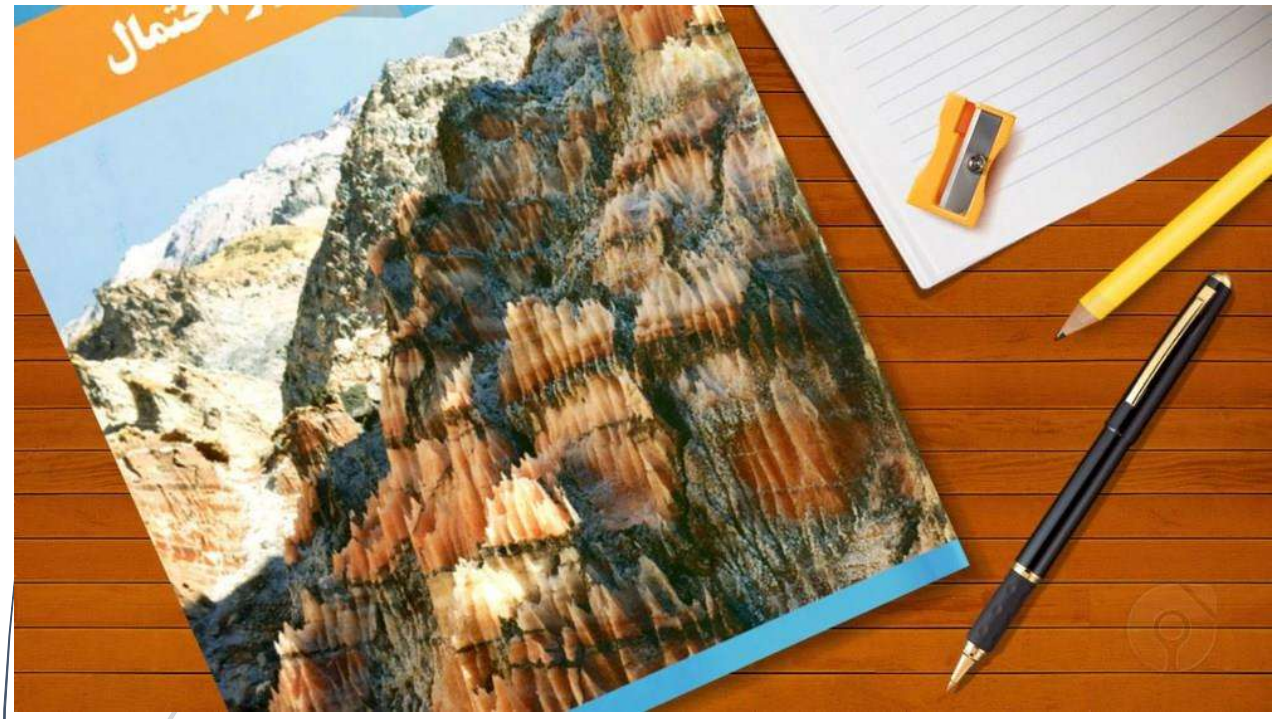
جزوه آمار و احتمال

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات



مولف: سیدابوالفضل فاضلیان

تعریف منطق ریاضی :

دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله هایی است که در ریاضی به کار برده می شود.

این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال ها می پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می کند.

تعریف گزاره :

به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست (راست) یا نادرست (دروغ) باشد گزاره می گوییم.

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می گوییم.

ارزش گزاره درست را با حرف (د) یا T و ارزش گزاره نادرست را با حرف (ن) یا F نشان می دهیم.

نکته :

۱) یک گزاره نمی تواند هم درست و هم نادرست باشد یعنی هر گزاره فقط یک ارزش دارد.

۲) جمله های پرسشی ،امری و عاطفی گزاره محسوب نمی شوند زیرا خبری را بیان نمی کنند.

۳) معمولاً گزاره ها را با حروف $p, q, r, \ldots$ نمایش می دهیم.

مثال : از بین جمله های زیر گزاره ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

۱) افلاطون فیلسوف یونانی است. — **گزاره درست**

۲) $۳+۵>۶$ — **گزاره درست**

۳) عدد ۱۹۱۷ اول است. — **گزاره نادرست**

۴) چه باران شدیدی می آید. — **گزاره نیست**

۵) $Q \subset R$ — **گزاره نادرست**

۶) آیا $۳+۲$ برابر ۵ است؟ گزاره نیست

۷)در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید ، برابر با $\frac{۱}{۳}$ است. گزاره درست

۸) عدد $۵^{۹}+۸$ اول است. گزاره نادرست

$$۵^{۹}+۸=(۵^{۳})^{۳}+۲^{۳}=(۵^{۳}+۲)((۵^{۳})^{۲}-۵^{۳}\times۲+۲^{۲})$$
$$=(۵^{۳}+۲)(۵^{۶}-۲\times۵^{۳}+۴)$$

حدس گلد باخ :

هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.

$۴=۲+۲$
$۶=۳+۳$
$۸=۳+۵$

این حدس تا به حال اثبات نشده ولی مثالی هم برای نقض آن پیدا نشده است. در هر صورت این جمله را می توان گزاره در نظر گرفت چون بالاخره یکی از ارزشهای درستی یا نادرستی را دار است.

