جزوه آمار و احتمال

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم: احتمال



مولف: سید ابوالفضل فاضلیان

درس اول : مبانی احتمال

یادآوری نکات و مفاهیم پایه در شمارش :

۱- **اصل ضرب** : فرض کنید انجام کاری k مرحله دارد. اگر مرحله اول را بتوان به m_1 طریق

یا

تکیه بر "و" انجام داد، مرحله دوم را به m_2 طریق و ... مرحله k ام را به m_k طریق

انجام داد، کل کار مورد نظر را می‌توان به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق انجام داد.

۲- **اصل جمع** : فرض کنید بتوان کاری را از k روش انجام داد. اگر روش اول به m_1 طریق،

یا

تکیه بر "یا" روش دوم به m_2 طریق و ... و روش k ام به m_k طریق ممکن باشد و بخواهیم

فقط یکی از این k روش را انتخاب کنیم، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$

یا از روش اول یا از روش دوم یا ...

طریق وجود دارد.

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟

۱) ۹۴۸ ✓ ۲) ۹۵۲ ۳) ۹۶۸ ۴) ۹۷۲

گزینه ۲

$\boxed{9} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{1,0} = 504$

$\Rightarrow 504 + 448 = 952$

$\boxed{8} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{1,5} = 448$

← غیر ۰ و ۵

۳ـ جایگشت :

فرض کنید n شیء متمایز داریم. به هر حالت از قرار گرفتن این اشیاء در کنار هم یک جایگشت می‌گوییم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

$$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad , \quad n! = n(n-1)(n-2)\cdots \times 1$$

مثال: a,b,c

abc bca
acb cab
bac cba

$3! = 3\times 2\times 1 = 6$

۴ـ تبدیل (ترتیب):

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارت دیگر تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن اهمیت داشته باشد را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و به آن تبدیل r شیء از n شیء متمایز گفته می‌شود و از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: a,b,c $\xrightarrow{\text{جایگشت‌های ۲تایی}}$ ab, ba, ac, ca, bc, cb

$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۵- ترکیب :

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می گوییم و تعداد آن ها را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می دهیم که از رابطه زیر بدست می آید:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال $a,b,c \xrightarrow[\text{۲ تایی}]{\text{ترکیب های}} \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$ $\quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

حالات خاص در رابطه ترکیب :

۱) $\binom{n}{0} = 1$ $\quad$ مثال $\binom{10}{0} = 1$

۲) $\binom{n}{n} = 1$ $\quad$ مثال $\binom{0}{0} = 1$

۳) $\binom{n}{1} = n$ $\quad$ مثال $\binom{7}{1} = 7$

۴) $\binom{n}{n-1} = n$ $\quad$ مثال $\binom{6}{5} = 6$

۵) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ $\quad$ مثال $\binom{8}{2} = \frac{8\times 7}{2} = 28$

۶) $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ $\quad$ مثال $\binom{7}{3} = \frac{7\times 6\times 5}{3!} = 35$

۷) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ مثال $\binom{۷}{۳}=\binom{۷}{۴}$ و $\binom{۱۰}{۸}=\binom{۱۰}{۲}$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی از یک مجموعه nعضوی برابر $\binom{n}{r}$ است و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه nعضوی برابر ۲^n است پس:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n$$

مثال کنکور تجربی ۹۹:

به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری‌که دو نفر انان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۷ ۳) ۹۱ ✓ ۴) ۹۵

دو نفر را کنار بگذاریم $\binom{۷}{۵}=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$

یکی از دو نفر را انتخاب شود $\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۴}=۲\times\binom{۷}{۳}=۲\times\frac{۷\times۶\times۵}{۳!}=۲\times۳۵=۷۰$

$۲۱+۷۰=۹۱$ گزینه ۳

مثال کنکور تجربی ۹۸:

گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری‌که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۵۴ ✓ ۴) ۱۶۸

$\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}=۷۰+\binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۲}=۷۰+\frac{۸\times۷\times۶}{۶}+\frac{۸\times۷}{۲}$

$=۷۰+۵۶+۲۸=۱۵۴$ گزینه ۳

$\frac{۸!}{۴!\times۴!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴\times۳\times۲\times۴!}=۷۰$

یادآوری نکات و مفاهیم پایه در احتمال :

۱- پدیده یا آزمایش تصادفی : پدیده ای است که نتیجه آن را نتوان قبل از رخ دادن ، به طور قطعی پیش بینی کرد .

۲- فضای نمونه ای : مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای می نامیم و آن را با S نمایش می دهیم . به هر عضو فضای نمونه یک برآمد می گوئیم .

۳- پیشامد تصادفی : هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد تصادفی در آن فضای نمونه ای می گویند. و آن را A ، B ، C ، ... نشان می دهیم .

۴- اعمال روی پیشامدها : اگر A و B پیشامدهای تصادفی در فضای نمونه ای S باشند :

الف) اجتماع A و B : پیشامد $A \cup B$ را می گوئیم که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد :

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \overset{\text{یا}}{\vee} x \in B\}$$

ب) اشتراک A و B : پیشامد $A \cap B$ را می گوئیم که هر دو پیشامد A و B رخ دهند :

$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

پ) تفاضل A و B : پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد :

$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(از A اشتراک A و B را حذف می‌کنیم.)

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد :

$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

$$(A' = S - A)$$

۵- احتمال رخ دادن یک پیشامد : احتمال وقوع پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}}$$

(تعداد)

دقت کنید برای یافتن $n(A)$ و $n(S)$ در صورت امکان با نوشتن پیشامد و فضای نمونه‌ای، تعداد اعضای آن‌ها را حساب کنید در غیر این صورت از اصل ضرب و جمع، جایگشت و ترکیب استفاده می‌کنیم.

۶- چند پیشامد خاص :

الف) اگر A تهی باشد آنگاه $P(A)=0$ است و پیشامد A غیرممکن می‌گویند.

ب) اگر $A=S$ باشد آنگاه $P(A)=1$ است و پیشامد A حتمی می‌گویند.

ج) اگر $A\cap B=\emptyset$ آنگاه A و B را پیشامدهای ناسازگار می‌گویند.

۷- اصول احتمال

۱) احتمال همیشه عددی بین ۰ و ۱ است یعنی $0\le P(A)\le 1$.

