# فصل چهارم: آمار استنباطی

**واحد آماری:** به هریک از افراد یا اشیاء که داده‌های مربوط به آن‌ها در یک بررسی گردآوری می‌شود واحد آماری می‌گوییم.

**جامعه آماری:** مجموعه کل واحدهای آماری را گوییم.

**نمونه آماری:** هر زیرمجموعه از جامعه آماری که با روش مشخصی انتخاب شده باشد.

**نمونه‌گیری:** به فرایند انتخاب نمونه‌ای از یک جامعه به منظور تعمیم اطلاعات آن به جامعه، نمونه‌گیری می‌گوییم.

**انواع نمونه‌گیری:**

**الف) نمونه‌گیری احتمالی:** نمونه‌گیری است که همه واحدهای آماری، احتمال معلوم برای انتخاب در نمونه داشته و از روش تصادفی برای انتخاب واحدهای نمونه استفاده شود.

انواع نمونه‌گیری احتمالی عبارتند از: ① تصادفی ساده ② خوشه‌ای ③ طبقه‌ای ④ سامان‌مند

**ب) نمونه‌گیری غیراحتمالی:** اگر احتمال حضور واحدهای آماری در نمونه معلوم نباشد.

برای اینکه یک نوع نمونه‌گیری احتمالی را توضیح دهیم مثالی را در نظر بگیرید. دبیرستانی ۲۰۰ نفر دانش‌آموز دهم، یازدهم

و دوازدهم دارد. کلاس‌ها به ترتیب ۱۵، ۲۰ و ۲۵ دانش‌آموز دارند. می‌خواهیم از این جامعه، نمونه‌گیری کنیم.

۱) نمونه‌گیری تصادفی ساده:

در این روش همه واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند.

مثال: در جامعه دبیرستان لقمه‌شهری می‌خواهیم نمونه تصادفی ساده بگیریم. اسامی ۶۰ دانش‌آموز را روی برگه‌های نوشته و به تصادف از آن‌ها انتخاب می‌کنیم. احتمال انتخاب هر دانش‌آموز $\frac{1}{60}$ است.

۲) نمونه‌گیری خوشه‌ای:

در این روش اول جامعه را به گروه‌های (خوشه‌های) جداگانه (بدون اشتراک) تقسیم می‌کنیم. خوشه‌هایی را به تصادف انتخاب و همه واحدهای آماری آن خوشه‌ها را در نمونه در نظر می‌گیریم.

مثال: در جامعه دبیرستان لقمه‌شهری می‌خواهیم نمونه خوشه‌ای بگیریم. یکی (یا بیشتر) از کلاس‌ها را تصادفی انتخاب می‌کنیم مثلاً یازدهمی‌ها. همه دانش‌آموزان کلاس یازدهم را در نمونه می‌آوریم.

توجه کنید چون ۴ کلاس داریم پس هر کلاس در نتیجه هر دانش‌آموز با احتمال $\frac{1}{4}$ انتخاب می‌شود.

## ۱۳) نمونه گیری طبقه‌ای :

در این روش ابتدا جامعه را با طبقه بندی به زیر جامعه های مجزا تقسیم می کنیم . از هر طبقه نمونه تصادفی ساده می گیریم .

**مثال** : در جامعه دبیرستان نمونه دخترانه شهری فرهیم نمونه گیری طبقه‌ای انجام دهیم . در اینجا کلاس ها را طبقه ها در نظر می گیریم . مثلاً از هر کلاس ۳۰ نفر را به صورت تصادفی ساده نمونه گیری می کنیم . چون تعداد دانش آموزان کلاس ها ممکن است متفاوت باشد پس احتمال حضور هر دانش آموز در نمونه مساوی دانش آموز دیگر نیست ولی احتمال انتخاب هر دانش آموز بین اعضای هم طبقه خودش یکسان است .

## ۱۴) نمونه گیری سامان مند (سیستماتیک) :

روش نمونه گیری طبقه‌ای است که در آن اندازه طبقات با هم برابرند . از طبقه اول واحد نمونه‌ای به تصادف انتخاب می شود و با همان ردیف از طبقات دیگر این کار انجام می شود . یعنی اگر k طبقه با حجم n داشته باشیم

$\frac{n}{k}$ تعداد واحدهای نمونه‌ای

بعد از انتخاب اول ۱، ۱+۱، ۱+۲ و ... را جلو می رویم .