جدول ارزش گزاره ها

هر گزاره می تواند یکی از ارزش های درست یا نادرست را داشته باشد، پس اگر n گزاره داشته باشیم، بنا به اصل ضرب ارزش این گزاره ها ۲^{n} حالت مختلف می تواند داشته باشد. می توانیم جدولی با n ستون و ۲^{n} سطر در نظر بگیریم که هر سطر آن متناظر با یکی از این ۲^{n} حالت باشد.

جدول ارزش یک گزاره :

p
د
ن

جدول ارزش دو گزاره :

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

جدول ارزش سه گزاره :

r	q	p
د	د	د
ن	د	د
د	ن	د
ن	ن	د
د	د	ن
ن	د	ن
د	ن	ن
ن	ن	ن

مثال:

عبارت های خبری زیر را در نظر بگیرید.

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگری برابر عدد شش است. $(۳x+۲y=۶)$

۱)ارزش کدام یک از جملات بالا را می توانید تعیین کنید؟

هیچکدام

۲)اگر به جای متغیر در جمله الف) عدد سه قرار دهیم ارزش آن چگونه است؟

گزاره درست

اگر ۴ قرار دهیم چطور؟

گزاره نادرست

تعریف گزاره نما :

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره نما نامیده می شود.

گزاره نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته درآنها ، یک متغیره، دو متغیره و...می نامیم.

مثال :

در گزاره نماهای مثال قبل به جای متغیرها مقادیری قرار دهید که یکبار به گزاره درست و یکبار به گزینه نادرست تبدیل شوند.

۱)در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۲) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگری برابر عدد شش است. $(۳x+۲y=۶)$

حل ۱) $A=\{۲,۴,۶\}$ گزاره درست و اگر $A=\{۱,۵\}$ گزاره نادرست می شود.

حل۲) $x=۲, y=۰$ گزاره درست و اگر $x=۱, y=۲$ گزاره نادرست می شود.

دامنه متغیر گزاره نما :

در هر گزاره نما ،به مجموعه مقادیری که می توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا گزاره نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره نما می گویند و با D نمایش می دهند.

مجموعه جواب گزاره نما :

در هرگزاره نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آنها ، گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره نما می گویند و با S نمایش می دهند.

مثال:

دامنه متغیر هریک از گزاره نماهای زیر مجموعه اعداد صحیح است. مجموعه جواب هریک را مشخص کنید.

۱) x **مضرب ۷ است.**

$x = 7k \Rightarrow S = \{0, \pm 7, \pm 14, \dots\}$

۲) $15x^2 - 7x - 8 = 0$

$15 - 7 - 8 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{-8}{15}$

$S = \{1\}$

۳) a **یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.**

$a = 5k + 1$

$S = \{\dots, -4, 1, 6, 11, \dots\}$

۴) $\{n(n+1) = 0 \mid n \in W\}$

$n(n+1) = 0 \Rightarrow n = 0, n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1$

$S = \{0\}$

ترکیب گزاره ها

اگر دو یا چند گزاره را با استفاده از رابط های گزاره ای (ادات ربط) مانند (یا) ، (و)،(اگر...آنگاه...) و ... به هم وصل کنیم ، یک گزاره مرکب ساخته می شود.

ارزش گزاره های مرکب به ارزش گزاره های اولیه و نوع ادات ربط به کار رفته در آنها بستگی دارد.

۱– نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می شود و آن را (چنین نیست که p) می خوانیم.

به علامت $(\sim)$ ناقض می گوییم.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال :

نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) $۳ \leq ۴$

$۴ > ۳$

ب) ۲ عددی زوج یا عدد π گویاست

***چنین نیست که(دو عددی زوج یا عدد π گو یاست.)**

نکته:

اگر دو گزاره p و q هم ارزش باشند می گوییم هم ارز منطقی هستند و می نویسیم :

$$p \equiv q$$

مثال : ثابت کنید $\sim(\sim p) \equiv p$

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

۲– ترکیب فصلی دو گزاره

هرگاه p, q دو گزاره باشند، گزاره مرکب (p یا q) را که به صورت $p \vee q$ می نویسند ، ترکیب فصلی دو گزاره می گوییم. در اینجا به رابط منطقی $(\vee)$ فاصل گفته می شود.

مثال : ۹۱ عددی مرکب است یا ۱۳فرد است.

۳ عددی اول نیست یا ۵ عددی گویاست.

جدول ارزش ترکیب فصلی دو گزاره

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال:

جدول ارزش گزاره مرکب $p \vee \sim p$ را رسم کنید.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
د	ن	د
ن	د	د

۳– ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p, q دو گزاره باشند، گزاره مرکب (p و q) را که به صورت $p \wedge q$ می نویسند ، ترکیب عطفی دو گزاره می گوییم. در اینجا به رابط منطقی $(\wedge)$ عاطف گفته می شود.

مثال : ۱۷ اول است و ۲۵ مربع کامل است.

۳>۵ و ۱۵ مضرب ۴ است.

