دو نفر مورد نظر کنار هم نباشند

A' : دو نفر مورد نظر کنار هم باشند

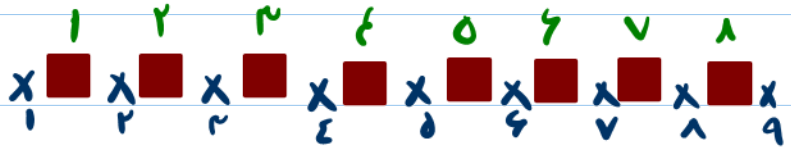


جایگاه دو نفر مورد نظر ۹

$$P(A') = \frac{۹! \times ۲!}{۱۰!} = \frac{۹! \times ۲}{۱۰ \times ۹!} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵} \rightarrow P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵}$$

گزینه ۴

روش دوم : محاسبه مستقیم



جایگاه دو نفر از ۹ تا

$$P(A) = \frac{P(۹,۲) \times ۸!}{۱۰!} = \frac{\frac{۹!}{(۹-۲)!} \times ۸!}{۱۰!} = \frac{\frac{۹!}{۷!} \times ۸!}{۱۰!}$$

$$= \frac{۹! \times ۸!}{۷! \times ۱۰!} = \frac{۹! \times ۸ \times ۷!}{۷! \times ۱۰ \times ۹!} = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$$

گزینه ۴

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۸}{۱۵}$

نکته: از مجموعه M عضوی $\{n+1, n+2, \dots, n+M\}$ تعداد $\left[\frac{M}{K}\right]$ تا بخش‌پذیر.

A: مضرب ۳ : $n(S)=N=9\times10=90$ اعداد طبیعی دو رقمی

$n(A)=\left[\frac{90}{3}\right]=[30]=30$

B: مضرب ۵ $n(B)=\left[\frac{90}{5}\right]=18$

$A\cap B$: مضرب ۳ و ۵ $n(A\cap B)=\left[\frac{90}{3\times5}\right]=\left[\frac{90}{15}\right]=6$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{30}{90}$, $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{18}{90}$, $P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{6}{90}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{30}{90}+\frac{18}{90}-\frac{6}{90}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$

گزینه ۳

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

$n(S_{\text{کاش یا نه}})$ = دو تاس زوج یکی تاس فرد + هر سه تاس فرد

$= 3\times3\times3 + (3\times3\times3)\times3 = 27 + 81 = 108$

A: حداقل یکی تاس ۲ یا ۴ شد

A': اصلا ۲ نیاید

$n(A') = 4\times4\times4 + (2\times2\times4)\times3$ (2: 0.4, 4: 0.4)

$= 27 + 36 = 63$

گزینه ۱ $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{63}{108} = \frac{108-63}{108} = \frac{45}{108} = \frac{5}{12}$

مثال:

احتمال اینکه فردی از هر دو شرکت A و B خرید کند ۰/۱ است. اگر احتمال خرید این فرد، فقط از شرکت A برابر ۰/۶ باشد، احتمال خرید این فرد از شرکت A کدام است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۹ ۴) ۰/۶

$\begin{cases} P(A-B) = 0.6 \\ P(A\cap B) = 0.1 \\ P(A) = ? \end{cases}$

$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$

$0.6 = P(A) - 0.1$

$P(A) = 0.7$

تعاریف احتمال و آمار:

علم احتمال، بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم است و علم آمار، شناختن جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های جمع آوری شده معلوم است.

درس دوم : احتمال گسسته هم شانس :

پیشامد ساده : به هر زیر مجموعه تک عضوی از فضای نمونه‌ای یک پیشامد ساده می‌گوییم.

تعریف : هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S=\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ احتمال برابر داشته باشند

S را فضای نمونه‌ای با احتمال گسسته هم شانس می‌گوییم.

اگر $A=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک پیشامد از S باشند همواره داریم:

۱) $0 \le P(A) \le 1$

۲) $P(S)=1$ یا $P(s_1)+P(s_2)+\dots+P(s_n)=1$

۳) احتمال وقوع A را با جمع احتمال اعضای سازنده‌اش: $P(A)=P(a_1)+P(a_2)+\dots+P(a_k)$

مثال : تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است.

مطلوب است احتمال اینکه در پرتاب این تاس :

الف) عدد ۲ یا ۴ ظاهر شود. ب) عدد اول ظاهر شود.

$P(2)=P(4)=P(6)=3P(1)=3P(3)=3P(5)$

$P(1)=x \Rightarrow x+3x+x+3x+x+3x=1 \Rightarrow 12x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{12}$

($P(1)$ $P(2)$ $P(3)$ $P(4)$ $P(5)$ $P(6)$)

$P(\{2,4\}) = P(2)+P(4) = \frac{3}{12}+\frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$P(\{2,4,5\}) = P(1)+P(4)+P(5) = \frac{3}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

مثال: در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c,d\}$ و احتمال وقوع پیشامدهای a و b، $\frac{1}{2}$ و احتمال وقوع c برابر $\frac{1}{8}$ و احتمال وقوع a و b $\frac{1}{2}$ است. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) d رخ ندهد. ب) هیچ‌کدام از پیشامدهای a و d رخ دهند.

$P(\{a,b\}) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(a)+P(b) = \frac{1}{2}$ ①

$P(c) = \frac{1}{8}$ ②, $P(\{d,b\}) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(d)+P(b) = \frac{1}{2}$ ④

③ $P(a)+P(b)+P(c)+P(d) = 1$

①, ③, ④ $\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+P(d) = 1 \Rightarrow P(d) = 1-\frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

④ $\rightarrow \frac{3}{8}+P(b) = \frac{1}{2} \rightarrow P(b) = \frac{1}{2}-\frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

① $P(a)+\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow P(a) = \frac{1}{2}-\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

الف) $P(a') = 1-P(a) = 1-\frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

ب) $P(\{a,d\}') = P(\{b,c\}) = P(b)+P(c) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

مثال: کنکور ریاضی تیر ۱۴۰۱

در یک تجربه تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ یک فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله هندسی با قدر نسبت کمتر از واحد، تشکیل دهند و واسطه هندسی آنها $\frac{1}{5}$ باشد، کمترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در S، چقدر است؟

۱) $\frac{2-\sqrt{2}}{5}$ ۲) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ ۳) $\frac{2-\sqrt{3}}{10}$ ۴) $\frac{2-\sqrt{2}}{10}$

$\frac{1}{5r}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}r \Rightarrow \frac{1}{5r}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}r=1 \xrightarrow{\times 5r} 1+r+r^2=5r$

$\Rightarrow r^2-4r+1=0 \Rightarrow r=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$ (کسر زیر یک)

$2-\sqrt{3}$ کمترین

$\frac{1}{5}r=\frac{1}{5}(2-\sqrt{3})=\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ گزینه ۲

مثال: کنکور ریاضی تیر ۱۴۰۱ خارج

مجموعه $S=\{x,y,z,t,w\}$، فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{x,y\}$، $B=\{x,y,z,t\}$ و $C=\{x,y,w\}$ سه پیشامد از S هستند. اگر $P(A)=\frac{1}{7}$ و $P(B)=\frac{3}{5}$ باشد، مقدار $P(C)$ کدام است؟

۱) $\frac{24}{35}$ ۲) $\frac{16}{35}$ ۳) $\frac{19}{35}$ ✓ ۴) $\frac{11}{35}$

$P(A)=\frac{1}{7} \rightarrow P(x)+P(y)=\frac{1}{7}$

$P(B)=\frac{3}{5} \rightarrow P(x)+P(y)+P(z)+P(t)=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{1}{7}+P(z)+P(t)=\frac{3}{5}$

$P(z)+P(t)=\frac{3}{5}-\frac{1}{7}=\frac{21-5}{35}=\frac{16}{35}$

$P(S)=1 \rightarrow P(x)+P(y)+P(z)+P(t)+P(w)=1 \Rightarrow \frac{1}{7}+\frac{16}{35}-1=-P(w)$

$P(w)=\frac{-5-16+35}{35}=\frac{14}{35} \Rightarrow P(C)=P(x)+P(y)+P(w)=\frac{1}{7}+\frac{14}{35}=\frac{19}{35}$

درس سوم: احتمال شرطی

احتمال وقوع پیشامد A به شرطی که قبلاً B اتفاق افتاده باشد را به صورت $P(A|B)$ نشان می‌دهیم.

چون احتمال برابر با حاصل تقسیم حالت‌های مطلوب بر کل حالت‌ها است، پس در $P(A|B)$ با توجه به اینکه B قبلاً رخ داده است، فضای نمونه‌ای همان B خواهد بود و تعداد اعضای فضای نمونه از $n(S)$ به $n(B)$ کاهش می‌یابد. پیشامد مطلوب شامل اعضایی از پیشامد B است که خاصیت A را هم دارند پس پیشامد مطلوب شامل اعضایی است که خاصیت $A\cap B$ را دارند پس داریم: $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$

و با تقسیم صورت و مخرج بر $n(S)$ هردو به احتمال تبدیل می‌شوند:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B)\neq 0$$

مثال: اگر در این پرتاب تاس، عددی ظاهر شده است احتمال اینکه عدد روی مهره اول باشد چقدر است؟

$S=\{1,\dots,6\}$

$A=\{2,4,5\}$ $\quad B=\{1,4,5\}$ $\quad A\cap B=\{4,5\}$

روش اول:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{3}$$

روش دوم:

$$P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

مثال: در پرتاب دو تاس می دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۶ است. احتمال آن را بیابید که هر دو عدد رو شده برابر باشند.

فضای نمونه‌ای شرطی

$B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$

$A \cap B = \{(1,1),(2,2)\}$ $\quad P(A|B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

مثال: در خانواده ۴ فرزندی می دانیم حداقل یکی از فرزندان پسر است. احتمال اینکه این خانواده دقیقاً ۲ پسر داشته باشد چقدر است؟

تعداد حالات نامطلوب

$n(B) = 2^4 - 1 = 15$

$n(A \cap B) = \binom{4}{2} = 6$ $\quad P(A|B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

مثال: کیسه‌ای حاوی ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که سفید است. احتمال اینکه مهره دوم که خارج می‌کنیم نیز سفید باشد چقدر است؟

روش اول:

B: مهره اول سفید $\quad P(B) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{11}{1}} = \frac{5}{11}$

A: مهره دوم سفید

$P(A \cap B) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{11}{1}\binom{10}{1}} = \frac{2 \times 4}{11 \times 2} = \frac{2}{11}$

$P(A|B) = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{5}{11}} = \frac{2}{5}$

روش دوم: چون مهره خروجی اول سفید است پس فضای جدید شامل ۴ مهره سفید و ۶ سیاه است.

احتمال اینکه مهره خروجی دوم سفید باشد $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ است.

مثال: سه دسته‌ی ۱۰ تایی کارت بازی‌های قرمز، سبز را با هم مخلوط کرده‌ایم که روی کارت‌های از خورده شماره‌های ۱ تا ۱۰ نوشته شده است. ۵ کارت به تصادف بیرون می‌کشیم. اگر حداقل ۲ تا از این کارت‌ها قرمز باشد به چه احتمالی دو کارت قرمز آمده است؟

B: قرمز بودن ۲ کارت

A: زوج بودن ۲ کارت

$$p(B) = \frac{\binom{20}{2}\binom{10}{3}}{\binom{30}{5}} \qquad p(A \cap B) = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{2}}{\binom{20}{5}}$$

$$p(A|B) = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{2}}{\binom{20}{2}\binom{10}{3}}$$

برای به دست آوردن $p(B)$ سه حالت داریم ۲ یا ۳ یا ۵ کارت قرمز باشند پس:

$$p(A|B) = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{3}}{\binom{10}{5} + \binom{10}{4}\binom{20}{1} + \binom{10}{3}\binom{20}{2}}$$

تذکر:

۱) $p(A'|C) = 1 - p(A|C)$

۲) $p(A \cup B|C) = p(A|C) + p(B|C) - p(A \cap B|C)$

۳) $p(A - B|C) = p(A|C) - p(A \cap B|C)$

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A) = ۰/۴$، $P(B \mid A) = ۰/۲۵$ و $P(B) = ۰/۳$ باشد، $P(B \mid A')$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B-A)}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A')}$

$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - ٪۴ = ٪۶$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow ٪۲۵ = \frac{P(A \cap B)}{٪۴} \rightarrow P(A \cap B) = ٪۴ \times ٪۲۵ = ٪۱$

$\Rightarrow P(B|A') = \frac{٪۳ - ٪۱}{٪۶} = \frac{٪۲}{٪۶} = \frac{۱}{۳}$ گزینه ۲

مثال کنکور تجربی ۹۸ :

احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

۱) ۰/۷۴ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

$\begin{cases} P(A) = ٪۷ & P(B|A) = ٪۸ \\ P(B) = ٪۶ & P(A \cup B) = ? \end{cases}$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow ٪۸ = \frac{P(A \cap B)}{٪۷} \rightarrow P(A \cap B) = ٪۷ \times ٪۸ = ٪۵۶$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ٪۷ + ٪۶ - ٪۵۶ = ۱٫۳ - ٪۵۶ = ٪۷۴$ گزینه ۱

مثال: کنکور ریاضی دی ۱۴۰۱

پیشامدهای ناسازگار A و B از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر $P(A) = \frac{۱}{۶}$ و $P(B) = \frac{۱}{۴}$ باشد، مقدار $P(B' \mid A')$ کدام است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۵۵ ۴) ۰/۷۵

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} \qquad P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$A' \cap B' = (A \cup B)' \Rightarrow P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

ناسازه

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{12-2-3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$P(B'|A') = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{7 \times 6}{12 \times 5} = \frac{7}{10} = \%70$$

مثال: کنکور ریاضی ۱۴۰۱

در یک کیسه ۱۶ گوی به شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. دو گوی به‌طور متوالی و بدون جایگذاری، به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم شماره گوی دوم از شماره گوی اول کمتر است، با کدام احتمال شماره گوی اول ۱۶ است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ✓ ۴) $\frac{1}{4}$

$$B = \{\underbrace{(2,1)}_{1}, \underbrace{(3,1),(3,2)}_{2}, \underbrace{(4,1),(4,2),(4,3)}_{3}, \dots, \underbrace{(16,1),(16,2),\dots,(16,15)}_{15}\}$$

$$n(B) = \frac{15 \times 16}{2} = 120 \quad , \quad A \cap B = \{(16,1), \dots, (16,15)\} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

قانون ضرب احتمال :

از رابطه احتمال شرطی $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ برای محاسبه $P(A\cap B)$ استفاده می‌کنیم :

$$P(A\cap B)=P(B)\times P(A|B)=P(A)\times P(B|A)$$

از این رابطه در مسائلی استفاده می‌کنیم که دو پیشامد A و B پشت سرهم رخ دهند.

مثال : در ظرفی ۳ مهره آبی، ۵ مهره قرمز و ۷ مهره سبز وجود دارد.

الف) اگر ۲ مهره به ترتیب و بدون جایگذاری از آن برداریم احتمال اینکه اولی سبز و دومی قرمز باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه اولی و دومی قرمز باشند را بیابید.