۲) $P(S)=1$

۳) اگر A و B ناسازگار باشند: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

تذکر: اصل سوم قابل تعمیم برای هر تعداد پیشامد است.

۸- چند قانون در احتمال :

۱) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$A\cap B'$

اثبات :

$A=(A-B)\cup(A\cap B)$

زیرا : $(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(B'\cup B)=A\cap U=A$

ازطرفی: $(A-B)\cap(A\cap B)=\emptyset$

زیرا : $(A\cap B')\cap(A\cap B)=A\cap(B\cap B')=A\cap\emptyset=\emptyset$

پس طبق اصل سوم : $P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

۲) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

اثبات:

$A\cup B=B\cup(A-B)$

زیرا: $B\cup(A\cap B')=(B\cup A)\cap(B\cup B')=(A\cup B)\cap U=A\cup B$

از طرفی: $B\cap(A-B)=\phi$

زیرا $B\cap(A\cap B')=(B\cap B')\cap A=\phi\cap A=\phi$

پس طبق اصل سوم: $P(A\cup B)=P(B)+P(A-B)$

طبق قانون دوم: $P(A\cup B)=P(B)+P(A)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

۳) $P(A')=1-P(A)$

اثبات: $1=P(S)=P(A\cup A')=P(A)+P(A')$

$\Rightarrow P(A')=1-P(A)$ یا $P(A)=1-P(A')$

۴) $P(\phi)=0$

اثبات: چون ϕ متمم S است پس: $P(\phi)=1-P(S)=1-1=0$

مثال: اگر $B \subseteq A$ ثابت کنید: الف) $P(A-B)=P(A)-P(B)$ ب) $P(B) \leq P(A)$

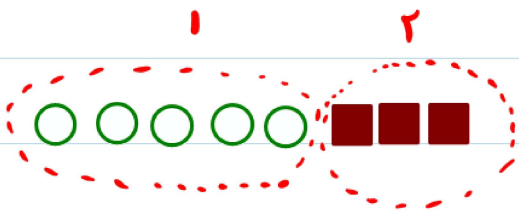
الف) $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \xrightarrow{\text{جایگذاری}} P(A-B)=P(A)-P(\overbrace{A \cap B}^{B})=P(A)-P(B)$

ب) طبق الف $\rightarrow$ $P(A)=\overbrace{P(A-B)}^{\geq 0}+P(B) \Rightarrow P(A) \geq P(B)$

مثال کنکور تجربی ۹۹:

پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{1}{14}$ ۲) $\frac{1}{21}$ ۳) $\frac{1}{28}$ ✓ ۴) $\frac{1}{56}$



$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5! \times 3! \times 2!}{8!}=\frac{\cancel{5!} \times \cancel{6} \times 2}{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!}}=\frac{2}{56}=\frac{1}{28}$ گزینه ۳

مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹:

یک تاس سالم را سه بار به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم، احتمال روشدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

۱) $\frac{13}{36}$ ۲) $\frac{41}{108}$ ۳) $\frac{91}{216}$ ۴) $\frac{31}{72}$

A: حداقل یک بار ۶ آمدن

A': اصلاً ۶ ظاهر نشود $\quad n(A')=5 \times 5 \times 5 = 125$

$P(A')=\frac{125}{6^3}=\frac{125}{216} \rightarrow P(A)=1-\frac{125}{216}=\frac{216-125}{216}=\frac{91}{216}$

گزینه ۳

مثال کنکور تجربی (خارج) ۹۹ :

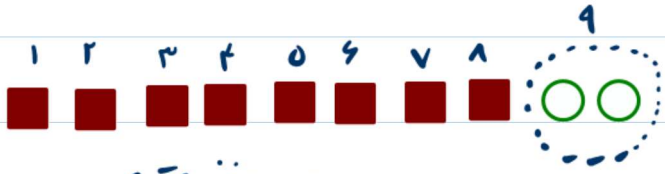
۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ✓ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

روش اول : استفاده از پیشامد متمم

A : دو نفر مورد نظر کنار هم نباشند

A' : دو نفر مورد نظر کنار هم باشند

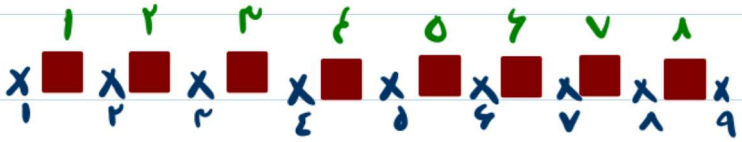


جابجایی دو نفر در بین ۹ جا

$$P(A') = \frac{۹! \times ۲!}{۱۰!} = \frac{۹! \times ۲}{۱۰ \times ۹!} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵} \rightarrow P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵}$$

گزینه ۳

روش دوم : محاسبه مستقیم



جابجایی ۲ نفر از بین ۹ جا

$$P(A) = \frac{P(۹,۲) \times ۸!}{۱۰!} = \frac{\frac{۹!}{(۹-۲)!} \times ۸!}{۱۰!} = \frac{\frac{۹!}{۷!} \times ۸!}{۱۰!}$$

$$= \frac{۹! \times ۸!}{۷! \times ۱۰!} = \frac{۹! \times ۸ \times ۷!}{۷! \times ۱۰ \times ۹!} = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$$

گزینه ۳

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۸}{۱۵}$

نکته: از مجموعه N عضوی $\{n+1, n+2, \dots, n+N\}$ تعداد $\left[\frac{N}{k}\right]$ تا بخش‌پذیر.