جدول ارزش ترکیب عطفی دو گزاره

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال:

جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هفته هفت روز دارد	ماه شهریور ۳۱ روز دارد	د	د	د	د
۷ زوج است	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن	د	د	ن
۲ عددی اول است	$۴ > ۹$	د	ن	د	ن
$۳ + ۴ = ۸$	$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$	ن	ن	ن	ن
۷ – اول است	۸ عددی مرکب است	ن	د	د	ن

مثال: با استفاده ازجدول ارزش ها نشان دهید که گزاره های $(\sim p \wedge \sim q)$ و $\sim (p \vee q)$ هم ارزند.

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

تمرین: با کامل کردن جدول ارزش ها نشان دهید که گزاره های

$\sim (p \wedge q)$ و $(\sim p \vee \sim q)$ هم ارز منطقی هستند.

نکته :

در منطق ریاضی به هم ارزی های زیر قوانین دمورگان می گویند.

۱) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

۲) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

۴– ترکیب شرطی دوگزاره

هرگاه p, q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q)$ را ترکیب شرطی آنها می گوییم و آن را چنین می خوانیم :

(اگر P آنگاه q) و (P شرط کافی برای q) و (P شرط لازم برای q است.)

در این ترکیب شرطی P را مقدم یا فرض و q را تالی یا حکم می نامیم.

درهندسه با قضیه های شرطی زیادی روبه رو شده اید مانند قضیه تالس و...

جدول ارزش ترکیب شرطی دو گزاره

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان طور که در جدول می بینید اگر ارزش مقدم نادرست باشد بدون توجه به اینکه تالی درست یا نادرست است ارزش گزاره شرطی همواره درست است. در این حالت می گوییم ارزش گزاره شرطی به انتفای مقدم درست است.

مثال:

با کامل کردن جدول زیر نشان دهید که گزاره های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارز منطقی اند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

نکته :

گزاره $p \Rightarrow q$ را در نظر بگیرید.

$q \Rightarrow p$ را عکس ترکیب شرطی و $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض

ترکیب شرطی می نامیم.

مثال:

با کامل کردن جدول زیر نشان دهید ،هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

مثال :

ثابت کنید هرگاه n عدد صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آنگاه n هم مضرب ۳ است.

اثبات : به جای اثبات خود حکم، عکس نقیض آن را ثابت می کنیم یعنی:

اگر n مضرب ۳ نباشد آنگاه n^2 هم مضرب ۳ نیست.

اگر n مضرب ۳ نباشد آنگاه باقی مانده آن بر ۳ دو یا یک است:

$$n = 3k+1 \Rightarrow n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1 = 3q+1$$

$$n = 3k+2 \Rightarrow n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 9k^2+12k+3+1 = 3(3k^2+4k+1)+1$$
$$= 3q+1$$

مثال: با استفاده از جدول ارزش گزاره ها نشان دهید :

الف $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

حل الف :

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

ب) $p \vee F \equiv p$

حل ب :

p	F	$p \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

۴- ترکیب دو شرطی دو گزاره

هرگاه p ,q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را ترکیب دو شرطی آنها می گوییم و به صورت $(p \Leftrightarrow q)$ می نویسیم و آن را چنین می خوانیم :

(اگر p آنگاه q و برعکس) ، (p شرط لازم و کافی برای q است) و (p اگر و تنها اگر q)

مثال : ۱)اگر نقطه ای روی عمود منصف یک پاره خط باشدآنگاه از دو سر پاره خط به یک فاصله است و برعکس

۲) در پرتاب یک تاس شرط لازم و کافی برای اینکه احتمال پیشامد A یک باشد آن است که $S=A$

مثال:

جدول ارزش گزاره مرکب ترکیب دو شرطی را از گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

جدول ارزش ترکیب دو شرطی

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال:

جدول ارزش گزاره مرکب ترکیب دو شرطی $(p \vee q) \Leftrightarrow q$ را رسم کنید.

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

چند هم ارزی مهم:

۱) قوانین جا به جایی

$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

۲) قوانین شرکت پذیری

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

۳)قوانین توزیع پذیری

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

اثبات هم ارزی ۲)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

۴) نقیض گزاره شرطی:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن

۵) نقیض گزاره دو شرطی:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن

۶) قوانین جذب:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$
$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

سورها

به جملات زیر توجه کنید :

الف) هر مربع، مستطیل است– برای هر عدد حقیقی داریم : $x + 0 = x$

ب)برخی از لوزی ها مربع هستند–وجود دارد عدد حقیقی که مکعب آن برابر با دو باشد.

عبارت((برای هر))،((به ازای هر)) یا ((به ازای جمیع مقادیر))را سور عمومی می گوییم و با نماد $\forall$ نمایش می دهیم.

عبارت ((وجود دارد)) یا ((به ازای بعضی مقادیر))را سور وجودی می گوییم.

نماد سور وجودی $\exists$ است.

نکته :

سورها قبل از گزاره نماها قرار می گیرند و گزاره هایی با ارزش درست یا نادرست تولید می کنند.