**مثال** : در جامعه دبیرستان نمونه دخترانه شهری فرهیم ۴۰ نفر را سامان مند انتخاب کنیم . اول شماره ۱ تا ۴۰ را به دانش آموزان

اختصاص می‌دهیم. $\frac{60}{4} = 15$ = c پس هر طبقه شامل 15 نفرات. حال یک عدد به تصادف از 1 تا 15 انتخاب می‌کنیم مثلاً 4. 15 تا 15 تا جلوی ردیف و شماره‌های 4، 8، 24 و 48 را انتخاب می‌کنیم.

در این جا هم، احتمال انتخاب هر واحد آماری با هم برابر.

مزایا و محدودیت‌های روش‌های نمونه‌گیری:

۱- تصادفی ساده: نمونه‌گیری از جامعه با اندازه کوچک با این روش ساده است ولی اگر جامعه بزرگ باشد دشوری به صرفه‌گی از اعضای جامعه در تهیه چارچوب نمونه‌گیری خواهد بود.

۲- خوشه‌ای: فقط نیاز به صرفه‌گی از خوشه‌ها دارد نه کل عضوهای جامعه ولی دقت آن کم است.

۳- طبقه‌ای: دقت آن زیاد است ولی نیاز به اطلاعات بیشتری از جامعه دارد که ممکن است هزینه‌بر باشد.

۴- سامانمند: نیاز به عضویت اعضای جامعه ندارد و در همه جامعه‌ها قابل اجرا است.

اریبی در نمونه‌گیری: اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمت خاصی انحراف پیدا کند می‌گوییم آن روش اریب است. مثلاً اگر بررسی بر روی پیشینه نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان کل کشور فقط نمونه‌گیری

را از بین دانش آموزان درس خوان انجام دهیم.

**مثال:** برای بررسی میزان تأثیر تحصیلات روی درآمد افراد آنها را به گروه‌های دارای مدرک دیپلم، فوق دیپلم و لیسانس تقسیم می‌کنیم. کدام نمونه‌گیری با احتمال زیاد اریب است؟

۱) تصادفی ساده ✓ ۲) خوشه‌ای ۳) طبقه‌ای ۴) سیستماتیک

(در نمونه افراد با مدارک مختلف حضور ندارند)

**آمارگیری:** به گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن، آمارگیری گوییم و به شخصی که آمارگیری را انجام می‌دهد آمارگیر گوییم. به چهار روش زیر می‌توانیم داده‌ها را گردآوری کنیم:

**۱- مشاهده (آزمایش):**

در این روش گردآوری داده‌ها به زمان بالنسبه زیاد نیاز ندارد. در مسائلی که به دقت بالا نیاز داشته باشیم مناسب است مانند شمارش تعداد خودروهای عبوری از یک چهارراه - داده‌های حاصل از آزمایش‌ها.

**۲- پرسشنامه:**

مجموعه سوالاتی از پیش تعیین شده که توسط افراد پاسخ‌گو تکمیل می‌شود. در مسائلی که تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد

زمان برداشت. مانند سرشماری نفوس و مسکن.

۳ـ مصاحبه :

معمولاً بین دو نفر، مصاحبه‌گر و مصاحبه‌شونده صورت می‌گیرد. نیز زمانی استفاده می‌شود که دستیابی از همه پاسخ‌های ممکن اطلاع کافی ندارد مانند مصاحبه با کارشناسان امر ترافیک برای بررسی بعضی ترافیک.

۴ـ دارگان :

به مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره شده می‌گوئیم. ویژگی این روش آن است که همیشه اطلاعات ثبتی در اختیار مالیات. مانند برای تولید ناخالص ملی در ده سال گذشته.

پارامتر جامعه :

یک مشخصه عددی (مثل میانگین) که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است.