$n(S)$

S: اعداد طبیعی دو رقمی $\Rightarrow N = ۹۰ - ۹ = ۹۰$

A: مضرب ۳ : $n(A) = \left[\frac{۹۰}{۳}\right] = [۳۰] = ۳۰$

B: مضرب ۵ $n(B) = \left[\frac{۹۰}{۵}\right] = ۱۸$

$A \cap B$: مضرب ۳ و ۵ $n(A \cap B) = \left[\frac{۹۰}{۳\times ۵}\right] = \left[\frac{۹۰}{۱۵}\right] = ۶$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۰}{۹۰}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۱۸}{۹۰}, \quad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۶}{۹۰}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳۰}{۹۰} + \frac{۱۸}{۹۰} - \frac{۶}{۹۰} = \frac{۴۲}{۹۰} = \frac{۷}{۱۵}$$

گزینه ۳

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

$n(S_{\text{کاش یافته}})$ = دو تاس زوج یکی تاس فرد + هر سه تاس فرد

$= 3\times3\times3 + (3\times3\times3)\times3 = 27 + 81 = 108$

A: حداقل یکی تاس ۲ یا ۴ بیاید

A': اصلا ۲ نیاید

$n(A') = 3\times3\times3 + (\overset{\uparrow}{2}\times\overset{\uparrow}{2}\times3)\times3$ (۲: ۴/۶، ۲: ۲/۶)

$= 27 + 36 = 63$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{63}{108} = \frac{108-63}{108} = \frac{45}{108} = \frac{5}{12}$ گزینه ۱

مثال:

احتمال اینکه فردی از هر دو شرکت A و B خرید کند ۰/۱ است. اگر احتمال خرید این فرد، فقط از شرکت A برابر ۰/۶ باشد، احتمال خرید این فرد از شرکت A کدام است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۹ ۴) ۰/۶

$\begin{cases} P(A-B) = \%6 \\ P(A\cap B) = \%1 \\ P(A) = ? \end{cases}$

$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$

$\%6 = P(A) - \%1$

$P(A) = \%7$

تعاریف احتمال و آمار:

علم احتمال، بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم است و علم آمار، شناختن جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های جمع آوری شده معلوم است.

درس دوم : احتمال گسسته هم شانس :

پیشامد ساده : به هر زیر مجموعه تک عضوی از فضای نمونه‌ای یک پیشامد ساده می‌گوییم.

تعریف : هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S=\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ احتمال برابر داشته باشند

S را فضای نمونه‌ای با احتمال گسسته هم شانس می‌گوییم.

اگر $A=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک پیشامد از S باشد همواره داریم:

۱) $0 \le P(A) \le 1$

۲) $P(S)=1$ یا $P(s_1)+P(s_2)+\dots+P(s_n)=1$

۳) احتمال وقوع A را با جمع احتمال اعضای سمت چپ: $P(A)=P(a_1)+P(a_2)+\dots+P(a_k)$

مثال : تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است.

مطلوب است احتمال اینکه در پرتاب این تاس :

الف) عدد ۲ یا ۴ ظاهر شود. ب) سه عدد اول ظاهر شود.

$P(2)=P(4)=P(6)=3P(1)=3P(3)=3P(5)$

$P(1)=x \Rightarrow x+3x+x+3x+x+3x=1 \Rightarrow 12x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{12}$

($P(1)$ $P(3)$ $P(5)$ $P(2)$ $P(4)$ $P(6)$)

$$P(\{2,4\}) = P(2) + P(4) = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(\{2,4,5\}) = P(2) + P(4) + P(5) = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

مثال: در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c,d\}$ و احتمال وقوع پیشامدی مانند a یا b، $\frac{1}{2}$ و احتمال وقوع c برابر $\frac{1}{8}$ و احتمال وقوع a یا d نیز $\frac{1}{2}$ است. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) a رخ ندهد. ب) هیچ‌کدام از پیشامدهای a و b رخ دهند.

$$P(\{a,b\}) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(a) + P(b) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$P(c) = \frac{1}{8} \ (2), \quad P(\{d,b\}) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(d) + P(b) = \frac{1}{2} \ (4)$$

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \quad (3)$$

$$(1),(3),(4) \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + P(d) = 1 \Rightarrow P(d) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$(4) \rightarrow \frac{3}{8} + P(b) = \frac{1}{2} \rightarrow P(b) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

$$(1) \quad P(a) + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow P(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

الف) $P(a') = 1 - P(a) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

ب) $P(\{a,d\}') = P(\{b,c\}) = P(b) + P(c) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

مثال: کنکور ریاضی تیر ۱۴۰۱

در یک تجربه تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ یک فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله هندسی با قدر نسبت کمتر از واحد، تشکیل دهند و واسطه هندسی آنها $\frac{1}{5}$ باشد، کمترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در S، چقدر است؟

۱) $\frac{2-\sqrt{2}}{5}$ ۲) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ ۳) $\frac{2-\sqrt{3}}{10}$ ۴) $\frac{2-\sqrt{2}}{10}$

$\frac{1}{5r}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}r \Rightarrow \frac{1}{5r}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}r=1 \xrightarrow{\times 5r} 1+r+r^2=5r$

$\Rightarrow r^2-4r+1=0 \Rightarrow r=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$ (کمتر از یک)

$2-\sqrt{3}$ کمترین $\frac{1}{5}r=\frac{1}{5}(2-\sqrt{3})=\frac{2-\sqrt{3}}{5}$

مثال: کنکور ریاضی تیر ۱۴۰۱ خارج

مجموعه $S=\{x,y,z,t,w\}$، فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{x,y\}$، $B=\{x,y,z,t\}$ و $C=\{x,y,w\}$ سه پیشامد از S هستند. اگر $P(A)=\frac{1}{7}$ و $P(B)=\frac{4}{5}$ باشد، مقدار $P(C)$ کدام است؟

۱) $\frac{24}{35}$ ۲) $\frac{16}{35}$ ۳) $\frac{19}{35}$ ✓ ۴) $\frac{11}{35}$

$P(A)=\frac{1}{7} \rightarrow P(x)+P(y)=\frac{1}{7}$

$P(B)=\frac{4}{5} \rightarrow P(x)+P(y)+P(z)+P(t)=\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{1}{7}+P(z)+P(t)=\frac{4}{5}$

$P(z)+P(t)=\frac{4}{5}-\frac{1}{7}=\frac{21-5}{35}=\frac{16}{35}$

$P(S)=1 \rightarrow P(x)+P(y)+P(z)+P(t)+P(w)=1 \Rightarrow \frac{1}{7}+\frac{16}{35}-1=-P(w)$

$P(w)=\frac{-5-16+35}{35}=\frac{14}{35} \Rightarrow P(C)=P(x)+P(y)+P(w)=\frac{1}{7}+\frac{14}{35}=\frac{19}{35}$

درس سوم: احتمال شرطی

احتمال وقوع پیشامد A به شرطی که قبلاً B اتفاق افتاده باشد را به صورت $P(A|B)$ نشان می‌دهیم.