مثال: جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
مربع هر عدد حقیقی، بزرگتر مساوی صفر است.	$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$
همه اعداد زوج مضرب دو هستند.	$\forall a \in E : a = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$
وجود دارد عدد اولی که مضرب دو باشد.	$\exists p \in P : p = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	$\exists x \in O : x \in P$

ارزش گزاره سوری:

الف) گزاره سوری $\forall x \in A : p(x)$ **درست است هرگاه مجموعه** A

برابر با مجموعه جواب گزاره نما باشد ، یعنی : $A = D$ **و هیچ مثال نقضی در مجموعه** A **برای** $p(x)$ **وجود نداشته باشد.**

ب) گزاره سوری $\exists x \in A : p(x)$ درست است هرگاه مجموعه جواب گزاره نما ناتهی و زیرمجموعه A باشد یعنی : $\varnothing \neq D \subseteq A$

به عبارت دیگر گزاره نما برای حداقل یک عضو مجموعه A درست باشد.

مثال:
گزاره های زیر را با استفاده از نمادهای سور عمومی و وجودی بنویسید و ارزش هریک را مشخص کنید.

۱) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است. $\forall n \in \mathbb{N} : (n \in O \vee n \in E)$

ارزش : درست

۲)عدد صحیحی وجود دارد مانند x به طوریکه $1-2x > 5$

$\exists x \in \mathbb{Z} \; ; \; 1-2x > 5$

$1-2x > 5 \Rightarrow -2x > 4 \Rightarrow x < -2$ ارزش: درست زیرا

۳) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش ، بزرگ تر یا مساوی ۲ است.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \; ; \; x + \frac{1}{x} \geqslant 2$

$x = -1 \Rightarrow -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2 \geqslant 2$ ارزش نادرست: مثال نقض :

۴) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم : $x^3 = x$

$\exists x \in \mathbb{R} \; ; \; x^3 = x$

ارزش درست : $S = \{0 \, و \, \pm 1\}$

مثال:
هرگاه $A=\{x\in Z \mid 0<x\leq 5\}$ **دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.**

۱) $\exists x\in A;\ x+3\leq 4$ درست :

$x+3\leq 4 \Rightarrow x\leq 1 \Rightarrow S=\{1\}\neq\emptyset$

۲) $\forall x\in A;\ x+1\geq 6$

نادرست:

$x+1\geq 6 \Rightarrow x\geq 5$

فقط برای ۱ عضو از دامنه یعنی ۵ صحیح است و برای بقیه نادرست است.

نقیض سورها

نقیض گزاره های دارای سور عمومی : $\sim(\forall x; p(x))\equiv \exists x; \sim p(x)$

نقیض گزاره های دارای سور وجودی : $\sim(\exists x; p(x))\equiv \forall x; \sim p(x)$

مثال : ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید. سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x\in\mathbb{R}; \dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$

نادرست است زیرا برای $x=1$ عبارت تعریف نمی شود

نقیض $\exists x\in\mathbb{R}$; $\dfrac{x^2-1}{x-1}\neq x+1$

ب) $\forall n\in\mathbb{N}; \left(2^{2^n}+1\right)\in P$

نادرست است زیرا

برای $n=5$ داریم :

$2^{2^5}+1 = 4294967297 = 641\times 6700417$

نقیض : $\exists n\in\mathbb{N}$; $(2^{2^n}+1)\notin P$.

پ) $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$

نادرست است زیرا برای $x = -1$ داریم:

$-1 - \frac{1}{-1} = -1 + 1 = 0 \not\leq -2$

نقیض: $\exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$

ت) $\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y-3}{5} = 0$

درست است زیرا برای $y = 3$ عبارت برابر صفر می‌شود.

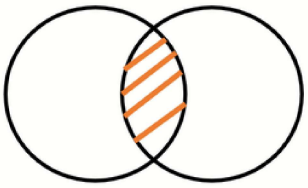
نقیض: $\forall y \in \mathbb{R}; \frac{y-3}{5} \neq 0$

یادآوری:

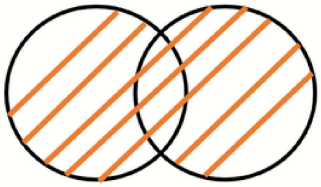
مجموعه

عضویت	$x \in A$
دو مجموعه مساوی	$A=B$
مجموعه تهی	$\varnothing$
زیر مجموعه	$A \subseteq B$
مجموعه مرجع	U

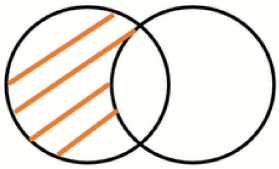
نمودار وِن اعمال روی مجموعه ها :



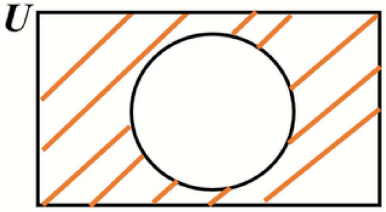
$A \cap B$



$A \cup B$



$A - B$



A'

اعمال روی مجموعه ها

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

مثال :

فرض کنید $A=\{a,b\}$ ، درستی یا نادرستی هریک از گزاره های زیر را تعیین کنید.