الف) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\frac{7}{15}\times\frac{5}{14}=\frac{1}{6}$ (A: اول سبز، B: دوم قرمز)

ب) $P(A\cap B)=\frac{5}{15}\times\frac{4}{14}=\frac{2}{21}$

نکته : قانون ضرب احتمال را می‌توانیم به ۳ یا تعداد بیشتری پیشامد تعمیم دهیم :

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)$$

مثال: به ترتیب و بدون جایگذاری سه عدد از مجموعه $\{1,2,3,\dots,12\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه سه عدد

به ترتیب از ۱۱، ۷ و ۲ عضو انتخاب شده باشند، چقدر است؟

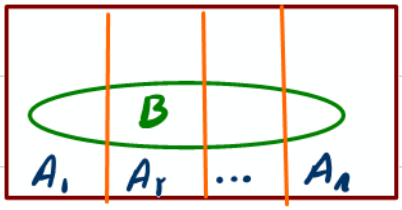
۱) $\frac{1}{440}$ ✓ ۲) $\frac{1}{220}$ ۳) $\frac{1}{110}$ ۴) $\frac{1}{55}$

از ۱۲ تا ۱۲، یک مضرب ۱۱، یک مضرب ۷ و شش مضرب ۲ داریم:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{220}$$

احتمال کل:

فرض کنید پیشامدهای A_1 و A_2 و ... و A_n مانند شکل مقابل افرازی روی فضای نمونه‌ای S باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد. داریم:



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$

که در آن $(B \cap A_i)$ و $(B \cap A_j)$ ناسازگارند. پس:

برای خلاصه نویسی جمع عبارت‌ها ←

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

ولی طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(B \cap A_i) = P(A_i)\, P(B \mid A_i)$$

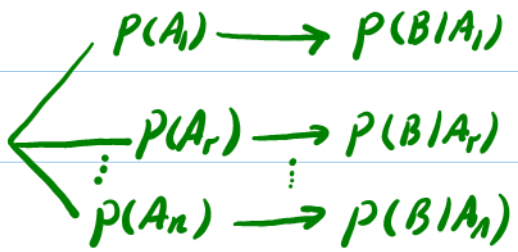
پس می‌توان $P(B)$ را این‌طور بنویسیم:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

$$\Rightarrow \quad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

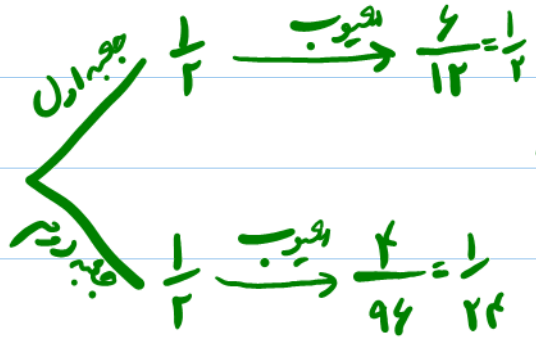
به رابطه بالا قانون احتمال کل می‌گوییم.

نکته مهم: برای ساده‌تر شدن محاسبه $P(B)$ بهتر است از نمودار درختی استفاده کنیم که در آن شاخه‌های اصلی درخت $A_1, \dots, A_n$ هستند.



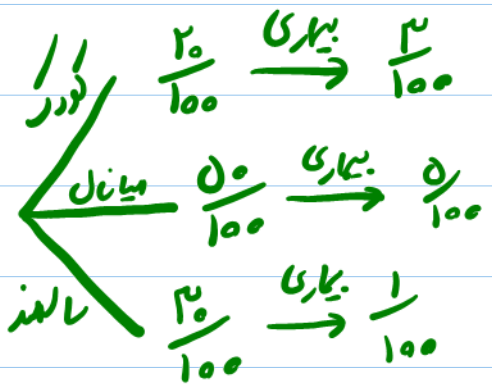
برای بدست آوردن $P(B)$، احتمال هر شاخه را در هم ضرب و در آخر همه را با هم جمع می‌کنیم.

مثال: دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبهٔ دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟



$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{48} = \frac{13}{48}$$

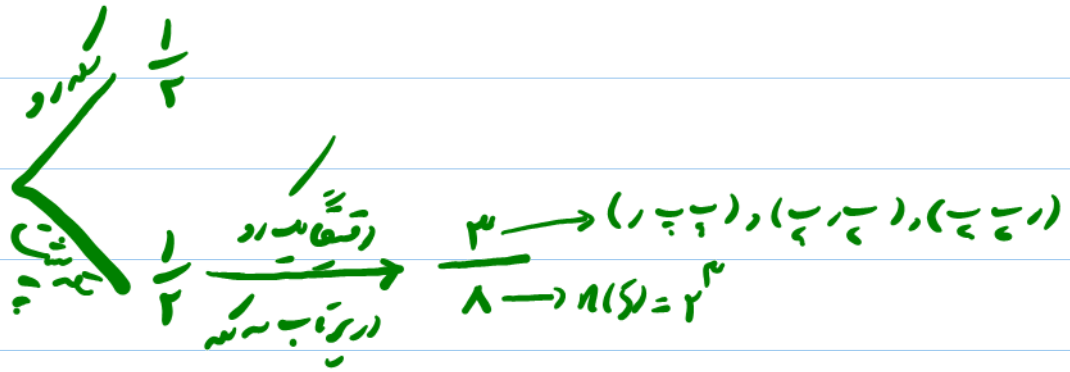
مثال فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به‌ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟



$$P(B) = \frac{20}{100}\times\frac{3}{100} + \frac{50}{100}\times\frac{5}{100} + \frac{30}{100}\times\frac{1}{100} = \frac{60+250+30}{10000} = \frac{340}{10000}$$

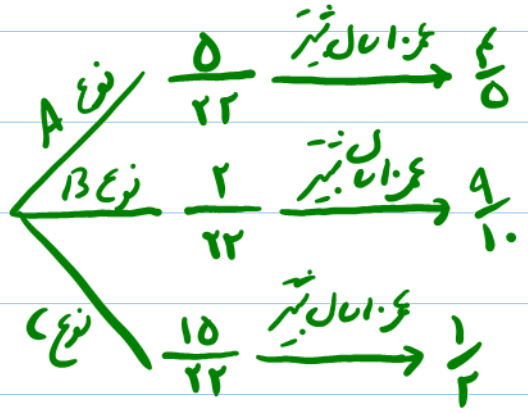
$$= \frac{34}{1000} = \frac{17}{500}$$

مثال: یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟



$$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

مثال: در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$، برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟



$$P(B)=\frac{۵}{۲۲}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۲۲}\times\frac{۹}{۱۰}+\frac{۱۵}{۲۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۲۰}{۱۱۰}+\frac{۱۸}{۲۲۰}+\frac{۱۵}{۴۴}$$

$$=\frac{۴۰+۱۸+۷۵}{۲۲۰}=\frac{۱۳۳}{۲۲۰}$$

مثال: مدرسهٔ A سه برابر مدرسهٔ B دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همهٔ دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم :

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسهٔ A و با چه احتمالی از مدرسهٔ B است؟ ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

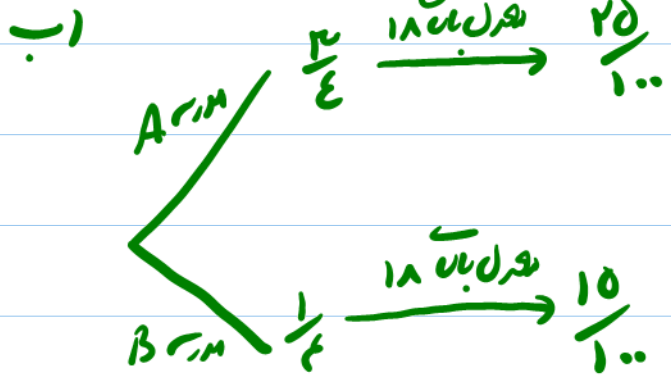
الف) $n(A)=۳n(B)$ ، $n(A)+n(B)=n(S)$

$$\Rightarrow ۳n(B)+n(B)=n(S)\longrightarrow ۴n(B)=n(S)\longrightarrow n(B)=\frac{n(S)}{۴}$$

$$n(A)=۳n(B)=\frac{۳n(S)}{۴}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{۳n(S)}{۴}}{n(S)}=\frac{۳}{۴}\ ,\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\frac{n(S)}{۴}}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

ب)

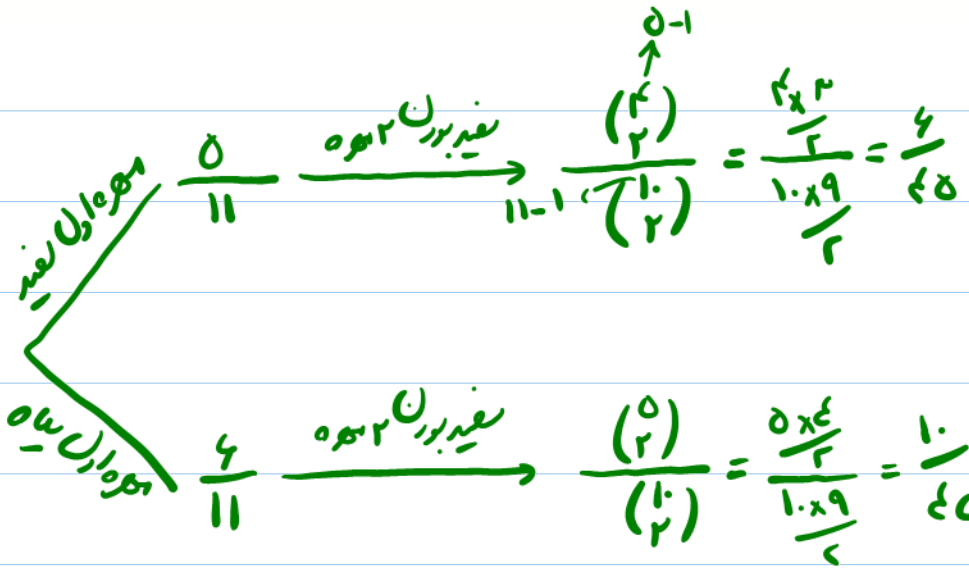


$$P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{25}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{15}{100} = \frac{75}{400} + \frac{15}{400} = \frac{90}{400} = \frac{9}{40}$$

مثال کنکور تجربی ۹۸ :

در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می‌کنیم. سپس از بین بقیهٔ مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهرهٔ اخیر، سفید است؟

۱) $\frac{1}{11}$ ۲) $\frac{2}{11}$ ۳) $\frac{4}{11}$ ۴) $\frac{5}{22}$



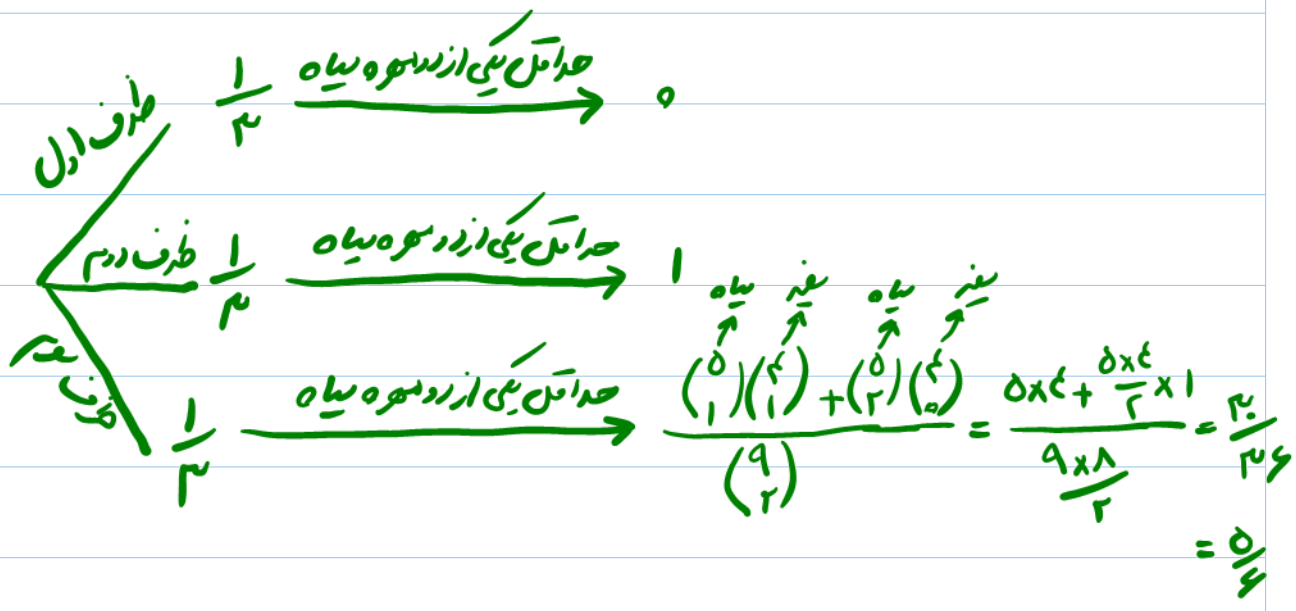
$$P(B) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{45}^{2} + \frac{6}{11} \times \frac{10}{45}^{2} = \frac{2}{33} + \frac{4}{33} = \frac{6}{33} = \frac{2}{11}$$

گزینهٔ ۲ :

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهرهٔ سفید، در دومی ۹ مهرهٔ سیاه و در سومی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$



$P(B)=\frac{۱}{۳}\times۰+\frac{۱}{۳}\times۱+\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۹}=\frac{۱}{۳}+\frac{۵}{۱۸}=\frac{۱۱}{۱۸}$ گزینه ۲

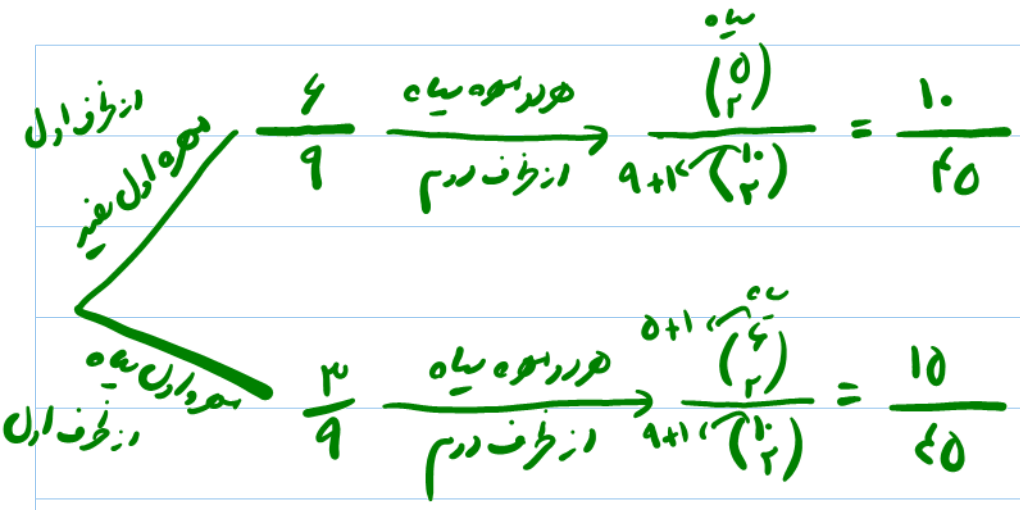
مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹

در جعبهٔ اول ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه، و در جعبهٔ دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. از جعبهٔ اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبهٔ دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۳۴}{۴۵}$ ۳) $\frac{۳۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۷}$

B: حداقل یکی از دو مهره سفید

B′: هر دو مهره سیاه



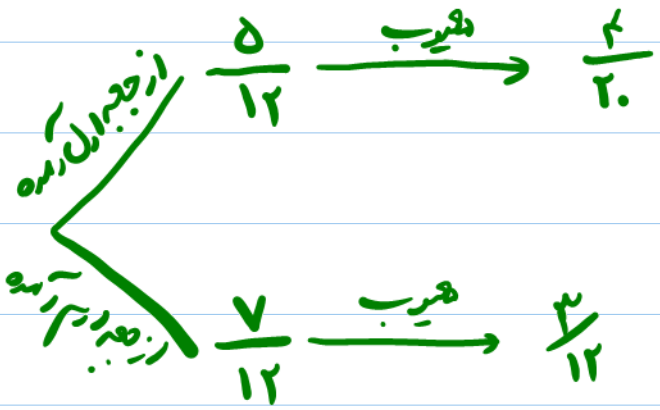
$$P(B') = \frac{2}{3}\times\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{4}{27} + \frac{1}{9} = \frac{7}{27}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$ گزینه ۱

مثال کنکور ریاضی ۹۸

در دو جعبه به‌ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب است؟

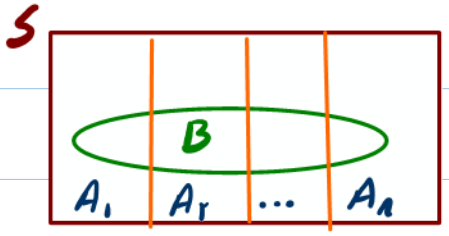
۱) $\frac{5}{24}$ ۲) $\frac{11}{48}$ ۳) $\frac{13}{48}$ ۴) $\frac{7}{24}$



$$P(B) = \frac{5}{12}\times\frac{4}{20} + \frac{7}{12}\times\frac{3}{12} = \frac{1}{12} + \frac{7}{48} = \frac{11}{48}$$ گزینه ۲

قانون بیز:

قاعده بیز احتمال‌های پس از مشاهدات را بر حسب تغییر احتمال‌های آن‌ها نسبت به احتمالات پیش از مشاهدات بیان می‌دهد.



فرض کنید از میان پیشامدهای A_1 تا A_n که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند یکی را به تصادف انتخاب دهیم و از آن را به دلخواه انتخاب کنیم و ببینیم که همواره انتخاب شده دارای خاصیت B است. احتمال اینکه همواره انتخاب شده از مجموعه‌های A_1، A_2، ... یا A_n باشد:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+\dots+P(A_n)P(B|A_n)}$$

تذکر: در قاعده بیز، مخرج کسر همان رابطه احتمال کل است و صورت کسر قسمتی از مخرج است که مورد نظر ما است.

مثال: جعبه‌های زیر شامل مهره‌های سفید و سیاه هستند. یکی از جعبه‌ها را انتخاب و از آن مهره‌ای بیرون می‌آوریم. اگر این مهره سفید باشد، احتمال اینکه از جعبه سوم خارج شده باشد را بیابید.



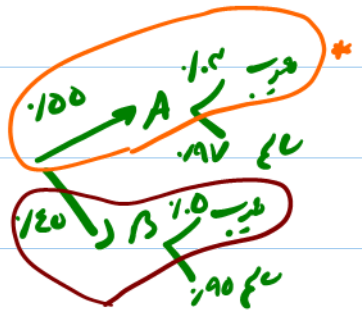
$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

بیز

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}}{\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{2}{7}$$

مثال: در یک شرکت تولیدی ۵۵ درصد کالاها محصول دستگاه A با احتمال ۲ درصد معیوب و ۴۵ درصد کالاها محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟

۱) $\frac{11}{26}$ ۲) $\frac{6}{14}$ ۳) $\frac{7}{14}$ ۴) $\frac{15}{26}$



نکته شاخه * را به کل روش خود معیوب می‌بینیم:

$$P(A|M) = \frac{۰/۵۵\times۰/۰۲}{۰/۵۵\times۰/۰۲+۰/۴۵\times۰/۰۵} = \frac{\frac{55}{1000}\times\frac{2}{100}}{\frac{49}{1000}}$$

$$= \frac{11}{26}$$

مثال: یکی از فرزندان خانواده‌ای را که ۲ فرزند دارد انتخاب کرده‌ایم. اگر او هم خواهر و هم برادر کوچک‌تر از خود داشته باشد، احتمال اینکه فرزند اول خانواده باشد چقدر است؟ ۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{7}$

A_i : انتخاب فرزند i ام $\quad i=1,2,3,4$

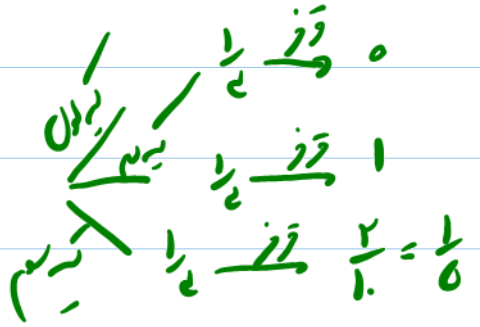
B : فرزند انتخاب شده هم خواهر هم برادر کوچکتر دارد

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_4)P(B|A_4)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{6}{8}}{\frac{1}{4}\times\frac{6}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times 0}$$

مثال: کلاسیک ۱۴.۱

سه کیسه یکسان، هرکدام شامل ۱۰ گوی دراختیار داریم. کیسه اول دارای گوی‌های سبز، کیسه دوم دارای گوی‌های قرمز و کیسه سوم دارای ۲ گوی قرمز و ۸ گوی سبز است. کیسه‌ای به تصادف انتخاب کرده، یک گوی خارج می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. با کدام احتمال همه گوی‌های آن کیسه قرمز است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{5}{6}$ ✓



$$P(\text{کیسه سوم}|\text{قرمز})=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{6}{10}}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته

می‌گوییم دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، به شرطی که وقوع هرکدام بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه:

$$P(A|B)=P(A) \quad , \quad P(B|A)=P(B)$$

در نتیجه: دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند اگر و فقط اگر $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

دقت داشته باشید اگر A و B مستقل باشند آنگاه A و B'، A' و B، A' و B' هم مستقل‌اند.

نکته مهم: اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار باشند آنگاه A و B مستقل نیستند.

مثال: در ظرفی ۴ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۱ مهره سبز موجود است و در ظرف دیگر ۶ مهره سفید و ۲ مهره سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره متفاوت است؟

$$P=\underbrace{\frac{4}{10}}_{\text{اول سفید}}\times\underbrace{\frac{2}{8}}_{\text{دوم سبز}}+\underbrace{\frac{5}{10}}_{\text{اول سیاه}}\times\underbrace{\frac{2}{8}}_{\text{دوم سبز}}+\underbrace{\frac{1}{10}}_{\text{اول سبز}}\times\underbrace{\frac{6}{8}}_{\text{دوم سفید}}=\frac{54}{80}=\frac{27}{40}$$

مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹:

در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = ۰/۱$، $P(A \cup B) = ۰/۶$ و با فرض $P(B') > P(B)$، احتمال وقوع پیشامد B، کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

مستقل $\rightarrow P(A)\times P(B)$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

مجموع ریشه‌ها

$P(A)+P(B) = ٪۷ \rightarrow ٪۶ = P(A)+P(B)-٪۱$

ضرب ریشه‌ها (P)

$P(A\cap B) = P(A)\times P(B) = ٪۱$

یادآوری: $x^2 - Sx + P = 0$

$x^2 - ٪۷x + ٪۱ = 0 \rightarrow (x - ٪۵)(x - ٪۲) = 0$

$\begin{cases} x = ٪۵ \\ x = ٪۲ \end{cases}$ $\xrightarrow{P(B')>P(B)}$ $P(B) = ٪۲$ ، $P(A) = ٪۵$

مثال کنکور ریاضی خارج ۱۴۰۱

فرض کنید علی و حسن دو کماندار باشند که با احتمال‌های ۰/۶ و ۰/۴ به هدف می‌زنند. اگر هر کدام از آنها یک بار تیراندازی کنند و بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده است، با کدام احتمال علی به هدف زده است؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۹}$ ✓ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲۵}$

$P(A\cup B) = ٪۶ + ٪۴ - (٪۶ \times ٪۴) = ۱ - ٪۲۴ = ٪۷۶$

$P(A \mid A\cup B) = \frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P(A)}{P(A\cup B)} = \frac{٪۶}{٪۷۶} = \frac{۱۵}{۱۹}$

تذکر: سه پیشامد A، B و C را مستقل گوییم هرگاه:

۱) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

۲) $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$

۳) $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$

۴) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

نکته: انتخاب‌های با جایگذاری مستقل و بدون جایگذاری وابسته‌اند.

مثال: در کدام بردها A و B مستقل از هم هستند؟

A: سفیدبرداری
B: سیاه‌برداری

الف) از درون جعبه به تواتر و بدون جایگذاری از جعبه‌ای شامل ۶ مهره سفید و ۴ سیاه خارج کنیم.

ب) از درون جعبه به تواتر و با جایگذاری از جعبه‌ای شامل ۶ مهره سفید و ۴ سیاه خارج کنیم

الف) $P(A) = \frac{6 \times 9}{10 \times 9} = \frac{6}{10}$ $\quad P(B) = \frac{4 \times 9}{10 \times 9} = \frac{4}{10}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{6 \times 4}{10 \times 9} = \frac{24}{90}$

$P(A) \times P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \neq \frac{24}{90}$ مستقل نیستند

ب) $P(A) = \frac{6 \times 10}{10 \times 10} = \frac{6}{10}$ $\quad P(B) = \frac{10 \times 4}{10 \times 10} = \frac{4}{10}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{6 \times 4}{10 \times 10} = \frac{24}{100}$

$P(A) \times P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$ مستقل‌اند.

جزوه آمار و احتمال

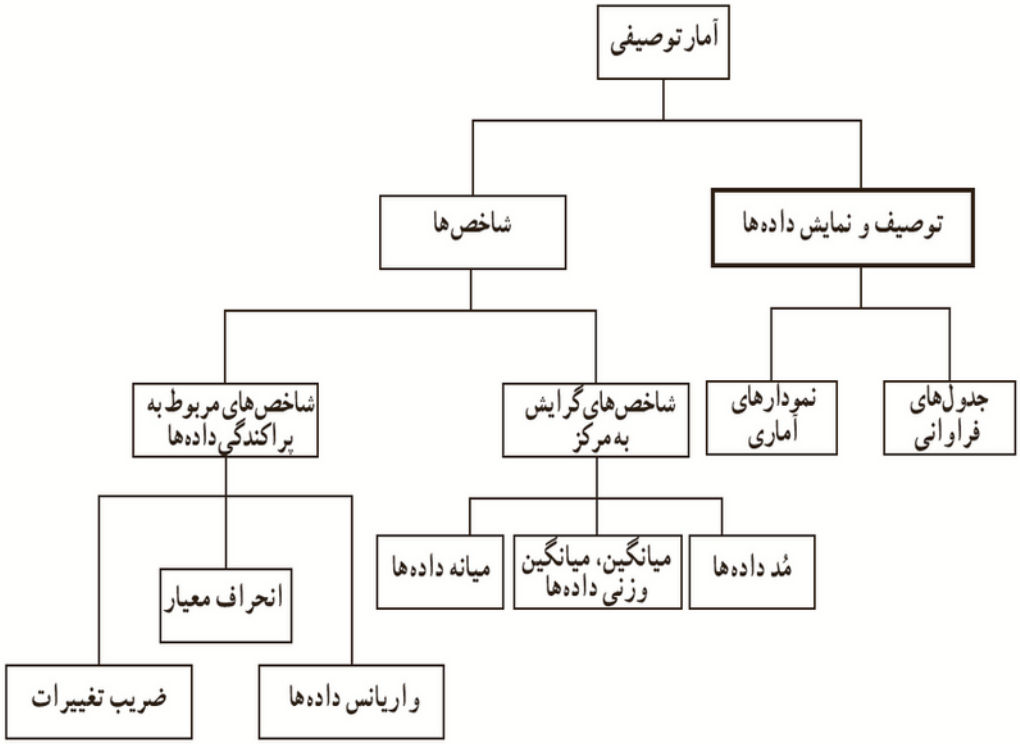
پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم و چهارم: آمار توصیفی و استنباطی

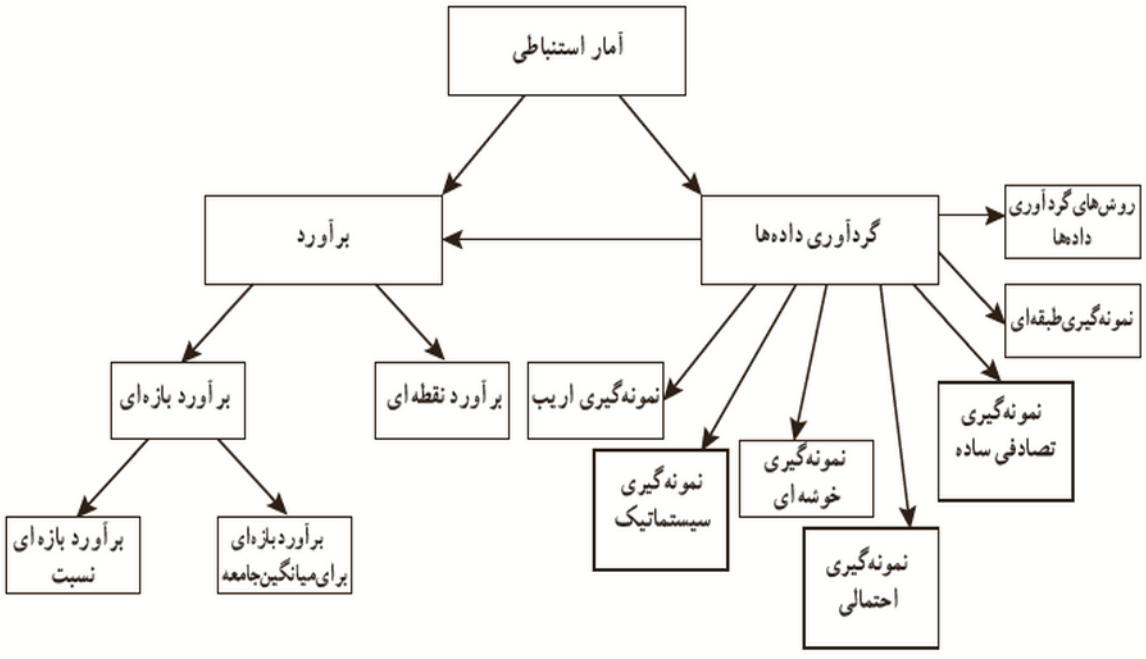


مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

نمای کلی فصل سوم:



نمای کلی فصل چهارم:



فصل سوم: آمار توصیفی

یادآوری:

آمار: مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: مجموعه روش هایی است شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده ها و در آخر نتیجه گیری، مقاومت و پیش بینی، در مورد آزمایش های تصادفی است.