چون احتمال برابر با حاصل تقسیم حالت‌های مطلوب بر کل حالت‌ها است، پس در $P(A|B)$ با توجه به اینکه B قبلاً رخ داده است، فضای نمونه‌ای همان B خواهد بود و تعداد اعضای فضای نمونه از $n(S)$ به $n(B)$ کاهش می‌یابد. پیشامد مطلوب شامل اعضایی از پیشامد B است که خاصیت A را هم دارند پس پیشامد مطلوب شامل اعضایی است که خاصیت $A\cap B$ را دارند پس داریم: $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$

و با تقسیم صورت و مخرج بر $n(S)$ هردو به احتمال تبدیل می‌شوند:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B)\neq 0$$

مثال: اگر در پرتاب تاس، فردی وزن ظاهر شده است احتمال اینکه عدد به دست آمده اول باشد چقدر است؟

$S=\{1,\dots,6\}$

$A=\{2,3,5\}$ $\quad B=\{1,3,5\}$ $\quad A\cap B=\{3,5\}$:روش اول

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{3}$$

روش دوم:

$$P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

مثال: در پرتاب دو تاس سالم و دارای جمع دو عدد رو شده کمتر از ۶ است. احتمال آن را بیابید که هر دو عدد رو شده برابر باشند.

فضای نمونه‌ای شرط

$B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$

$A\cap B=\{(1,1),(2,2)\}$ $\quad P(A|B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

مثال: در خانواده‌ای ۴ فرزندی می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان پسر است. احتمال اینکه این خانواده دقیقاً ۲ پسر داشته باشد چقدر است؟

تعداد حالت‌های نامطلوب

$n(B)=2^4-1=15$

$n(A\cap B)=\binom{4}{2}=6$ $\quad P(A|B)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

مثال: کیسه‌ای حاوی ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. ۴ مهره به تصادف خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که سفید است. احتمال اینکه مهره دومی که خارج می‌کنیم نیز سفید باشد، چقدر است؟

روش اول:

B: مهره اول سفید

A: مهره دوم سفید

$P(B)=\frac{\binom{5}{1}}{\binom{11}{1}}=\frac{5}{11}$

$P(A\cap B)=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{11}{1}\binom{10}{1}}=\frac{\cancel{4}^{2}\times\cancel{5}^{1}}{11\times\cancel{10}^{2}}=\frac{2}{11}$

$P(A|B)=\frac{\frac{2}{11}}{\frac{5}{11}}=\frac{2}{5}$

روش دوم: چون مهره خروجی اول سفید است پس فضای جدید شامل ۹ مهره سفید و ۶ سیاه است.

احتمال اینکه مهره خروجی دوم سفید باشد $\frac{2}{5} = \frac{6}{10}$ است.

مثال: سه دسته‌ی ۱۰ تایی کارت بازی‌های آبی، قرمز و سبز را با هم مخلوط کرده‌ایم. کارت‌های از نوع شماره‌های ۱ تا ۱۰ نوشته شده است. ۵ کارت به تصادف بیرون می‌کشیم. اگر حداقل ۲ تا از این کارت‌ها قرمز باشد به چه احتمالی دو کارت قرمز آبی است؟

B: حداقل ۲ کارت قرمز بیرون بیاید

A: دو کارت قرمز بیرون بیاید

$$p(B) = \frac{\binom{20}{2}\binom{10}{3}}{\binom{40}{5}} \qquad p(A \cap B) = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{3}}{\binom{40}{5}}$$

$$p(A|B) = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{3}}{\binom{20}{2}\binom{10}{3}}$$

برای محاسبه $p(B)$ سه حالت داریم ۲ یا ۳ یا ۵ کارت قرمز باشند پس:

$$p(A|B) = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{3}}{\binom{10}{5} + \binom{10}{4}\binom{20}{1} + \binom{10}{3}\binom{20}{2}}$$

نکته:

۱) $p(A'|C) = 1 - p(A|C)$

۲) $p(A \cup B|C) = p(A|C) + p(B|C) - p(A \cap B|C)$

۳) $p(A - B|C) = p(A|C) - p(A \cap B|C)$

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A) = ۰/۴$ ، $P(B \mid A) = ۰/۲۵$ و $P(B) = ۰/۳$ باشد، $P(B \mid A')$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B-A)}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A')}$$

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - ٪۴ = ٪۶$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow ٪۲۵ = \frac{P(A \cap B)}{٪۴} \rightarrow P(A \cap B) = ٪۴ \times ٪۲۵ = ٪۱۰$$

$$\Rightarrow P(B|A') = \frac{٪۱۳ - ٪۱۰}{٪۶} = \frac{٪۳}{٪۶} = \frac{۱}{۲}$$ گزینه ۲

مثال کنکور تجربی ۹۸ :

احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

۱) ۰/۷۴ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

$$\begin{cases} P(A) = ٪۷ & P(B|A) = ٪۸ \\ P(B) = ٪۶ & P(A \cup B) = ? \end{cases}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow ٪۸ = \frac{P(A \cap B)}{٪۷} \rightarrow P(A \cap B) = ٪۷ \times ٪۸ = ٪۵۶$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ٪۷ + ٪۶ - ٪۵۶ = ۱٫۳ - ٪۵۶ = ٪۷۴$$ گزینه ۱

مثال: کنکور ریاضی دی ۱۴۰۱

پیشامدهای ناسازگار A و B از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر $P(A) = \frac{۱}{۶}$ و $P(B) = \frac{۱}{۴}$ باشد، مقدار $P(B' \mid A')$ کدام است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۵۵ ۴) ۰/۷۵

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} \qquad P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$A' \cap B' = (A \cup B)' \Rightarrow P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

نیازی نیست

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{12-2-3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$P(B'|A') = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{7 \times 6}{12 \times 5} = \frac{7}{10} = \%70$$

مثال: کنکور ریاضی ۱۴۰۱

در یک کیسه ۱۶ گوی به شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. دو گوی به‌طور متوالی و بدون جایگذاری، به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم شماره گوی دوم از شماره گوی اول کمتر است، با کدام احتمال شماره گوی اول ۱۶ است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ✓ ۴) $\frac{1}{4}$

$$B = \{\underbrace{(2,1)}_{1}, \underbrace{(3,1),(3,2)}_{2}, \underbrace{(4,1),(4,2),(4,3)}_{3}, \dots, \underbrace{(16,1),(16,2),\dots,(16,15)}_{15}\}$$

$$n(B) = \frac{15 \times 16}{2} = 120 \quad , \quad A \cap B = \{(16,1), \dots, (16,15)\} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

قانون ضرب احتمال :

از رابطه احتمال شرطی $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ برای ما سبب $P(A\cap B)$ استفاده می‌کنیم :

$$P(A\cap B)=P(B)\times P(A|B)=P(A)\times P(B|A)$$

از این رابطه در مسائلی استفاده می‌کنیم که دو پیشامد A و B پشت سر هم رخ دهند.