$\{a\}\in A$ نادرست

$\varnothing\in A$ نادرست

$\{a\}\subseteq A$ درست

$b\subseteq A$ نادرست

مثال :

فرض کنید $A=\{1,2,3,...,8,9\}$، $B=\{2,4,6,8\}$ ، $C=\{1,3,5,7,9\}$، $E=\{3,5\}$

و $D=\{3,4,5\}$ در هریک از حالات زیر مشخص کنید X می تواند کدامیک از این مجموعه ها باشد؟

الف) X و Bعضو مشترکی ندارند. $X=C$ یا $X=E$

ب) $X\subseteq D$ ولی $X\not\subset B$ $X=D$ یا $X=E$

مثال :

کدامیک از مجموعه های زیر با هم مساوی اند؟

$A=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,|m|<2\}=\{-1,0,1\}$

$B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x^3=x\}=\{-1,0,1\}$ $A=B=D$

$C=\{y\in\mathbb{Z}\,|\,y^2\le 2y\}=\{0,1,2\}$ $C=E$

$D=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m^2\le 1\}=\{-1,0,1\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m^3+2m=3m^2\}=\{0,1,2\}$

مثال :

اگر $A=\{۲, x+۲y, ۴\}$ و $B=\{۴,۵, x-y\}$ و $A=B$ در اینصورت مقادیر x, y را بیابید.

$$\begin{cases} x-y=۲ \\ -\left(x+۲y=۵ \right) \end{cases}$$

$$-۳y=-۳ \Rightarrow y=۱ \quad , \quad x+۲=۵ \Rightarrow x=۳$$

تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه :

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر ۲^n است.

اثبات :

می دانیم تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با : $\binom{n}{r}$

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\ldots+\binom{n}{n}=۲^n$$

مثال :

برای مجموعه $A=\{a,\{a\},\varnothing\}$ همه زیر مجموعه ها را بنویسید.

$A_۱=\{a\}$ $\quad A_۲=\{\{a\}\}$ $\quad A_۳=\{\varnothing\}$ $\quad A_۴=\{a,\{a\}\}$ $\quad A_۵=\{a,\varnothing\}$ $\quad A_۶=\{\{a\},\varnothing\}$ $\quad A_۷=A$ $\quad A_۸=\varnothing$

مثال :

اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود، مجموعه A چند زیر مجموعه دارد؟

$$۲^{n-۲}=۲^n-۳۸۴ \Rightarrow ۲^n \times ۲^{-۲}=۲^n-۳۸۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}۲^n-۲^n=-۳۸۴ \Rightarrow -\frac{۳}{۴}۲^n=-۳۸۴$$

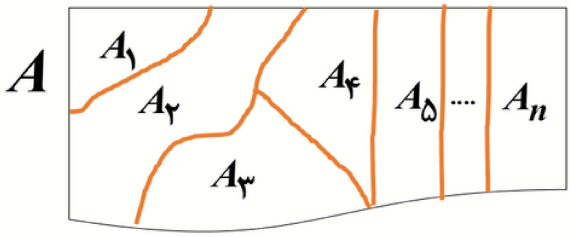
$$\Rightarrow ۲^n=۳۸۴\times\frac{۴}{۳}=۵۱۲ \Rightarrow ۲^n=۲^۹ \Rightarrow n=۹$$

افراز یک مجموعه :

زیر مجموعه هایی از A که دارای ویژگی های زیر باشند :

افراز

مخالف تهی | **دو به دو مجزا** | **اجتماع آنها A**



۱) $\forall i : 1 \le i \le n;\ \ A_i \neq \varnothing$

۲) $\forall i, j\,(i \neq j);\ \ A_i \cap A_j = \varnothing$

۳) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

مثال :

برای مجموعه $A = \{1,2,3,...,9\}$ سه افراز سه عضوی بنویسید.

۱) $\{1,3\}$ و $\{5,7,9\}$ و $\{2,4,6\}$ و $\{8\}$

۲) $\{1,2,3\}$ و $\{4,5,6\}$ و $\{7,8,9\}$

۳) $\{1,2,3,4\}$ و $\{5,6,7\}$ و $\{8,9\}$

تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x;\left(x \in A \Rightarrow x \in B\right)$$

با استفاده از هم ارزی $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x;\left(x \in A \wedge x \notin B\right)$$

روش عضوگیری برای اثبات ویژگی ها در مجموعه ها:

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A \subseteq B$ کافی است عضو دلخواهی مانند x از مجموعه A در نظر بگیریم، سپس با استفاده از فرض های داده شده نشان دهیم که x در B هم وجود دارد.

مثال۱:

ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \subseteq C$.

باید ثابت کنیم $\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in C)$

$$\forall x;\ x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \xrightarrow{B \subseteq C} x \in C$$

مثال۲:

ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ آنگاه $B' \subseteq A'$.