جامعه آماری: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت می گیرد.

نمونه: بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گوئیم.

به تعداد اعضای جامعه، اندازه جامعه یا حجم جامعه و به تعداد اعضای نمونه، اندازه نمونه یا حجم نمونه می گوئیم.

متغیر: هر ویژگی از جامعه آماری که در اعضای جامعه یک سان نیست و از عضوی به عضو دیگر تغییر می کند را متغیر می گوئیم و به خود یا عبارتی که به متغیر نسبت داده می شود مقدار متغیر می گوئیم.

انواع متغیر: دو نوع متغیر داریم: الف) کمی ب) کیفی

الف) متغیر کمی: متغیرهایی که قابل اندازه گیری بوده و مقادیر عددی به خود می گیرند. مانند قد، وزن، تعداد و ...

متغیرهای کمی به دو نوع پیوسته و گسسته تقسیم می‌شوند:

۱) متغیر کمی پیوسته: اگر دو متغیر a و b را درنظر بگیرید هر مقدار بین آن‌ها را هم می‌توانند اختیار کنند. مانند قد، سن، وزن و...

۲) متغیر کمی گسسته: متغیر کمی‌ای که پیوسته نباشد مانند تعداد خرید مردان، تعداد مکالمات تلفن همراه شما و...

ب) متغیر کیفی: متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند و صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیاء در گروه‌ها به کار می‌روند و لزوماً مقداری عددی ندارند مانند: جنسیت، گروه خونی و رنگ خودرو و...

متغیرهای کیفی به دو نوع ترتیبی و اسمی تقسیم می‌شوند:

۱) متغیر کیفی ترتیبی: متغیرهایی که نوعی ترتیب طبیعی در آن وجود دارد مانند سطح تحصیلات، کیفیت یک میوه (درجه ۱، درجه ۲ و...) و مراحل زندگی (کودکی، جوانی و...)

۲) متغیر کیفی اسمی: متغیرهایی که ترتیبی نداشته مانند گروه خونی، جنسیت افراد و...

در این فصل می‌خواهیم دو بخش از علم آمار یعنی سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها که به آمار توصیفی معروف است را بررسی کنیم.

توصیف و نمایش داده‌ها:

بعد از گردآوری داده‌ها، به تنظیم، رده‌بندی و خلاصه کردن آن‌ها می‌پردازیم. برای این منظور می‌توان از روش‌های زیر استفاده نمود:

الف) تنظیم و طبقه‌بندی داده‌ها در یک جدول به نام جدول فراوانی

ب) رسم نمودارها براساس مقادیر جدول فراوانی و نوع متغیر

فراوانی یک داده: تعداد دفعاتی که هر داده مشاهده شده است را فراوانی آن داده می‌نامیم.

فراوانی داده شماره i را با f_i نمایش می‌دهیم. مجموع فراوانی داده‌ها برابر

تعداد داده‌های نمونه یعنی: $n = f_1 + f_2 + \dots + f_k$.

فراوانی نسبی یک داده: با تقسیم فراوانی هر داده بر تعداد کل داده‌ها، فراوانی نسبی آن داده بدست می‌آید.

فراوانی نسبی داده شماره i را با f_i نمایش می‌دهیم. پس $f_i = \frac{f_i}{n}$.

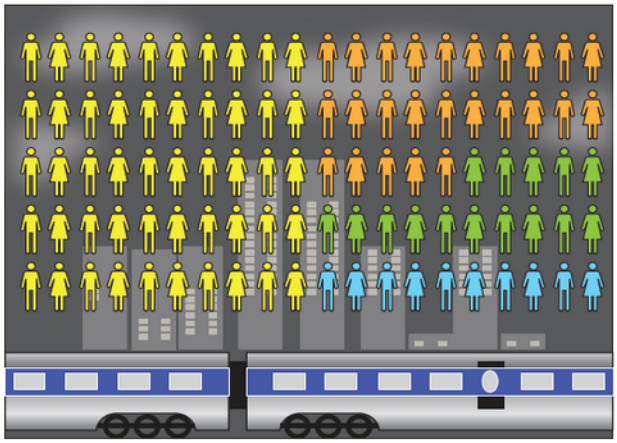
واضح است که جمع فراوانی‌های نسبی یک می‌شود. اگر فراوانی نسبی را در ۱۰۰ ضرب کنیم

درصد فراوانی نسبی آن داده بدست می‌آید. جمع فراوانی‌های نسبی برابر ۱۰۰ است.

مثال: در مورد اینکه مسافران یک قطار در طول سفر چگونه از وقت خود استفاده می‌کنند، تحقیقی صورت گرفته است و نتایج زیر به دست آمده است.

در شکل ت، تعداد مسافران یک قطار به عنوان متغیر گسسته را ملاحظه می‌کنید.

- افرادی که با رنگ زرد مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار استراحت می‌کنند.
- افرادی که با رنگ نارنجی مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار با تلفن همراه خود بازی می‌کنند.
- افرادی که با رنگ سبز مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار مطالعه می‌کنند.
- افرادی که با رنگ آبی مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار غذا می‌خورند.



شکل ت

جدول فراوانی مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.

مسافران قطار	شماره مسافران	فراوانی مسافران	فراوانی نسبی مسافران
مسافرانی که استراحت می‌کنند	۱	۵۰	۰/۵۰
مسافرانی که با تلفن همراه خود بازی می‌کنند	۲	۲۵	۰/۲۵
مسافرانی که مطالعه می‌کنند	۳	۱۵	۰/۱۵
مسافرانی که غذا می‌خورند	۴	۱۰	۰/۱۰
تعداد کلّ مسافران		۱۰۰	۱

مثال: جدول فراوانی بنی ۲۰ داده به صورت زیر است. فراوانی داده شماره ٤ را پیدا کنید.

شماره داده	۱	۲	۳	٤	٥
فراوانی نسبی	۰/۱	۰/۱۸	۰/۲٤	۹۸	۰/۱۸

$$\%۱۰ + \%۱۱ + \%۲۴ + x + \%۱۸ = ۱ \Rightarrow x = ۱ - \%۱۷ = \%۱۴$$

$$\%۱۴ = \frac{f_۴}{۲۰۰} \Rightarrow f_۴ = ۶۰$$

دسته‌بندی داده‌ها :

فرض کنید کوچکترین داده a و بزرگترین داده b باشد. دامنه تغییرات داده‌ها $R = b - a$ تعریف می‌شود.

اگر بخواهیم این دامنه را به k دسته تقسیم کنیم طول هر دسته $c = \frac{R}{k}$ خواهد بود. حال بازه‌ها را از a شروع می‌کنیم و k واحد k واحد جلو می‌رویم. البته بازه‌ها را بسته و انتهای آنها را باز در نظر می‌گیریم به جز دسته آخر که هر دو بسته می‌شود. اگر بازه‌ای به صورت $[a_۱, a_۲)$ باشد به $a_۱$ کران پایین دسته و به $a_۲$ کران بالای دسته می‌گوییم.

مثال : اعداد زیر را به ۴ دسته طبقه‌بندی کنید. سپس جدول فراوانی آن را رسم کنید.

$$۲, ۴, ۴, ۲, ۵, ۲, ۵, ۷, ۶, ۶, ۷, ۷, ۴, ۱۷, ۱۶, ۱۱$$

$R = ۱۷ - ۲ = ۱۵$ و $c = \frac{۱۵}{۳} = ۵$

دسته	$[۲, ۷)$	$[۷, ۱۲)$	$[۱۲, ۱۷]$
فراوانی	۱۰	۴	۲

انواع نمودارها:

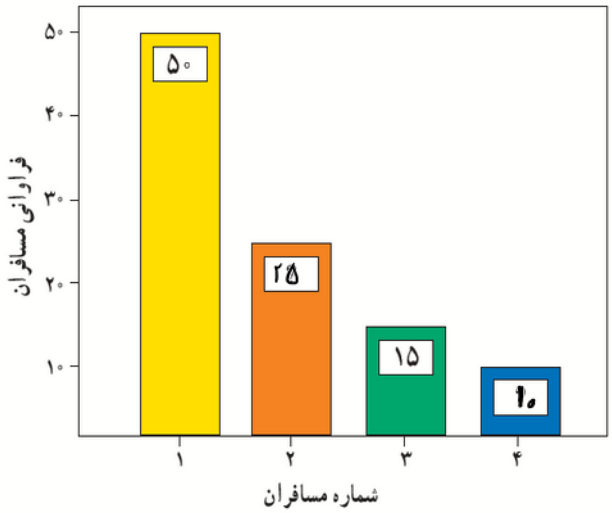
۱) نمودار میله‌ای ۲) نمودار دایره‌ای ۳) نمودار بافت نقاشت (مستطیلی) ۴) هیستوگرام ۵) نمودار چند برداری

نکته: نمودار میله‌ای و دایره‌ای برای متغیرهای کیفی و کمی گسسته مناسب‌اند. نمودار بافت نقاشت و چند برداری فقط مخصوص متغیرهای کمی پیوسته‌اند.

۱) نمودار میله‌ای: روی محور طول‌ها، شماره داده یا جزء داده می‌ریم و روی محور عرض‌ها، فراوانی یا فراوانی نسبی.

ارتفاع میله‌ها متناسب با فراوانی یا فراوانی نسبی آن‌هاست.

مثال: برای مثال مسافران تعاریف نمودار میله‌ای فراوانی را رسم کنید.



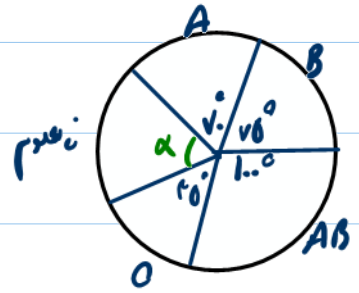
۲) نمودار دایره‌ای: دو روش برای رسم نمودار دایره‌ای داریم:

روش اول: دایره را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. هر قسمت معادل ۱ درصد است. با توجه به درصد فراوانی‌های بین دایره را رنگ می‌کنیم.

روش دوم: هر قسمت یک زاویه مرکزی دارد. اگر α_i زاویه مربوط به داده iام باشد داریم:

$$\alpha_i = f_i \times 360^\circ$$

مثال: نمودار دایره‌ای زیر مربوط به گروه‌های خونی دانش‌آموزان یک مدرسه است. گروه خونی AB نوزده نفر از آن‌ها تعیین نشده است. چند نفر از آن‌ها، دارای نوع خون B هستند؟



$$\alpha = 360^\circ - (70 + 75 + 100 + 45) = 70^\circ$$

$$70 = \frac{42}{n} \times 360 \Rightarrow 70n = 42 \times 360 \Rightarrow n = \frac{42 \times 360}{70}$$

$$\Rightarrow n = 144$$

$$\alpha_B = 75 = \frac{f_B}{144} \times 360 \Rightarrow f_B = \frac{144 \times 75}{360} = 30$$

۱۳) نمودار بافت نگاشت (مستطیلی)

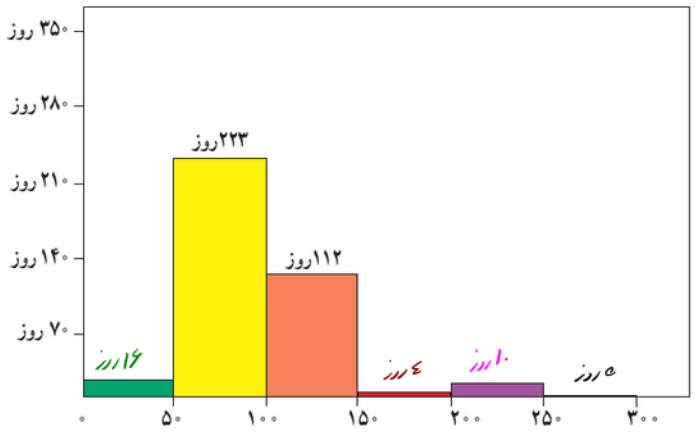
دسته‌ها یا بازه‌ها را روی محور xها و فراوانی یا فراوانی نسبی را روی محور yها مشخص می‌کنیم. نمودار از مستطیل‌هایی به هم پیوسته تشکیل می‌شود.

مثال :

میزان شاخص کیفیت هوا در شهر تهران برای تمام روزهای سال ۱۳۹۳ در جدول زیر گزارش شده است. این جدول را کامل کنید :

وضعیت هوا	شاخص کیفیت هوا	فراوانی	فراوانی نسبی
پاک	$0 \le AQI \le 50$	۱۶	$\frac{16}{365} \approx 0.04$
سالم	$50 < AQI \le 100$	۲۲۳	$\frac{223}{365} \approx 0.61$
ناسالم برای گروه‌های حساس	$100 < AQI \le 150$	۱۱۲	$\frac{112}{365} \approx 0.31$
ناسالم	$150 < AQI \le 200$	۴	$\frac{4}{365} \approx 0.01$
بسیار ناسالم	$200 < AQI \le 250$	۱۰	$\frac{10}{365} \approx 0.03$
خطرناک	$250 < AQI \le 300$	۰	۰
تعداد کلّ روزهای یک سال		۳۶۵	۱

نمودار مربوط به فراوانی تعداد روزها براساس وضعیت آلودگی هوا را کامل کنید؟



نکته : مجموع مساحت مستطیل ها در هیستوگرام با بافت نقطه‌ای فراوانی nc و در فراوانی نسبی برابر c است.

۴) هیستوگرام چندبر فراوانی :

اگر در هیستوگرام مستطیلی و سط عرض بازه‌ی مستطیل‌ها را به هم وصل کنیم و روی محور xها به اندازه نصف طول بازه‌ها جلو و عقب رفته و به آن نقاط وصل کنیم هیستوگرام چندبر فراوانی به دست می‌آید. در واقع نقاط شکستگی با مختصات (x_i, f_i) هستند که x_i وسط بازه‌هاست.

شاخص‌های مرکزی و پراکندگی:

(الف) معیارهای گرایش به مرکز (شاخص‌های مرکزی)

معیارهایی که محل تمرکز داده‌ها را نشان می‌دهد. سه معیار گرایش به مرکز داریم: میانگین ـ میانه ـ مد

۱) میانگین: فرض کنید داده‌ها $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشند، جمع داده‌ها تقسیم بر تعداد آن‌ها میانگین آن‌هاست.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

آن‌ها تعریف می‌شود که با $\bar{x}$ نشان داده می‌شود. پس:

نماد سیگما (Σ): برای خلاصه‌نویسی جمع از نماد Σ استفاده می‌کنیم به این صورت که:

$$\sum_{i=a}^{b} (\text{عبارت برحسب } i)$$

از $i=a$ تا $i=b$

مثلاً

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

پس فرمول میانگین را می‌توان به صورت $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ هم نوشت.