مثال : در ظرفی ۳ مهره آبی، ۵ مهره قرمز و ۷ مهره سبز وجود دارد.

الف) اگر ۲ مهره به ترتیب و بدون جایگذاری از آن برداریم احتمال اینکه اولی سبز و دومی قرمز باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه اولی و دومی قرمز باشند را بیابید.

الف) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\frac{7}{15}\times\frac{5}{14}=\frac{1}{6}$ (اول سبز، دوم قرمز)

ب) $P(A\cap B)=\frac{5}{15}\times\frac{4}{14}=\frac{2}{21}$

نکته : قانون ضرب احتمال را می‌توانیم به ۳ یا تعداد بیشتری پیشامد تعمیم دهیم :

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)$$

مثال : به ترتیب و بدون جایگذاری سه عدد از مجموعه $\{1,2,\dots,12\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه سه عدد

به ترتیب بر ۱۱، ۷ و ۲ بخش‌پذیر باشند، چقدر است؟

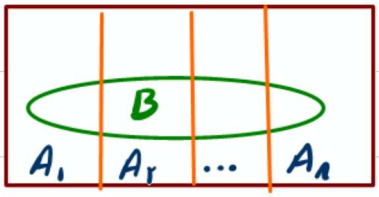
۱) $\frac{۱}{۴۴۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۲۰}$ ✓ ۳) $\frac{۱}{۱۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۵۵}$

از ۱ تا ۱۲، یک عدد ۱۱، یک عدد ۷ و شش عدد ۲ داریم:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۱}{۱۱} \times \frac{۶}{۱۰} = \frac{۱}{۲۲۰}$$

احتمال کل:

فرض کنید پیشامدهای A_1 و A_2 و ... و A_n مانند شکل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد. داریم:



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$

که در آن $(B \cap A_i)$ و $(B \cap A_j)$ ناسازگارند. پس:

برای خلاصه‌نویسی جمع عبارت‌ها ←

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

ولی طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(B \cap A_i) = P(A_i)\, P(B|A_i)$$

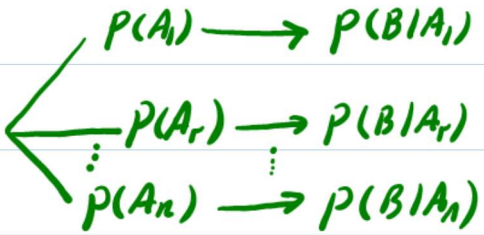
پس می‌توان $P(B)$ را این‌طور بنویسیم:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

$$\Rightarrow \quad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

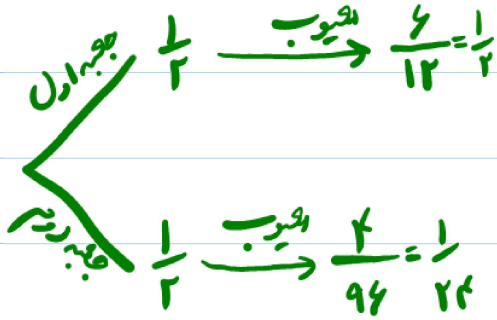
به رابطه بالا قانون احتمال کل می‌گوییم.

نکته مهم: برای ساده‌تر شدن محاسبه $P(B)$ بهتر است از نمودار درختی استفاده کنیم که در آن شاخه‌های اصلی درخت $A_1, \dots, A_n$ هستند.



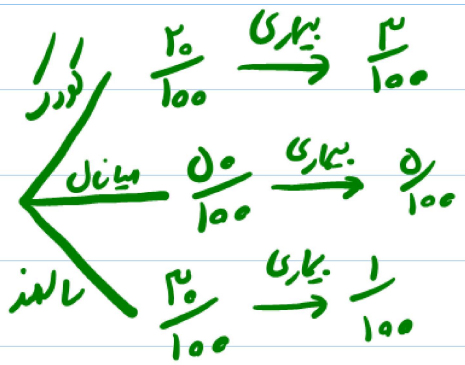
برای بدست آوردن $P(B)$، احتمال هر شاخه را در هم ضرب و در آخر همه را با هم جمع می‌کنیم.

مثال: دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبهٔ دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟



$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{48} = \frac{13}{48}$$

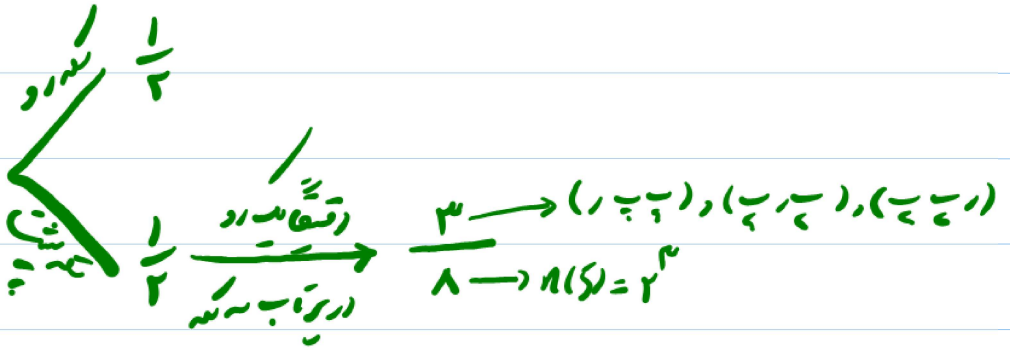
مثال فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به‌ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟



$$P(B) = \frac{20}{100}\times\frac{3}{100} + \frac{50}{100}\times\frac{5}{100} + \frac{30}{100}\times\frac{1}{100} = \frac{60+250+30}{10000} = \frac{340}{10000}$$