باید ثابت کنیم $\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$

$$\forall x; (x \in B' \rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \rightarrow x \in A')$$

مثال۳:

ثابت کنید برای مجموعه های A, B, C, D با مجموعه مرجع U : اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$

آنگاه : $A \cap C \subseteq B \cup D$

$$\forall x; (x \in A \cap C \rightarrow x \in A \wedge x \in C \xrightarrow{A \subseteq B, C \subseteq D} x \in B \wedge x \in D$$

$$\rightarrow x \in B \vee x \in D \rightarrow x \in B \cup D)$$

توجه کنید از درستی $P \wedge q$ می‌توان درستی $P \vee q$ را نتیجه گرفت.

مثال۴:

ثابت کنید برای مجموعه های A و BوCبا مجموعه مرجع U اگر $A \subseteq B$ آنگاه :

$$A \cap C \subseteq B \cap C$$

$\forall x; (x \in A \cap C \rightarrow x \in A \wedge x \in C \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \wedge x \in C$

$\rightarrow x \in B \cap C)$

نکته:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

مثال۵:

ثابت کنید برای مجموعه های A و B با مجموعه مرجع U اگر $A \cap B = \varnothing$ آنگاه

$$B - A = B$$

ابتدا ثابت می کنیم $B-A \subseteq B$.

$\forall x; (x \in B-A \rightarrow x \in B \wedge x \notin A \rightarrow x \in B) \Rightarrow B-A \subseteq B$

حال ثابت می کنیم $B \subseteq B-A$.

$\forall x; (x \in B \xrightarrow{A \cap B = \varnothing} x \in B \wedge x \notin A \rightarrow x \in B-A) \Rightarrow B \subseteq B-A$

قوانین جبر مجموعه‌ها :

۱) اجتماع و اشتراک هر مجموعه با خودش : $A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A$

۲) خاصیت جابه‌جایی در اشتراک و اجتماع : $A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A$

۳) خاصیت شرکت‌پذیری : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad , \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

۴) خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad , \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

۵) اجتماع و اشتراک با مجموعه‌ی تهی و کل : $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \quad , \quad A \cap \mathcal{U} = A \quad ; \quad A \cup \phi = A \quad , \quad A \cap \phi = \phi$

۶) متمم، متمم یک مجموعه : $(A')' = A$

۷) اجتماع و اشتراک هر مجموعه با متمم خودش : $A \cap A' = \phi \quad , \quad A \cup A' = \mathcal{U}$

۸) تبدیل تفاضلی به اشتراک : $A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$

۹) قوانین دمورگن : $(A \cup B)' = A' \cap B' \quad , \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

۱۰) قانون جذب : $A \cap (A \cup B) = A \quad , \quad A \cup (A \cap B) = A$

اثبات ۲ : $A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \vee x \in B\} \overset{\text{جابه‌جایی } \vee}{=} \{x \in \mathcal{U} \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$

اثبات ۳ : $A \cap (B \cap C) = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \wedge x \in (B \cap C)\} = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)\}$

$= \{x \in \mathcal{U} \mid (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\} = (A \cap B) \cap C$ ← شرکت‌پذیری $\wedge$

اثبات ۴ : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

به روش عضوی : $\forall x ; \ x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ← توزیع‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$

$\Rightarrow A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

به همین ترتیب ثابت می‌شود : $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

اثبات ۸ :

$$A-B=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\notin B\}=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\in B'\}=A\cap B'$$

اثبات ۹:

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

بررسی عضو گیری :

$$\forall x;\ x\in(A\cup B)' \Rightarrow x\notin(A\cup B) \Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B \Rightarrow x\in A' \wedge x\in B'$$

$$\Rightarrow x\in A'\cap B' \Rightarrow (A\cup B)'\subseteq A'\cap B'$$

تمام روابط بالا برگشت پذیرند پس $A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'$.

قضیه: الف) $A\subseteq B \iff A\cup B=B$

ب) $A\subseteq B \iff A\cap B=A$

اثبات الف :

ابتدا فرض می کنیم $A\subseteq B$ است پس ثابت می کنیم $A\cup B=B$. رابطه $B\subseteq A\cup B$ طبق تعریف اجتماع بدیهی است.

کافی است ثابت کنیم : $A\cup B\subseteq B$.

$$\begin{cases} B\subseteq B \\ A\subseteq B \end{cases} \overset{\cup}{\Rightarrow} (A\cup B)\subseteq(B\cup B) \Rightarrow A\cup B\subseteq B$$

حال فرض می کنیم $A\cup B=B$ است و ثابت می کنیم $A\subseteq B$.

$A\subseteq(A\cup B) \xrightarrow{A\cup B=B} A\subseteq B$ طبق تعریف اجتماع

ب) را بعنوان تمرین ثابت کنید.

اثبات ۱۰ :

$A\cap(A\cup B)=A$ کافیست ثابت کنیم

چپ : $(A\cup\phi)\cap(A\cup B) \overset{\cup}{=} A\cup(\phi\cap B)=A\cup\phi=A$

تمرین : با استفاده از قضیه بالا ، اثبات دیگری برای قوانین جذب بیاورید.

نکته: از قوانین بالا در اثبات روابط جبری و ساده سازی عبارت ها، در مجموعه ها استفاده می شود.