مثال: میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_{12}$ برابر ۲۴ است. میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ را حساب کنید.

$$24 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + 14 + 20}{12} \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i + 34 = 288 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i = 254$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + 19 + 10}{12} = \frac{242+29}{12} = \frac{271}{12} = 22{,}58$$

نکته: اگر میانگین n داده $\bar{x}$ و میانگین m داده $\bar{y}$ باشد میانگین همه آنها با هم $\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}$ می‌شود.

نکته: فرض کنید a و b دو عدد ثابت و میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد و داده‌های جدید y_i به صورت $y_i = ax_i + b$ تعریف شوند. در این صورت میانگین $y_1, \dots, y_n$ برابر $a\bar{x}+b$ می‌شود.

نکته: اگر داده‌ای بیشتر از میانگین به داده‌ها اضافه شود میانگین زیاد و اگر کمتر از میانگین اضافه کنیم، میانگین کم می‌شود و اگر داده‌ای مساوی میانگین حذف یا اضافه کنیم میانگین تغییر نمی‌کند.

انحراف از میانگین: $(x_i - \bar{x})$ را انحراف داده iام از میانگین می‌نامیم. می‌توان ثابت کرد

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

می‌شود.

تذکر: اگر داده‌ها تشکیل دنباله حسابی بدهند میانگین آنها $\frac{\text{آخری} + \text{اولی}}{2}$ می‌شود.

مثال: میانگین n داده آماری برابر ۱۲ و میانگین ۱۲ داده دیگر برابر ۱۰ است. دو گروه را با هم ادغام می‌کنیم میانگین همگی داده‌ها ۱۱,۵ می‌شود. n را بیابید.

$$\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}=11{,}5 \Rightarrow \frac{12n+12\times 10}{n+12}=11{,}5 \Rightarrow 11{,}5n+138=12n+120$$

$$\Rightarrow \%5n=18 \Rightarrow n=\frac{18}{\%5}=36$$

مثال: اگر میانگین داده‌های $2x_1+5$، $2x_2+5$، $2x_3+5$ برابر ۲۰ باشد میانگین $\frac{x_1}{3}+1$، $\frac{x_2}{3}+1$ و $\frac{x_3}{3}+1$ را بیابید.

$$2x_i+5 \xrightarrow{-5} 2x_i \xrightarrow{\times\frac{1}{6}} \frac{x_i}{3} \xrightarrow{+1} \frac{x_i}{3}+1$$

$$\bar{X}=20 \xrightarrow{-5} \bar{X}=15 \xrightarrow{\times\frac{1}{6}} \bar{X}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2} \xrightarrow{+1} \bar{X}=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}=3{,}5$$

نکته: برای محاسبه سریع میانگین اعداد بزرگ، از همه اعداد یکبار و به هر کدام که بهتر است به میانه داده‌ها نزدیک باشد، کم می‌کنیم. میانگین اعداد جدید را پیدا و در آخر عددی را که کم کردیم به میانگین اضافه می‌کنیم.

مثال: میانگین اعداد ۹۰، ۹۲، ۹۷، ۱۰۰، ۱۰۵، ۱۱۰، ۱۲۰ را بیابید.

۹۰، ۹۲، ۹۷، ۱۰۰، ۱۰۵، ۱۱۰، ۱۲۰

۱۰۵ را از همه کم می‌کنیم:

-۱۵، -۱۳، -۸، -۵، ۰، ۵، ۱۵

$$\bar{X}_{\text{جدید}}=\frac{-15+\cdots+15}{7}=-3 \rightarrow \bar{X}_{\text{قدیم}}=-3+105=102$$

میانگین موزون (وزن‌دار)

اگر به هر داده x_i وزنی (این وزن‌ها می‌توانند ضریب، درجه یا فراوانی و ... باشند) مانند بسامت دهم، میانگین وزن‌دار را با $\bar{x}_w$ نمایش می‌دهیم و برابر $\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$ است.

تذکر: اگر وزن‌ها، فراوانی‌های نسبی باشند چون مجموع فراوانی‌های نسبی برابر یک است پس داریم

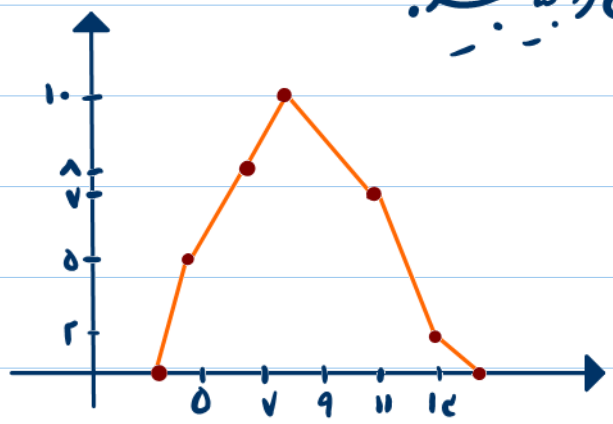
$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{1}$$

مثال: کارنامه‌ی به صورت زیر است. معدل او را حساب کنید.

درس	زبان	عربی	دینی	ادبیات	شیمی	ورزش	ریاضی
نمره	۱۲	۱۶	۱۹	۱۸	۱۰٫۵	۱۴	۱۹
ضریب درس	۱	۲	۴	۲	۱	۳	۴

$$\bar{x}_w = \frac{1\times 12 + 2\times 16 + 4\times 19 + 2\times 18 + 1\times 10{,}5 + 3\times 14 + 4\times 19}{1+2+4+2+1+3+4} = \frac{284{,}5}{17} = 16{,}73$$

مثال: میانگین داده‌ها با نمودار چند برفراوانی متقابل را بیابید.



$$\bar{x}_w = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{(5\times 5)+(8\times 7)+(10\times 9)+(7\times 11)+(2\times 13)}{5+8+10+7+2} = \frac{274}{32} = 8{,}56$$

مثال: تعداد عمل‌های جراحی یک پزشک در یک روز مطابق جدول زیر است. این پزشک به طور متوسط در یک روز چند عمل جراحی انجام می‌دهد؟

تعداد عمل‌ها در روز	۱	۲	۳	۴
فراوانی نسبی	۱۳٪	۱۲٪	۳۱٪	۱۴٪

$\bar{x}_w = \frac{1\times 13\% + 2\times 12\% + 3\times 31\% + 4\times 14\%}{1} = 2,6$

$13\% + 12\% + 31\% + 14\% = 1 \Rightarrow 31\% = 1$

۲) میانه: عددی که بعد از مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ در وسط قرار می‌گیرد.

اگر n داده داشته باشیم دو حالت رخ می‌دهد:

الف) n فرد باشد: فقط یک عدد در وسط قرار می‌گیرد که همان میانه خواهد بود. شماره این داده $\frac{n+1}{2}$ است.

ب) n زوج باشد: دو داده در وسط قرار می‌گیرند که میانگین این دو داده میانه است. شماره این دو داده $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$ است.

مثال: میانه داده‌های زیر را بیابید.

۱) ۱۹, ۲, ۱۷, ۴, ۱۰, ۱۲, ۶, ۱, ۱۰, ۱۵, ۸, ۴, ۱

۱, ۱, ۲, ۴, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۰, ۱۲, ۱۵, ۱۷, ۱۹

$n=19$: داده وسط $= \frac{19+1}{2} = 10$ یعنی ۸ میانه است.

۲) ۱۲, ۵, ۱۵, ۴, ۶, ۹, ۱۶, ۲۰

۴, ۵, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۶, ۲۰

$n=8$: میانگین دو داده وسطی داده چهارم و پنجم $\left(\frac{8}{2}, \frac{8}{2}+1\right)$ میانه است.

$\frac{9+12}{2} = 10,5 =$ میانه

مثال: به ازای کدام مقدار a میانه داده‌های $3, 4, a, 11, 15, 21$ برابر 8.5 است؟

۱) ۵ ✓ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

چون تعداد داده‌ها ۶ تاست پس میانگین داده‌های سوم و چهارم میانه خواهد بود.

$\frac{a+11}{2} = 8.5 \rightarrow a+11 = 17 \Rightarrow a = 6$ $\quad 3, 4, 6, 11, 15, 21$

مثال: میانگین یازده داده برابر ۶ و میانه این داده‌ها برابر ۷ است. حداکثر از این داده‌ها چند تا کوچکتر از ۷ است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸ ✓

چون $\bar{x} = 6$ و $n = 11$ پس: $\sum x_i = 66$ و درنتیجه $\frac{\sum x_i}{11} = 6$. حداکثر دو داده دیگر را برابر x و y در نظر بگیریم:

$x+y+1+2+2+5+5+8+8+8+9 = 66 \Rightarrow x+y = 22$

از طرفی چون تعداد داده‌ها $n = 11$ است پس داده ششم میانه است که برابر ۷ است. پس حداکثر یکی از x یا y ۷ باشد و چون $x+y = 22$ پس دیگری ۱۵ خواهد شد و تعداد کل ۸ است.

چارک اول و سوم : میانه داده‌های قبل از میانه را چارک اول Q_1 و میانه داده‌های بعد از میانه را چارک سوم Q_3 می‌نامیم. به عبارت دیگر به میانه $\left[\frac{n}{4}\right]$ داده‌ی اشتراک چارک اول و به میانه $\left[\frac{3n}{4}\right]$ داده‌ی اشتراک چارک سوم می‌گوییم.

مثال: چارک اول و سوم را برای داده‌های زیر بیابید.

۱) $1, 2, \dots, 9$:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ $\quad n=9$

$Q_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5 \qquad Q_3 = \frac{7+8}{2} = 7.5$

Q_2 یا میانه

۲) $6, 6, 4, 2, 7, 8, 10, 9$ $\quad n=8$

$2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

$Q_1 = 4 \qquad Q_3 = 8.5$

$Q_2 = 6.5$

مثال : مجموع چارک اول و سوم داده‌های جدول مقابل کدام است؟

داده	فراوانی
۷	۷
۱۰	۵
۱۱	۶
۱۵	۵
۱۷	۶

۱) ۲۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۴٫۵ ✓ ۴) ۲۶٫۵

$n = \sum f_i = 7+5+6+5+6 = 29$

Q_1 : داده‌ی $\frac{29+1}{2} = 15$ ام

پس چارک اول میانه چهارده داده‌ی اول یعنی میانگین داده‌های هفتم و هشتم است $Q_1 = \frac{7+10}{2} = 8.5$

چارک سوم میانه چهارده داده‌ی دوم یعنی میانگین داده‌های بیست و دوم و بیست و سوم است $Q_3 = \frac{15+15}{2} = 15$.

$Q_1 + Q_3 = 8.5 + 15 = 23.5$

۳) مد: به داده‌ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد، مد یا نمای نرمی گوییم.

تذکر: اگر همه داده‌ها یک فراوانی داشته باشند، این داده‌ها مد ندارند و اگر دو یا چند (البته نه همه) داده دارای بیشترین فراوانی باشند این داده‌ها بیش از یک مد دارند.

مثال: در مورد داده‌های زیر کدام گزینه درست است؟

۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴, ۴, ۴, ۵, ۶, ۷

۱) میانگین > مد = میانه
۲) میانگین < مد = میانه
۳) میانگین > مد > میانه
۴) مد > میانگین > میانه ✓

$n=17$ پس داده $\frac{17+1}{2}=9$ ام یعنی ۴ میانه است. ۴ دارای بیشترین فراوانی است پس مد است.

$\bar{x}=\frac{1+1+\cdots+7}{17}=\frac{58}{17}$

$4 < \frac{58}{17} < 4.41$

تذکر: در تفسیر و تحلیل مسائل آماری، ارتباط نزدیک شما یک شاخص مرتبط به مرکز کافی نیست. باید هر سه معیار میانگین، میانه و مد حساب شود و برای یک هدف مدنظر، معیار مناسب انتخاب و از آن برای انجام تفسیر، قضاوت و پیش‌بینی استفاده شود.

تعریف داده دور افتاده: مشاهده‌ای که تفاوت بسیار زیادی با سایر مشاهدات مجموعه داده‌ها داشته باشد.

نکته: داده دور افتاده میانگین داده‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد و بی تأثیری بر میانه و مد ندارد.

پس اگر داده دور افتاده داشته باشیم، میانگین معیار مناسبی برای سنجش تمرکز داده‌ها نیست.

ب) معیارهای پراکندگی:

معیارهایی که دوری یا نزدیکی داده‌ها از میانگین را بررسی می‌کنند. سه معیار هم برای سنجش میزان پراکندگی

از میانگین عبارتند از: انحراف معیار - واریانس - ضریب تغییرات

۱) انحراف معیار و واریانس:

اگر مجموع مربعات انحراف از میانگین را بر تعداد داده‌ها تقسیم کنیم واریانس بدست می‌آید که آن را با σ^2

نمایش می‌دهیم یعنی:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامیم و با σ نشان می‌دهیم یعنی:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

نکته: اگر واریانس و انحراف معیار داده‌ها کوچک باشد به این معناست که پراکندگی حول میانگین کم و در نتیجه

داده‌ها به هم نزدیک‌ترند واریانس و انحراف معیار داده‌ها عددی کوچک‌تر باشد یعنی پراکندگی داده‌ها حول میانگین شان زیاد و در نتیجه داده‌ها از هم دورند.

مثال: واریانس و انحراف معیار داده‌های زیر را بدست آورید.

۱۰, ۱۵, ۱۸, ۱۴, ۱۴, ۲۰

$$\bar{x} = \frac{10+15+18+14+14+20}{6} = \frac{90}{6} = 15$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-15)^2}{6} = \frac{(10-15)^2+(18-15)^2+(18-15)^2+(14-15)^2+(14-15)^2+(20-15)^2}{6}$$

$$= \frac{25+0+9+1+1+25}{6} = \frac{64}{6} = \frac{32}{4}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{32}{4}} = \frac{\sqrt{32}\times\sqrt{4}}{\sqrt{4}\times\sqrt{4}} = \frac{4\sqrt{6}}{4}$$

واریانس و انحراف داده‌های وزن دار:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

مثال: انحراف معیار داده‌های جدول زیر را بیابید.

x_i	1	2	4	5
w_i	1	2	2	1

$$\bar{x} = \frac{1\times1+2\times2+4\times2+5\times1}{1+2+2+1} = \frac{18}{6} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} w_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{4} w_i} = \frac{1(1-4)^2 + 2(2-4)^2 + 2(4-4)^2 + 1(5-4)^2}{1+2+2+1} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{2}$$

چند نکته:

۱) اگر n داده تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت d بدهند واریانس آن‌ها $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} d^2$ می‌شود.

۲) اگر به همه داده‌ها عدد ثابتی اضافه یا کم کنیم واریانس و انحراف معیار تغییر نمی‌کند. از این نکته وقتی داده‌ها بزرگ باشند می‌توان استفاده کرد.