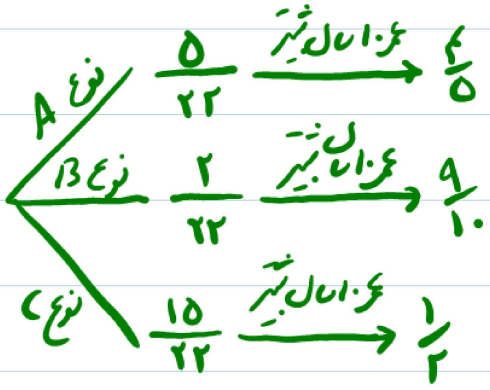
$$= \frac{34}{1000} = \frac{17}{500}$$

مثال: یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟



$$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

مثال: در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$، برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟



$$P(B)=\frac{۵}{۲۲}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۲۲}\times\frac{۹}{۱۰}+\frac{۱۵}{۲۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۲۰}{۱۱۰}+\frac{۱۸}{۲۲۰}+\frac{۱۵}{۴۴}$$

$$=\frac{۴۰+۱۸+۷۵}{۲۲۰}=\frac{۱۳۳}{۲۲۰}$$

مثال: مدرسهٔ A سه برابر مدرسهٔ B دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همهٔ دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم :

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسهٔ A و با چه احتمالی از مدرسهٔ B است؟ ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

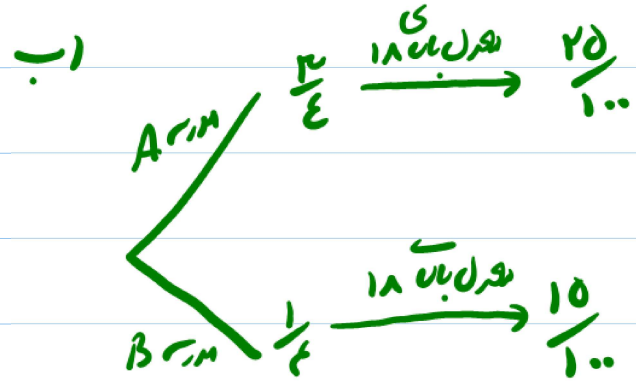
الف) $n(A)=۳n(B)$ ، $n(A)+n(B)=n(S)$

$$\Rightarrow ۳n(B)+n(B)=n(S)\longrightarrow ۴n(B)=n(S)\longrightarrow n(B)=\frac{n(S)}{۴}$$

$$n(A)=۳n(B)=\frac{۳n(S)}{۴}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{۳n(S)}{۴}}{n(S)}=\frac{۳}{۴}\ ,\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\frac{n(S)}{۴}}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

ب)

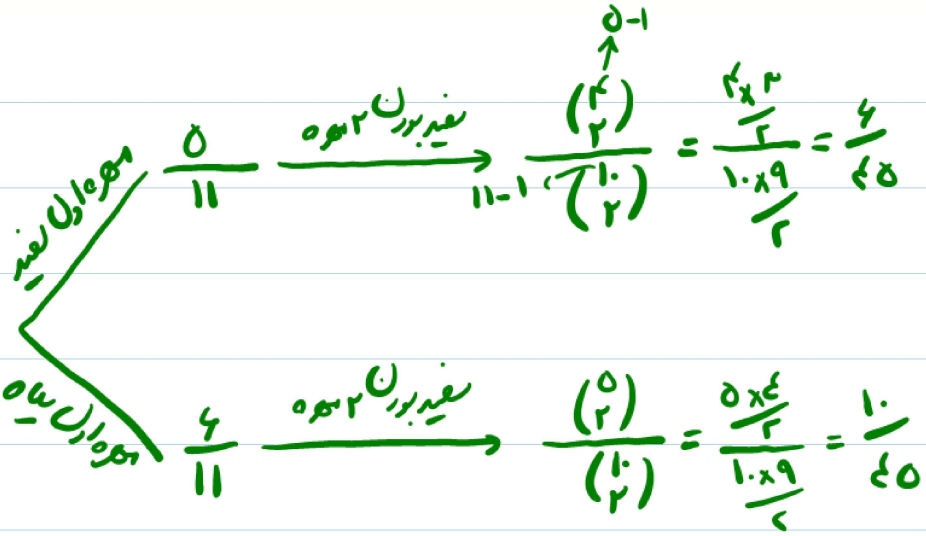


$$P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{25}{100}+\frac{1}{4}\times\frac{15}{100}=\frac{75}{400}+\frac{15}{400}=\frac{90}{400}=\frac{9}{40}$$

مثال کنکور تجربی ۹۸ :

در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می‌کنیم. سپس از بین بقیهٔ مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهرهٔ اخیر، سفید است؟

۱) $\frac{1}{11}$ ۲) $\frac{2}{11}$ ۳) $\frac{4}{11}$ ۴) $\frac{5}{22}$



$$\frac{5}{11}\times\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{\frac{4\times3}{2}}{\frac{10\times9}{2}}=\frac{6}{45}$$

$$\frac{6}{11}\times\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{\frac{5\times4}{2}}{\frac{10\times9}{2}}=\frac{10}{45}$$

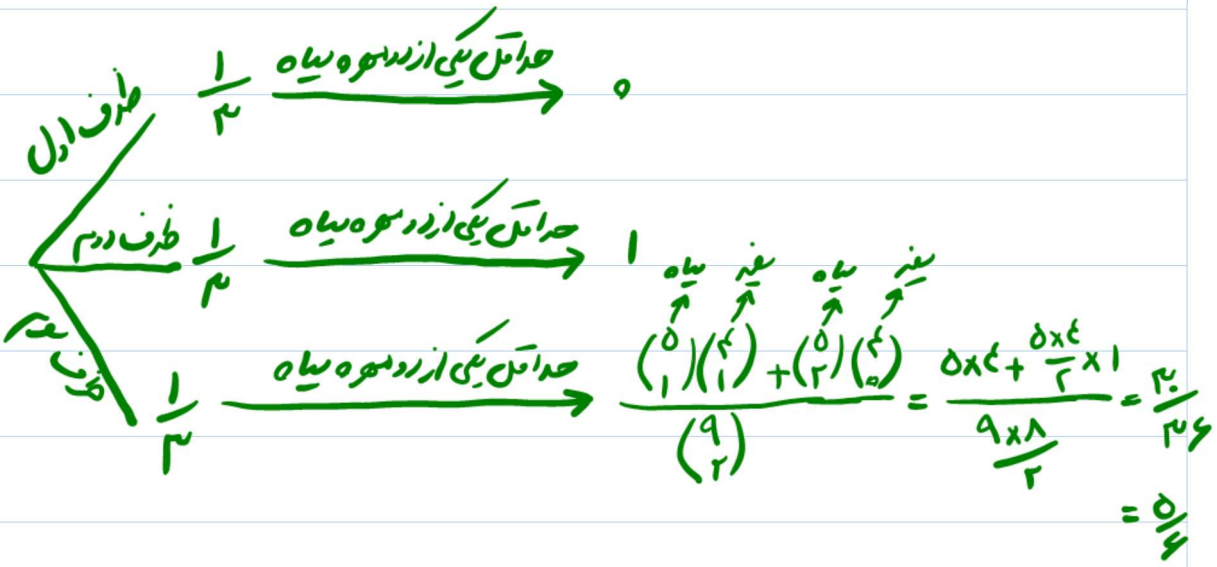
$$P(B)=\frac{5}{11}\times\frac{6}{45}+\frac{6}{11}\times\frac{10}{45}=\frac{2}{33}+\frac{4}{33}=\frac{6}{33}=\frac{2}{11}$$