در اکثر موارد برای کل جامعه امکان دسترسی نیست بنابراین با اینکه پارامتر جامعه مقدار ثابتی است اما معمولاً

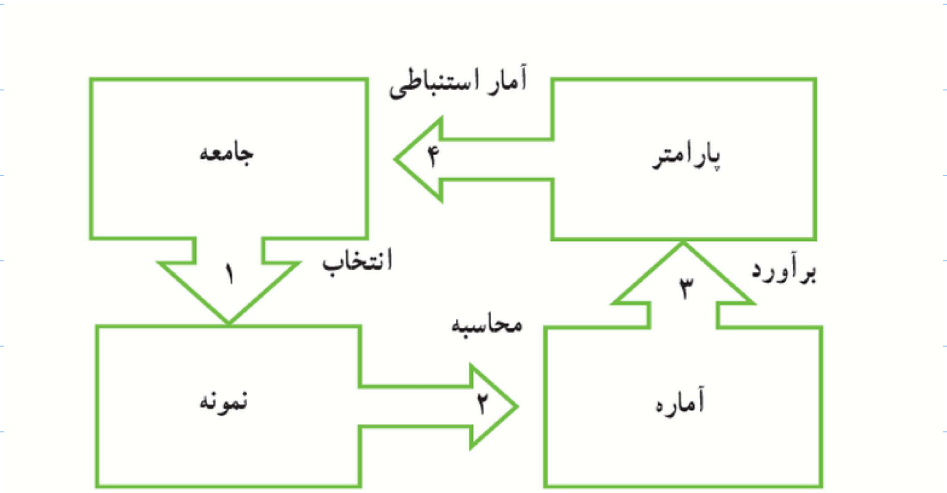
به همین دلیل از آماره ها برای تخمین پارامترهای جامعه استفاده می کنیم.

**آماره نمونه:**

مشخصه ای عددی که توصیف کننده جنبه ای خاص از نمونه بوده و از داده های نمونه بدست می آید و از نمونه ای به نمونه دیگر متفاوت است.

**آمار استنباطی:**

فرایند نتیجه گیری درباره پارامترهای جامعه براساس نمونه را آمار استنباطی می نامند.




**برآورد نقطه ای پارامتر جامعه:**

مقدار عددی حاصل از جای گذاری اعداد نمونه تصادفی در آماره نظیر آن پارامتر است. به عبارت دیگر

مقدار عددی آماره را برآورد یا برآورد نقطه‌ای می‌نامیم.

## کار در کلاس

فرض کنید، جامعه از ۶ نفر تشکیل شده باشد با درآمد ماهیانه برحسب میلیون تومان به‌صورت زیر :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ۲ | ۵ | ۳ | ۰ | ۱ | ۴ |

می‌خواهیم بر اساس نمونه‌ای به‌اندازهٔ ۱، **میانگین** این جامعهٔ ۶ عضوی را برآورد کنیم. در واقع باید از بین ۶ نفر، یکی را به‌تصادف انتخاب کنیم. اگر شخصی انتخاب شود که درآمدش ۵ باشد، این عدد برآورد میانگین درآمد همهٔ افراد است. ممکن است فرد انتخابی درآمدی نداشته باشد. آن‌گاه صفر به‌عنوان نمونهٔ انتخاب شده و برآورد میانگین درآمد این افراد برابر ۰ می‌شود. نمونه‌های مختلف منجر به برآوردهای متفاوتی می‌شوند.

$\bar{X} = \frac{۴+۱+۰+۳+۵+۲}{۶} = ۲/۵$ میانگین درآمد ماهیانه

- در این مثال، پارامتر جامعه چیست و مقدار آن چقدر است؟
- آیا بر اساس هر یک از نمونه‌ها برآورد به مقدار پارامتر نزدیک است؟ هم خیلی هم بد، بسته به اعضای نمونه
- چه راه‌حلی پیشنهاد می‌کنید که برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود؟

درست حدس زده‌اید! اگر اندازهٔ نمونه را بیشتر کنیم امکان نزدیک شدن برآورد به پارامتر بیشتر می‌شود. اندازهٔ نمونه را به ۲ افزایش می‌دهیم. به‌عنوان مثال، اگر نمونه‌گیری تصادفی انجام شده شامل درآمدهای ۰ و ۴ باشد، آن‌گاه برآورد میانگین جامعه عدد ۲ است؛ یعنی پارامتر جامعه که مقدار آن ۲/۵ بوده است را ۲ برآورد کرده‌ایم.