۳) اگر واریانس یا انحراف معیار صفر باشد آنگاه همه داده‌ها مساوی با میانگین (و در نتیجه مساوی با هم) هستند و برعکس.

۴) اگر داده‌ها را در k ضرب کنیم انحراف معیار $|k|$ برابر و واریانس k^2 برابر می‌شود.

۵) فرمول واریانس را می‌توان به صورت: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$ هم نوشت.

۶) واحد اندازه‌گیری واریانس، مجذور واحد داده‌های اولیه است و واحد اندازه‌گیری انحراف معیارها همان واحد اندازه‌گیری داده‌های اولیه است.

مثال: مجموع مربعات ده داده برابر ۲۲۵۰ و میانگین آن‌ها ۱۰√۲ است. انحراف معیار کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۶

$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \bar{x}^2 = \frac{2250}{10} - (10\sqrt{2})^2 = 225 - 200 = 25 \Rightarrow \sigma = 5$

مثال: اگر انحراف معیار داده‌های ۱۲، ۱۰، ۸، ۶ و ۲ برابر ۵ باشد، واریانس داده‌های ۹، ۸، ۷، ۵ و ۴ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{9}{2}$ ۳) $\frac{a^2}{4}$ ۴) $\frac{a^2}{2}$

x_i : ۲، ۴، ۸، ۱۰، ۱۲ $\quad y_i$: ۴، ۵، ۷، ۸، ۹ $\Rightarrow y_i = \frac{1}{2}x_i + 4$

$\sigma_x = a \Rightarrow \sigma_x^2 = a^2$ ، $\sigma_y^2 = (\frac{1}{2})^2 \sigma_x^2 = \frac{1}{4}a^2 = \frac{a^2}{4}$

مثال: واریانس داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ برابر صفر است. انحراف معیار داده‌های $x_1+2, x_2+2, \ldots, x_{10}+2$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) $\sqrt{8}$

$\sigma_x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_{10} = 10$ $\Rightarrow$ داده‌های جدید $\rightarrow$ ۱۲، ۱۰، ۸، ۱۲، ۱۴

دنباله‌های با قدرت ۲ : $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} \times d^2 = \frac{4^2-1}{12} \times 2^2 = \frac{15}{12} \times 4 = 5 \times 4 = 20$

$\sigma = \sqrt{20}$

۲) ضریب تغییرات (CV)

ی فوق هم معیاری برای سنجش پراکندگی داده‌ها تعریف کنیم که در آن هم پراکندگی داده‌ها و هم میانگین تعیین داشته باشه. مثلاً در یک تیم والیبال هر چقدر میانگین قد بازیکنان بیشتر و پراکندگی قدشون کمتر باشه، از نظر طول قد مطلوب‌تر است.

این معیار ضریب تغییرات نامیده می‌شود که میزان پراکندگی داده‌ها را به ازای یک واحد از میانگین نشان می‌دهد.

تعریف: تقسیم انحراف معیار بر میانگین را ضریب تغییرات می‌گوییم و:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

چند نکته:

۱) ضریب تغییرات یه واحد اندازه‌گیری نسبی ندارد. (مثلاً اگر داده‌ها بر حسب cm اندازه‌گیری شده باشند وقتی می‌گیم که قدشون را بر حسب m تبدیل و بعد CV را حساب کنیم.) بنابراین برای مقایسه پراکندگی داده‌های که واحد یکسان ندارند بهترین شاخص پراکندگی CV است که بدون واحد است. (مثلاً مقایسه پراکندگی قد با وزن دانش‌آموزان)

۲) هر قدر ضریب تغییرات داده‌ها کمتر باشد، میزان پراکندگی داده‌ها کمتر است.

۳) اگر داده‌ها را k برابر کنیم، CV تغییر نمی‌کند.

۴) اگر به همه داده‌ها عدد k را اضافه کنیم، ضریب تغییرات به صورت $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}+k}$ تغییر می‌کند و مقدار CV کم می‌شود.

مثال: اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ به ترتیب ۴ و ۱ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $4x_1+3, \ldots, 4x_{10}+3$ کدام است؟ ۱) ۰/۵ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۱۲۵ ۴) ۱

$$(CV)_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8} = 0/125$$

مثال: اگر انحراف معیار داده‌های $x_1, \ldots, x_n$ برابر ۲ و ضریب تغییرات آن‌ها برابر ۵ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $5x_1+2, \ldots, 5x_n+2$ کدام است؟

۱) $\frac{2c}{5+c}$ ۲) $\frac{2c}{5c}$ ۳) $\frac{5+c}{5c}$ ۴) $\frac{2c}{5+2c}$ ۵) $\frac{5+2c}{5c}$

$$(CV)_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sigma_x}{(CV)_x} = \frac{2}{c} \qquad \bar{y} = 5\times\frac{2}{c}+2 = \frac{10+2c}{c}$$

$$\sigma_y = 2\times 5 = 10 \Rightarrow (CV)_y = \frac{10}{\frac{10+2c}{c}} = \frac{10c}{10+2c} \xrightarrow{\div 5} (CV)_y = \frac{2c}{5+c}$$

مثال: اگر میانگین و CV اندازه اضلاع مربع‌های به ترتیب ۱۵ و ۱۲٪ باشد، میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

۱) ۲۴۲ ۲) ۲۲۹ ۳) ۲۲۷ ۴) ۲۳۴

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0/12 = \frac{\sigma}{15} \Rightarrow \sigma = 4 \Rightarrow \sigma^2 = 9$$

اگر ضلع x_i باشد مساحت x_i^2 می‌شود. میانگین مساحت‌ها همان میانگین مربعات داده‌ها، از فرمول دوم واریانس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 9 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (15)^2 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{n} = 234$$

دامنه میان چارکی: به حاصل $Q_3 - Q_1$ دامنه میان چارکی گوییم و آن را با IQR نشان می‌دهیم.

مثال: در نمودار جعبه‌ای ۴۲ داده آماری، میانگین داده‌های سمت راست جعبه برابر ۱۱، داخل جعبه ۷ و سمت چپ ۵ است. میانگین کل ۴۲ داده کدام است؟ ۱) ۵ ۲) ۷٫۵ ۳) ۹٫۵ ۴) ۱۱ ۵) ۱۲

از ۴۲ داده ۸ تا سمت چپ، ۸ تا سمت راست و ۱۶ تا داخل جعبه است.

$$\bar{X}_L = \frac{\sum x_i}{8} \Rightarrow 5 = \frac{\sum x_i}{8} \Rightarrow \sum x_i = 40$$

$$\bar{X}_R = \frac{\sum x_i}{8} \Rightarrow 11 = \frac{\sum x_i}{8} \Rightarrow \sum x_i = 88$$

$$\bar{X}_m = \frac{\sum x_i}{16} \Rightarrow 7 = \frac{\sum x_i}{16} \Rightarrow \sum x_i = 112$$

$$\bar{X} = \frac{40 + 88 + 112}{42} = \frac{240}{42} = 7/5$$

نمودار جعبه‌ای:

برای رسم نمودار جعبه‌ای ابتدا بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده، میانه و چارک اول و سوم را به ترتیب پیدا کرده و روی کاغذ مشخص می‌کنیم. از Q_1 تا Q_3 یک جعبه رسم می‌کنیم.

نکته: در نمودار جعبه‌ای تقریباً یک چهارم داده‌ها سمت چپ، یک چهارم سمت راست و نیمی از داده‌ها داخل جعبه قرار دارند.

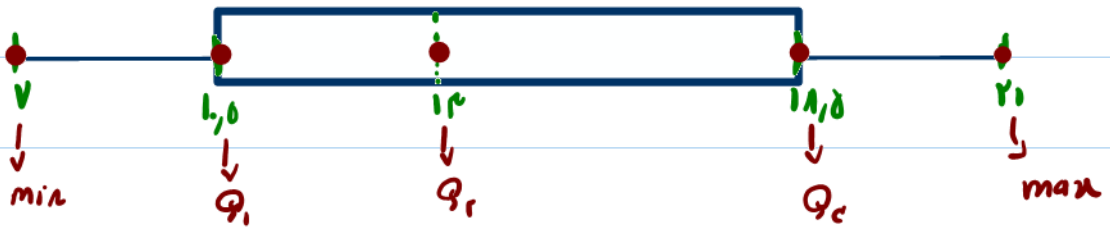
مثال: برای داده‌های زیر نمودار جعبه‌ای رسم کنید. سپس داده‌های داخل جعبه را بیابید.

۱۴, ۱۲, ۲۱, ۱۷, ۱۲, ۱۱, ۱۰, ۹, ۱۷, ۱۶, ۲۰, ۷, ۱۸

$n = 14$

۷, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۲۰, ۲۱

$Q_1 = 10.5$ ، Q_2 ، $Q_3 = 18.5$



داده‌های داخل جعبه: ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۷, ۱۷

سپس یک سانسور از همه داده‌ها ۱۴ واحد کم می‌کنیم:

$-۲, -۱, -۱, ۰, ۲, ۲, ۲$

$\bar{x} = \frac{-۲+\dots+۲}{۷} = \frac{۷}{۷} = ۱ \Rightarrow \sigma^2 = \frac{۴+۱+۱+۹+۱۶+۱۶}{۷} - ۱^2 = \frac{۴۷}{۷} - ۱ = ۶٫۷۱ - ۱ = ۵٫۷۱$

مثال: کنکوری ۱۴۰۱

در یک دسته از اعداد، چهار عدد فرد یک رقمی در اختیار داریم. دوتای آنها را با کوچک‌ترین عدد زوج بعد از خود و دوتای دیگر را با بزرگ‌ترین عدد زوج قبل از خود جایگزین می‌کنیم به‌طوری‌که اعداد در دسته دوم (دسته جدید) تک رقمی و غیرتکراری باشند. نسبت ضریب تغییرات دسته اول به دسته دوم کدام است؟

۱) $0.2\sqrt{5}$ ۲) $0.4\sqrt{10}$ ۳) $\sqrt{2}$ ✓ ۴) ۱٫۲۵

x_i : ۱, ۳, ۷, ۹ : $\bar{x} = \frac{۱+۳+۷+۹}{۴} = ۵$

y_i : ۲, ۴, ۶, ۸ $\bar{y} = \frac{۲+۴+۶+۸}{۴} = ۵$

$\sigma_x^2 = \frac{(-۴)^2+(-۲)^2+۲^2+۴^2}{۴} = \frac{۱۶+۴+۴+۱۶}{۴} = \frac{۴۰}{۴} = ۱۰ \rightarrow \sigma_x = \sqrt{۱۰}$

$\sigma_y^2 = \frac{(-2)^2+(-1)^2+1^2+2^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = 5 \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{c\sigma_x}{c\sigma_y} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \sqrt{2}$

مثال: کنکور تیر ۱۴۰۱

میانگین شش داده آماری، عددی طبیعی است و توان دوم انحراف از میانگین این داده‌ها، به‌صورت $1, b^2, 9, 0, a^2, 9$ است. اگر واریانس این داده‌ها برابر ۴ باشد، مقدار ab کدام است؟ $(a, b \in \mathbb{Z})$

۱) -4 ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) -2 ✓

$4 = \frac{9+a^2+0+9+b^2+1}{6} \Rightarrow 24 = 19 + a^2 + b^2 \Rightarrow a^2+b^2 = 5 \begin{cases} a=\pm1, b=\pm2 \\ a=\pm2, b=\pm1 \end{cases}$

مجموع انحراف از میانگین‌ها با هم برابر ۰ باشد

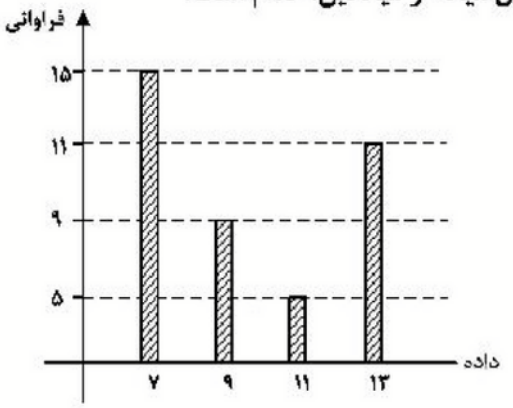
$|a|(x_i - \bar{x})$: $\pm4, \pm1, 0, \pm4, \pm2, \pm1$

$-4, -1, 0, 4, 2, -1$ شکل‌ها

$a=-1, b=2 \Rightarrow ab=-2$

مثال: کنکور ۹۹ خارج

با توجه به نمودار میله‌ای فراوانی داده‌های کمّی گسسته، تفاضل میانه از میانگین، کدام است؟



۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۵
۴) ۰/۶ ✓

$\sum f_i = 40 \Rightarrow 10+11+9+10 = 40$

میانه = میانگین داده‌های وسط مرتب شده $= \frac{9+9}{2} = 9$

$\bar{x} = \frac{7\times10 + 9\times9 + 11\times10 + 13\times11}{40} = \frac{100+81+110+143}{40} = \frac{434}{40} = 9.6$

میانگین − میانه $= 9.6 - 9 = 0.6$

فصل چهارم: آمار استنباطی

واحد آماری: به هریک از افراد یا اشیاء که داده‌های مربوط به آن‌ها در یک بررسی گردآوری می‌شود واحد آماری گوییم.

جامعه آماری: مجموعه کل واحدهای آماری را گوییم.

نمونه آماری: هر زیرمجموعه از جامعه آماری که با روش مشخصی انتخاب شده باشد.

نمونه‌گیری: به فرایند انتخاب نمونه‌ای از یک جامعه به منظور تعمیم اطلاعات آن به جامعه، نمونه‌گیری گوییم.

انواع نمونه‌گیری:

الف) **نمونه‌گیری احتمالی:** نمونه‌گیری است که همه واحدهای آماری، احتمال معلوم برای انتخاب در نمونه داشته و از روش تصادفی برای انتخاب واحدهای نمونه استفاده شود.

انواع نمونه‌گیری احتمالی عبارتند از: ① تصادفی ساده ② خوشه‌ای ③ طبقه‌ای ④ سامان‌مند

ب) **نمونه‌گیری غیراحتمالی:** اگر احتمال حضور واحدهای آماری در نمونه معلوم نباشد.

برای انتخاب یک نوع نمونه‌گیری احتمالی را توضیح دهید مثالی را در نظر بگیرید. دبیرستانی ۴۰۰ نفر در پایه‌های دهم، یازدهم

و دوازدهم دارد. کلاس‌ها به ترتیب ۱۵، ۲۰ و ۲۵ دانش‌آموز دارند. می‌خواهیم از این جامعه، نمونه‌ای بگیریم.

۱) نمونه‌گیری تصادفی ساده:

در این روش همه واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند.

مثال: در جامعه دبیرستان لقمه شش می‌خواهیم نمونه تصادفی ساده بگیریم. اسامی ۶۰ دانش‌آموز را روی برگه‌های نوشته و به تصادف از آن‌ها انتخاب می‌کنیم. احتمال انتخاب هر دانش‌آموز $\frac{1}{6}$ است.