گزینه ۲ :

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهرهٔ سفید، در دومی ۹ مهرهٔ سیاه و در سومی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$



$P(B) = \frac{۱}{۳}\times۰ + \frac{۱}{۳}\times۱ + \frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۹} = \frac{۱}{۳} + \frac{۵}{۱۸} = \frac{۱۱}{۱۸}$ گزینه ۲

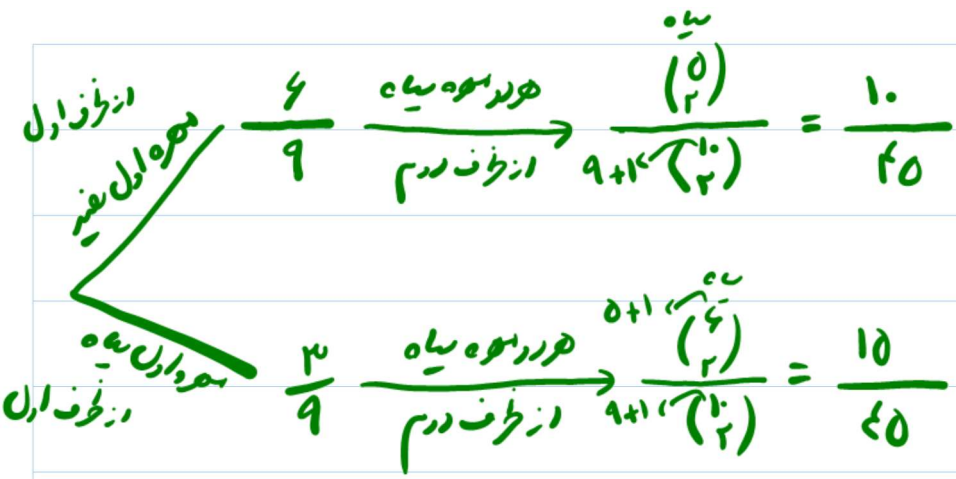
مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹

در جعبهٔ اول ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه، و در جعبهٔ دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. از جعبهٔ اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبهٔ دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۳۴}{۴۵}$ ۳) $\frac{۳۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۷}$

B: حداقل یکی از دو مهره سفید

B′: هر دو مهره سیاه



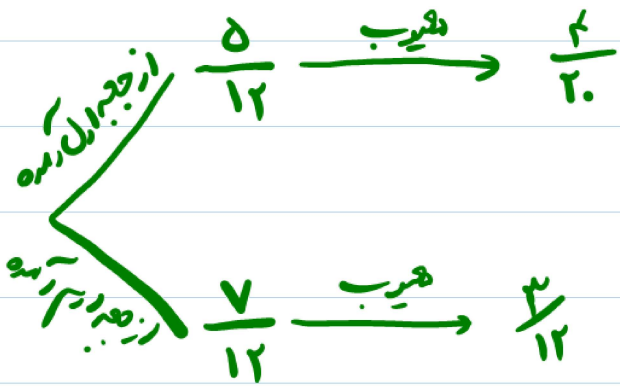
$$P(B') = \frac{2}{3}\times\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{4}{27} + \frac{1}{9} = \frac{7}{27}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$ گزینه ۱

مثال کنکور ریاضی ۹۸

در دو جعبه به‌ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب است؟

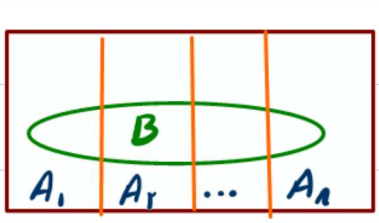
۱) $\frac{5}{24}$ ۲) $\frac{11}{48}$ ۳) $\frac{13}{48}$ ۴) $\frac{7}{24}$



$$P(B) = \frac{5}{12}\times\frac{4}{20} + \frac{7}{12}\times\frac{3}{12} = \frac{1}{12} + \frac{7}{48} = \frac{11}{48}$$ گزینه ۲

قانون بیز:

قاعده بیز احتمال‌های پس از مشاهدات را ایجاد می‌کند و تغییر احتمالی که نسبت به احتمالات پیش از مشاهدات را نشان می‌دهد.



فرض کنید از میان پیشامدهای A_1 تا A_n که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند یکی را به تصادف انتخاب دهنده‌ای از آن را به دلخواه انتخاب کنیم و ببینیم که عضو انتخاب شده دارای خاصیت B است. احتمال اینکه عضو انتخاب شده از مجموعه‌های A_1، A_2، ... یا A_n باشد:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)}$$

تذکر: در قاعده بیز، سوچ کردن رابطه احتمال کل است و صورت کسر قسمتی از سوچ است که در آن A_i است.

مثال: جعبه‌های زیر شامل مهره‌های سفید و سیاه هستند. یکی از جعبه‌ها را انتخاب و از آن مهره‌ای بیرون می‌آوریم. اگر این مهره سفید باشد، احتمال اینکه از جعبه سوم خارج شده باشد را بیابید.