- آیا نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۲ وجود دارد که مقدار پارامتر را دقیقاً ۲/۵ برآورد کند؟ بله $\{۰,۵\}$
- آیا امکان دارد با نمونه‌های مختلف برآوردهای برابر به دست آوریم؟ بله
- بدون شمارش بگویید امکان مشاهده چند نمونهٔ دوتایی داریم؟ $\binom{۶}{۲} = ۱۵$

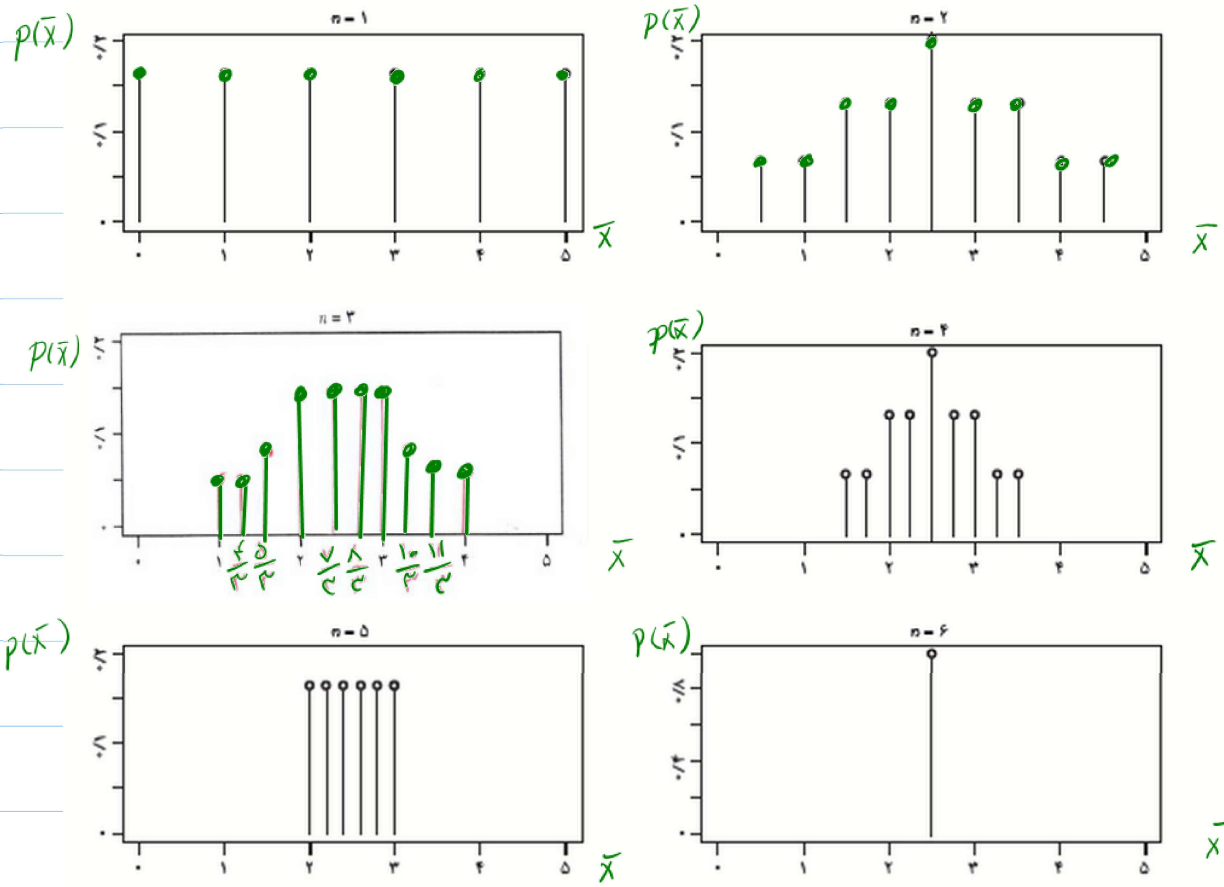
در جدول زیر، احتمال مشاهده هریک از مقادیر برآورد میانگین برای نمونه‌های دوتایی آمده است.