۲) نمونه‌گیری خوشه‌ای:

در این روش اول جامعه را به گروه‌های (خوشه‌های) جداگانه (بدون اشتراک) تقسیم می‌کنیم. خوشه‌هایی را به تصادف انتخاب و همه واحدهای آماری آن خوشه‌ها را در نمونه در نظر می‌گیریم.

مثال: در جامعه دبیرستان لقمه شش می‌خواهیم نمونه خوشه‌ای بگیریم. مثلاً (یا بیشتر) از کلاس‌ها را تصادفی انتخاب می‌کنیم مثلاً یازدهمی‌ها. همه دانش‌آموزان کلاس یازدهم را در نمونه می‌آوریم.

توجه کنید چون ۴ کلاس داریم پس هر کلاس در نتیجه هر دانش‌آموز با احتمال $\frac{1}{4}$ انتخاب می‌شود.

۱۳) نمونه گیری طبقه‌ای :

در این روش ابتدا جامعه را با طبقه بندی به زیر جامعه‌های مجزا تقسیم می‌کنیم. از هر طبقه نمونه تصادفی ساده می‌گیریم.

مثال: در جامعه دبیرستان نمونه‌های فرهنگ نمونه گیری طبقه‌ای انجام دهیم. در اینجا کلاس‌ها را طبقه‌ها در نظر می‌گیریم. مثلاً از هر کلاس ۴ نفر را به صورت تصادفی ساده نمونه گیری می‌کنیم. چون تعداد دانش آموزان کلاس‌ها مساوی نبود پس احتمال حضور هر دانش آموز در نمونه مساوی دانش آموز دیگر نیست ولی احتمال انتخاب هر دانش آموز بین کلاس‌های هم طبقه خودش است.

۱۴) نمونه گیری سامان مند (سیستماتیک) :

نوعی نمونه گیری طبقه‌ای است که در آن اندازه طبقات با هم برابرند. از طبقه اول واحد دلخواه به تصادف انتخاب می‌شود و با همان روش از طبقات دیگر این کار انجام می‌شود. یعنی اگر k طبقه با حجم n داشته باشیم

(یا) قرار واحدهای دلخواه (یا) $\frac{N}{k}$

بعد از انتخاب اول a، a+k، a+2k را جلو می‌رویم.

مثال: در جامعه دبیرستان نمونه‌های فرهنگ ۴ نفر را سامان مند انتخاب کنیم. اول شماره ۱ تا ۶۰ را به دانش آموزان

اختصاصی می‌دهیم. $k = \frac{60}{4} = 15$ پس هر طبقه شامل ۱۵ نفرات. حال یک عدد به تصادف از ۱ تا ۱۵ انتخاب می‌کنیم مثلاً ۴. ۱۵ تا ۱۵ تا جلوی ردیف و شماره‌های ۸ و ۲۴ و ۴۸ را انتخاب می‌کنیم.

در این جا هم، احتمال انتخاب هر واحد برابر هم و برابر است.

مزایا و محدودیت‌های روش‌های نمونه‌گیری:

۱- **تصادفی ساده:** نمونه‌گیری از جامعه با اندازه کوچک با این روش ساده است ولی اگر جامعه بزرگ باشد دشوار خواهد بود.

به فهرستی از اعضای جامعه در بیشتر موارد نیاز خواهد بود.

۲- **خوشه‌ای:** فقط نیاز به فهرستی از خوشه‌ها دارد نه کل عضوهای جامعه ولی دقت آن کم است.

۳- **طبقه‌ای:** دقت آن زیاد است ولی نیاز به اطلاعات بیشتری از جامعه دارد که ممکن است هزینه‌بر باشد.

۴- **سامانمند:** نیاز به فهرست اعضای جامعه ندارد و در همه جامعه‌ها قابل اجرا است.

اریبی در نمونه‌گیری: اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمت خاصی انحراف پیدا کند می‌گوییم آن روش اریب است. مثلاً اگر برای بررسی پیشرفت نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان کل کشور فقط نمونه‌گیری

را از بین دانش آموزان دبیرستان دخترانه انتخاب کنیم.

مثال: برای بررسی میزان تأثیر تحصیلات روی رتبه‌ی اعتبار آن‌ها را به گروه‌های دارای مدرک دیپلم، فوق دیپلم و کارشناسی تقسیم می‌کنیم. کدام نمونه‌گیری به احتمال زیاد اریب است؟

۱) بطور ساده ✓ ۲) خوشه‌ای ۳) طبقه‌ای ۴) سیستماتیک

(در نمونه افراد با مدارک مختلف حضور ندارند)

آمارگیری: به گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن، آمارگیری گوییم و به شخصی که آمارگیری را انجام می‌دهد آمارگیر گوییم. به چهار روش زیر می‌توانیم داده‌ها را گردآوری کنیم:

۱- مشاهده (آزمایش):

در این روش گردآوری داده‌ها به فرد پاسخ‌گو نیاز ندارد. در مسائلی که به دقت بالا نیاز داشته باشیم مناسب است.

مانند شمارش تعداد خودروهای عبوری از یک چهارراه - داده‌های حاصل از آزمایش‌ها.

۲- پرسشنامه:

مجموعه سوالاتی از پیش تعیین شده که توسط آماری پاسخ‌گو تکمیل می‌شود. در مسائلی که تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد

زمان برداشت. مانند سرشماری نفوس و مسکن.

۳ـ مصاحبه :

معمولاً بین دو نفر، مصاحبه گر و مصاحبه شونده صورت می گیرد. نیز زمانی اشاره می شود که دقیقاً از همه پاسخ های ممکن اطلاع کافی ندارد مانند مصاحبه با کارشناسان امر ترافیک برای بررسی بعضی ترافیک.

۴ـ دارگان :

به مجموعه ای از اطلاعات ذخیره شده می گوئیم. ویژگی این روش آن است که همیشه اطلاعات ثبتی در اختیار مالیت. مانند برای تولید ناخالص ملی در ده سال گذشته.

پارامتر جامعه :

یک مشخصه خاص (مثل میانگین) که توصیف کننده جنبه ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است.

در اکثر موارد برای کل جامعه امکان پذیر نیست بنابراین با اینکه پارامتر جامعه مقدار ثابتی است اما معمولاً

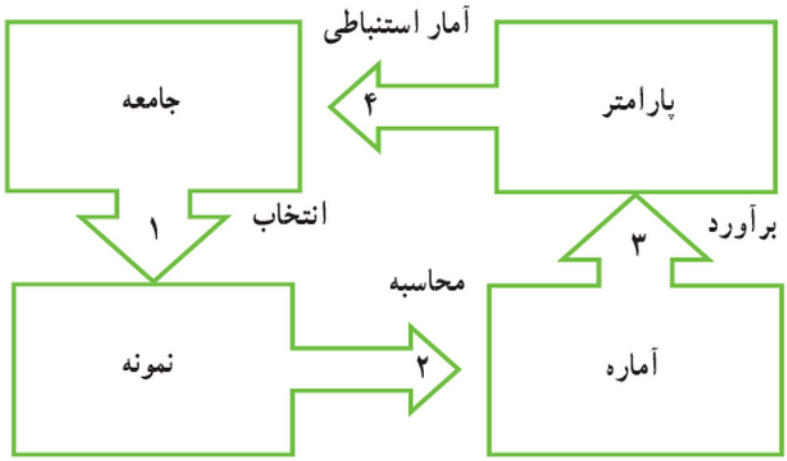
به همین دلیل از آماره ها برای تخمین پارامترهای جامعه استفاده می کنیم.

آماره نمونه:

مشخصه ای عددی که توصیف کننده جنبه ای خاص از نمونه بوده و از داده های نمونه بدست می آید و از نمونه ای به نمونه دیگر متفاوت است.

آمار استنباطی:

فرایند نتیجه گیری درباره پارامترهای جامعه براساس نمونه را آمار استنباطی می نامند.



برآورد نقطه ای پارامتر جامعه:

مقدار عددی حاصل از جای گذاری اعداد نمونه تصادفی در آماره نظیر آن پارامتر است. به عبارت دیگر

مقدار عددی آماره را برآورد یا برآورد نقطه‌ای می‌نامیم.

کار در کلاس

فرض کنید، جامعه از ۶ نفر تشکیل شده باشد با درآمد ماهیانه برحسب میلیون تومان به‌صورت زیر :

۲	۵	۳	۰	۱	۴

می‌خواهیم بر اساس نمونه‌ای به‌اندازهٔ ۱، **میانگین** این جامعهٔ ۶ عضوی را برآورد کنیم. در واقع باید از بین ۶ نفر، یکی را به‌تصادف انتخاب کنیم. اگر شخصی انتخاب شود که درآمدش ۵ باشد، این عدد برآورد میانگین درآمد همهٔ افراد است. ممکن است فرد انتخابی درآمدی نداشته باشد. آن‌گاه صفر به‌عنوان نمونهٔ انتخاب شده و برآورد میانگین درآمد این افراد برابر ۰ می‌شود. نمونه‌های مختلف منجر به برآوردهای متفاوتی می‌شوند.

$\bar{X} = \frac{۴+۱+۰+۳+۵+۲}{۶} = ۲/۵$ میانگین درآمد ماهیانه

- در این مثال، پارامتر جامعه چیست و مقدار آن چقدر است؟
- آیا بر اساس هر یک از نمونه‌ها برآورد به مقدار پارامتر نزدیک است؟ هم خیلی هم بد، بستگی به اعداد نمونه دارد
- چه راه‌حلی پیشنهاد می‌کنید که برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود؟

درست حدس زده‌اید! اگر اندازهٔ نمونه را بیشتر کنیم امکان نزدیک شدن برآورد به پارامتر بیشتر می‌شود. اندازهٔ نمونه را به ۲ افزایش می‌دهیم. به‌عنوان مثال، اگر نمونه‌گیری تصادفی انجام شده شامل درآمدهای ۰ و ۴ باشد، آن‌گاه برآورد میانگین جامعه عدد ۲ است؛ یعنی پارامتر جامعه که مقدار آن ۲/۵ بوده است را ۲ برآورد کرده‌ایم.

- آیا نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۲ وجود دارد که مقدار پارامتر را دقیقاً ۲/۵ برآورد کند؟ بله $\{۰,۵\}$
- آیا امکان دارد با نمونه‌های مختلف برآوردهای برابر به دست آوریم؟ بله
- بدون شمارش بگویید امکان مشاهده چند نمونهٔ دوتایی داریم؟ $\binom{۶}{۲} = ۱۵$

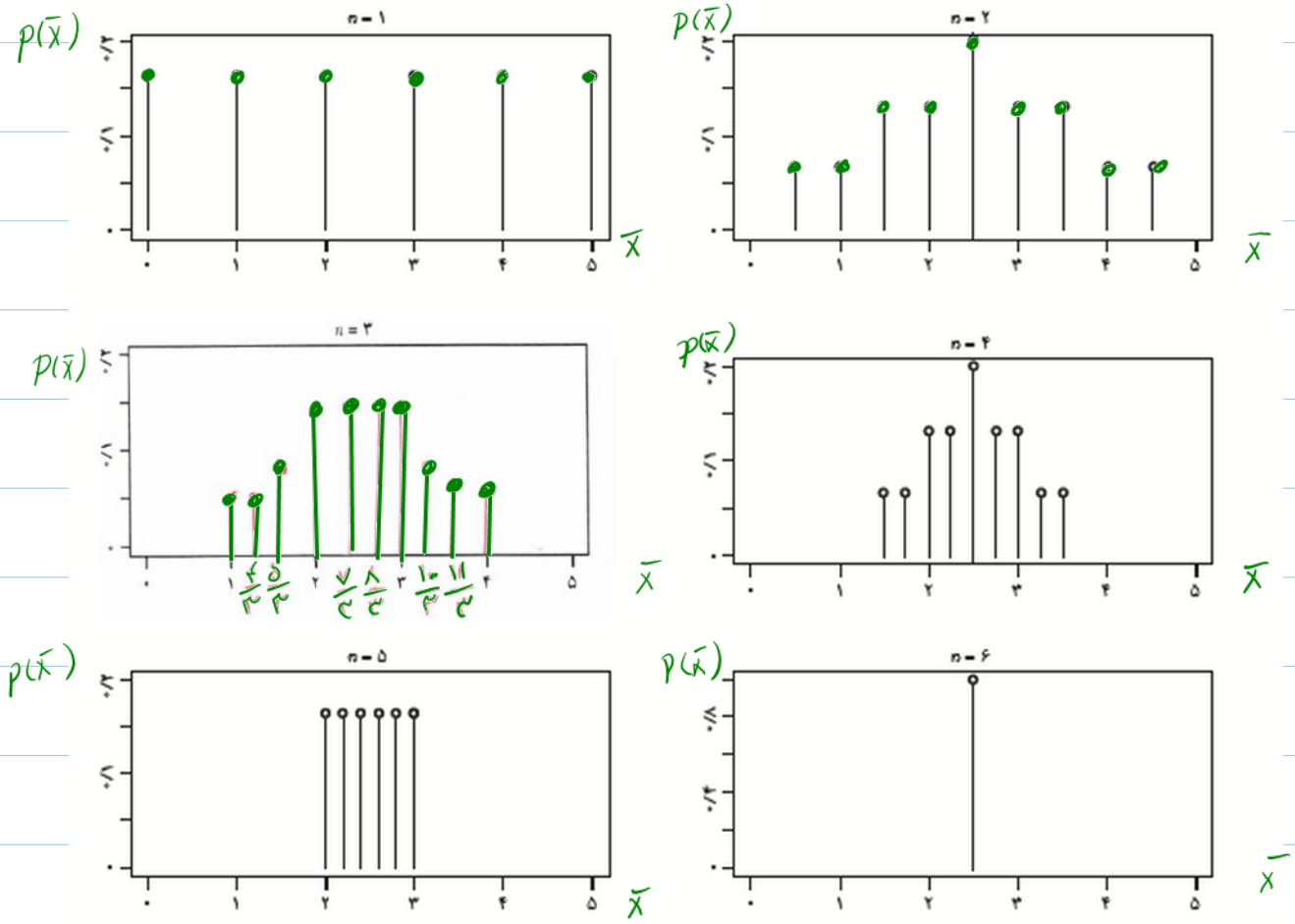
در جدول زیر، احتمال مشاهده هریک از مقادیر برآورد میانگین برای نمونه‌های دوتایی آمده است.