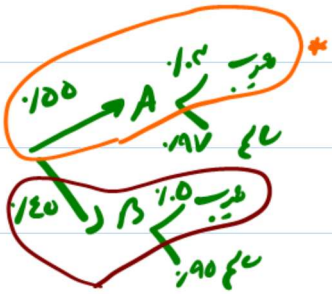
فرمول بیز

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{7}$$

مثال: در یک شرکت تولیدی ۵۵ درصد کالاها محصول دستگاه A با احتمال ۴ درصد معیوب، ۴۵ درصد کالاها محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و ببینیم که معیوب است با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟

۱) $\frac{11}{26}$ ۲) $\frac{6}{14}$ ۳) $\frac{7}{14}$ ۴) $\frac{15}{26}$



ابتدا شاخه * را به کل روش خوب می‌یابیم:

$$P(A|M) = \frac{0/55\times 0/04}{0/55\times 0/04 + 0/45\times 0/05} = \frac{\frac{22}{1000}}{\frac{49}{1000}}$$

$$= \frac{11}{26}$$

مثال: یکی از فرزندان خانواده‌ای را که ۲ فرزند دارد انتخاب کرده‌ایم. اگر او هم خواهر و هم برادر کوچک‌تر از خود داشته باشد، احتمال اینکه فرزند اول خانواده باشد چقدر است؟ ۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{7}$

A_i : انتخاب فرزند i ام $i=1,2,3,4$

B : فرزند انتخاب شده هم‌اندازه هم‌وزن کوچک‌تر دارد

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_4)P(B|A_4)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{6}{8}}{\frac{1}{4}\times\frac{6}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times0+\frac{1}{4}\times0}$$

مثال: کنکوری ۱۴۰۱

سه کیسه یکسان، هرکدام شامل ۱۰ گوی دراختیار داریم. کیسه اول دارای گوی‌های سبز، کیسه دوم دارای گوی‌های قرمز و کیسه سوم دارای ۲ گوی قرمز و ۸ گوی سبز است. کیسه‌ای به تصادف انتخاب کرده، یک گوی خارج می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. با کدام احتمال همه گوی‌های آن کیسه قرمز است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{5}{6}$ ✓

۰ قرمز $\frac{1}{2}$

۱ قرمز $\frac{1}{2}$

کیسه سوم: قرمز $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

$$P(\text{کیسه سوم}|\text{قرمز})=\frac{\frac{1}{2}\times1}{\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{6}{10}}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته

می‌گوییم دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، به شرطی که وقوع هرکدام بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه:

$$P(A|B)=P(A) \quad , \quad P(B|A)=P(B)$$

در نتیجه: دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند اگر و فقط اگر $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

دقت داشته باشید اگر A و B مستقل باشند آنگاه A و B'، A' و B، A' و B' هم مستقل‌اند.

نکته مهم: اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار باشند آنگاه A و B مستقل نیستند.

مثال: در ظرفی ۴ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۱ مهره سبز موجود است و در ظرف دیگر ۶ مهره سفید و ۲ مهره سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره متفاوت است؟

$$P=\underbrace{\frac{4}{10}\times\frac{2}{8}}_{\text{اول سفید دوم سبز}}+\underbrace{\frac{5}{10}\times\frac{1}{8}}_{\text{اول سیاه دوم سبز}}+\underbrace{\frac{1}{10}\times\frac{6}{8}}_{\text{اول سبز دوم سفید}}=\frac{54}{80}=\frac{27}{40}$$

مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹:

در دو پیشامد مستقل **A** و **B**، اگر $P(A \cap B) = ۰/۱$، $P(A \cup B) = ۰/۶$ و با فرض $P(B') > P(B)$، احتمال وقوع پیشامد **B**، کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

مستقل $\rightarrow P(A)\times P(B)$

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

مجموع ریشه‌ها

$٪۶ = P(A)+P(B)-٪۱ \rightarrow P(A)+P(B) = ٪۷$

$P(A\cap B) = P(A)\times P(B) = ٪۱$

ضرب ریشه‌ها (P)

یادآوری: $x^2 - Sx + P = 0$

$x^2 - ٪۷x + ٪۱ = 0 \rightarrow (x - ٪۵)(x - ٪۲) = 0$

$\begin{cases} x = ٪۲ \\ x = ٪۵ \end{cases}$ $\xrightarrow{P(B')>P(B)}$ $P(B) = ٪۲$ ، $P(A) = ٪۵$

مثال کنکور ریاضی خارج ۱۴۰۱

فرض کنید علی و حسن دو کماندار باشند که با احتمال‌های ۰/۶ و ۰/۴ به هدف می‌زنند. اگر هر کدام از آنها یک بار تیراندازی کنند و بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده است، با کدام احتمال علی به هدف زده است؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۹}$ ✓ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲۵}$

$P(A\cup B) = ٪۶ + ٪۴ - (٪۶ \times ٪۴) = ۱ - ٪۲۴ = ٪۷۶$

$P(A \mid A\cup B) = \frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P(A)}{P(A\cup B)} = \frac{٪۶}{٪۷۶} = \frac{۱۵}{۱۹}$

تذکر: سه پیشامد A، B و C را مستقل گوییم هرگاه:

1) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

2) $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$

3) $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$

4) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

نکته: انتخاب‌های با جایگذاری مستقل و بدون جایگذاری وابسته‌اند.

مثال: در کدام بسته A و B مستقل از هم هستند؟

الف) از درون جعبه به تواتی و بدون جایگذاری از جعبه‌ای شامل ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه خارج کنیم. $\begin{cases} A: \text{سفید در اولی} \\ B: \text{سیاه در دومی} \end{cases}$

ب) از درون جعبه به تواتی و با جایگذاری از جعبه‌ای شامل ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه خارج کنیم $\begin{cases} A: \text{سفید در اولی} \\ B: \text{سیاه در دومی} \end{cases}$

الف) $P(A) = \frac{6 \times 9}{10 \times 9} = \frac{6}{10}$ $\quad P(B) = \frac{4 \times 9}{10 \times 9} = \frac{4}{10}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{6 \times 4}{10 \times 9} = \frac{24}{90}$

$P(A) \times P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \neq \frac{24}{90}$ مستقل نیستند

ب) $P(A) = \frac{6 \times 10}{10 \times 10} = \frac{6}{10}$ $\quad P(B) = \frac{10 \times 4}{10 \times 10} = \frac{4}{10}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{6 \times 4}{10 \times 10} = \frac{24}{100}$

$P(A) \times P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$ مستقل‌اند.