| نمونه | $\{۰,۱\}$ | $\{۰,۲\}$ | $\{۰,۳\}\{۱,۲\}$ | $\{۰,۴\}\{۱,۳\}$ | $\{۰,۵\}\{۱,۴\}\{۲,۳\}$ | $\{۱,۵\}\{۲,۴\}$ | $\{۲,۵\}\{۳,۴\}$ | $\{۳,۵\}$ | $\{۴,۵\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | ۰/۵ | ۱ | ۱/۵ | ۲ | ۲/۵ | ۳ | ۳/۵ | ۴ | ۴/۵ |
| احتمال | $\frac{۱}{۱۵}$ | $\frac{۱}{۱۵}$ | $\frac{۲}{۱۵}$ | $\frac{۲}{۱۵}$ | $\frac{۳}{۱۵}$ | $\frac{۲}{۱۵}$ | $\frac{۲}{۱۵}$ | $\frac{۱}{۱۵}$ | $\frac{۱}{۱۵}$ |

اگر نمونه‌گیری تصادفی ساده به‌اندازهٔ $n = ۳$ از این ۶ عضو جامعه انجام دهیم، همانند جدول قبل مقادیر $\bar{x}$ و احتمال مشاهده هر مقدار را محاسبه و در جدول بنویسید. $\binom{۶}{۳} = \frac{۶\times۵\times۴}{۶} = ۲۰$

| نمونه | $\{۰,۱,۲\}$ | $\{۰,۱,۳\}$ | $\{۰,۱,۴\}$ | $\{۰,۱,۵\}$ $\{۰,۲,۴\}$ $\{۱,۲,۳\}$ | $\{۰,۲,۵\}$ $\{۰,۳,۴\}$ $\{۱,۲,۴\}$ | $\{۰,۳,۵\}$ $\{۱,۲,۵\}$ $\{۱,۳,۴\}$ | $\{۰,۴,۵\}$ $\{۱,۳,۵\}$ $\{۲,۳,۴\}$ | $\{۱,۴,۵\}$ $\{۲,۳,۵\}$ | $\{۲,۴,۵\}$ | $\{۳,۴,۵\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | $\frac{۳}{۳}$ | $\frac{۴}{۳}$ | $\frac{۵}{۳}$ | $\frac{۶}{۳}$ | $\frac{۷}{۳}$ | $\frac{۸}{۳}$ | $\frac{۹}{۳}$ | $\frac{۱۰}{۳}$ | $\frac{۱۱}{۳}$ | $\frac{۱۲}{۳}$ |
| احتمال | $\frac{۱}{۲۰}$ | $\frac{۱}{۲۰}$ | $\frac{۲}{۲۰}$ | $\frac{۳}{۲۰}$ | $\frac{۳}{۲۰}$ | $\frac{۳}{۲۰}$ | $\frac{۳}{۲۰}$ | $\frac{۲}{۲۰}$ | $\frac{۱}{۲۰}$ | $\frac{۱}{۲۰}$ |

جدول به‌دست آمده از کار در کلاس قبل را برای $n = 3$ رسم کنید. برای این منظور، بر روی محور طول‌ها مقادیر برآورد میانگین جامعه، یعنی $\bar{x}$ را مشخص کنید. حال احتمال مشاهده هریک از مقادیر را در نمودار علامت بزنید. این کار برای اندازهٔ نمونه‌های مختلف انجام شده است. هر نمودار مربوط به‌اندازه نمونهٔ به‌خصوص، $n = 1,2,3,4,5,6$ است.




اگر برآورد را بر اساس نمونه‌ای به‌اندازهٔ ۳ محاسبه کنیم، احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر باشد، نسبت به $n = 1,2$ بیشتر است. آیا اگر اندازهٔ نمونه از ۳بیشتر شود، احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود، باز هم بیشتر می‌شود؟ زمانی که اندازهٔ نمونه به ۶ می‌رسد، برآورد برابر پارامتر می‌شود.

همان‌طور که در نمودارها دیده‌اید با افزایش اندازهٔ نمونه برآوردها به میانگین جامعه، که پارامتر است، نزدیک‌تر می‌شوند. به بیان دیگر در هر نمودار با زیاد شدن اندازهٔ نمونهٔ انحراف معیار برآوردهای پارامتر کمتر می‌شود. پس هرقدر انحراف معیار برآورد کمتر باشد، آن برآورد بهتر است.