مثال: درستی هر یک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

۱) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$

سمت چپ: خاصیت جذب $\Rightarrow A\cap(B\cup B')=A\cap U=A$

۲) $(A'\cap B')\cap A=\varnothing$

سمت چپ: خاصیت شرکت پذیری $\Rightarrow (B'\cap A')\cap A=$

خاصیت جذب $\Rightarrow B'\cap(A'\cap A)=B'\cap\varnothing=\varnothing$

۳) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

سمت راست: خاصیت شرکت پذیری $\Rightarrow [(A\cap B)\cap A]\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

۴) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

سمت چپ: $(A\cap B')\cup(A\cap B)\overset{\text{خاصیت توزیع پذیری}}{=} A\cap(B'\cup B)=A\cap U=A$

۵) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

سمت راست: $(A\cap C')\cap(B\cap C')=[(A\cap C')\cap C']\cap B \overset{A\cap C'\subseteq C'}{=} (A\cap C')\cap B=A\cap(C'\cap B)$

$=A\cap(B\cap C')=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$

۶) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

(تمرین)

سمت راست: $(A\cup B)\cap(A\cap B)'=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']$

$=[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(B\cap A')]\cup[(A\cap B')\cup\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing}]=(B\cap A')\cup(A\cap B')$

$=(A\cap B')\cup(B\cap A')=(A-B)\cup(B-A)$

۷) $(A-B)'=(A'\cup B)$ (درست)

سمت چپ : $(A\cap B')' = A'\cup B$

۸) $(A-B)-C=(A-C)-B$

سمت چپ : $(A\cap B')\cap C' = A\cap(B'\cap C') = A\cap(C'\cap B') = (A\cap C')\cap B' = (A-C)-B$

شرکت‌پذیری — جابه‌جایی — شرکت‌پذیری

۹) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\varnothing$

سمت چپ : (نادرست) : $(A\cup B)\cap(A\cup B)' = X\cap X' = \phi$

مثال: هرکدام از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۱۰) $(A'\cap B)\cup([(B\cap A)-B']\cap(B\cup A))$

$= (A'\cap B)\cup(\underbrace{(B\cap A)\cap B'}_{(A\cap B)\cap B' = A\cap(B\cap B')=\phi}\cap(B\cup A)) = (A'\cap B)\cup(\underbrace{\phi}_{\phi}\cap(B\cup A)) = A'\cap B$

$= B\cap A' = B-A$

۱۱) $(A\cup B)-B = (A\cup B)\cap B' = (A\cap B')\cup\underbrace{(B'\cap B)}_{\phi} = (A\cap B')\cup\phi = A\cap B' = A-B$

۱۲) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B) = \Big[(A\cup B)\cap A'\Big]\cup(A\cap B) = \Big[\underbrace{(A'\cap A)}_{\phi}\cup(A'\cap B)\Big]\cup(A\cap B)$

$= (A'\cap B)\cup(A\cap B) = B\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{U} = B$

ضرب دکارتی دو مجموعه :

اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، ضرب دکارتی دو مجموعه به صورت زیر تعریف می‌شود :

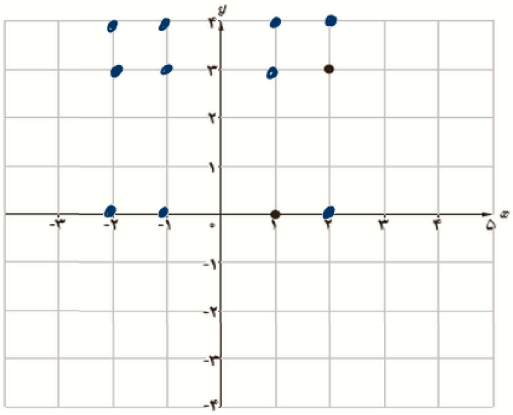
$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge x\in B\}$$

مثال:

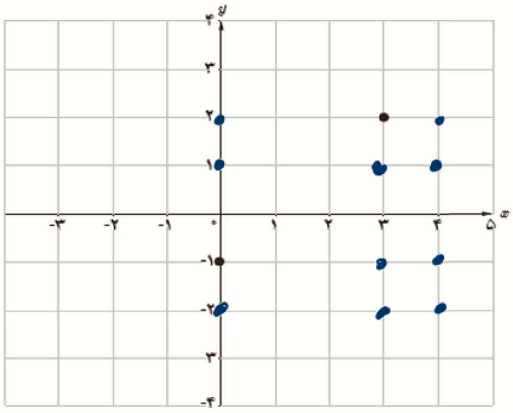
۱ اگر $A=\{-۲,-۱,۱\}$ و $B=\{۰,۳,۴\}$، ابتدا مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را تشکیل دهید و سپس نمودار مختصاتی هر یک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$A\times B=\{(1,0),(1,3),(1,4),(-1,0),(-1,3),(-1,4),(-2,0),(-2,3),(-2,4)\}$