نمونه	$\{۰,۱\}$	$\{۰,۲\}$	$\{۰,۳\}\{۱,۲\}$	$\{۰,۴\}\{۱,۳\}$	$\{۰,۵\}\{۱,۴\}\{۲,۳\}$	$\{۱,۵\}\{۲,۴\}$	$\{۲,۵\}\{۳,۴\}$	$\{۳,۵\}$	$\{۴,۵\}$
$\bar{x}$	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴	۴/۵
احتمال	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$

اگر نمونه‌گیری تصادفی ساده به‌اندازهٔ $n = ۳$ از این ۶ عضو جامعه انجام دهیم، همانند جدول قبل مقادیر $\bar{x}$ و احتمال مشاهده هر مقدار را محاسبه و در جدول بنویسید. $\binom{۶}{۳} = \frac{۶\times۵\times۴}{۶} = ۲۰$

نمونه	$\{۰,۱,۲\}$	$\{۰,۱,۳\}$	$\{۰,۱,۴\}$ $\{۰,۲,۳\}$	$\{۰,۱,۵\}$ $\{۰,۲,۴\}$ $\{۱,۲,۳\}$	$\{۰,۲,۵\}$ $\{۰,۳,۴\}$ $\{۱,۲,۴\}$	$\{۰,۳,۵\}$ $\{۱,۲,۵\}$ $\{۱,۳,۴\}$	$\{۰,۴,۵\}$ $\{۱,۲,۴\}$ $\{۲,۳,۴\}$	$\{۱,۴,۵\}$ $\{۲,۳,۵\}$	$\{۲,۴,۵\}$	$\{۳,۴,۵\}$
$\bar{x}$	$\frac{۳}{۳}$	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۶}{۳}$	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۸}{۳}$	$\frac{۹}{۳}$	$\frac{۱۰}{۳}$	$\frac{۱۱}{۳}$	$\frac{۱۲}{۳}$
احتمال	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲۰}$

جدول به‌دست آمده از کار در کلاس قبل را برای $n = ۳$ رسم کنید. برای این منظور، بر روی محور طول‌ها مقادیر برآورد میانگین جامعه، یعنی $\bar{x}$ را مشخص کنید. حال احتمال مشاهده هریک از مقادیر را در نمودار علامت بزنید. این کار برای اندازهٔ نمونه‌های مختلف انجام شده است. هر نمودار مربوط به‌اندازه نمونهٔ به‌خصوص، $n = ۱,۲,۳,۴,۵,۶$ است.



اگر برآورد را بر اساس نمونه‌ای به‌اندازهٔ ۳ محاسبه کنیم، احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر باشد، نسبت به $n = ۱,۲$ بیشتر است. آیا اگر اندازهٔ نمونه از ۳بیشتر شود، احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود، باز هم بیشتر می‌شود؟ زمانی که اندازهٔ نمونه به ۶ می‌رسد، برآورد برابر پارامتر می‌شود.

همان‌طور که در نمودارها دیده‌اید با افزایش اندازهٔ نمونه برآوردها به میانگین جامعه، که پارامتر است، نزدیک‌تر می‌شوند. به بیان دیگر در هر نمودار با زیاد شدن اندازهٔ نمونهٔ انحراف معیار برآوردهای پارامتر کمتر می‌شود. پس هرقدر انحراف معیار برآورد کمتر باشد، آن برآورد بهتر است.

فرمول: اگر انحراف معیار برآورد میانگین را با $\sigma_{\bar{x}}$، انحراف معیار جامعه را با σ و حجم نمونه را با n نمایش دهیم:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

مثال: اگر انحراف معیار «بعد خانوار» در کشور ۲ باشد:

الف) انحراف معیار توزیع میانگین نمونه‌ای خانوار را برای اندازه نمونه ۹۰۰ تعیین نمایید.

ب) اندازه نمونه را چند برابر کنیم تا انحراف معیار توزیع میانگین آن برابر شود؟

الف) $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{900}} = \frac{2}{30}$

ب) $\sigma'_{\bar{x}} = \frac{1}{2}\sigma_{\bar{x}} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{kn}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{k} = 2 \Rightarrow k = 4$

بنابراین باید اندازه نمونه را ۴ برابر کنیم تا $\sigma_{\bar{x}}$ ، نصف شود.

برآورد بازه‌ای یا بازه اطمینان یا برآورد حاجم:

عبارت است از بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که به ضریب اطمینان شهرت دارد.

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه:

اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بنویسیم:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

($\bar{x}$: میانگین نمونه، μ: میانگین جامعه، $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$: انحراف معیار حاجم)

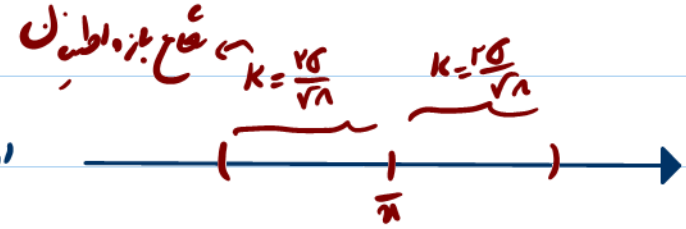
مثال: انحراف معیار وزن نوزادان متولد شده برابر $1.2\,kg$ است. با انتخاب تصادفی ۹ نوزاد و وزن کردن آنها وزن‌های 1.5، 1، 1، 0.5، 4، 2، 4، 4، 2 به دست آمده است. بازه اطمینان بیش از ٪۹۵ برای میانگین وزن نوزادان تازه متولد شده را بیابید.

$$\bar{x} = \frac{2+4+4+2+4+0.5+1+1+1.5}{9} = 2$$

$$2 - \frac{2(1.2)}{\sqrt{9}} \leq \mu \leq 2 + \frac{2(1.2)}{\sqrt{9}} \Rightarrow 1.2 \leq \mu \leq 2.8$$

پس می‌توانیم بگوییم میانگین وزن نوزادان با اطمینان ٪۹۵ در بازه $(1.2, 2.8)$ قرار دارد.

نکته: بازه اطمینان بیش از ٪۹۵ به صورت:



است.

مرکز این بازه همان $\bar{x}$ و طول این بازه $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

اگر بازه اطمینان به صورت $[a,b]$ داده شده باشد. مرکز این بازه $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ میانگین نمونه و طول این بازه همان: $b-a = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

مثال: میانگین جامعه‌ای با اطمینان بیشتر از ٪۹۵ بازه $[2, 2.8]$ برآورد شده است. انحراف معیار جامعه

برابر ۷۵ باشد، مضرب دهمی نمونه کدام است؟

۱) ۴۴۰۰ ۲) ۱۹۸۰ ✓ ۳) ۲۲۵ ۴) ۴۹۵

$\bar{x} = \frac{۶۰+۸۰}{۲} = ۷۰$ ، $۸۰-۶۰=۲۰ = \frac{۴۵}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{۴\times ۷۵}{\sqrt{n}} = ۲۰ \Rightarrow$

$\sqrt{n} = ۶ \Rightarrow n = ۳۶$ ، $۷۰ = \frac{\sum x_i}{۳۶} \Rightarrow \sum x_i = ۷۰\times ۳۶ = ۱۹۸۰$

تذکر: بازه اطمینان ۹۵٪ مبین این واقعیت است که اگر ۱۰۰ بار نمونه‌گیری کرده و ۱۰۰ بازه اطمینان بدست آوریم انتظار داریم ۹۵ بازه‌ها شامل میانگین جامعه باشد.

مثال: کنکور ۱۴۰۱

برای برآورد میانگین درآمد افراد یک جامعه از دو نمونه تصادفی استفاده کرده‌ایم. اندازه نمونه دوم را طوری انتخاب می‌کنیم که انحراف‌معیار برآورد میانگین با نمونه دوم، $\frac{۲}{۳}$ برابر مقدار محاسبه‌شده با نمونه اول باشد. اندازه نمونه دوم، چند برابر نمونه اول است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۲۵ ✓ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۳/۵

$\sigma_{\bar{x}_۲} = \frac{۲}{۳}\sigma_{\bar{x}_۱} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n_۲}} = \frac{۲}{۳}\frac{\sigma}{\sqrt{n_۱}} \Rightarrow \sqrt{n_۲} = \frac{۳}{۲}\sqrt{n_۱}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{n_۲}{n_۱}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{n_۲}{n_۱} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$

حل تمرین ۵ صفحه ۱۲۵ و ۱۲۶ با کمی تغییر

۵ داده‌های زیر نمرات ۲۰ دانش‌آموز از ۱۰۰ است.

۶۷ ۷۰ ۷۱ ۷۱ ۷۴
۷۵ ۷۵ ۷۵ ۷۸ ۷۸
۷۸ ۷۸ ۸۵ ۸۰ ۸۲
۸۲ ۸۴ ۸۶ ۸۶ ۹۱

الف) میانگین و انحراف معیار نمرات را محاسبه کنید.

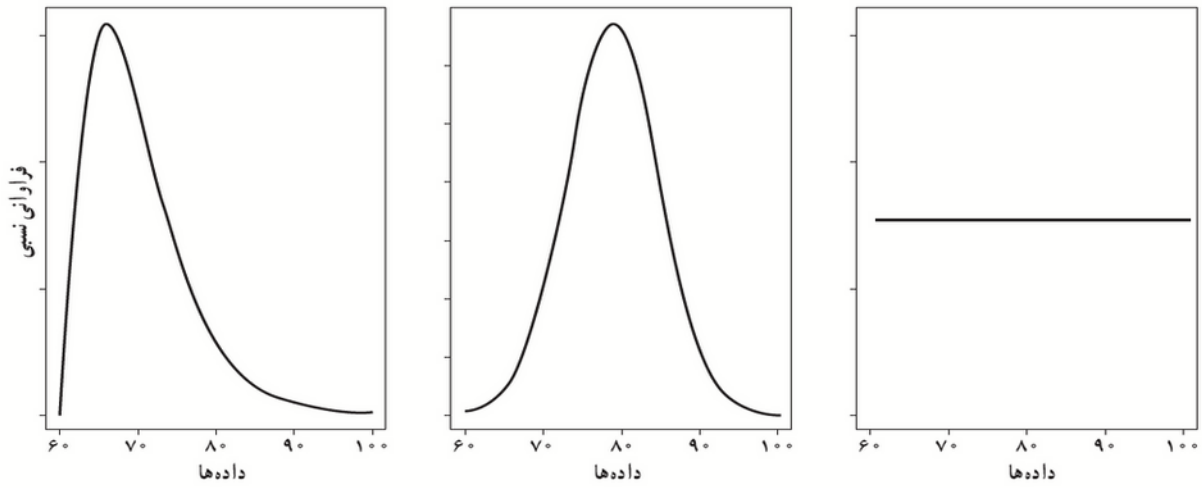
ب) اگر انحراف معیار جامعه ۶ باشد بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین نمرات جامعه محاسبه کنید.

پ) چند درصد داده‌ها داخل این بازه قرار می‌گیرند؟

ت) بافت نگاشت فراوانی داده‌ها را رسم کنید. (در فواصل $[۶۰,۶۴)$ ، $[۶۴,۶۸)$ و ...)

ث) چندبر فراوانی بافت نگاشت را رسم کنید (وسط مستطیل‌ها را با پاره‌خط به هم متصل کرده و به محور طول‌ها وصل کنید).

ج) اگر داده‌ها زیاد شوند، به نظر شما شکل چندبر فراوانی بافت نگاشت به کدام‌یک از نمودارهای صفحهٔ بعد شباهت بیشتری خواهد داشت؟ (نام نمودارها به ترتیب : یکنواخت، نرمال، نامتقارن یا چوله است)



(الف) $\bar{x} = \frac{1560}{20} = 78$ $\quad \sigma^2 = \frac{(67-78)^2 + \dots + (91-78)^2}{20} = 34.4$

$\sigma = \sqrt{34.4} = 5.86$

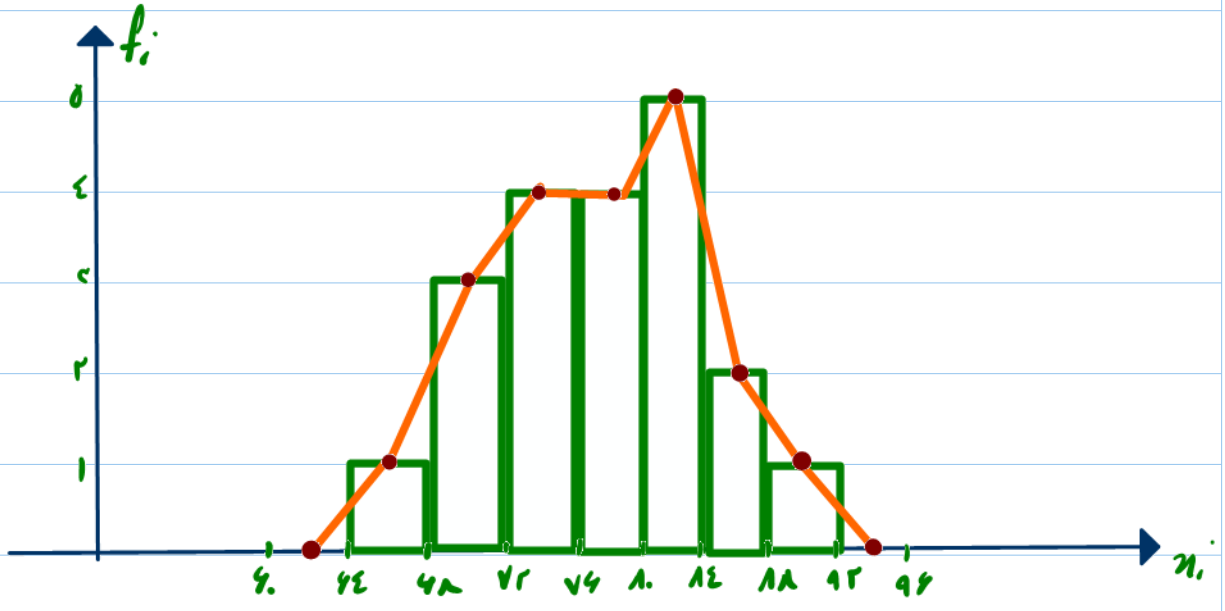
(ب) $\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 78 - \frac{2\times 6}{\sqrt{20}} \le \mu \le 78 + \frac{2\times 6}{\sqrt{20}}$

$\Rightarrow \quad 70,41 \leq \mu \leq 71,48$

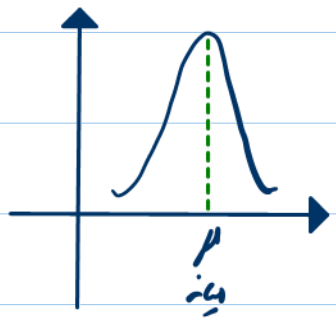
ب) درصد داده‌هایی که در این بازه قرار می‌گیرند $= \frac{\text{تعداد داده‌ها در این بازه}}{\text{کل داده‌ها}} \times 100 = \frac{6}{20} \times 100 = 30\ \%$

ج)

بازه	$[40,44)$	$[44,48)$	$[48,52)$	$[52,56)$	$[56,60)$	$[60,64)$	$[64,68)$	$[68,72)$	$[72,76)$	$[76,80)$
f_i	0	1	4	4	4	5	2	1	0	



د) نرمال



تذکر: در نمودارهای نرمال، میانگین، میانه و مد هم برابرند.

نکته: اگر تعداد داده‌ها کم یا تعداد دفعات تکرار اعداد زیاد باشد ممکن است نمودار چندبر فرازان به شکل منحنی‌های نامتقارن باشد.