**خلاصه:** اگر انحراف معیار برآوردهای $\bar{x}$ را با $\sigma_{\bar{x}}$، انحراف معیار جامعه را با $\sigma$ و حجم نمونه را با $n$ نشان دهیم:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**مثال:** اگر انحراف معیار «بعد خانوار» در کشور ۴ باشد:

الف) انحراف معیار برآورد میانگین تعداد اعضای خانوار برای اندازه نمونه ۹۰۰ تقریباً چیست؟

ب) اندازه نمونه را چند برابر کنیم تا انحراف معیار برآورد میانگین ۱ برابر شود؟

الف) $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۴}{\sqrt{۹۰۰}} = \frac{۴}{۳۰} = ۱$

ب) $\sigma'_{\bar{x}} = ۱ \sigma_{\bar{x}} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{kn}} = ۱ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{k}} = ۱ \Rightarrow \sqrt{k} = ۱۰$

$\Rightarrow k = ۱۰۰$

بنابراین باید اندازه نمونه را ۱۰۰ برابر کنیم تا $\sigma_{\bar{x}}$، ۱ برابر شود.

## برآورد بازه‌ای یا بازه اطمینان یا برآورد حاجم:

عبارت است از بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که به عنوان اطمینان شهرت دارد.

### برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه:

اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n$ در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$$

($\bar{x}$: میانگین نمونه، $\mu$: میانگین جامعه، $\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$: انحراف معیار حاجم)

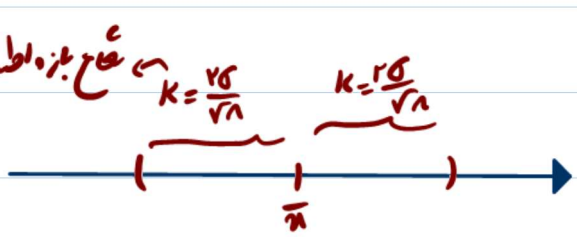
**مثال:** انحراف معیار وزن نوزادان متولد شده برابر $\sigma = 1.2$ kg است. با انتخاب تصادفی ۹ نوزاد و وزن کردن آن‌ها وزن‌های ۲، ۴، ۴، ۲، ۴، ۱، ۱، ۱/۵، ۱/۵ کیلوگرم ثبت گردیده است. بازه اطمینان بیش از ۹۵٪ برای میانگین وزن نوزادان تازه متولد شده را بیابید.

$$\bar{x} = \frac{2+4+4+2+4+1+1+1.5+1.5}{9} = 2$$

$$2 - \frac{2(1.2)}{\sqrt{9}} \leq \mu \leq 2 + \frac{2(1.2)}{\sqrt{9}} \Rightarrow 1.2 \leq \mu \leq 2.8$$

پس می‌توانیم بگوییم میانگین وزن نوزادان با اطمینان ۹۵٪ در بازه $(1.2, 2.8)$ قرار دارد.

**نکته:** بازه اطمینان بیش از ۹۵٪ به صورت:




است.

مرکز این بازه همان $\bar{x}$ و طول این بازه $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

اگر بازه اطمینان به صورت $[a, b]$ داده شده باشد. مرکز این بازه $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ میانگین نمونه و طول این بازه نیز: $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = b - a$ است.

**مثال:** میانگین جامعه‌ای با اطمینان بیشتر از ۹۵٪ بازه $[2, 2.8]$ برآورد شده است. انحراف معیار جامعه

برابر ۷۵ باشد، مجموع دامنه‌ی نمونه کدام است؟

۱) ۴۴۰۰ ۲) ۱۹۸۰ ✓ ۳) ۲۲۵ ۴) ۴۹۵

$\bar{x} = \frac{۶۰+۸۰}{۲} = ۷۰$ ، $۸۰-۶۰=۲۰ = \frac{۴۵}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{۴\times ۷۵}{\sqrt{n}} = ۲۰ \Rightarrow$

$\sqrt{n}=۶ \Rightarrow n=۳۶$ ، $۷۰ = \frac{\sum x_i}{۳۶} \Rightarrow \sum x_i = ۷۰\times ۳۶ = ۱۹۸۰$

**تذکر:** بازه‌ی اطمینان ۹۵٪ مبنی بر این نیست که اگر ۱۰۰ بار نمونه‌گیری کرده و ۱۰۰ بازه‌ی اطمینان بدست آوریم انتظار داریم ۹۵ بازه‌ها شامل میانگین جامعه باشد.