$B\times A=\{(0,1),(0,-1),(0,-2),(3,1),(3,-1),(3,-2),(4,1),(4,-1),(4,-2)\}$



نمودار مختصاتی $A\times B$

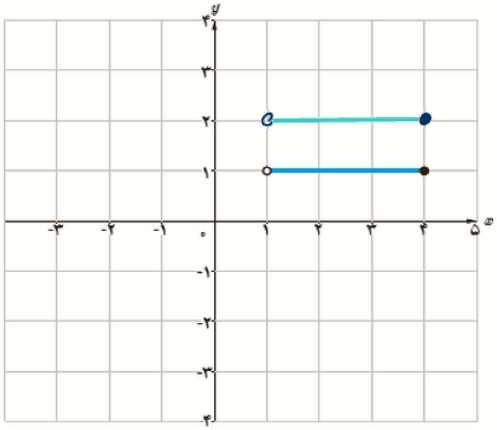


نمودار مختصاتی $B\times A$

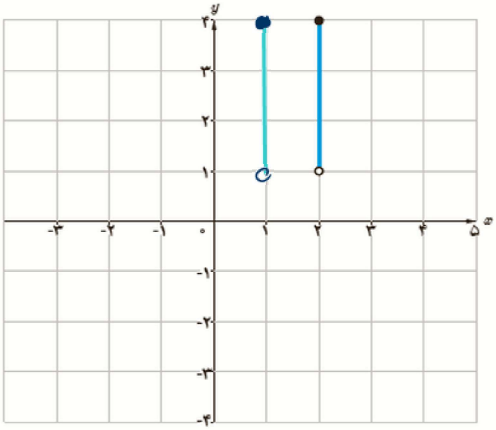
۲ اگر فرض کنیم : $A=(۱,۴]$ و $B=\{۱,۲\}$ در این صورت، نمودارهای مربوط به $A\times B$ و $B\times A$ که بخشی از آنها رسم شده است را تکمیل کنید.

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in(۱,۴]\wedge y\in B\}$$

$$B\times A=\{(x,y)\mid (x=۱\vee x=۲)\wedge ۱<y\leq ۴\}$$



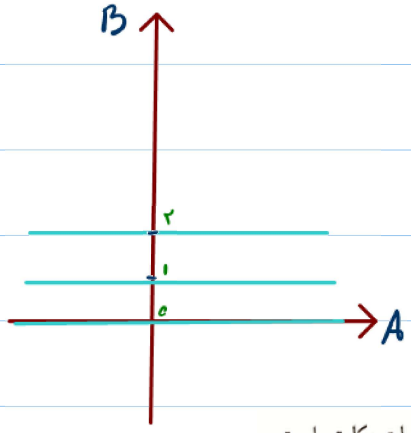
نمودار $A\times B$



نمودار $B\times A$

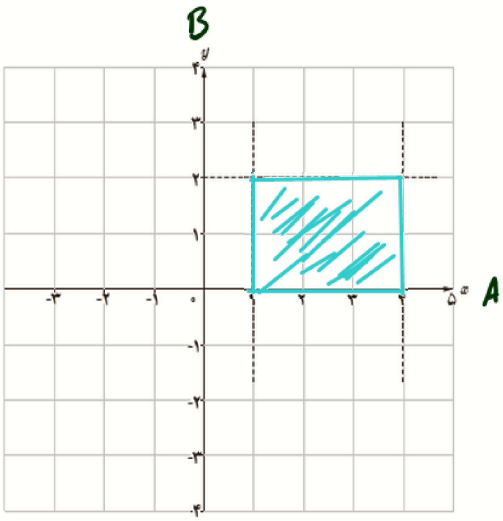
نکته: اگر $n(A)=m$ و $n(B)=k$ آنگاه $n(A\times B)=m\times k$ (طبق اصل ضرب).

۳ اگر فرض کنیم : $A=\mathbb{R}$ و $B=\{0,1,2\}$ نمودار $A\times B$ را رسم کنید.



۴ در صورتی که $A=[1,4]$ و $B=[0,2]$ در این صورت، نمودار $(A\times B)$ را که بخشی از صفحهٔ مختصات دکارتی است، هاشور بزنید.

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 4\wedge 0\le y\le 2\}$$



قضیه : اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، در این صورت :

الف) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

ب) $A\times B=B\times A\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می‌کنیم :

فرض کنیم : $A\times\varnothing\neq\varnothing$ (فرض خلف) در این صورت، حداقل یک عضو مانند (x,y) در ... $A\times\phi$ ... باید وجود داشته باشد که در این صورت :

$$(x,y)\in A\times\varnothing \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in A\wedge \underbrace{y\in\varnothing}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y\in\varnothing$ یک تناقض است (مجموعهٔ $\varnothing$ فاقد عضو است) پس فرض خلف، باطل شده است و حکم برقرار می‌باشد، به طریق مشابه ثابت کنید که $\varnothing\times A=\varnothing$.

اثبات ب) اگر $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ که حکم اثبات می‌شود.

حال فرض کنیم : $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ که در این صورت، به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرضِ $A\times B=B\times A$، ثابت می کنیم $A=B$.

$$\forall x\in A\ ,\ \forall y\in B \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} (x,y)\in A\times B$$

$$\xrightarrow{A\times B=B\times A} (x,y)\in B\times A \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in B\wedge y\in A \Rightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$$

$$\Rightarrow A=B$$

(xای که از A فرض کردیم ثابت شد در B است و yای که از B فرض کردیم ثابت شد در A است.)