**مثال: کنکور ۱۴۰۱**

برای برآورد میانگین درآمد افراد یک جامعه از دو نمونه تصادفی استفاده کرده‌ایم. اندازه نمونه دوم را طوری انتخاب می‌کنیم که انحراف‌معیار برآورد میانگین با نمونه دوم، $\frac{۲}{۳}$ برابر مقدار محاسبه‌شده با نمونه اول باشد. اندازه نمونه دوم، چند برابر نمونه اول است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۲۵ ✓ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۳/۵

$\sigma_{\bar{x}_۲} = \frac{۲}{۳}\sigma_{\bar{x}_۱} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n_۲}} = \frac{۲}{۳}\frac{\sigma}{\sqrt{n_۱}} \Rightarrow \sqrt{n_۲} = \frac{۳}{۲}\sqrt{n_۱}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{n_۲}{n_۱}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{n_۲}{n_۱} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$

حل تمرین ۵ صفحه ۱۲۵ و ۱۲۶ بانکی شهر

**۵** داده‌های زیر نمرات ۲۵ دانش‌آموز از ۱۰۰ است.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۶۷ | ۷۰ | ۷۱ | ۷۱ | ۷۴ |
| ۷۵ | ۷۵ | ۷۵ | ۷۸ | ۷۸ |
| ۷۸ | ۷۸ | ۸۰ | ۸۰ | ۸۲ |
| ۸۲ | ۸۴ | ۸۶ | ۸۶ | ۹۱ |

الف) میانگین و انحراف معیار نمرات را محاسبه کنید.

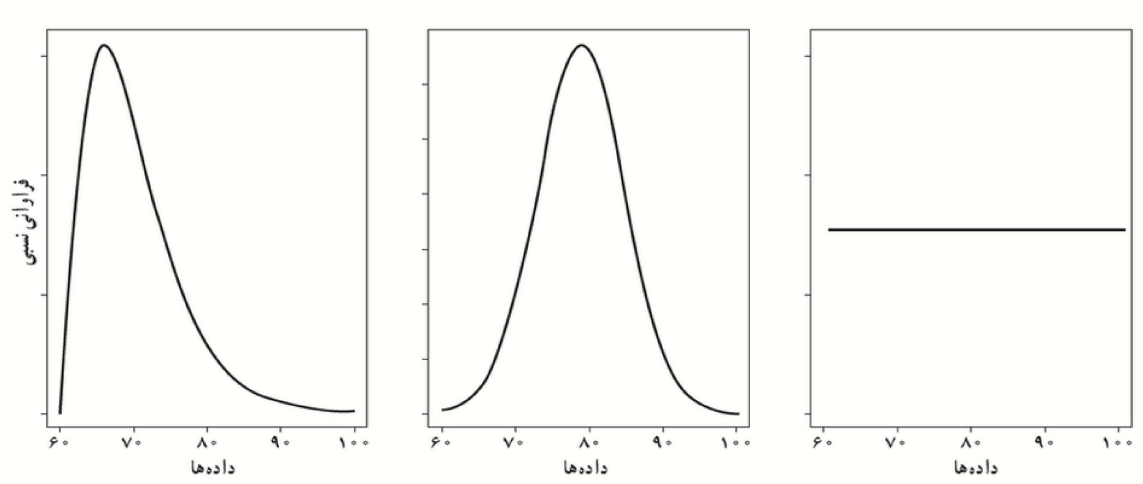
ب) اگر انحراف معیار جامعه ۶ باشد بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین نمرات جامعه محاسبه کنید.

پ) چند درصد داده‌ها داخل این بازه قرار می‌گیرند؟

ت) بافت نگاشت فراوانی داده‌ها را رسم کنید. (در فواصل $[60,64)$ و $[64,68)$ و ...)

ث) چندبر فراوانی بافت نگاشت را رسم کنید (وسط مستطیل‌ها را با پاره‌خط به هم متصل کرده و به محور طول‌ها وصل کنید).

ج) اگر داده‌ها زیاد شوند، به نظر شما شکل چندبر فراوانی بافت نگاشت به کدام‌یک از نمودارهای صفحهٔ بعد شباهت بیشتری خواهد داشت؟ (نام نمودارها به ترتیب : یکنواخت، نرمال، نامتقارن یا چوله است)




الف)

$$\bar{x} = \frac{1560}{20} = 78 \qquad \sigma^2 = \frac{(67-78)^2 + \dots + (91-78)^2}{20} = 34.4$$

$$\sigma = \sqrt{34.4} = 5.86$$

ب)

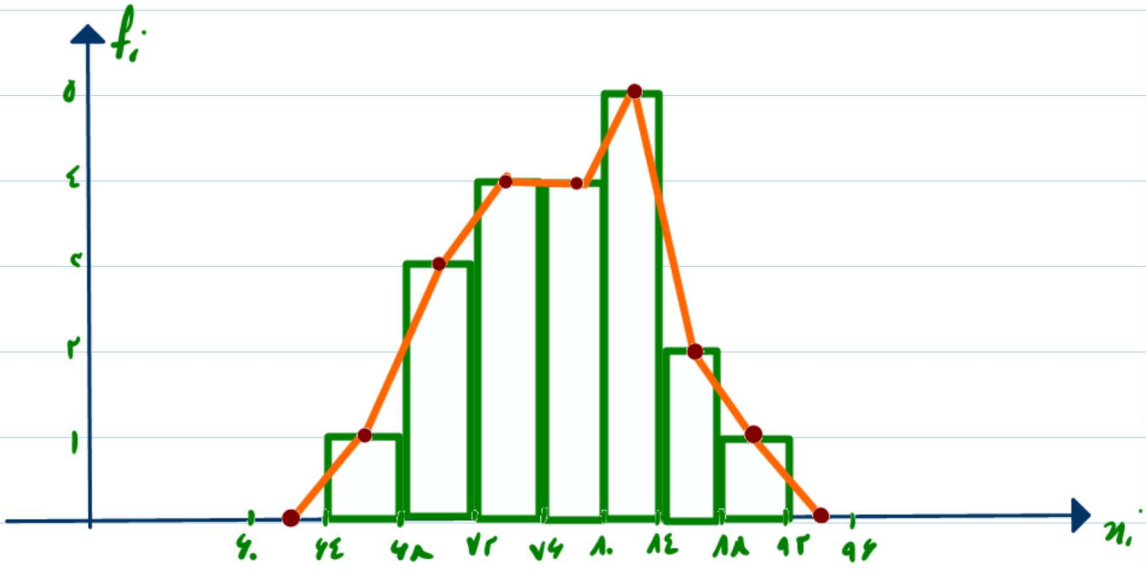
$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 78 - \frac{2\times 6}{\sqrt{20}} \le \mu \le 78 + \frac{2\times 6}{\sqrt{20}}$$

$\Rightarrow \quad 75,41 \leq \bar{x} \leq 80,48$

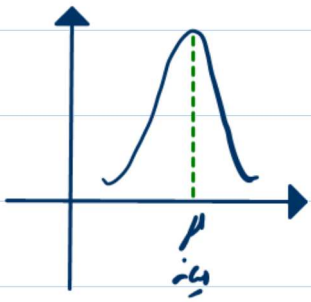
ب) درصد داده‌هایی که در این بازه قرار می‌گیرند $= \frac{\text{تعداد داده‌ها در این بازه}}{\text{کل داده‌ها}} \times 100 = \frac{8}{20} \times 100 = \%40$

ج) تقریبی

| بازه | $[40,44)$ | $[44,48)$ | $[48,52)$ | $[52,56)$ | $[56,60)$ | $[60,64)$ | $[64,68)$ | $[68,72)$ | $[72,76)$ | $[76,80)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 0 | 1 | 4 | 4 | 4 | 5 | 2 | 1 | 0 | |




د) نرمال




تذکر: در نمودارهای نرمال، میانگین، میانه و $\bar{x}$ هم برابرند.

نکته: اگر تعداد داده‌ها کم یا تعداد دفعات نمونه‌گیری محدود باشد ممکن است نمودار چندپر قرارانی به شکل نرمال نباشد.